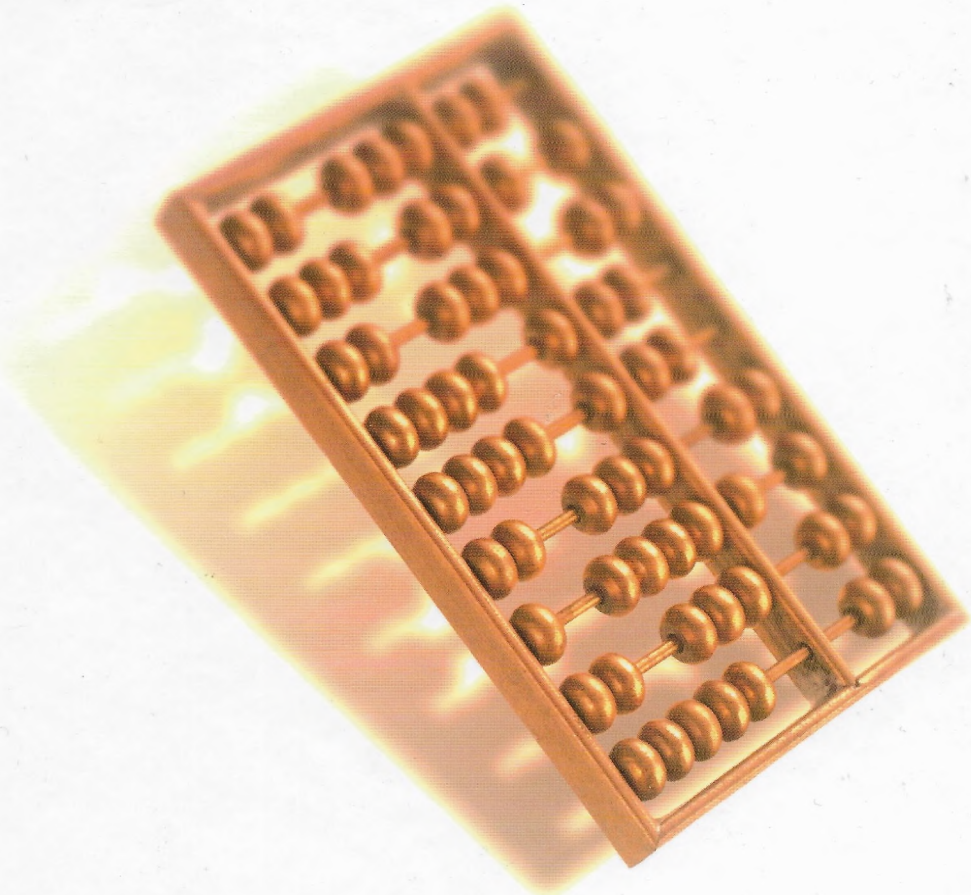
Del ábaco a la revolución digital

Algoritmos y computación

Vicenç Torra



El mundo es matemático

Del ábaco a la revolución digital

Algoritmos y computación

A lo largo de su evolución, las herramientas de cálculo siempre fueron resultado de la tecnología disponible en cada momento y de las formas de numeración de cada cultura. De las cuentas prehistóricas al ábaco romano, y de los algoritmos árabes a las primeras calculadoras, la historia del cálculo lo es en buena parte también de los sistemas de numeración. Al final de esta línea de evolución, se encuentran los ordenadores y la informática, que se desarrollaron con el mismo objetivo: como herramientas cada vez más potentes para realizar cálculos cada vez más complejos.

Del ábaco a la revolución digital

Algoritmos y computación

Vicenç Torra

El mundo es matemático

© 2010, Vicenç Torra por el texto
© 2010, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Créditos fotográficos: age fotostock

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6964-5
Depósito legal: B-27319-2010

Impreso por Printer Industria Gráfica Newco, S.L.

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. Los primeros siglos de la computación: la numeración posicional 9
Los orígenes de la numeración 9
El cálculo en Babilonia 14
El cálculo en Egipto 22
Grecia 29
Los griegos y el número π 34
Los griegos y los números primos 35
Roma 37
Las matemáticas en Alejandría 40
China 41
La numeración y el sistema de cálculo en China 43
El número π en China 46
Las matemáticas indias y árabes: la numeración posicional 51
El cálculo del número π en la India 54

Capítulo 2. La Europa medieval 57
Boecio y la ritmomaquia 57
Ramon Llull 62
La introducción de los números arábigos 64
La expansión de los números arábigos 66
Las fracciones y los decimales 73
El número π 74

Capítulo 3. Los primeros instrumentos mecánicos de cálculo 77
El siglo XVII 77
Las primeras calculadoras 82
Nuevas expresiones para calcular el número π 88
El siglo XVIII 89
El cálculo del número π en el siglo XVIII 89
La lógica 91

El siglo XIX: algunos elementos de cálculo 92
Charles Babbage 94
La lógica y George Boole 101
El número π en el siglo XIX 102

Capítulo 4. El hardware en el siglo XX 105
La serie Z de Konrad Zuse 105
La máquina de Turing y el Colossus 108
La arquitectura Von Neumann 113
Los primeros ordenadores en Estados Unidos 115
El número π en el siglo XX 119

Capítulo 5. La programación y el software 125
El paradigma funcional 134
El paradigma lógico 139
Descripción formal de los lenguajes de programación 141

Bibliografía 145

Índice analítico 147

Prefacio

Un algoritmo es un método de automatización del cálculo que, a partir de unos datos iniciales, permite alcanzar con certeza un resultado mediante una serie de reglas en un orden determinado y en un número finito de pasos. Por lo tanto, con un algoritmo no se resuelve un único problema, sino una serie de problemas de la misma clase, es decir, que están gobernados por las mismas prescripciones, sean cuales sean los datos iniciales. Una fórmula, en su sentido más común, es un algoritmo. Se trata, pues, de un instrumento matemático, pero ya su propia definición hace entrever la razón por la cual se ha adueñado de las ciencias de la computación.

Los algoritmos son esos pequeños pero poderosos ingenieros matemáticos que trabajan dentro de la mente de los aparatos electrónicos que nos rodean y hacen posible nuestro vibrante mundo digital. De hecho, un programa informático no es más que un algoritmo redactado en un lenguaje que un ordenador puede comprender. Pero el imperio de los algoritmos en la computación sólo es el episodio más reciente en una historia mucho más larga y matemáticamente estimulante que comienza con el propio nacimiento del cálculo.

La relación entre el cálculo y la tecnología viene de antiguo. A lo largo de su evolución, las herramientas de cálculo siempre fueron el resultado de la tecnología disponible en cada momento y de las formas de numeración de cada cultura. Los métodos egipcios de cálculo y las herramientas romanas de cálculo, como el ábaco, estaban muy determinados por las formas de numeración propias de cada imperio. La relación de influencia fue recíproca y, en el caso de la notación romana, el uso del ábaco como método de cálculo ayudó a su perdurabilidad a lo largo de la Edad Media. De igual manera sucedió con el empleo del papel para el cálculo, que fomentó el uso de los números arábigos. Al final de esta línea de evolución se encuentran los ordenadores y la informática, que se desarrollaron con el mismo objetivo: erigirse en herramientas cada vez más potentes para realizar cálculos cada vez más complejos.

El número π ofrece un ejemplo paradigmático en la evolución del cálculo y su relación con la tecnología. Desde los orígenes de las matemáticas, en Mesopotamia y en Egipto, se ha intentado calcular el número π con los instrumentos al alcance de los investigadores de cada momento. Los resultados son asombrosos: ya Arquímedes, en el siglo III a.C., dio una aproximación con un error increíblemente mínimo de 0,002. El desarrollo de la informática ha viajado en paralelo a la búsqueda de más y más decimales de π: en la actualidad se han logrado hallar millones de sus decima-

les y se han desarrollado herramientas muy precisas para calcular un dígito en una posición arbitraria.

Este libro narra la historia de los algoritmos y la computación, y también describe los aspectos más relevantes del cálculo y de sus herramientas, desde los huesos con cuentas prehistóricos hasta los ordenadores que dominan nuestro mundo. Se trata de una historia fascinante pero también reveladora, pues se centra en el material del que está hecho nuestro presente y se pregunta sobre cómo y por qué se ha conformado tal y como es.

Capítulo 1

Los primeros siglos de la computación: la numeración posicional

Calcular y computar son sinónimos, aunque por influencia del inglés –idioma que prevalece en el ámbito de la tecnología– el uso de la palabra «computación» ha acabado reducido a su acepción más actual, relacionada con la informática. Sin embargo, el hombre ha ingeniado métodos de computación, es decir, de cálculo, desde hace milenios.

El proceso comenzó lentamente, con un paso previo: el desarrollo de la numeración. Como tantas otras manifestaciones culturales, la numeración y el cálculo aparecieron en lugares distantes, sin conexión, para expandirse después con fuerza en una red de influencia mutua. Su historia recorre Mesopotamia, Egipto, Grecia, Roma, la India y otros territorios con sus propios tipos de cómputos, y se prolonga hasta la aparición de la numeración posicional, esto es, la numeración arábiga, que supuso un auténtico giro copernicano.

Los orígenes de la numeración

La numeración es antigua, pero no es universal ni uniforme; no todos los pueblos la han desarrollado del mismo modo y hay tribus –como los pirahã del Amazonas– que carecen de ella. Las pruebas más remotas del empleo de los números son los huesos con marcas hallados en excavaciones arqueológicas. El más antiguo descubierto hasta la fecha posee 35.000 años de antigüedad; se trata de un hueso de papio (primate popularmente conocido como babuino) encontrado en la cordillera de Lebombo, en Suazilandia (África), en el curso de una excavación realizada en 1973. Contiene 29 marcas y se cree que debía de utilizarse como contador de las fases lunares, aunque quizá se usara también para seguir el ciclo menstrual. Su aspecto es parecido al de los bastones que aún hoy en día utilizan los bosquimanos de Namibia. Otro hallazgo destacado es un hueso de lobo descubierto en 1937 en Vestonice, en la región checa

de Moravia, que posee 55 marcas agrupadas de 5 en 5 y una marca adicional después de la marca 25; pertenece a la cultura auriñaciense y tiene unos 30.000 años de antigüedad. En sus proximidades se halló también la cabeza de una Venus de marfil. El siguiente ejemplar destacado es más «reciente»; se trata del llamado «hueso de Ishango», que fue hallado en el Congo en 1960 y tiene unos 20.000 años de antigüedad.

El hueso de Ishango, una de las primeras pruebas arqueológicas del uso de los números, se conserva en el Real Instituto Belga de Ciencias Naturales.

Existen dos teorías sobre el origen de la numeración, que además están relacionadas con la cuestión de qué números aparecieron primero, los cardinales (1, 2, 3...) o los ordinales (primero, segundo, tercero...). La teoría que genera más consenso defiende el argumento de la necesidad. Todo habría comenzado a causa de la necesidad de contar objetos; por ello se habrían creado primero los números cardinales y después, los ordinales.

La otra teoría defiende la base espiritual de los números, que habrían tenido un uso ritual: cierto tipo de ceremonias requerían que los participantes se desplazaran o se situaran en un orden ritual preestablecido; por eso los números ordinales serían anteriores a los cardinales. Esta última teoría postula que los números se originaron en un lugar geográfico determinado, desde el que se propagaron al resto del mundo; también establece la división de los enteros en pares e impares, considerando los impares masculinos y los pares, femeninos, una clasificación que comparten hoy en día muchas culturas del planeta.

El uso de los diez dígitos, y su correspondiente base 10, parece tan lógica y natural a la mentalidad occidental contemporánea que resulta difícil aceptar que no es universal, pero la evidencia es innegable. Los estudios realizados con varios centenares de tribus de indios americanos, por ejemplo, han demostrado que éstos usaban bases

LOS PIRAHÃ

Un guión de novela: en la década de 1970 el misionero estadounidense Dan Everett, en la actualidad uno de los lingüistas más destacados, llegó al Amazonas para aprender la extraña lengua de la tribu de los pirahã, al tiempo que intentaba llevar a cabo su labor evangelizadora. Al parecer, Everett, después de siete años de convivencia en la tribu, acabó él mismo perdiendo la fe. Se trata de un pueblo sumamente peculiar: su lengua, conocida también como piranhã, carece de subordinación, al contrario que todas las lenguas conocidas; además, consta tan sólo de diez fonemas. Por otro lado, los piranhã no poseen mitos ni memoria colectiva, y sólo hacen referencia a eventos que han presenciado ellos mismos o alguna persona conocida, y tampoco piensan en el futuro si no es inmediato. Pero acaso lo más sorprendente es que los estudios de Everett, corroborados por psicólogos, demuestran que los pirahã no tienen ninguna clase de numeración ni de cálculo. Por ejemplo, no distinguen entre el singular y el plural, y vagamente entre objetos contables e incontables. De hecho, su sistema de cálculo es aproximado. Dan Everett recogió sus experiencias con la tribu de los pirahã en el libro *Don't Sleep, There Are Snakes: Life and Language in the Amazonian Jungle*, publicado en el año 2008.

de numeración muy dispares (aunque prevalecían algunas). Ciertamente, casi un tercio de las tribus utilizaban el sistema decimal, pero las tribus que empleaban un sistema quinario –de base cinco–, o en algunos casos quinario-decimal, alcanzaban la misma proporción. El tercio restante se lo repartían sobre todo el sistema binario, usado por algo más del 20% de tribus; el sistema vigesimal, el 10%, y un sistema con base ternaria, el 1%.

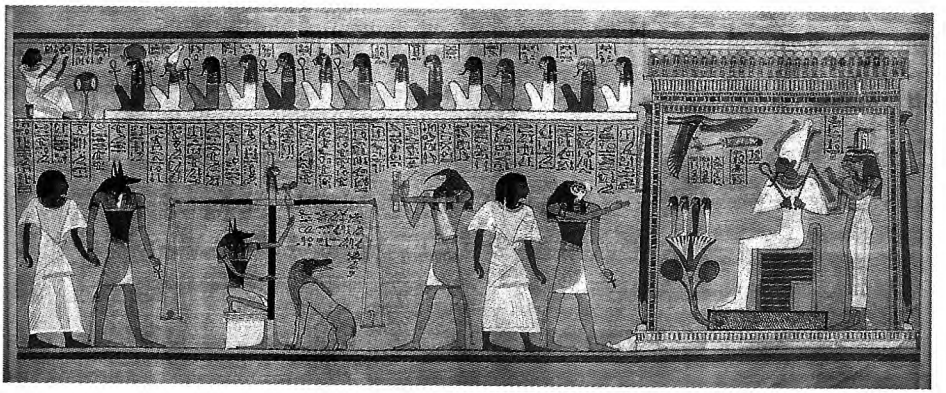
Por otra parte, para demostrar esta cuestión tampoco es necesario recurrir a tribus de culturas lejanas. En la familia de las lenguas indoeuropeas la palabra que significa «ocho» deriva de la palabra que significa «cuatro», y la palabra latina *novem*, que corresponde a nueve, parece derivar de *novus*, «nuevo», lo que sugiere la utilización de sistemas de numeración con base 4 y 8. Igualmente, hay restos de un sistema de numeración vigesimal en las palabras en euskera *hogei*, *berrogei*, *hirurogei* y *laurogei* (que significan 20, 40, 60 y 80, o más literalmente, $20, 2 \cdot 20, 3 \cdot 20, 4 \cdot 20$), y también en la forma francesa de decir «ochenta»: *quatre-vingt*.De forma similar, aunque corroborando el uso del sistema decimal, la numeración inglesa cuenta con vestigios de los conceptos antiguos: *eleven* («once») y *twelve* («doce») proceden respectivamente de *one left*, «uno que queda», y *two left*, «dos que quedan» (en el sentido de que «quedan» después de diez).

EL ORIGEN DE LAS MATEMÁTICAS

La discusión sobre el origen de las matemáticas es tan vieja como esta misma ciencia. Herodoto y Aristóteles reflexionaron largamente sobre este punto. El primero consideraba que la geometría había aparecido en Egipto para restablecer la división de los campos tras las inundaciones anuales del Nilo; se debía, por lo tanto, a una necesidad práctica. El segundo, en cambio, defendía que había que agradecer su aparición a los sacerdotes, o más acertadamente, al fabuloso tiempo libre del que disponían. Así, en su opinión, las matemáticas se habían originado como una actividad intelectual desinteresada.

Las crecidas anuales del río Nilo (en la fotografía, a su paso por Luxor) y la necesidad de restablecer los límites entre los campos anegados estarían en el origen de las matemáticas según el historiador griego del siglo v a.C. Herodoto.

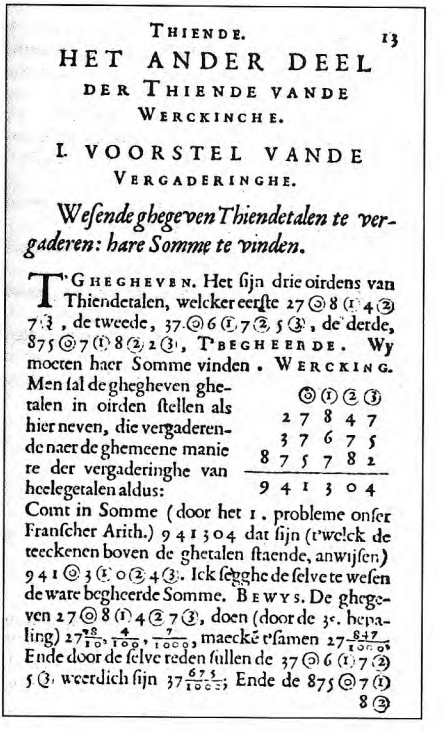
Aunque parezca que los grandes números son muy modernos y que en los textos o registros que nos han llegado de la antigüedad sólo se representan números pequeños, no es así en absoluto. En la Universidad de Oxford se conserva una pieza egipcia de unos 5.000 años de antigüedad que registra la victoria del rey Narmer sobre los libaneses al oeste del delta del Nilo; en ella se describe que Egipto se cobró 120.000 prisioneros, 400.000 bueyes y 1.422.000 cabras. Los centenares de miles y los millones también se hallan mencionados en el egipcio *Libro de los muertos*.



Papiro perteneciente al Libro de los muertos, *texto funerario egipcio que incluye referencias a grandes números.*

Si bien la mayor parte de las culturas conocían la numeración (aunque existiera una heterogeneidad de bases), no sucedía lo mismo con las fracciones, que eran desconocidas por muchas de ellas. Los egipcios consideraban únicamente fracciones de la forma $1/n$, y los babilonios, aunque disponían de herramientas más parecidas a las que conocemos hoy en día, usaban una notación en sistema sexagesimal (base 60). La notación decimal que se emplea actualmente en las fracciones es un invento moderno. En el siglo XVI el matemático Simon Stevin publicó un breve tratado en el que defendía su uso.

El cálculo y sus herramientas se han desarrollado a lo largo de la historia de forma paralela a la tecnología disponible y a la numeración utilizada en cada momento. El papiro tuvo una influencia directa en la numeración y el cálculo de los egipcios, que se desarrollaron de manera que pudieran practicarse con facilidad en aquel soporte.



THIENDE. 13

HET ANDER DEEL
DER THIENDE VANDE
WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE
VERGADERINGHE.

Weſende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het ſijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerſte 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men ſal de ghegheven ghetalen in oirden ſtellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene manire der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

⓪	①	②	③
	2	7	8 4 7
	3	7	6 7 5
8	7	5	7 8 2
9	4	1	3 0 4

Comt in Somme (door het 1. probleme onſer Franſcher Arith.) 9 4 1 3 0 4 dat ſijn (twelck de teeckenen boven de ghetalen ſtaende, anwijſen) 9 4 1 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick ſeggh de ſelve te weſen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegeven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckē t'ſamen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de ſelve reden ſullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich ſijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ②

Página perteneciente a la obra de Simon Stevin De Thiende, *publicada en 1585, en la que el matemático belga proponía una nueva notación para describir los números decimales.*

La numeración romana, en cambio, presentaba un manejo muy incómodo sobre papiro, por lo que se apoyó en herramientas como el cálculo y el ábaco.

El cálculo en Babilonia

La región que reúne los valles del Tigris y del Éufrates, en el actual Irak, era conocida por los griegos con el nombre de Mesopotamia, palabra que significa literalmente «país entre ríos». La confluencia de los dos cauces fluviales hacía la zona muy fértil y en aquel territorio se desarrollaron algunas de las más antiguas y refinadas civilizaciones de la historia de la humanidad. Aproximadamente en el año 3000 a.C. apareció allí la escritura, ligada a la cultura sumeria. Sus primeras manifestaciones adoptaron forma de pictogramas –representaciones gráficas del objeto denotado–, que después evolucionaron hacia la escritura cuneiforme. El cambio se debió, una vez más, a la influencia de la tecnología: la nueva escritura estaba marcada por los materiales utilizados para realizarla.

Ejemplo de escritura cuneiforme en una tablilla de arcilla sumeria que data del año 2600 a.C. Se trata del contrato de venta de una casa y el campo adyacente.

La escritura cuneiforme se inscribía sobre tablillas de arcilla húmeda; al principio las incisiones eran practicadas con un junco y más tarde, con un estilete acabado en forma de cuña, de ahí su nombre. Esta escritura se ha podido estudiar con detenimiento porque, afortunadamente, muchas tablillas sumerias han llegado en buen

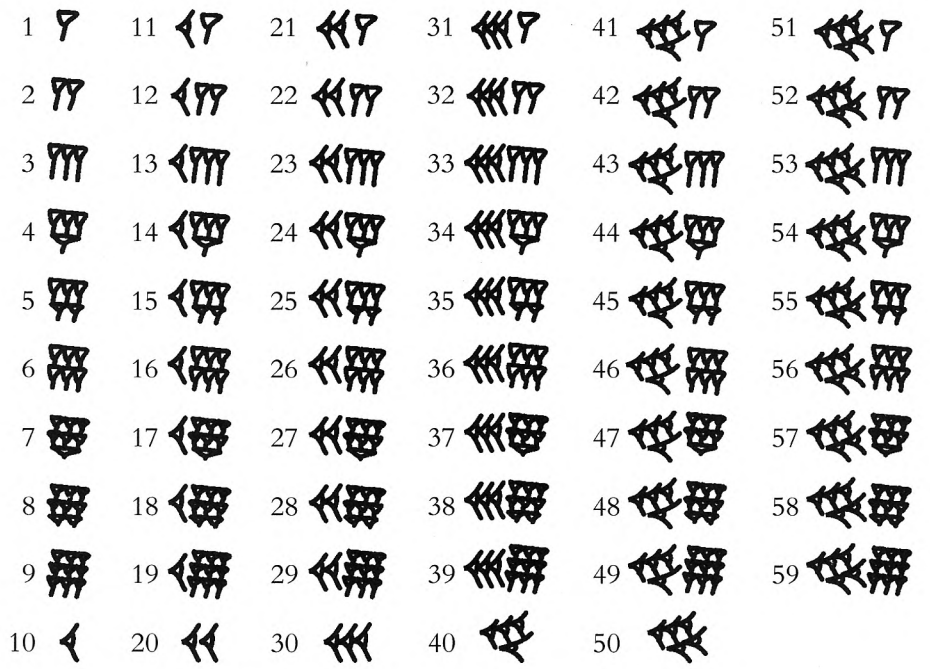
LA CIUDAD DE URUK

Uruk fue una antigua ciudad de Mesopotamia situada a orillas del río Éufrates, a unos 225 kilómetros de la actual Bagdad. En su momento de mayor esplendor, hacia el III milenio a.C., era la mayor ciudad del mundo. La tradición sumeria la señalaba como lugar de nacimiento del héroe Gilgamesh, protagonista de una de las sagas más antiguas de la historia. Uruk está considerada, además, la cuna del cálculo y la contabilidad. Algunos estudiosos defienden que el nombre moderno de Irak proviene del sumerio Uruk, aunque se trata de una teoría muy controvertida.

El centro arqueológico de Uruk, ciudad en la que supuestamente nacieron el cálculo y la contabilidad.

estado hasta nuestros días. De hecho, en la actualidad se conservan unas 400.000 tablillas de arcilla procedentes de Mesopotamia, repartidas en museos de todo el mundo. Unas 400 de ellas contienen cuestiones relacionadas con las matemáticas; las más antiguas proceden de la población de Uruk.

El sistema de numeración y cálculo desarrollado en Mesopotamia tuvo una larga vida, pues trascendió los límites de la cultura sumeria. Aunque los pueblos que llegaban a la región atraídos por su riqueza sojuzgaban políticamente a sus moradores, acababan absorbiendo su cultura, lo que prueba ya de manera suficiente su brillo y su potencia.



Representación cuneiforme de los números babilónicos.

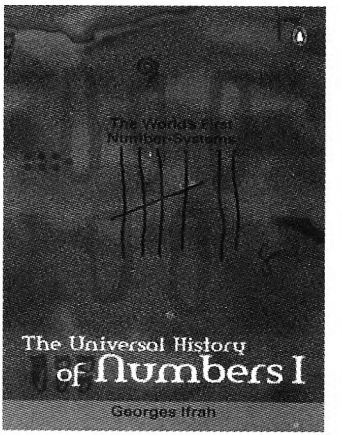
La numeración de Babilonia era sexagesimal, de base 60, es decir, que en ella cada dígito corresponde a un número entre el 0 y el 59. Y también era posicional, lo que significa que una misma figura representa un valor diferente según la posición que ocupa; en el caso del sistema sexagesimal, una potencia de 60. Para ilustrar este concepto, puede considerarse, por ejemplo, el número formado por los tres dígitos sexagesimales 3, 3, 3. En este número, el valor del número 3 depende de la posición. El primer 3 corresponde al valor $3 \cdot 60 \cdot 60$, el segundo 3 corresponde a

$3 \cdot 60$ y el tercero corresponde a 3. Por lo tanto, en base decimal, este número sería $3 \cdot 60 \cdot 60 + 3 \cdot 60 + 3 = 10.983$. Un ejemplo más complejo: si se considera el número 23, 4, 52 se verá que representa $23 \cdot 60 \cdot 60 + 4 \cdot 60 + 52 = 83.092$. Este ejemplo permite corroborar que, cuando se emplea una base dada, los dígitos tienen que ser menores que ella; es decir, que en sistema sexagesimal, los dígitos tienen que ser menores que 60. Finalmente, vale la pena notar que, aunque esta numeración tenía base 60, las agrupaciones básicas empleaban el sistema decimal, esto es, agrupaban los múltiplos de 10.

1	geš (o aš o diš)	10	u	60	geš
2	min	20	niš	120	geš-min
3	eš	30	ušu	180	geš-eš
4	limmu	40	nišmin (o nimin o nin)	240	geš-limmu
5	iá	50	ninnu	300	geš-iá
6	àš	60	geš (o gešta)	360	geš-àš
7	imin			420	geš-imin
8	ussu			480	geš-ussu
9	ilimmu			540	geš-ilimmu
				600	geš-u

Nombre de los números babilónicos.

Hay varias teorías que pretenden explicar el origen de este sistema. Kewitsch, el estudioso de la civilización asiria, publicó en 1904 su demostración de que el sistema sexagesimal era una mezcla de dos sistemas anteriores, uno de base 6 y otro de base 10. Sin embargo, George Ifrah, cuya *Historia universal de las cifras*, mucho más reciente, se considera canónica, cree que la idea de la base 6 no tiene fundamento, pues es un sistema que apenas ha sido usado. Su teoría es que la base 60 se originó como una combinación de la base 12 y la base 5. El uso de ambas bases está documentado y, de hecho, si se repasan los números sumerios del 1 al 10, da la impresión de que el 6, el 7 y el 9 esconden un vestigio de la base 5.



Portada de la versión inglesa de la monumental Historia universal de las cifras, *obra del historiador de las matemáticas George Ifrah.*

La siguiente tabla reproduce el trabajo de Ifrah, y en ella se observa que *iá*, palabra sumeria que significa «cinco», se emplea como base para representar los otros números mediante el recurso de la adición. Así, el 6 sumerio es *iá.geš*, donde *iá* es 5 y *geš* es 1; por lo tanto, en sumerio, 6 se expresaría con la palabra compuesta «cinco. uno», lo que parece sugerir la suma.

1	geš (o aš o diš)	6	àš < iá.geš
2	min	7	imin < iá.min
3	eš	8	ussu
4	limmu	9	ilimmu < iá.limmu
5	iá	10	u

La posicionalidad del sistema babilónico era muy flexible. Una tripleta (a, b, c) podía representar tanto $a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c$ como otra relación con otras tres potencias consecutivas de 60, por ejemplo, $a + b \cdot 60^{-1} + c \cdot 60^{-2}$. Como las potencias negativas permiten representar fracciones, en este último caso, el número (1, 2, 3)

¿COSAS DE LOS ANTIGUOS?

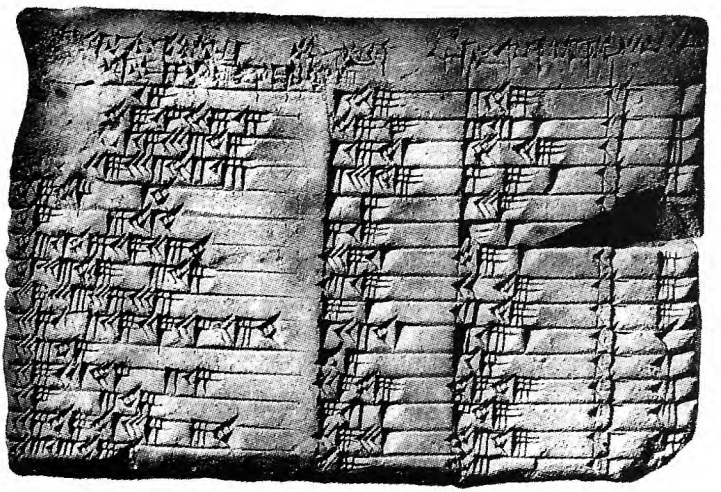
Quizás el lector haya caído ya en la cuenta de que el sistema sexagesimal no quedó muerto y enterrado en las arenas de la antigüedad del Próximo Oriente, sino que está muy presente en nuestra vida cotidiana, pues la empleamos no ya a diario, sino a cada minuto, por decirlo de alguna manera. Nuestra división del tiempo tiene base 60. Fueron los babilonios quienes dividieron el día en 24 horas; la hora, en 60 minutos y el minuto, en 60 segundos. Igual sucede con el sistema para expresar los ángulos, que también establecieron los babilonios y ha pervivido hasta la actualidad.

El reloj astronómico de la ciudad italiana de Brescia.

correspondería a $1 + 2/60 + 3/(60 \cdot 60)$. Por lo tanto, esta notación permitía representar fracciones con mucha precisión. Pero frente a esta cualidad, la representación posicional presenta un problema incómodo: la ausencia de valor también necesita representarse, un asunto peliagudo en una era en la que aún se desconocía el cero. Para denotar un numeral sin valor, los babilonios utilizaban un símbolo establecido. Más tarde, alrededor del año 130 d.C., en Alejandría, Ptolomeo emplearía con ese propósito el ómicron, la decimoquinta letra del alfabeto griego que tiene la misma apariencia que nuestra letra «o».

La numeración babilonia no se deshizo del todo de sus vínculos con la escritura pictográfica que se había utilizado en el pasado, la cual asomaba en el diseño de sus representaciones. Los babilonios disponían de sus propias calculadoras, un sistema arcaico y simple, pero muy efectivo, basado en manipular diferentes objetos que representaban distintas cantidades: un objeto representaba la unidad; otro, la decena; otro, la sesentena... Con estos objetos se podían hacer fácilmente cálculos con un nivel de complejidad aceptable para el desempeño práctico de los babilonios. La cuestión es que, al parecer, la primera notación escrita adoptó la forma de aquellos objetos.

Varios hallazgos corroboran esta teoría. Desde su inicio en 1896, las excavaciones del palacio de Nuzi, a 90 kilómetros del Tigris, muy cerca de la actual ciudad iraquí de Kirkuk, han sacado a la luz 5.000 tablillas cuneiformes de los siglos XV y XIV a.C. y unas 200 anteriores, de los siglos XXIV y XXIII a.C. Entre los restos hallados en el palacio se encontró también un recipiente de barro en forma de bolsa ovoide, dentro



La famosa tablilla Plimpton 322, datada entre los años 1824 y 1784 a.C., muestra una serie de números en cuatro columnas escritos en el sistema sexagesimal.

del cual había una serie de figuras esféricas idénticas. El recipiente presentaba en el exterior una inscripción que listaba cierta cantidad de piezas de ganado: exactamente la cantidad de figuras de arcilla que había en su interior. También en Susa, una ciudad situada en el actual Irán, que está considerada como una de las más antiguas del mundo, se hallaron bolsas de arcilla en cuyo interior había varias discos, conos, bolas y bastoncillos, que pudieron relacionarse con la numeración escrita una vez se descifraron sus valores.

El sistema de cálculo de Babilonia era muy avanzado, como puede comprobarse en la generosa cantidad de tablillas que presentan información matemática. Muchas de ellas contienen tablas. Se han encontrado tablas de multiplicar, de elevación al cuadrado y de elevación al cubo; también se han hallado tablas de recíprocos. En algunas de estas últimas faltan los recíprocos de 7 y 11, entre otros, que en base 60 se representan con infinitos dígitos, mientras que en otras se incluyen aproximaciones superiores e inferiores de estos recíprocos. En algunas tablillas aparecen tablas con raíces cuadradas y potencias de un número. Se cree que las tablas de potencias se utilizaban para calcular la inversa de la exponenciación (los logaritmos), y que, en el caso de no disponer de la inversa de un número determinado, se aproximaba mediante interpolación lineal de los números que sí aparecían en la tabla.

A continuación se reproduce una tabla de multiplicar del 9 inscrita en una tablilla que se encontró en Nippur y que se conserva en la Universidad de Jena. La adaptación a la numeración actual la ha realizado la historiadora de las matemáticas y las ciencias antiguas Christine Proust. Esta tabla presenta particularidades interesantes: por ejemplo, 1, 3, que corresponde a la multiplicación de $9 \cdot 7$, se entiende como $1 \cdot 60 + 3 = 63$; y 7, 30, que corresponde a $9 \cdot 50$, se entiende como $7 \cdot 60 + 30 = 420 + 30 = 450$.

$9 \cdot 1 = 9$
$9 \cdot 2 = 18$
$9 \cdot 3 = 27$
$9 \cdot 4 = 36$
$9 \cdot 5 = 45$
$9 \cdot 6 = 54$
$9 \cdot 7 = 1,3$
$9 \cdot 8 = 1,12$
$9 \cdot 9 = 1,21$
$9 \cdot 10 = 1,30$
$9 \cdot 11 = 1,39$
$9 \cdot 12 = 1,48$
$9 \cdot 13 = 1,57$
$9 \cdot 14 = 2,6$
$9 \cdot 15 = 2,15$
$9 \cdot 16 = 2,24$
$9 \cdot 17 = 2,33$
$9 \cdot 18 = 2,42$
$9 \cdot 19 = 2,51$
$9 \cdot 20 = 3$
$9 \cdot 30 = 4,30$
$9 \cdot 40 = 6$
$9 \cdot 50 = 7,30$

El siguiente ejemplo, adaptado también por Proust, es una tabla de inversos que también fue descubierta en Nippur. En esta tabla 20 se refiere a $20 \cdot 60^{-1} = 20 / 60 = 1/3$.

$1/2 = 30$	$1/10 = 6$	$1/20 = 3$	$1/40 = 1,30$
$1/3 = 20$	$1/12 = 5$	$1/24 = 2,30$	$1/45 = 1,20$
$1/4 = 15$	$1/15 = 4$	$1/25 = 2,24$	$1/48 = 1,15$
$1/5 = 12$	$1/16 = 3,45$	$1/27 = 2,13,20$	$1/50 = 1,12$
$1/6 = 10$	$1/18 = 3,20$	$1/30 = 2$	$1/54 = 1,6,40$
$1/8 = 7,30$		$1/32 = 1,52,30$	
$1/9 = 6,40$		$1/36 = 1,40$	

Para la realización de la raíz cuadrada, los babilonios aplicaban un método algorítmico que es conocido actualmente como el método de la bisección. Este método se ha atribuido a muchos filósofos y matemáticos, como el griego Arquitas o Herón de Alejandría, de hecho se conoce también como «método de Newton»; sin embargo, sabemos que era babilonio.

Dado un número N del cual queremos calcular su raíz cuadrada, se realiza una aproximación a_1 y otra b_1, resultando una mayor que N y la otra, menor. A continuación se calcula $a_2 = (a_1 + b_1)/2$ y se comprueba si su cuadrado es mayor o menor que N. Si es mayor, a_2 sustituirá al antiguo valor en exceso; si es menor, a_2 sustituirá al otro valor. Este proceso se repite hasta encontrar un valor cuyo cuadrado es N, o con una aproximación suficiente.

Los babilonios podían resolver también sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado para problemas con soluciones no complejas. Estos problemas aparecen en textos temporalmente muy cercanos, alrededor del año 2000 a.C. Estos «protomatemáticos» de Babilonia resolvían también algunas ecuaciones de grado 3. Las ecuaciones con la forma $x^3 = a$, y $x^3 + x^2 = c$ se resolvían con tablas, y las que adoptaban la forma más compleja de $ax^3 + bx^2 = c$ se reducían a las primeras.

Del análisis de los textos babilónicos se desprende que para aquellos hombres las matemáticas no era meramente un instrumento práctico, lo que supone una diferencia fundamental respecto a los egipcios, que tenían un concepto mucho más utilitarista de ellas. Por el contrario, los babilonios fueron muy avanzados en el desarrollo de la aritmética y el álgebra, pero no así en el de la geometría, como sí hicieron los egipcios. En esta materia, sus conocimientos eran rudimentarios, limitados a unas pocas figuras, como los triángulos y los cuadriláteros.

ECUACIÓN DE SEGUNDO Y DE TERCER GRADO

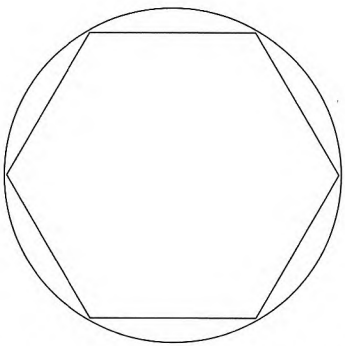
Las ecuaciones de segundo grado, cuya fórmula es $ax^2 + bx + c = 0$, se resuelven habitualmente mediante la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que nos da una solución real cuando el discriminante es positivo, esto es, $b^2 - 4ac$ es mayor o igual a cero.

Para resolver $ax^3 + bx^2 = c$, los babilonios multiplicaban la ecuación por (a^2/b^3), obteniendo $(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$. Esta otra ecuación se podía resolver mediante las tablas de la forma $x^3 + x^2 = c$, pasando después a calcular el valor de x.

Sin embargo, su trabajo con la circunferencia ha llegado hasta el presente. Fueron ellos los que la dividieron en 6 partes a partir del radio, y cada parte en 60, obteniendo así los 360 grados. Los grados, siguiendo el sistema sexagesimal, están divididos en 60 minutos, y éstos, en 60 segundos. Como aproximación del número π utilizaban el valor $\pi = 3$, aunque en una tablilla de Susa se compara la relación entre el perímetro de un hexágono y el de una circunferencia con un resultado que da a π el valor de 3 1/8.



Construcción de un hexágono inscrito en una circunferencia a partir del radio de la misma.

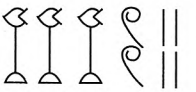
El cálculo en Egipto

La numeración del antiguo Egipto utilizaba un símbolo para cada una de las potencias de diez. Así, existía un símbolo para las unidades, otro para las decenas, otro

para las centenas, etc. A diferencia del sistema babilónico, por lo tanto, el sistema egipcio no era posicional. A continuación se muestran los jeroglíficos con los que se representaban los números más utilizados:

Valor	Representación
1	
10	
100	
1.000	
10.000	
100.000	

El sistema de notación numérica egipcio era aditivo, a diferencia del nuestro, que es posicional, como el babilónico. La notación aditiva de 3.224, por ejemplo, debería construirse como 1.000 + 1.000 + 1.000 + 100 + 100 + 1 + 1 + 1 + 1, que, empleando jeroglíficos egipcios, sería:



Este sistema permitía representar números grandes, además de facilitar las operaciones de suma y resta. Para la suma, si era necesario, se «llevaban» los acarreos hacia las unidades superiores, y en la resta, se «tomaban» de éstos. Las operaciones de multiplicación se reducían a operaciones de suma y resta, lo cual se realizaba de una manera ingeniosa, pero complicada.

Veremos este proceso a través de un ejemplo: la multiplicación de 17 y 53. Se toma el par 1 y 53, y se dobla, lo que da 2 y 106. Si se repite la operación, se conseguirá el par 4 y 212. Deben seguirse doblando los valores hasta que el primero de los dos números pase del multiplicando 17, donde el proceso se detiene, ignorando además este último resultado. Se han obtenido así los siguientes pares:

1	53
2	106
4	212
8	424
16	848

Ahora hay que estudiar cómo se puede obtener 17 mediante la suma de valores que se encuentren en la primera columna. En este caso, la única forma de conseguir 17 es sumando 1 y 16. Entonces se deberán sumar los valores que acompañan al 1 y al 16, es decir, los que están a la derecha, el 53 y el 848. Su suma es 901. He aquí el resultado de la multiplicación: 17 por 53 es 901.

1	53	◀
2	106	
4	212	
8	424	
16	848	
17	901	= Resultado

Puede observarse que en esta forma de operar se está considerando la descomposición de 17 en base 2, y se toman los productos correspondientes con el 53. Así, la descomposición de 17 es $17 = 2^0 + 2^4$, y en la suma se seleccionan los valores $(2^0 + 2^4) \cdot 53$, descartando los otros productos, $2^1 \cdot 53$, $2^2 \cdot 53$ y $2^3 \cdot 53$, porque no forman parte de la descomposición de 17. El procedimiento es similar al cálculo realizado por los ordenadores. El cálculo funciona bien porque la descomposición de un número en potencias de 2 es única; por lo tanto, existe una única selección de valores en el ejemplo que su suma resulte 17. Así, la selección de valores de la columna de la derecha que deben sumarse es también única. Este método de multiplicación es conocido como multiplicación rusa.

La división se calculaba como la operación inversa de la multiplicación. Para ejemplificar el proceso, consideraremos el mismo número: se hará la división de 901 por 17, que deberá dar 53. Es una división que tiene por resultado un número entero, sin decimales.

Se toma el denominador 17 y el valor 1, y, de forma similar al proceso anterior, se duplican ambos valores, lo que da 34 y 2. Se repite la operación, con el resultado

de 68 y 4. Se insistirá en el proceso mientras el primer valor sea menor que el numerador, que en este caso es 901. Cuando el primer valor sobrepase el numerador 901, se desechará el par correspondiente, resultando los pares que se presentan a continuación:

901/17	17	1
	34	2
	68	4
	136	8
	272	16
	544	32

El siguiente par, que hemos ignorado por ser mayor que 901, era 1.088 y 64. A continuación, se debe determinar qué valores de la primera columna nos devuelven 901 mediante una suma. En este ejemplo son los valores 544, 272, 68 y 17 (ya que 544 + 272 + 68 + 17 = 901). La suma de los correspondientes valores en la columna de la derecha arrojará el resultado final. Esto es, 32 + 16 + 4 + 1= 53.

901/17	17	1	◀
	34	2	
	68	4	◀
	136	8	
	272	16	◀
	544	32	◀
	901	53	= Resultado

Como en el caso de la multiplicación, la descomposición de 901 es única. Se ha hecho en términos del número 17 multiplicado por las potencias de 2 que suman 53. Por otro lado, esta división tiene como resultado un número entero, pero cuando tal cosa no era posible y el resultado daba números decimales, el procedimiento egipcio consideraba las fracciones. Sin embargo, el manejo de las fracciones egipcias era más complicado que el actual, pues, con muy pocas excepciones, los egipcios consideraban únicamente fracciones de la forma $1/n$, es decir, fracciones en las que el numerador era igual a 1. Lo curioso es que eso se debía a una limitación causada por la forma de expresarlas: se empleaba un símbolo para denotar la fracción y después los símbolos

correspondientes al número del denominador. No se contemplaba información alguna sobre el numerador, que no podía ser un valor diferente de 1.

Los egipcios empleaban este símbolo para indicar una fracción:

Y le añadían el denominador, en este ejemplo 21:

He aquí la fracción 1/21.

Se ha mencionado que existían algunas fracciones con numerador distinto de 1. Se trataba de la fracción 2/3, que disponía de un símbolo propio, y de la fracción $n/(n + 1)$ que corresponde al inverso de $1 + 1/n$. Esto es, $1/(1 + 1/n) = 1/((n + 1)/n) = n/(n + 1)$.

La importancia de las fracciones y su tratamiento se observa con claridad en el papiro Rhind, también llamado papiro de Ahmes, que comienza describiendo descomposiciones de la fracción $2/n$ en expresiones de la forma $1/x + 1/y + ... + 1/z$ para todos los números impares entre 5 y 101, y después describe expresiones para las fracciones $n/10$ para $n = 2$ hasta 9.

EL PAPIRO RHIND

Este papiro egipcio de 6 metros de largo es famoso por su contenido matemático: 87 problemas de todo tipo con sus soluciones. Está datado entre los años 2000 y 1800 a.C., pero su autor, Ahmes, explica que reproduce conocimientos que tienen más de doscientos años de antigüedad y que los compendia para la formación de futuros escribas. Se trata, por lo tanto, de un primitivo «libro de texto» para enseñar matemáticas. Actualmente se encuentra en el Museo Británico, adonde llegó desde la colección de Henry Rhind en 1858, de ahí su nombre. También contiene el tratamiento de fracciones.

Además de mostrar para la posteridad el funcionamiento de las fracciones egipcias, el papiro Rhind permite hacerse una idea del tipo de problemas que tenía que resolver esta civilización y cómo buscaba soluciones. Los primeros problemas del documento son divisiones de valores entre 10, para los que se utiliza la tabla mencionada de $n/10$. Después, aparecen problemas de aritmética y geometría, pero también problemas que pueden resolverse mediante ecuaciones lineales, escritos con la forma $ax + bx = c$. Algunos de los problemas del papiro incluyen incógnitas al cuadrado cuando se expresan en notación moderna, pero, a pesar de ello, se cree que los egipcios no sabían resolver ecuaciones de segundo grado ni de tercer grado.

La mayoría de los problemas del papiro están resueltos con un procedimiento que se conoce actualmente como el método de la posición falsa, o regla de falsedad. Sólo el problema 30 se resuelve como se haría ahora, factorizando y dividiendo. Para comprender la regla de la posición falsa, tomaremos como ejemplo el problema 24, que hoy en día se solucionaría mediante una ecuación lineal. Su enunciado es como sigue:

> «Determínese el precio de un montón si un montón y una séptima parte de un montón es 19».

Esto es, de acuerdo con nuestra notación, $x + 1/7\ x = 19$.

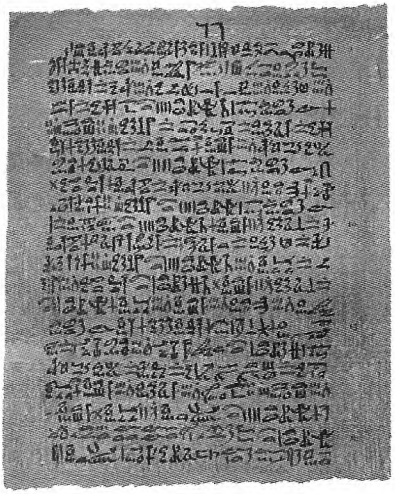
El método de la posición falsa consiste en suponer un valor para la incógnita y calcular el resultado esperado para este valor. Como el valor supuesto será incorrecto, el valor resultante lo será también, pero más tarde se modificará para que el resultado final sea correcto. Así, pues, se supone un precio para el montón: por ejemplo, 7, es decir, que $x = 7$. Entonces, el valor resultante para un montón y la séptima parte de un montón será 8. Esto es $x + 1/7\ x = 8$ para $x = 7$. A partir de aquí se determina cómo modificar el valor escogido, 7, para que el resultado dé 19 en lugar de 8. Se multiplica el 8, o x, por 19/8. Utilizando únicamente fracciones con numerador igual a 1, resulta que $2 + 1/4 + 1/8$ es 19/8. Multiplicando 7 por $(2 + 1/4 + 1/8)$ se

EL NÚMERO π EN EGIPTO

El papiro Rhind muestra la aproximación más antigua del número π, algo por encima de lo que sabemos hoy: lo presenta como 256/81, es decir, 3,1604. Quizás es la más antigua, pero no la más precisa. Documentos posteriores muestran aproximaciones más acertadas; la mejor es 3 + 1/7.

obtiene 16 + 1/2 + 1/8. El papiro muestra también que esta solución es correcta calculando que este valor y un séptimo de este valor corresponden a 19.

Todos estos cálculos fueron posibles gracias a la introducción del papiro, que permitía superar los límites de soportes como la arcilla fresca, la cera, etc., en los que hubiera sido muy complicado e incómodo desarrollar estas operaciones. De este modo, los egipcios podían trabajar de manera parecida a como se haría sobre papel. Para escribir en los papiros se desarrolló la escritura hierática, una simplificación práctica de la escritura jeroglífica para uso de los escribas en ámbitos administrativos. Más tarde, apareció el demótico, una forma abreviada del hierático, que como su nombre indica, era la escritura popular, para tratar los asuntos cotidianos, quedando el hierático para cuestiones sagradas. Este proceso de simplificación de la escritura produciría cambios en la notación numérica que abrirían el camino al cifrado.



El papiro Ebers (a la izquierda), que data del siglo XVI a.C. y versa sobre medicina, es un ejemplo de escritura hierática, mientras que la piedra Rosetta, del siglo II a.C., contiene tres tipos de escritura: jeroglífico, demótico y griego.

La escritura demótica superó el problema de la notación egipcia original, como el hecho de incluir una forma numérica para cada potencia de 10, lo que implicaba que la representación del 9 correspondiera a 9 veces la forma de la unidad y, de la misma manera, la representación del 99, a 9 veces la forma de la decena y 9 veces la forma de la unidad. La escritura demótica creó una forma para cada valor del 1 al 9, una forma para cada decena de 10 al 90 y lo mismo para las otras potencias

de 10. Para representar los valores era necesario memorizar las formas correspondientes. Pero, por poco riguroso que parezca, la memorización de dibujos no era algo extraño para los matemáticos egipcios: en Egipto no existía una notación unificada para las operaciones matemáticas; para la suma y la resta, por ejemplo, el papiro Rhind utiliza una representación de unas piernas en posiciones diferentes.

Grecia

La matemática griega se alzó sobre fundamentos babilónicos y egipcios. Las técnicas matemáticas egipcias llegaron a Grecia a través de la actividad comercial entre ambos territorios, que alcanzó su momento de esplendor entre los años 700 y 600 a.C. Fue aquélla una época dorada en el intercambio de conocimientos en la que numerosos matemáticos griegos viajaron a Egipto y aprendieron los secretos de su milenario saber.

Quizá por influencia egipcia, la geometría suscitó especialmente el interés de los matemáticos griegos, aunque éstos no sólo la mejoraron, sino que la proyectaron a un nivel superior. Como hicieron con tantas otras disciplinas del conocimiento, los griegos aplicaron a las matemáticas su mentalidad especulativa y rigurosa, y les dieron una dimensión científica, en el sentido moderno del término. En Egipto, las propiedades matemáticas no se demostraban: se partía de ejemplos y se conocían las propiedades por observación. Los griegos, por el contrario, necesitaban encontrar el porqué de cada fenómeno y demostrar las propiedades a partir de axiomas. Los egipcios sólo buscaban soluciones para problemas prácticos; los griegos amaban el saber por el saber, y estudiaban las matemáticas sin que les importara su utilidad.

La influencia babilónica, por otra parte, se dejó notar en la astronomía griega. Es a través de los griegos que el sistema sexagesimal babilónico ha llegado hasta nuestros días. De hecho, los términos «minuto» y «segundo» provienen de su empleo griego, aunque a través de su traducción al latín. Aparecieron por primera vez en un texto del siglo XIII que denominaba una sesenteava parte como «primeras partes pequeñas»; las sesenteavas partes de una sesenteava parte, como «segundas partes pequeñas», etc. La traducción latina es *pars minuta prima*, *pars minuta secunda*, etc. Y ahí asoman nuestros conocidos «minuto» y «segundo». Debe saberse que, en realidad, el viaje de estos términos hasta nuestros días fue algo más complejo. El texto latino del siglo XIII no traducía directamente del griego, sino de un texto árabe que adaptaba el original griego. Una vez más, este hecho nos recuerda que, en gran medida, el legado de la antigua Grecia ha llegado a Occidente gracias a los árabes, que lo conservaron durante siglos.

El sistema de numeración griego se desarrolló hacia el año 500 a.C. en Jonia y presenta algunas similitudes con el sistema hierático egipcio. Por ejemplo, dispone de un símbolo para cada uno de los números del 1 al 9, otro símbolo para cada decena del 10 al 90, y otro símbolo para cada centena del 100 al 900. Los símbolos corresponden a las letras griegas y a tres letras fenicias: la *digamma* (que representa el 6), la *koppa* (que representa el 90) y la *sampi* (que representa el 900).

Los símbolos griegos permiten representar cualquier número entre el 1 y el 999. Para representar los millares se utilizaban las unidades precedidas de una coma; así, la expresión «,α» corresponde a 1.000, la expresión «,β» corresponde a 2.000, etc. Este sistema de notación numérica es aditivo, como el egipcio, de manera que, por ejemplo, el número ρκε corresponde a 125, porque ρκε = ρ + κ + ε = 100 + 20 + 5. La siguiente tabla muestra las letras con que representaban los valores numéricos básicos:

1 α	10 ι	100 ρ	1.000 ,α
2 β	20 κ	200 σ	2.000 ,β
3 γ	30 λ	300 τ	3.000 ,γ
4 δ	40 μ	400 υ	4.000 ,δ
5 ε	50 ν	500 φ	5.000 ,ε
6 ς	60 ξ	600 χ	6.000 ,ς
7 ζ	70 ο	700 ψ	7.000 ,ζ
8 η	80 π	800 ϖ	8.000 ,η
9 θ	90 φ	900 ϡ	9.000 ,θ

Para representar los múltiplos de 10.000, entre esta cifra y 99.990.000, se empleaba la letra M precedida de las letras correspondientes al múltiplo. La M representaba 10.000, y venía de miríada, en griego *murios* (μυριαδος), que significaba «cien veces cien». Como alternativa, se podían escribir las letras encima de la M. Por ejemplo,

$$\varpi\text{o}\alpha\text{M} = \overset{o\alpha}{M} = 8.710.000,$$

o también

$$\varpi\text{o}\alpha\text{M},\delta\rho\text{o}\delta = \overset{o\alpha}{M},\delta\rho\text{o}\delta = 8.714.174.$$

Para representar valores todavía mayores, podía construirse 10.000^2 mediante dos MM.

En la notación egipcia, el orden no importaba, pero en la griega los números se presentaban siguiendo el orden de lectura occidental: el número empezaba por la izquierda con los valores de mayor peso. Esto permitía eliminar las comas si no eran necesarias para entender el significado. Sin embargo, como los números se representaban con letras, a menudo era necesario diferenciar los números del texto. Para ello, los griegos incluían una marca al final del número o añadían una barra encima de él. Así, el número 871 se escribía como:

$$\text{ϖοα΄},$$

o bien, como

$$\overline{\text{οα}}.$$

El desarrollo del cálculo con esta notación sobre papel es complicado. Se cree que para la aritmética los griegos utilizaban sobre todo el ábaco, aunque los matemáticos debían utilizar los símbolos.

La forma de multiplicar de los griegos era diferente a la que se practica hoy en día. En la actualidad, se toman los dígitos del segundo operando, y por cada uno de ellos se consideran los productos con los dígitos del primer operando. En cambio, los griegos consideraban los dígitos del primer operando con cada uno de los dígitos del segundo operando. Sin embargo, como en lugar de dígitos tenían el valor relativo a la posición (en la expresión πδ, el valor de π sería 80 y no 8), la multiplicación daba como resultado directo el valor del producto.

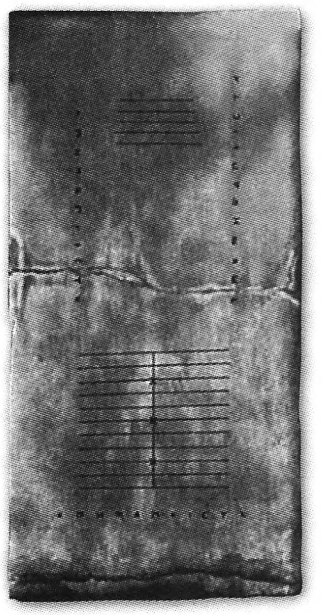
Si calculamos el producto 24 · 53 (en griego, κ δ multiplicado por ν γ) se comenzaría considerando primero κ, que es 20), que debería multiplicarse por los dígitos de 53; esto es, 20 · ν y 20 · γ (en la notación actual, 20 · 50, y 20 · 3). Después, se procede de la misma manera con el segundo dígito del primer multiplicando: δ, que es 4, multiplicado por ν y después δ multiplicado por γ (en la notación actual, 4 · 50 y 4 · 3). Estos resultados parciales se sumarán a continuación, resultando de la siguiente manera en la notación actual:

$$24 \cdot 53 = (20 + 4) \cdot (50 + 3) = 20 \cdot 50 + 20 \cdot 3 + 4 \cdot 50 + 4 \cdot 3 = 1.272.$$

De forma gráfica, la multiplicación griega se presenta así:

κ δ	24
ν γ	53
,α ξ	1.000 60
σ ιβ	200 12
,ασ οβ	1.200 72 = 1.272

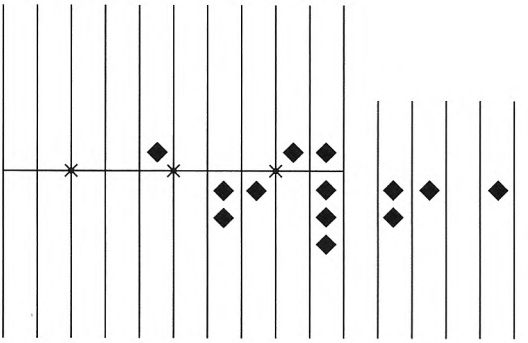
La utilización de 27 símbolos hacía difícil saber los productos parciales, puesto que la tabla de multiplicar correspondiente tendría un total de $27 \cdot 27 = 729$ resultados posibles. Se cree que era por eso que el ábaco jugaba un papel fundamental como herramienta de cálculo. Los ábacos griegos eran tableros con varias columnas en los que colocaban piedras o fichas. Cada columna tenía un valor correspondiente a las potencias de 10, y había otras columnas para las fracciones.



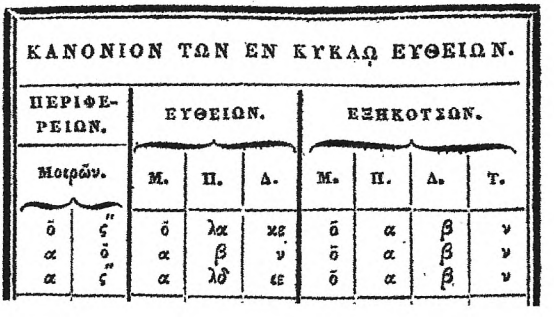
El ábaco de Salamina es una tabla de mármol que fue hallada en esta isla griega en el año 1846.

Se han podido estudiar estos tableros de manera directa, pues se han encontrado algunos, como el de Salamina, que además incluye información sobre los valores de las columnas. En él, cada columna representa una cierta cantidad de monedas

griegas. Las columnas largas representan, de derecha a izquierda, respectivamente, 1, 10, el 100, 1.000 y 10.000 dracmas, y después 1, 10, 100, 1.000 y 10.000 talentos (un talento correspondía a 6.000 dracmas). Las columnas cortas representan fracciones de la unidad. Las fracciones del dracma son el óbolo (un óbolo es 1/6 de dracma), el medio óbolo, el cuarto de óbolo y el jalko (un jalko es 1/8 óbolo). En el tablero, las piezas situadas debajo de la línea representan una unidad y las situadas encima de la línea representan cinco unidades. Por lo tanto, el siguiente esquema representa el número 502.158 + 2 óbolos + 1/2 óbolo + 1 jalkos.



El ábaco sumaba añadiendo piezas de acuerdo con la posición. Cuando se tenían 5 unidades en la parte inferior, se sustituían por una pieza en la parte superior, y, de igual manera, 2 piezas en la parte superior se reemplazaban por una pieza en la unidad siguiente. El operador debía recordar que en el caso de los talentos, 6.000 dracmas debían cambiarse por un talento, y en el caso de las fracciones, debía proceder de modo similar, pues 6 óbolos eran un dracma.



ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΤΙΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ὁ	ϛ″	ὁ	λα	κε	ὁ	α	β	ν
α	ὁ	α	β	ν	ὁ	α	β	ν
α	ϛ″	α	λδ	ες	ὁ	α	β	ν

Tabla perteneciente al Almagesto, *tratado astronómico escrito por Ptolomeo en el siglo II que hace uso de las fracciones.*

Al igual que los babilónicos, los griegos conocían las fracciones sexagesimales, como demuestra Ptolomeo en su *Almagesto*, pero, en matemáticas, utilizaban el sistema egipcio. En los comentarios a la obra de Arquímedes, Eutocio de Ascalón utiliza

$$, \overline{\alpha \quad \lambda\eta} \ \theta' \ \iota\alpha'$$

para representar 1838 (1/9) (1/11), y

$$\overline{\beta\eta\eta\partial\theta'\rho\kappa\alpha'}^{\iota\alpha\,\iota\alpha}$$

para denotar 2 (8/11) (8/11) (1/99) (1/121).

Los griegos y el número π

La geometría griega fue muy avanzada y pudo obtener mejores aproximaciones de π que sus antecesores. Arquímedes demostró que el número π se encontraba en el rango $3 + 10/71 = 223/71 < \pi < 3 + 1/7 = 22/7$ (que proporciona un valor promedio de 3,141851), y Ptolomeo obtuvo el valor 3,141666. Para ello, utilizaron dos polígonos regulares, uno inscrito (interior a la circunferencia) y otro circunscrito (exterior a la circunferencia), y se calcularon los correspondientes perímetros.

Grabados dedicados a Arquímedes (a la izquierda) y a Ptolomeo. Ambos pensadores lograron sendas aproximaciones del número π.

Arquímedes partió de que el hexágono inscrito a una circunferencia de radio unidad tiene perímetro 6 y el circunscrito, $4 \cdot \sqrt{3}$. Por tanto, π se encuentra entre 3 y $2 \cdot \sqrt{3}$. Entonces, tuvo en cuenta que la raíz cuadrada de 3 satisface la desigualdad siguiente $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$. Continuó el proceso con polígonos regulares con más lados, duplicando los anteriores: a partir del hexágono (polígono de 6 lados), Arquímedes duplicó repetidamente el número de lados, considerando primero el de 12 lados y después los de 24, 48 y hasta 96 lados. Con el polígono de 96 lados, encontró la aproximación $6.336 / (2017 + 1/4) < \pi < 14.688 / (4.673 + 1/2)$. Como $3 + 10/71 < 6.336/ (2.017 + 1/4) < \pi < 14.688 / (4.673 + 1/2) < 3 + + 1/7$, tomó estos dos valores como los valores extremos del intervalo en que se encuentra π. Ptolomeo consideró el polígono de 360 lados.

Los griegos y los números primos

Los números primos son aquellos que tienen como únicos divisores a sí mismos y a la unidad. El número 1, por definición, no se consideraría primo. Cualquier número natural puede descomponerse en producto de números primos de forma única, excepto por permutaciones. Así, por ejemplo:

$$120 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

LOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1.000

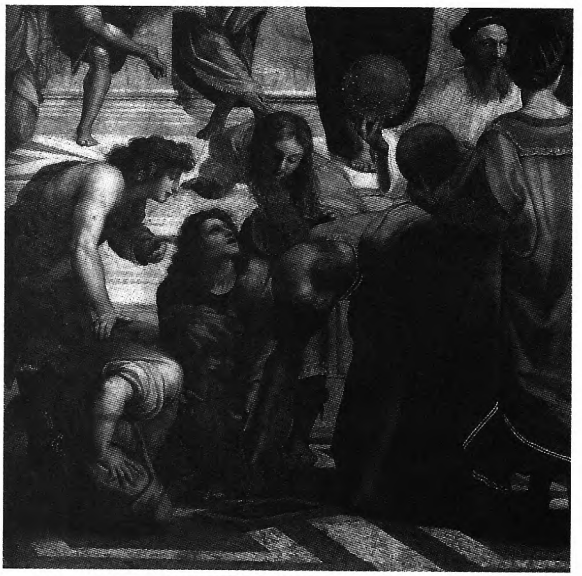
He aquí los números primos menores que 1.000, para aquel que tenga curiosidad por comprobar sus célebres propiedades, pero no desee tomarse la molestia de tener que calcularlos uno por uno:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Los griegos los estudiaron en profundidad: definieron el concepto de número primo y demostraron las propiedades más importantes. Se cree que los egipcios también tenían la noción de números primos, pero no se conocen resultados anteriores a los griegos sobre estos números.

En el año 300 a.C., Euclides, que ejerció de matemático en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I (323-283 a.C.), época que supuso otro momento de feliz unión entre lo egipcio y lo griego, halló la propiedad acaso más asombrosa y relevante de los números primos. La presentó en su obra los *Elementos de Geometría*, uno de los textos capitales de la historia de las matemáticas, que estableció las bases de la geometría que el mundo conocería durante los dos siguientes milenios: la geometría euclidiana. En el Libro IX de los *Elementos*, la Proposición 20 demuestra que existen infinitos números primos.

Para su demostración, Euclides toma un conjunto de números primos $S = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, y comprueba que el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ no es divisible por p_1, porque la división por p_1 da de resto 1. De forma análoga, N no es divisible por p_2 ..., p_n, porque la división de N por p_2 ..., p_n da resto 1. Por tanto, o bien N es primo o bien N es un número que se obtiene como el producto de números primos no incluidos en S. Así, S no es un conjunto completo de primos. Como la elección de S es arbitraria, no existe ninguna lista finita de primos, y, en consecuencia, la lista de primos es infinita.



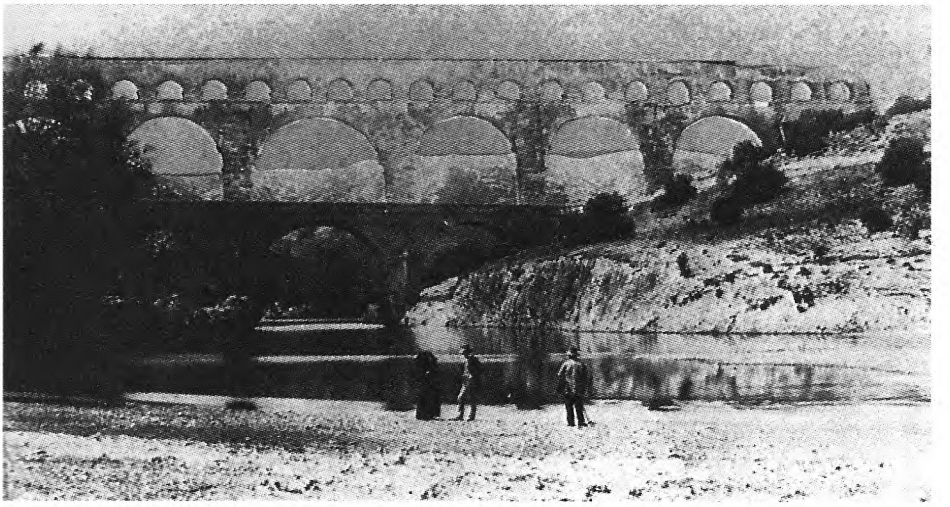
Detalle de La escuela de Atenas, *de Rafael, en el que aparece el autor de los célebres Elementos de Geometría, Euclides.*

Roma

Las matemáticas y su notación no fueron tan poderosas ni evolucionaron tanto en Roma como en Grecia y Babilonia. El centro del mundo latino, tan fecundo en otras áreas, no dio matemáticos realmente destacados. En tiempos de Roma, los momentos importantes para las matemáticas no tuvieron lugar en la capital de la República, o del Imperio, sino que se desarrollaron en el extrarradio, en las zonas de influencia griega, donde continuaron la tradición de las matemáticas griegas. De hecho, se considera que las matemáticas romanas participan de una tradición completamente distinta, que no está relacionada con los griegos o los babilonios, sino con la numeración y las matemáticas etruscas. Los autores fundamentales de este periodo, matemáticos de tradición griega, fueron Ptolomeo, con el ya citado *Almagesto*, y Diofanto y Papo, ambos de Alejandría. Diofanto escribió el tratado titulado *Arithmetica* y Papo, una colección de ochos libros de comentarios a los clásicos.

El propio Cicerón reconoció las limitaciones de las matemáticas romanas en sus *Disputaciones tusculanas*, donde afirma que:

> «La geometría era el mayor entre sus honores, y en consecuencia, nada era más brillante que las matemáticas. En cambio nosotros hemos limitado este arte a la medida y el cálculo». (*Disputaciones tusculanas*, I, 5).



El Pont du Gard fotografiado por Édouard Baldus a mediados del siglo XIX. Este acueducto, que es al mismo tiempo puente para carretas, fue construido por los ingenieros romanos, quienes plasmaron en sus obras arquitectónicas el saber matemático de la antigüedad.

No obstante, no hay que perder la perspectiva. Puede que los romanos no lograran hacer avances significativos en las matemáticas y el cálculo, dejando a los griegos imbatidos, pero no cabe duda de que fueron los grandes técnicos e ingenieros de la antigüedad, para lo que hicieron un uso maestro de las matemáticas. Muchas de sus magníficas obras de ingeniería y arquitectura han sobrevivido al paso del tiempo y han llegado hasta nuestros días gracias a sus admirables soluciones y, naturalmente, al ingenio matemático con que fueron diseñadas. En consecuencia, los romanos produjeron un generoso caudal de textos sobre técnicas de construcción, entre los que destacan los de su autor más señalado, Vitruvio.

La notación original romana de los números es muy popular, pues tiene gran cantidad de usos aún hoy día. Se presenta en la tabla siguiente:

1	5	10	50	100	500	1.000	5.000	10.000	50.000	100.000	500.000
I	V	X	L	C	I)	(I)	I))	((I))	I)))	(((I)))	I))))

Más tarde, la imprenta simplificó |) por D y (|) por M, y también se crearon nuevas notaciones para expresar valores mayores. Una barra encima de un número lo multiplicaba por 1.000, y unas barras verticales a cada lado, lo multiplicaban por 100. Por ejemplo, |LV| representaba 5.500. También se introdujeron valores a la izquierda, que restan. Éste es el caso, por ejemplo, de XC por LXXXX, y IV por IIII.

MARCO VITRUVIO

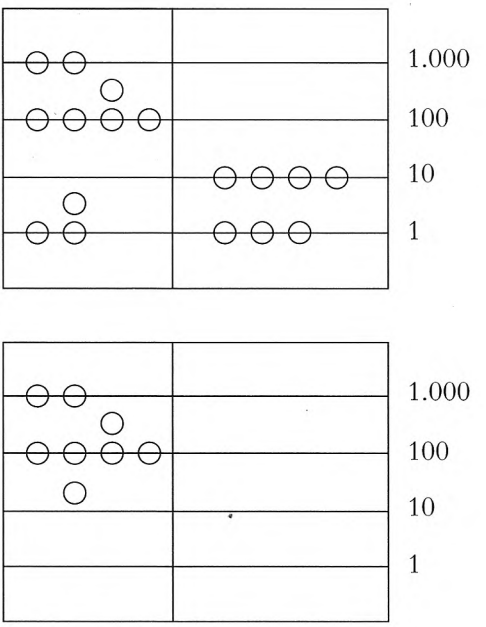
El célebre arquitecto y escritor Vitruvio (80 a.C.–15 a.C.) sirvió en las legiones de Julio César, de quien recibió órdenes directas. El romano dio a la historia de la cultura una de sus magnas obras, *De architectura*, en cuyos diez libros trata aspectos dispares de esta disciplina desde el punto de vista romano, que era muy amplio e integrador, incluyendo desde elementos de construcción, como máquinas o materiales, hasta elementos de planificación urbanística y paisajística.

M. VITRVVII POLLIONIS
DE ARCHITECTVRA
LIBRI DECEM,
CVM COMMENTARIIS
DANIELIS BARBARI,
ELECTI PATRIARCHAE
AQVILEIENSIS:
MVLTIS AEDIFICIORVM, HOROLOGIORVM,
ET MACHINARVM DESCRIPTIONIBVS,
& figuris, nunc primùm copositis, auctis & illustratis.
CVM PRIVILEGIIS.
VENETIIS,
Apud Franciscum Franciscium Senensem, & Ioan. Crugher Germanum.
M. D. LXVII.

Edición de la Arquitectura *de Vitrubio realizada en 1567.*

Sin embargo, operar con esta numeración era complicado. Muy probablemente el cálculo se realizaba con ábacos o tableros de cálculo, y la numeración se empleaba sólo para apuntar los valores y el resultado. El funcionamiento de los tableros de cálculo romanos era parecido al de los griegos. El tablero presentaba unas líneas: las piezas situadas sobre la línea correspondían a unidades y las situadas entre líneas correspondía a 5 unidades. El tablero estaba dividido en dos partes, la derecha representaba el número que había que sumar y la izquierda, el resultado.

Por ejemplo, en la figura que aparece a continuación, la posición de la izquierda representa el número 2.907 y la posición de la derecha, el 43. Desplazando todas las piedras a la izquierda, y reemplazando los excesos (5 piedras en una línea por una piedra entre líneas, o dos entre líneas por una piedra en la línea superior) se obtenía el resultado. En este caso se trata de 2.950.



Además de las tablas de cálculo, los romanos también utilizaban a modo de ábaco un tablero de metal o de madera con surcos, donde se colocaban piezas pequeñas o piedras para denotar los números. Aunque pueda parecer paradójico, estas piedras empleadas para calcular son la gran aportación de Roma a las matemáticas, pues la palabra latina para decir «piedra», que era *calx,* y su diminutivo *calculus*, que vendría a significar «piedra pequeña» o «piedrecilla», dieron origen a las modernas palabras «cálculo» y «calcular».

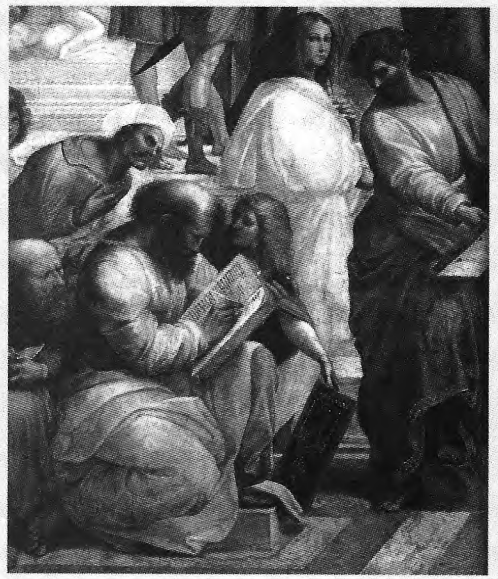
Las matemáticas en Alejandría

Las matemáticas griegas no tuvieron continuidad en el mundo romano. Los grandes avances desarrollados en este largo episodio de la historia, de casi ocho siglos, fueron de matriz griega. En aquel momento, Alejandría, con su museo y su biblioteca, era uno de los centros fundamentales del conocimiento, y algunos de los matemáticos griegos más importantes de los últimos tiempos del imperio romano residieron en esta ciudad.

El ya mencionado Papo de Alejandría vivió a principios del siglo IV e intentó renovar la matemática griega, para lo cual escribió comentarios y exégesis de los textos clásicos. Sus textos ampliaban los hallazgos anteriores con demostraciones más detalladas para que los lectores pudieran comprender de forma adecuada las obras de la antigüedad. Lamentablemente, su pretensión no tuvo éxito: pocos matemáticos de renombre le siguieron.

HIPATIA DE ALEJANDRÍA

Hipatia (*circa* 370-415) era hija del matemático y filósofo Teón de Alejandría, de quien heredó el talento y los intereses intelectuales. Profesaba la religión pagana en unos momentos en los que el imperio romano ya se había convertido al cristianismo y perseguía el paganismo. A pesar de ello, la gran matemática gozó de independencia en lo religioso, e incluso tuvo entre sus estudiantes al futuro obispo Sinesio de Cirene. Sin embargo, en el año 415 se vio mezclada en una batalla política entre el patriarca cristiano Cirilo y el prefecto romano Orestes, de quien ella era amiga y consejera. Con el fin de perjudicar a Orestes se propagó el rumor de que Hipatia practicaba la brujería y una turba la asesinó brutalmente durante la Cuaresma.



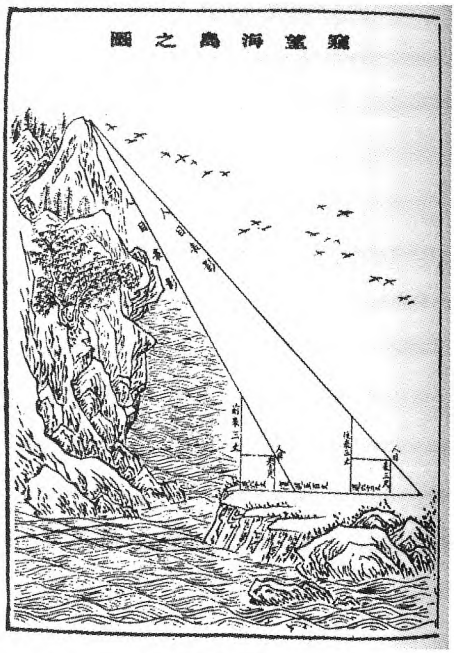
Hipatia de Alejandría, con una túnica blanca, aparece en este detalle de La escuela de Atenas *de Rafael.*

Una de las pocas figuras brillantes que aparecieron después de Papo fue la célebre Hipatia, también de Alejandría, entre cuyos textos matemáticos destacan los comentarios a Apolonio de Perga (*Sobre las secciones cónicas*) y a la *Aritmética* de Diofanto, además de partes incluidas en los comentarios de su padre al *Almagesto* de Ptolomeo. Su asesinato en el 415, que la convirtió en la gran mártir de la ciencia y el feminismo, junto con la destrucción del museo de Alejandría y su importante biblioteca, que sucedió en un momento incierto entre el siglo IV y el VII, acabarían consumiendo en llamas la tradición matemática griega y sepultándola bajo los escombros de la barbarie, de donde la rescataron los árabes.

China

Las matemáticas han tenido un papel fundamental en la historia de China, llena de logros científicos y técnicos a menudo avanzados a su época. Desde tiempos de la dinastía Han (206 a.C.-220 d.C.), el acceso al funcionariado se basaba en exámenes estrictos y no, como podría esperarse, en las relaciones de familia. Las pruebas de acceso ponían un acento especial en los clásicos literarios chinos, pero incluían problemas de matemáticas, lo que resulta muy notable. Aunque parezca imposible, este modelo ha llegado hasta tiempos modernos, a pesar de las discontinuidades en su aplicación. Ciertamente, los exámenes no favorecían la creatividad matemática y, por lo general, los chinos recurrían a listas de problemas y soluciones para memorizar; como es lógico, participaban de la visión típicamente oriental de las ciencias, compartida con babilonios y egipcios, que las consideraban un instrumento práctico. A pesar de ello, nada pudo impedir que una cultura tan rica y extensa en el tiempo desarrollara sus conocimientos matemáticos en busca de nuevos resultados y métodos más eficientes para resolver problemas cada vez más complejos.

El texto matemático chino más importante de la antigüedad es el titulado *Los nueve capítulos sobre procedimientos matemáticos*. El *Jiŭzhāng suànshù*, como se conoce en su idioma original, era el gran clásico sobre el que trabajaron los matemáticos chinos durante generaciones, que también tuvieron como referencia los comentarios y las anotaciones realizados por Liu Hui en el siglo III d.C. Por otra parte, en 1983 se descubrieron en una tumba del año 186 a.C. 190 tiras de bambú con textos matemáticos. Cada tira mide 30 centímetros de largo y unos 6-7 milímetros de ancho, y en total muestran un texto de unos 7.000 caracteres. Las tiras estaban originariamente ligadas unas con otras y luego enrolladas, pero se encontraron en desorden porque sus ligaduras se habían disuelto, y su recomposición produjo no pocos quebraderos de cabeza a los expertos.



Reproducción del siglo XVIII de uno de los problemas del matemático chino Liu Hui, en el que se plantea cómo medir la altura de una isla.

Una vez recompuesto, este texto se estudió en profundidad y se descubrió su gran importancia. Incluye problemas de varios tipos, siempre con el objetivo de resolver cuestiones de tributos, volúmenes, etcétera, pero a pesar de su orientación práctica, en esos problemas es posible encontrar interesantes aplicaciones de métodos, como la regla de la posición falsa o algoritmos para la extracción de raíces cuadradas, y también divertirse con sus formas, a menudo alegóricas.

Aunque los siguientes apartados están dedicados a las cuestiones de las matemáticas chinas que resultan más pertinentes para el tema que nos ocupa, es decir,

UN PROBLEMA DE *LOS NUEVE CAPÍTULOS*

El problema contenido en las tiras 34 y 35 de *Los nueve capítulos sobre procedimientos matemáticos* puede servir de ejemplo de la clase de cuestiones planteadas en este texto: una zorra, un gato montés y un perro pasan por una aduana y se les cobra 111 monedas. El perro dice al gato, y el gato le dice a la zorra, «tu piel vale el doble que la mía; debes pagar el doble de tributo». ¿Cuánto debe pagar cada animal?

la numeración y el cálculo, vale la pena añadir que los matemáticos chinos que se mencionarán realizaron muchos otros descubrimientos importantes, que quizá no tengan cabida aquí pero que resultaron capitales para la historia de las matemáticas, como los métodos para solucionar ecuaciones y los problemas relacionados con congruencias.

La numeración y el sistema de cálculo en China

La forma más antigua de cómputo que emplearon los chinos se remonta al siglo IV a.C. Consistia en unos bastoncillos o barritas para calcular, que se conocían con el nombre de suan (算) o chou (筹). Con el tiempo, este sistema sería desplazado por el ábaco. Estos bastoncillos representaban los números del 1 al 9 adoptando dos series de disposiciones distintas. La primera serie jugaba con la posición vertical de los bastoncitos, como puede apreciarse en la siguiente representación, que muestra los números del 1 al 9 de izquierda a derecha:

La segunda serie jugaba con la posición horizontal, como se ve a continuación, con las figuras que de nuevo representan del 1 al 9:

Este sistema de numeración se aplicaba a unos tableros, en los que se representaban los números teniendo en cuenta la posición. Por ejemplo, la representación de 4.508 en el tablero sería como sigue:

Como se ve, para efectuar cada representación de una cifra ambas series se intercalaban, porque la serie vertical se utilizaba para las unidades, las centenas, etc., y la horizontal para las decenas, los millares... Cuando uno de los dígitos era cero,

se dejaba vacía la posición correspondiente, como se puede apreciar en el caso del 4.508. El mismo sistema se utilizaba también para representar los números negativos. Ambos tipos de números se diferenciaban por el color de los bastoncillos: los números positivos se construían con bastoncillos rojos y los números negativos, con bastoncillos negros.

Las operaciones de cálculo se efectuaban en el mismo tablero y con los mismos bastoncillos. La suma y la resta se realizaban añadiendo o sustrayendo bastoncillos del tablero. Existían métodos para realizar multiplicaciones y divisiones, e incluso para representar y calcular otras operaciones algebraicas, como solucionar polinomios.

El sistema de cálculo mediante bastoncillos se introdujo en Corea y Japón en fecha incierta. Al menos en Japón, se sabe que ya se utilizaba en tiempos de la emperatriz japonesa Suiko (593-628 d.C.) con el nombre de *sangi*.

El ábaco se conoció en China a partir del siglo II a.C. bajo el nombre de *suanpan*. El ábaco chino estaba dividido en dos partes: en la parte superior las fichas representaban cinco unidades (o decenas, centenas, etc., según correspondiera) y en la parte inferior, cada ficha representaba una unidad. Esta división lo asemeja al ábaco romano, lo que, unido a la certeza histórica del comercio entre el imperio romano y China, ha llevado a algunos estudiosos a considerar seriamente que pudo haber una relación directa entre un ábaco y otro.

La lección del manejo del ábaco en una escuela de la localidad china de Zhenjiang protagoniza esta fotografía realizada en 1938.

El ábaco chino se introdujo en Japón alrededor del siglo XVI con el nombre de *soroban*. Llegó a través del comercio, pero su propagación no fue fácil, pues halló muchas reticencias; tuvo que transcurrir mucho tiempo para que acabara entrando en las escuelas y fuera empleado para desarrollar matemáticas avanzadas. En el comercio, el *soroban* reemplazó con rapidez a los sistemas anteriores, pero éstos mantuvieron su prestigio en la esfera de las altas matemáticas.

La representación de los números, tanto en China como en Japón, cuyo sistema de numeración proviene de su gran vecino, emplea 9 ideogramas que representan los números del 1 al 9:

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Para indicar decenas, centenas, millares, etc., estos símbolos se combinan con los ideogramas siguientes:

十: Decena (10).
百: Centena (10^2).
千: Millar (10^3).
万: Diez millares (10^4).
億: Cien millones (10^8).

La construcción de los números utiliza los símbolos del 1 al 9, intercalando el símbolo de decena, centena, etc. Por ejemplo, el 10.563 se representaría de la siguiente manera:

一万五百六十三.

Lo que se puede entender así:

一 (un), 万 (diez millares), 五(cinco), 百 (centenas), 六 (seis), 十 (decenas), 三 (y tres).

Es interesante mencionar que, a diferencia del sistema utilizado en la mayoría de lenguas europeas, donde la unidad de millar (10^3) es fundamental y proporciona la base para construir los múltiplos, aquí tenemos que la unidad 10^4 es la utilizada en

la construcción de los múltiplos. Por tanto, 132.000 se escribe $13 \cdot (10^4) + 2.000$, lo que, mediante ideogramas, sería de la siguiente forma:

十三万二千

El número π en China

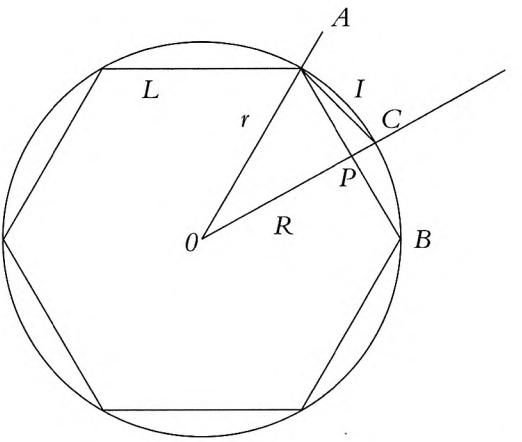
Los chinos desarrollaron algoritmos para el cálculo del número π. El gran matemático Liu Hui, que vivió alrededor del año 300 en el reino de Wei, tras la desintegración del imperio Han, fue el primero en diseñar un método para calcular el valor de π. Antes que él, el científico e inventor Zhang Heng (78-139), que diseñó un detector de terremotos mil setecientos años antes del primer sismógrafo, había logrado la aproximación de 3,1724. También se conocían aproximaciones como 3,162 (la raíz de 10) y 3,156. En el siglo III, el astrónomo Wan Fan, del reino de Wu, utilizó este último valor como resultado de la fracción 142/45.

El primer método que utilizó Liu Hui para construir una aproximación de π consistió en la bisección de polígonos. Con un polígono de 96 lados, obtuvo que π se encontraba entre 3,141024 y 3,142708, a raíz de lo cual aproximó π por 157/50, pues consideró que 3,14 era suficiente.

Sellos chinos dedicados a los eruditos Liu Hui (a la izquierda) y Zhang Heng.

El procedimiento de Liu Hui partía de un hexágono inscrito, con un lado de longitud L. A partir de aquí aplicó un proceso iterativo en el que en cada iteración duplicaba el número de lados del polígono. Es decir, primero consideró un hexágono, luego un dodecágono (12 lados), después un polígono de 24 lados ($= 12 \cdot 2$) y otro de 48 ($= 24 \cdot 2$), y así sucesivamente. En cada paso, cuando consideraba el polígono de N lados, calculaba su área y la longitud del lado del polígono de $2N$ lados.

Representaremos la longitud del lado del polígono de $2N$ lados por l. Y para ello aplicaremos el teorema de Pitágoras: dado un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud h y dos catetos de longitudes $c1$ y $c2$, se cumple la igualdad $h^2 = c1^2 + c2^2$.



Representación del proceso de cálculo de la longitud l a partir de la longitud L, donde L es la longitud del lado de un hexágono e l es la longitud del lado de un dodecágono. O representa el centro de la circunferencia; A y B, dos de los vértices del hexágono; C, el nuevo vértice, y P, el punto en el lado del hexágono que se encuentra a la misma distancia de A y B. La longitud del radio es r, y la longitud del centro a P es R.

En la figura se indica el centro de la circunferencia con O, y el lado en consideración (de longitud L) con los puntos extremos A y B. Obsérvese que OAB define un triángulo. Entonces, el procedimiento es como se indica a continuación.

Paso 0. Se considera el polígono de $N = 6$ lados, con lados de longitud L conocido.

Paso 1. Primero se divide el lado AB en dos partes iguales. Se indica con P el punto medio.

Paso 2. Se calcula a continuación la longitud del segmento OP y se denomina R a esta longitud. Para ello, se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo OAB. En este punto, ya se sabe que la hipotenusa de este triángulo es r, que un cateto es $L/2$ y que el otro, el que se desea calcular, es R. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras, se sabe que se cumple la igualdad $r^2 = R^2 + (L/2)^2$. De aquí, se obtiene $R^2 = r^2 - (L/2)^2$, y por lo tanto:

$$R = \sqrt{(r^2 - (L/2)^2)} = \sqrt{(r^2 - (L^2/4))}.$$

Paso 3. Se considera ahora el radio que pasa por P. La prolongación de este radio hasta la circunferencia permite encontrar un vértice del polígono de $2N$ lados. Llamamos a este punto C. Conociendo R se puede calcular la longitud del segmento PC. Llamaremos a esta longitud ρ. Como OC tiene longitud r, el segmento PC tiene longitud

$$\rho = r - R = r - \sqrt{(r^2 - (L^2/4))}.$$

Paso 4. La determinación de la longitud del segmento AC se puede realizar mediante el teorema de Pitágoras. Como se ha dicho, llamaremos a la longitud de este segmento l. En relación a este triángulo, su hipotenusa corresponde a l y los catetos del triángulo son $L/2$ y ρ. Por lo tanto,

$$l^2 = L^2/2^2 + \rho^2 = L^2/2^2 + (r - \sqrt{(r^2 - (L^2/4))})^2.$$

Paso 5. Aislando l en la última igualdad, se obtiene la longitud del lado del polígono de $2N$ lados:

$$l = \sqrt{L^2/4 + \left(r - \sqrt{r^2 - (L^2/4)}\right)^2}$$

$$L = \sqrt{(L^2/4 + r + \sqrt{r^2 - (L^2/4)})^2}.$$

Paso 6. El área del polígono de N lados se puede calcular en base al triángulo definido por los puntos OAB. Esto es, el área del polígono será N veces el área de un triángulo. El área del triángulo OAB es, claro está, base por

altura divido por 2. La base AB tiene longitud L, y la altura del triángulo es la R que se ha calculado anteriormente. Por tanto, el área del polígono será

$$N \cdot \text{área del triángulo } OAB = N \cdot (L \cdot R)/2.$$

Paso 7. A continuación se vuelve al paso 2, definiendo $N = 2N$, $L = l$.

Para conocer el valor de π, debe tenerse en cuenta que el área de la circunferencia es $\pi \cdot r^2$. Por lo tanto, para $r = 10$, el área es $\pi \cdot 100$.

Si se empieza con $r = 10$, con lo cual se tiene que $L = 10$, resultará que las áreas calculadas serán las que aparecen en la tabla que se presenta más adelante, con la notación moderna, pues Liu Hui utilizaba fracciones para denotar los cálculos.

Liu Hui vio también que dada el área de un polígono de $2N$ lados de longitud l (que denotamos como C), construida a partir del polígono de N lados de longitud L, el área del círculo satisface la desigualdad siguiente:

$$\text{Área} - 2N < C < \text{Área} - 2N + \text{exceso}.$$

Aquí, exceso corresponde a los $2N$ triángulos de área $\rho \cdot (L/2)/2$. Debe recordarse que $\rho = r - R$. Esto es, $2 \cdot N \cdot (\rho \cdot (L/2))/2$. En la tabla se dan también estas cantidades.

La diferencia entre el área del polígono de 96 lados y el polígono de 192 es muy pequeña, por lo que Liu Hui consideró que la aproximación de $\pi = 3{,}14$ era suficiente.

Número de lados	Longitud del lado del polígono	Longitud del lado del polígono de $2N$ lados		Área del polígono	Exceso del área entre el polígono de N lados y el de $2N$
N	L	l	R	$N \cdot (L \cdot R)/2$	$2N \cdot (\rho \cdot (L/2))/2$
6	10	5,1763806 8	8,6602545	259,80765	40,192368
12	5,1763806 8	2,6105237	9,659258	299,99997	10,582865
24	2,6105237	1,3080626	9,914449	310,58282	2,6800032
48	1,3080626	0,65438163	9,978589	313,26285	0,67216444
96	0,65438163	0,32723463	9,994646	313,935	0,16816857
192	0,32723463	0,1636228	9,998661	314,10318	0,042062752
384	0,1636228	0,08181208	9,999665	314,14526	0,01051604

Liu Hui observó que, en estos resultados, los excesos sucesivos mantienen una cierta relación. En particular, vio que la relación entre un exceso y el siguiente es aproximadamente $1 / 4 = 0{,}25$. En la tabla que se presenta más adelante se incluyen estos cocientes. Esta relación le permitió obtener una aproximación del área del polígono de 3.072 lados, y a partir de ella, conseguir una aproximación mejor de π.

Como ejemplo, puede verse la estimación que se consigue con la aproximación de Liu Hui para el polígono de 384 lados a partir de la última que calculó (la de 192). En este caso, se tiene que el área del polígono de 192 es 314,10318 y el exceso de este polígono en relación al anterior es 0,16816857. A partir de ahí, Liu Hui estimó que la diferencia de área entre el polígono de 192 y el de 384 lados era de $0{,}16816857 \cdot (1/4) = 0{,}042042144$. Por tanto, el área del polígono de 384 será:

$$314{,}10318 + 0{,}16816857 \cdot 0{,}25 = 314{,}14523.$$

Puede verse que el exceso real es 0,042062752 y que el área total es 314,14526.

Liu Hui procedió con este mismo sistema hasta encontrar el área del polígono de 3.072 lados, con lo que obtuvo la aproximación de π igual a $3927 / 1250 = 3{,}14159$.

Número de lados	Longitud del lado del polígono	Área del polígono	Exceso del área entre el polígono de *N* lados y el de 2*N*	Cociente
N	*L*	$N \cdot (L \cdot R)/2$	$2N \cdot (\rho \cdot (L/2))/2$	Exceso área (*N*)/exceso área (N *N*/2)
6	10	259,80765	40,192368	
12	5,1763806 8	299,99997	10,582865	0,26330534
24	2,6105237	310,58282	2,6800032	0,25323987
48	1,3080626	313,26285	0,67216444	0,25080734
96	0,65438163	313,935	0,16816857	0,25018963
192	0,32723463	314,10318	0,042062752	0,25012255
384	0,1636228	314,14526	0,01051604	0,25000837

Este método fue reconsiderado en el año 480 d.C. por el matemático y astrónomo Zu Chongzhi (429-500), de la dinastía Qi, que lo aplicó a un polígono de $12.288 = 3 \cdot 2^{12}$ lados, obteniendo que π se encontraba entre dos valores: $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Lo expresó de forma más sucinta de la siguiente forma: $\pi \simeq 355/113$. Durante 900 años, ésta fue la aproximación más precisa.

Las matemáticas indias y árabes: la numeración posicional

La tradición de la historia de la ciencia dice que el nacimiento de las matemáticas indias tuvo lugar en el siglo VII, cuando en la India existía cierta uniformidad en el uso del sánscrito como lengua común. La India no había estado aislada de Europa; había tenido contacto intenso con los griegos y después con los romanos. No debe olvidarse que Alejandro Magno extendió su imperio hasta el valle del río Indo.

Aunque la ciencia india ponía un acento muy especial en la astronomía, también desarrolló las matemáticas, instrumento fundamental del saber científico. Curiosamente, los indios no compartían el concepto oriental de las ciencias y para ellos las matemáticas no tenían por qué ser aplicadas. El saber por el saber excitaba el estudio de las matemáticas indias. A pesar de ello, sus estudiosos no mostraron un celo excesivo en cuanto a proporcionar demostraciones más o menos formales de los métodos o los procedimientos. Se cree que los matemáticos indios debían justificar sus hallazgos, pero no se han conservado las correspondientes demostraciones.

Los indios estudiaron con profundidad la trigonometría, sobre todo por su utilidad para hacer cálculos astronómicos, aunque también para emplearla en las ecuaciones indeterminadas, el álgebra y la combinatoria. De hecho, el concepto y la palabra *seno* provienen de un tratado de astronomía del siglo V, el *Paitāmahasiddhānta*.

SENO

¿Cómo acabó la palabra «seno» aplicada a un concepto trigonométrico que no tiene relación alguna con ninguna de sus acepciones? Todo comenzó con el tratado de astronomía india titulado *Paitāmahasiddhānta*, en el que aparece una tabla de jyā-ardha, esto es, «medias cuerdas», las cuales se empleaban en los cálculos astronómicos. El término volvió a aparecer en el *Āryabhaṭīya*, la obra magna del matemático hindú Āryabhaṭa, que lo abreviaba como *jyā* o *jīvā*. Los árabes lo transcribieron a su idioma como *jiba*, pero, como el árabe no utiliza las vocales, en los textos aparecía sólo como *jb*. Una lectura posterior, mal entendida o quizá mal intencionada, interpretó *jb* como *jaib*, que significa «pecho» o «seno», y los traductores latinos la adoptaron tal cual, como *sinus*, que significa «seno», «pliegue en la toga» y también «bahía». El término no sólo hizo fortuna en las lenguas romances, pues incluso la palabra inglesa *sine* proviene del latín.

Qué duda cabe que la aportación más relevante de las matemáticas indias al conjunto de las ciencias es el sistema de numeración, que nosotros consideramos arábiga, pero que los árabes tomaron de los indios. La numeración proviene del sistema de escritura utilizado en tiempos del rey Aśoka (272 a.C.-231 a.C.): el silabario brahmi, cuyos textos transcriben el antiguo idioma prácrito y contienen números. No obstante, las figuras de los números fueron sufriendo modificaciones en su viaje hacia Occidente, por lo que las formas que se emplean hoy en día no se corresponden con aquellas primeras representaciones. Las cifras tal y como se conocen actualmente son la versión de aquellos antiguos números prácritos que llegó al norte de África tras varias alteraciones, y se propagó por Europa durante la Edad Media.

क *ka* = 1	ख *kha* = 2	ग *ga* = 3	घ *gha* = 4	ङ *ṅa* = 5
च *cha* = 6	छ *chha* = 7	ज *ja* = 8	झ *jha* = 9	ञ *ña* = 10
ट *ṭa* = 11	ठ *ṭha* = 12	ड *ḍa* = 13	ढ *ḍha* = 14	ण *ṇa* = 15
त *ta* = 16	थ *tha* = 17	द *da* = 18	ध *dha* = 19	न *na* = 20
प *pa* = 21	फ *pha* = 22	ब *ba* = 23	भ *bha* = 24	म *ma* = 25
य *ya* = 30	र *ra* = 40	ल *la* = 50	व *va* = 60	
श *śha* = 70	ष *sha* = 80	स *sa* = 90		
ह *ha* = 100				

Fragmento de la numeración alfabética india tal y como fue descrita por el matemático Āryabhaṭa (fuente: Georges Ifrah: Historia universal de las cifras*).*

El sistema posicional también tiene sus orígenes en la India. Al principio, los antiguos indios escribían los números mediante los símbolos del 1 al 9, y después, con otro conjunto de símbolos para representar las decenas del 10 a 90. Los múltiplos de 100, de 1.000, etc., se construían representando las unidades multiplicadas por los símbolos para el 100, el 1.000... Esta notación se simplificó más tarde, produciendo para la historia la notación posicional, que no necesitaba más que los símbolos de 0 a 9. Hay controversia sobre la fecha exacta de la transformación, pero la mayoría de las evidencias dan como muy probables las cercanías del año 600. Como mínimo, un texto procedente de Siria del año 662 habla ya de la notación india.

Una teoría defiende que quizás el sistema se produjo en la frontera con China, donde el uso del ábaco generó la necesidad de representar con más facilidad las cuentas de esta herramienta de cálculo. El nacimiento de la numeración posicional podría tener relación con el empleo del punto para marcar el vacío en el ábaco, que aparece documentado en un texto del siglo VII hallado en 1881 en el noroeste de la India, en Bakhshālī. Cuando ese punto se convirtiera en un cero, llegaría la revolución. El cero aparece incluido entre los números en el año 628 d.C., cuando Brahmagupta lo define en su libro *Brahmasphutasiddhanta* (*La apertura del universo*) como el resultado de restar un número a sí mismo.

Sea como fuere, en el año 870 el sistema posicional estaba ya establecido en la India. De allí viajó a Bagdad, desde donde más tarde se propagó a todo el ámbito de influencia de la cultura musulmana. La China utilizó la notación posicional con sus propios caracteres a partir de la dinastía Ming (1368-1644). Los caracteres chinos sólo fueron sustituidos en los escritos matemáticos por la numeración arábiga ya entrados en el siglo XX.

El libro árabe más antiguo conservado que utiliza la numeración arábiga con notación posicional es *Principios de cálculo indio* de Kūshyār ibn Labbān, conocido

CERO Y CIFRA

El origen etimológico de las palabras «cero» y «cifra» son muy similares. «Cifra» proviene de la palabra árabe *sifr*, transformación de la palabra india *sunya*. Su significado original era «vacío». La palabra «cero» proviene de la palabra latina que Fibonacci utilizó en su *Libro del ábaco* (*Liber Abaci*), que popularizó los números árabes en Europa. Fibonacci hablaba de *zephyrum*, que en latín y griego significaba «viento del oeste», posiblemente por su parecido a la palabra árabe *safira*, que significa «estar vacío» y estaba relacionada, como resulta evidente, con *sifr*, «vacío».

KŪSHYĀR IBN LABBĀN

El astrónomo y matemático persa Kūshyār ibn Labbān (971-1029) nació en Jīlān, al sur del mar Caspio. Aunque destaca entre sus textos el célebre tratado de aritmética *Principios de cálculo indio*, su obra escrita es muy rica y contiene libros y colecciones de tablas que pasaron de generación en generación en la tradición científica musulmana. Fue profesor de al-Nasawī, el algorista. En su tratado de aritmética presenta la numeración arábiga y cómo realizar con ella las principales operaciones: la suma, la resta, la división por 2, la multiplicación, la división, la raíz cuadrada y la raíz cúbica.

en árabe como *Kitāb fī usūl hisāb al-hind*. La obra no es sólo significativa por la numeración que usa sino también por la originalidad matemática de su contenido. En este texto aparece en todo momento el cero, que es denominado *sifr*, empleado como un número más.

Hasta el momento, muchos de los textos escritos en árabe eran traducciones de los textos griegos, pero en los siglos X y XI la tendencia cambió radicalmente. Alrededor del cambio de milenio, cuando Kūshyār ibn Labbān escribió sus obras, se multiplicaron en los países musulmanes los textos con resultados matemáticos novedosos e importantes. De hecho, fueron los musulmanes quienes incorporaron las fracciones a la notación posicional, que se había desarrollado tan sólo para los números enteros.

El cálculo del número π en la India

Los indios también se dejaron seducir por el misterio del número π. El fundador de la escuela de astronomía y matemáticas de Kerala, Madhava de Sangamagrama (1350-1425), descubrió, entre otras, las series infinitas para las funciones trigonométricas de seno y coseno, con las que definió el número π mediante una descomposición de la función arcotangente. Expresó π como sigue:

$$\pi / 4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots + (-1)^n/(2n+1) + \ldots$$

Además, apreció el error de calcular π utilizando sólo n términos de la serie. El cálculo del error de truncar la serie implica tener un gran conocimiento de las series. La serie del arcotangente fue más tarde redescubierta por James Gregory y utilizada

por Gottfried Leibniz para calcular π con la expresión sobre estas líneas. Por ello, la fórmula se conoce normalmente por la serie de Leibniz o de Gregory-Leibniz, y sólo en fecha más reciente se atribuyó a su verdadero descubridor, con el nombre de Madhava-Leibniz.

La expresión utilizada de la arcotangente es la siguiente:

$$\arctan x = x - (x^3) / 3 + (x^5) / 5 - (x^7) / 7 + \ldots$$

A efectos de cálculo del número π esta serie es muy ineficiente. El problema es que para calcular 10 decimales correctos son necesarias 10.000 millones de operaciones matemáticas.

Capítulo 2

La Europa medieval

La enseñanza en Europa durante los primeros siglos de la Edad Media se nutría de los textos y la autoridad de los autores romanos tardíos, como Boecio. Las universidades medievales formaban a sus estudiantes siguiendo el modelo formulado en el siglo v por el enigmático abogado Marciano Capella, autor de *De Nuptiis Philologiae et Mercurio* (*Sobre el matrimonio de Filología y Mercurio*), obra también conocida como *De septem disciplinis* (*Sobre las siete disciplinas*), en la que presentaba la división clásica del conocimiento en *trivium* y *quadrivium*, una primera clasificación en letras y ciencias.

El peso del legado cultural latino se sentía incluso en el cálculo, donde se seguían utilizando los números romanos. El lento proceso de introducción de los números arábigos, lleno de controversia y antagonistas acérrimos, ocupó gran parte de este periodo, pero la Edad Media también acabaría viendo importantes innovaciones con efectos decisivos en épocas posteriores, como es el caso, por ejemplo, del sistema lógico de Ramon Llull, que influiría en el trabajo de Leibniz en el siglo XVII.

Boecio y la ritmomaquia

La ritmomaquia fue un juego con ciertas similitudes con el ajedrez que gozó de gran popularidad en la Edad Media. Fue desarrollado a mediados del siglo XI en los monasterios del sur de Alemania, y alcanzó su máximo esplendor en el siglo XVI, momento a partir del cual el juego entró en decadencia hasta su total desaparición. Aunque se trate sólo de un juego, considerar la evolución de la ritmomaquia resulta particularmente atractivo para los estudiosos de la historia de las ciencias pues su éxito y su declive corren paralelos al desarrollo matemático.

La obra matemática medieval por excelencia era la *Aritmética* de Boecio, titulada en latín *De Institutione Arithmeticae*. Su estructura era muy diferente a la de los trabajos matemáticos actuales; de algún modo, desde el punto de vista contemporáneo, puede verse como una regresión en relación a los griegos. La obra reflexionaba sobre las relaciones entre los números y, sobre todo, las proporciones, y en ella se definían multitud de conceptos, como en los *Elementos* de Euclides, pero no se incluía la idea de demostración y proposición, que había sido el gran avance del pensamiento

TRIVIUM Y QUADRIVIUM

El concepto de *trivium* se impuso en los siglos VIII y IX, después de que se extendiera el uso de su hermano mayor, el *quadrivium*. El *trivium* comprendía las disciplinas de gramática, lógica y retórica, y era una iniciación a las artes liberales, así como una introducción al *quadrivium*, que se consideraba más complejo; se trata de un prejuicio transmitido a lo largo de los siglos, pues el término daría lugar a la palabra «trivial» por su menor consideración frente al *quadrivium*.

El decano *quadrivium* comprendía las disciplinas de aritmética, geometría, astronomía y música, con las que se completaba la formación en las artes liberales. Boecio sistematizó su empleo entre los siglos V y VI, aunque el concepto es mucho más antiguo, puesto que aparece ya en los escritos de los pitagóricos.

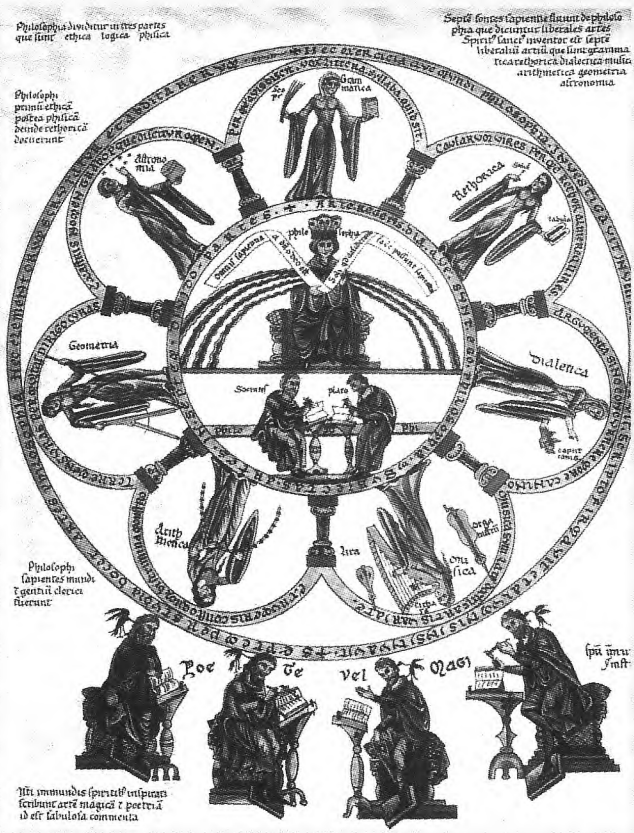
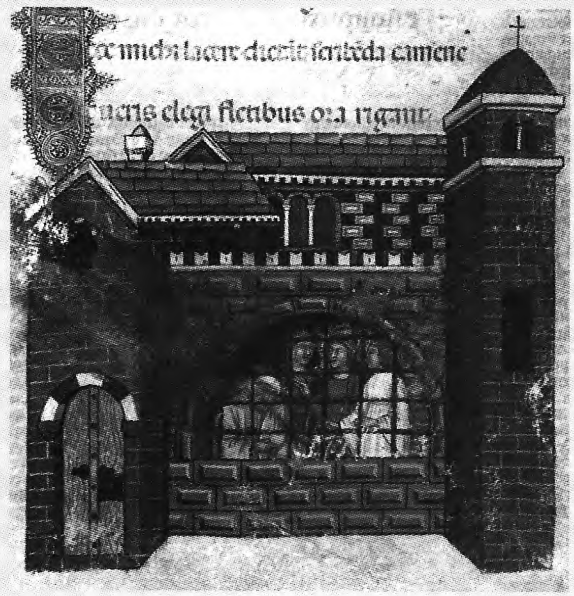


Ilustración dedicada a las siete artes liberales perteneciente al volumen Hortus deliciarum *de Herrad von Landsberg, obra compilada con fines pedagógicos a finales del siglo XII.*

BOECIO (480-524)

Anicio Manlio Severino Boecio, Boëthius en latín, fue un filósofo cristiano nacido en el seno de una importante familia de la que habían surgido varios emperadores. Su obra más conocida es *De Consolation Philosophiae* (*La consolación de la filosofía*), que escribió mientras se encontraba en prisión y en la que presenta las desigualdades del mundo siguiendo los esquemas platónicos. Tradujo muchas obras griegas al latín con el objetivo de transmitir la cultura grecolatina a las generaciones futuras, pues el imperio romano de Occidente había llegado a su fin cuatro años antes de su nacimiento, cuando su último emperador, Rómulo Augústulo, fue depuesto por el rey germánico Odoacro. Muchas traducciones de Boecio no eran textuales e incluían numerosos comentarios personales. Así, por ejemplo, *De Institutione Arithmeticae Libri II*, que pretende traducir la aritmética de Nicómaco, está trufada de material propio. En cualquier caso, las traducciones de Boecio fueron muy utilizadas durante la Edad Media en Europa.



Boecio encarcelado, miniatura perteneciente a una edición del siglo XIV de La consolación de la filosofía.

griego, ya tan lejano. En ese punto, la ritmomaquia suponía una tabla de salvación. El juego se empleaba como herramienta para enseñar a los estudiantes los conceptos y las relaciones de Boecio.

Con el paso del tiempo, se fueron recuperando los escritores griegos más avanzados y se superó el estilo medieval de hacer matemáticas. Desafortunadamente, con él se desvaneció también el juego, hasta el punto de que Leibniz –algunos de cuyos grandes descubrimientos matemáticos se basaban en los logros de las matemáticas medievales– había oído sobre el juego, pero desconocía su mecánica por completo.

En las matemáticas de Boecio, los números pueden ser iguales (*aequalis*) o desiguales (*inaequalis*). La igualdad no se divide en categorías, porque es un concepto indivisible, pero la desigualdad sí puede categorizarse. La categoría mayor (*maioris*) se da cuando un número es desigual por exceso; la categoría menor (*minoris*) se da cuando un número es desigual por defecto. Estas categorías se subdividen en otras cinco, según el tipo de relación que puede establecerse entre los números. La categoría mayor contiene las subcategorías múltiplo (*multiplex*), superparticular (*superparticularis*), superpartiente *(superpartiens)*, múltiplos superparticulares (*multiplex superparticularis*) y múltiplos superpartientes (*multiplex superpartiens*). La categoría menor contiene las subcategorías *submultiplex, subsuperparticularis, subsuperpartiens, submultiplex superparticularis, submultiplex superpartiens*.

Como puede comprobarse cuando se intenta aclarar algunos de estos conceptos, un juego como la ritmomaquia hacía mucha falta para orientarse en el sistema de Boecio. Para el autor tardo-romano, múltiplo era, como su nombre indica, aquel cuyo primer número es n veces el segundo, de manera que resulta una relación doble, triple, cuádruple, etc. Por ejemplo, el 8 es cuádruplo del 2. Decir de un número que es superparticular significa que el primer número contiene al segundo y a una parte del mismo. Por ejemplo, 9 es superparticular de 6, porque $9 = 6 + (1/2) \cdot 6$. Superpartiente significa que el primer número contiene al segundo más varias partes del mismo. Por ejemplo, 9 es superpartiente de 7, porque $9 = 7 + (2/7) \cdot 7$. Los múltiplos superparticulares contienen a un número varias veces, y a una parte de él, y los múltiplos superpartientes contienen a un número varias veces y a varias partes de él. Por ejemplo, 15 es un múltiplo superparticular de 6, porque es $6 + 6 + (1/2) \cdot 6$, y 16 es un múltiplo superpartiente de 7, porque es $7 + 7 + (2/7) \cdot 7$.

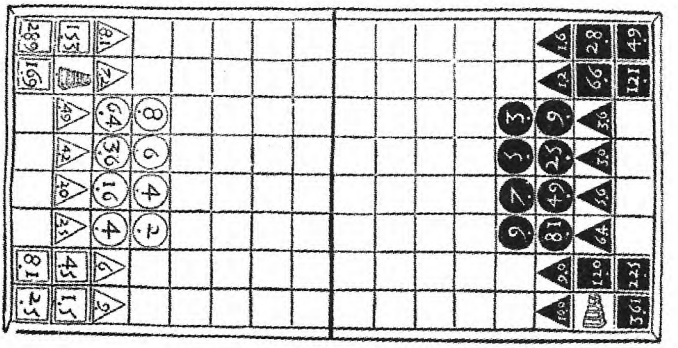
Por otra parte, Boecio identificó en su obra tres tipos de medias. La primera es la media aritmética, definida como $m = (a + b)/2$, cuya propiedad central es que se encuentra en el punto medio de los dos números extremos. La segunda es la media geométrica, presentada como $m = \sqrt{(a \cdot b)}$, cuya propiedad es que la relación entre a y m es la misma que la relación entre m y b; esto es, $a/m = m/b$. La tercera es la media armónica, $m = 1/((1/a + 1/b)/2)$, o lo que es equivalente: $m = 2\,ab/(a + b)$.

¿Cómo la ritmomaquia arrojaba luz sobre todo este enmarañado bosque de relaciones numéricas? Evidentemente, transformándolas en una actividad lúdica que manipulaba todos estos conceptos. El juego se desarrollaba en un tablero de 8×16, aunque la segunda dimensión podía variar. Cada jugador tenía 24 fichas con números que correspondían a los *multiplex*, *superparticularis* y *superpartiens* de números establecidos. Los jugadores utilizaban varias operaciones para capturar piezas al

LAS MEDIAS EN LA *ARITMÉTICA* DE BOECIO

«Es admitido y bien sabido entre los antiguos, y también considerado por la ciencia de Pitágoras, Platón y Aristóteles, que hay tres medias: la aritmética, la geométrica y la armónica. [...] Llamamos *media aritmética* cuando entre tres términos, o cualquier número de ellos, encontramos una diferencia igual entre todos los términos dispuestos. [...] Ahora explicamos la *media geométrica*, a la que podría llamarse mejor *de proporción* porque en ella se ponen en consideración las proporciones, sean las mayores o menores. Porque aquí se consideran siempre las proporciones iguales [...], por ejemplo son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, o la proporción triple 1, 3, 9, 27, 81, o se puede establecer la cuádrupla, la quíntupla o la de cualquier otra multiplicidad. [...] Entre las otras medias, la *armónica* es la que ni se construye con sus diferencias ni con proporciones iguales, sino que es aquella que pone el término más grande con el más pequeño (como cociente), y se compara (o iguala) a la diferencia del más grande con el medio contra la diferencia del medio con el más pequeño. Por ejemplo, sea 4, 5, 6 o sea 2, 3, 6. Como el 6 supera al 4 en su tercera parte (esto es, 2), el 4 supera al 3 en su cuarta parte (esto es 1), el 6 supera al 3 en su mitad (esto es, 3), el 3 excede al 2 en su tercera parte (esto es, la unidad).»

adversario. Por ejemplo, si la pieza 4 se situaba a 9 posiciones de la pieza 36, la pieza 36 era capturada (porque $36 = 4 \cdot 9$); o si se situaban las piezas 4 y 8 a los lados de la pieza 12, ésta era capturada (porque $12 = 4 + 8$). Además, algunas de las condiciones para finalizar el juego correspondían a las tres medias de Boecio. Por ejemplo, conseguir situar en posiciones sucesivas las piezas 2 : 4 : 6 con una pieza del adversario entre ellas podía significar el final de la partida. ¿Por qué? Porque 4 es la media aritmética de 2 y 6.



Grabado de 1554 dedicado al juego de la ritmomaquia.

BOECIO ACTUALIZADO

La notación actual puede expresar las propiedades con las que Boecio define las medias aritmética, geométrica y armónica. Se consideran tres cantidades: *a*, *b* y *c*; se supone que *a* es el valor mayor; *b*, el medio y *c*, el menor, por lo que satisfacen la desigualdad $a > b > c$. Ya puede anticiparse que *b* será la media aritmética, geométrica o armónica de las otras dos cantidades.

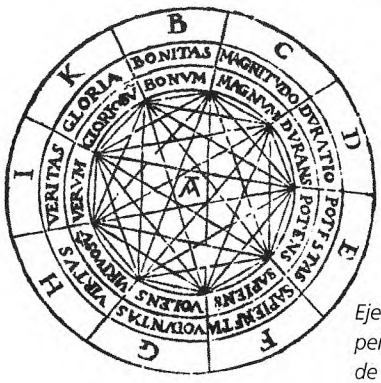
La media aritmética satisface que la diferencia entre los términos contiguos es igual. Esto es: $a - b = b - c$. Esto sucede cuando $b = (a + b) / 2$, expresión que se puede deducir de la primera ecuación anterior.

La media geométrica satisface que las proporciones entre los términos contiguos son iguales. Esto es $a/b = b/c$. Esta igualdad implica que $ac = bb$, por lo tanto, $b = \sqrt{(a \cdot c)}$.

La media armónica satisface que, en palabras de Boecio, la relación entre el mayor y el menor es la proporción entre la diferencia entre el mayor y el medio contra la diferencia entre el medio y el menor. La expresión matemática de esta relación sería: $a/c = (a - b)/(b - c)$. De esta expresión puede obtenerse la igualdad $a\,(b - c) = c\,(a - b)$, de la que se obtiene también $ab - ac = ca - cb$; o de forma equivalente: $ab + cb = 2ac$. Puede aislarse *b* de esta última ecuación para obtener $b = 2ac/(a + c)$, lo que da ya una expresión para la media armónica en términos de *a* y *c*, aunque es más frecuente la expresión $b = 2 / (1/a + 1/c)$, que se obtiene de la anterior dividiendo numerador y denominador por *ac*.

Ramon Llull

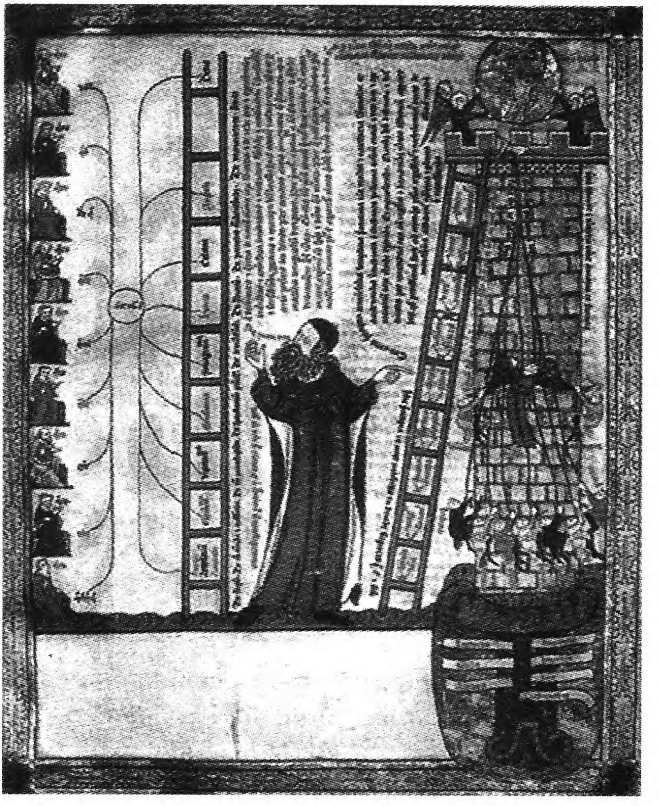
En su obra *Ars Magna et Ultima* Ramon Llull presentó su sistema lógico para demostrar las verdades científicas con el propósito de dotarse del necesario armamento intelectual para discutir con los musulmanes de forma objetiva la supremacía de la



Ejemplo de círculo luliano perteneciente a la Ars Magna *de Ramon Llull.*

religión cristiana; es decir, desarrolló una lógica para justificar sus razonamientos. Uno de sus ingenios era el *círculo luliano*, que conjuntaba discos con conceptos y permitía generar todas las combinaciones correctas –consideradas inferencias válidas– sobre el tema del círculo.

La novedad de la lógica de Llull se encontraba en que estaba orientada al estudio de las propiedades de los conceptos; por lo tanto, podía entenderse como una lógica sintética en un momento histórica e intelectualmente dominado por la lógica analítica. Este punto de vista diferente interesó a pensadores como Giordano Bruno (1548-1600) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que retomaron las ideas de Llull en el marco de la filosofía. Leibniz las empleó en su gran obra *De Arte Combinatoria*, publicada en 1666. Y, de hecho, esa línea de pensamiento ha llegado hasta nuestros días, pues no en vano se basan en ella los sistemas lógicos que fundamentan numerosas herramientas informáticas actuales.



Miniatura extraída de la Ars Magna *de Ramon Llull.*

LÓGICA ANALÍTICA Y LÓGICA SINTÉTICA

El filósofo Immanuel Kant (1724-1804) expuso la distinción entre lógica sintética y analítica en su obra *La crítica de la razón pura*. La distinción se construye sobre la dicotomía de si el concepto del predicado está contenido o no en el concepto del sujeto. Se dice que una proposición es analítica cuando hay contención, y que es sintética cuando no la hay. Por ejemplo, la proposición «todos los triángulos tienen tres lados» es analítica porque el hecho de tener tres lados está contenido en la definición de triángulo. Cuando no es así, la proposición es sintética. Lo es, por ejemplo, «algunos profesores suspenden mucho». En 1951, el estadounidense Willard van Orman Quine (1908-2000), filósofo analítico y maestro de Noam Chomsky, se atrevió a discutir esta distinción.

La anticipación de Ramon Llull respecto a la ciencia moderna no se limita a su pensamiento lógico. Llull también desarrolló un sistema electoral con el objetivo de escoger cargos para la Iglesia. Lo describe en su *Blanquerna*, aplicado a la elección de una abadesa, y en su forma académica lo desarrolla en las obras *Ars Electionis* y *Artifitium Electionis Personarum*. Sus ideas al respecto tuvieron gran influencia en el cardenal Nicolás de Cusa (1401-1464), filósofo y teólogo que está considerado el padre de la filosofía alemana. De hecho, los sistemas de elección que ambos propusieron acabaron dando lugar a los sistemas modernos: el sistema electoral de Llull satisface los criterios del sistema de Condorcet, de 1785, y Cusa se emparenta con el recuento de Borda, de 1770. Todos estos sistemas buscaban escoger el elemento preferido por un grupo de gente a partir de las preferencias de cada uno de los miembros.

La introducción de los números arábigos

Desde su lejano origen en la India, el sistema de numeración que hoy conocemos entró en Europa a través de los musulmanes que venían del norte de África, lo que explica su denominación de «números arábigos». El sistema fue fijado y desarrollado por el sabio persa Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.

Gerbert de Aurillac, que adoptó el nombre de Silvestre II cuando fue elegido Papa, jugó un papel primordial en el proceso, favoreciendo la reintroducción del ábaco en Europa y promoviendo los numerales arábigos. El ábaco de Aurillac era un instrumento renovado que, a diferencia de los ábacos romanos, estaba basado en nueve símbolos numéricos y representaba el cero con una columna vacía. Su empleo se generalizó

en Europa en el siglo XI, aunque el ábaco con numerales arábigos no sustituyó al de números romanos, puesto que se consideraba que el ábaco era un método de cálculo pero que los números romanos eran la única forma posible de escribir los resultados.

Pero la responsabilidad fundamental de la difusión de los números arábigos corresponde, sin duda, a Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. Su obra capital es *Hisāb al-ŷabr wa'l muqābala (Compendio de cálculo por el método de completado y balanceado)*. Se trata de un texto anterior y mucho más importante que los *Principios de cálculo indio* de Kūshyār ibn Labbān, del que lamentablemente no se conserva ninguna versión en árabe, sino sólo versiones latinas posteriores, de los siglos XII y XIII. La magnitud de su aportación a la historia de las matemáticas se percibe ya sólo en el título: *al-ŷabr* daría lugar a la palabra «álgebra», y el propio nombre del autor a los términos «algoritmo» y «guarismo», sinónimo de dígito.

GERBERT DE AURILLAC (946-1003)

El futuro Silvestre II dejó el monasterio de Saint Gerald de Aurillac para seguir al conde de Barcelona, Borrell II, hasta el monasterio Santa María de Ripoll, donde estudió matemáticas durante tres años. En esa época, viajó a Córdoba y Sevilla, y allí aprendió matemáticas y astronomía de manos de los árabes, pero, sobre todo, se convenció de la excelencia de la numeración que éstos empleaban.

Gerbert de Aurillac escribió numerosas obras sobre matemáticas y astronomía, orientadas sobre todo al *quadrivium*, es decir, que escribía para los estudiantes, no para los eruditos. Sus obras se encuentran en el volumen 139 de la *Patrología Latina*, la colección que recoge los escritos de los Papas desde Tertuliano (160-220) hasta Inocencio III (1160-1216). Además de reintroducir el ábaco, Gerbert de Aurillac también recuperó la esfera armilar con el fin de que sirviera de ayuda a los estudiantes.

Estatua dedicada al Papa Silvestre II en el municipio francés de Aurillac.

MUHAMMAD IBN MUSA AL-KHWARIZMI (780-850)

Se tienen pocos datos precisos sobre la vida de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi; incluso se discute su lugar de nacimiento. Matemático, astrónomo y geógrafo, al-Khwarizmi está considerado el padre del álgebra y el introductor de nuestro sistema de numeración. Se educó y trabajó en la Casa de Sabiduría de Bagdad, una institución de investigación y traducción que se ha comparado con la Biblioteca de Alejandría. Allí se compilaron y tradujeron al árabe las grandes obras científicas y filosóficas griegas e indias; además, el lugar contaba con un avanzado observatorio astronómico. Al-Khwarizmi escribió multitud de obras, muchas de ellas de importancia fundamental para la historia de la ciencia, y también redactó una historia política. La exuberancia de su aproximación al conocimiento hace que esté considerado uno de los grandes sabios de la antigüedad.

Sello dedicado a Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi que fue emitido por la Unión Soviética en 1983.

Además de su tratado de álgebra, escribió una aritmética, titulada *Kitab al-Ŷamaa wa al-Tafriq bi Hisab al-Hind* (*Libro de la suma y de la resta, según el cálculo indio*), en la que se describe en detalle el sistema indio de numeración posicional en base 10 y los métodos para realizar con él las operaciones aritméticas principales. Posiblemente, al-Khwarizmi fue el primero en utilizar el cero como indicador posicional, lo que muestra en su aritmética. Las traducciones latinas de esta obra se expandieron por Europa y fueron ampliamente utilizadas a lo largo de los siglos en las universidades del continente bajo el título *Algoritmi de Numero Indorum*.

La expansión de los números arábigos

La introducción en Europa de los números arábigos no fue fácil ni rápida, y, desde luego, no estuvo exenta de polémicas. La ciudad de Florencia prohibió su uso con el argumento de que hacían muy sencillo falsificar los balances. Durante varios siglos estuvieron enfrentados abacistas y algoristas. Estos últimos acabarían llevándose la victoria, pero no sería hasta mediados del siglo XVI.

Los abacistas defendían el uso de los números romanos, que eran más prácticos para ser utilizados con los ábacos. Por su parte, los algoristas apoyaban los números arábigos, más difíciles de emplear con el ábaco, pero más útiles sobre papel; la historia les ha denominado algoristas pues la operación sobre papel es algorítmica en el sentido de que se sigue un algoritmo para operar. Ambos bandos difundían sus propios tratados sobre cómo emplear el ábaco, en un caso, y sobre cómo operar con lápiz y papel (o soportes parecidos, como pergamino o pizarra), en el otro. Los textos de los abacistas daban poca importancia al cero y primaban la multiplicación y la división entre todas las operaciones; también se centraban en fracciones duodecimales. Los algoristas, como es lógico, ensalzaban la utilidad del cero, consideraban y favorecían la realización de muchas más operaciones (suma, resta, multiplicación, división, dividir y multiplicar por dos y las raíces) y se centraban en las fracciones sexagesimales.

Al final, como siempre, el dinero lo decidió todo. La balanza se empezó a inclinar en Italia a favor de los algoristas, donde poco a poco iba quedando claro que los números arábigos eran mucho más útiles para el comercio pues operar con ellos en papel era mucho más fácil. El entusiasmo italiano por la numeración arábiga fue contaminando al resto de Europa: los nuevos métodos de operación se introdujeron en Alemania en el año 1200, llegaron a Francia hacia 1275 y arribaron a las costas de Inglaterra en el año 1300.

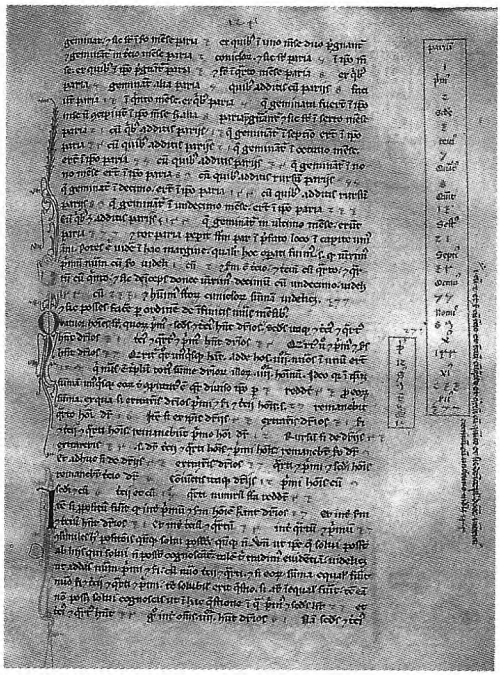
El epicentro del terremoto italiano que propagó los números arábigos, causando la revolución en las matemáticas, tiene un nombre propio: Leonardo de Pisa, a menudo más conocido como Fibonacci. El *Liber Abaci* de Fibonacci mostraba las aplicaciones comerciales de la aritmética y para ello presentaba los numerales arábigos y los algoritmos para operarlos con el propósito explícito, según rezaba el prefacio, de que se emplearan en Italia por su gran utilidad. El *Libro del Ábaco* fue el primer libro escrito en Europa que utilizaba los números arábigos.

El *Liber Abaci* puso los pilares de un nuevo género de obras matemáticas que se convirtieron en las más populares desde el siglo XIV hasta mediados del XVI: las aritméticas mercantiles, los tratados de aritmética centrados en aplicaciones y problemas del comercio. La proliferación de estas aritméticas está asociada a la expansión de las escuelas de ábaco, sobre todo en Italia. En 1340 había en Florencia seis escuelas de ábaco, que tenían unos 1.200 estudiantes (una cifra muy considerable si se tiene en cuenta que la ciudad contaba con una población de 100.000 habitantes). Estas escuelas, como la de Galigai en Florencia, que está bien documentada, enseñaban a estudiantes de diez u once años la aritmética básica durante un periodo de dos o tres años. Los estudiantes provenían normalmente de una escuela de gramática en la que

LEONARDO DE PISA (1170–1250)

Leonardo de Pisa, *Fibonacci*, era hijo de Guglielmo Bonacci, un comerciante italiano establecido en Bugía, de ahí su nombre: Fibonacci era la abreviatura de *figlio di Bonacci*. Leonardo aprendió junto a su padre el sistema de numeración arábigo y las operaciones, pero después, deseoso de ampliar sus conocimientos, viajó por Egipto, Siria y Bizancio y profundizó en el estudio de las matemáticas árabes. Su obra escrita recoge y expone el caudal de conocimiento que adquirió en sus viajes. Además del importante *Liber Abaci*, escribió *Liber Quadratorum* (1225), centrado en el álgebra, *Practica Geometriae* (1223) y muchos otros.

habían empezado a leer y a escribir desde los cinco o los siete años. Tras la escuela de ábaco, con trece o catorce años, los estudiantes entraban como aprendices en talleres, casas de cambio, etc. Unos pocos elegidos se ahorraban comenzar a trabajar y se dedicaban a estudiar a los clásicos.



Página perteneciente al Liber Abaci *de Fibonacci.*

Las aritméticas mercantiles y las escuelas de ábaco influyeron en el desarrollo matemático de la época. A menudo los autores de las obras o los profesores de las escuelas eran llamados para resolver problemas prácticos, como el caso de Giovanni di Bartolo, profesor de una academia de ábaco en Florencia, que colaboró con sus cálculos en la construcción de la cúpula de la catedral en el año 1420. Sin embargo, esta actividad matemática práctica sucedía de forma independiente a la actividad académica de las universidades. En realidad, no existía prácticamente ninguna relación entre los profesores en las escuelas de ábaco y los profesores del ámbito universitario. La mayoría de universidades continuaban con la tradición clásica de la aritmética de Boecio y los números romanos.

La propagación de los números arábigos estuvo ligada también a otros oficios relacionados con el comercio. Aparecen en los manuales de mercadería medieval, que incluían aritméticas, como los italianos, denominados *Pratice della mercatura*. Los más conocidos son el *Libro di divisamenti di apesi e di misure di mercantie*, de Francesco Balducci Pegolotti, publicado en la primera mitad del siglo XIV, el de Antonio da Uzzano (1442) y el de Giorgio di Lorenzo Chiarini (1458).

Las aritméticas mercantiles eran muy populares, pero a causa del elevado precio de los libros de texto se hallaban fuera del alcance de los estudiantes, aunque estuvieran relacionadas con las escuelas de ábaco y quizás éstas emplearan algún ejemplar. Se cree que en realidad eran libros de referencia que se encontraban en las casas comerciales, donde, en cierto modo, actuaban como legitimadores de la profesión mercantil. El primer libro de tema matemático impreso en la historia es la llamada *Aritmética mercantil de Treviso*, ciudad italiana donde fue publicado en 1478. La segunda

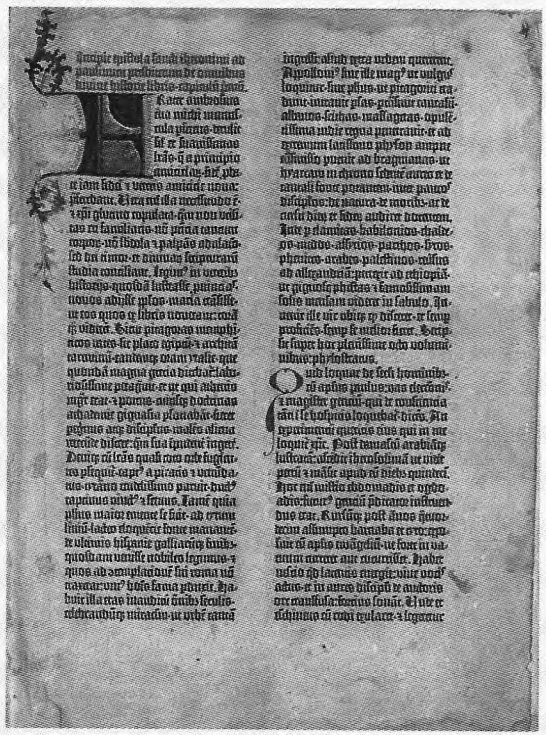
LAS MATEMÁTICAS EN LA ÉPOCA DE TRANSICIÓN

La época que siguió a la publicación del *Libro del Ábaco* se considera una etapa de transición entre un sistema y otro, un cambio de modelo. Los estudiosos han hecho un intento de clasificación para poner algo de orden en la nebulosa de libros y tratados que se publicaron en aquella época. Así, se han identificado cuatro tipos de obras:

- Los tratados teóricos, que seguían los escritos de Boecio.
- Los ábacos aritméticos, que describían la computación mediante ábacos.
- Los algoritmos, que utilizaban la numeración arábiga y describían cómo calcular mediante papel. Estaban basados en los trabajos de al-Khwarizmi.
- Los cómputos, que describían los sistemas de cálculo para determinar el calendario eclesiástico.

LA IMPRENTA

La invención de la imprenta con caracteres móviles está atribuida a Johannes Gutenberg (1398-1468), quien hacia el año 1450 desarrolló esta máquina en la ciudad alemana de Maguncia. Los primeros textos fueron impresos entre 1449 o 1450, cuando se editó el *Misal de Constanza* –libro que está considerado como el primero en ser impreso con tipos móviles–, y 1454 o 1455, cuando finalizó la impresión de la famosa Biblia de 42 líneas, expresión que hace referencia al número de líneas que contiene cada página. Su número total de páginas era de 1.282, que eran divididas en diversos volúmenes (normalmente, dos). En la actualidad se conocen 48 copias de la Biblia de Gutenberg, cuyo precio, en el momento de su impresión, era el equivalente al salario de tres años de un empleado medio. A pesar de la trascendencia imposible de cuantificar de la imprenta con caracteres móviles –que dio inicio a la impresión masiva de textos y es, por lo tanto, protagonista de una de las más profundas revoluciones culturales que ha visto el hombre–, Johannes Gutenberg murió completamente arruinado.



Página perteneciente a la Biblia impresa por Gutenberg.

posición de la lista la ocupa la obra *Summa de l'art d'aritmètica*, de Francesc Santcliment, publicada en Barcelona en catalán en 1482, que además fue la primera en su género impresa en la Península Ibérica. El *Rechenbuch* de Ulrich Wagner, publicado en Bamberg (Baviera) en 1483, figura en tercer lugar.

Grabado perteneciente a la Margarita philosophica *(1508) de Gregor Reisch, y que muestra a Boecio y Pitágoras en plena competición de cálculo bajo la supervisión de Aritmética. Obsérvese que Boecio, a la izquierda, calcula con números arábigos, mientras que Pitágoras emplea para ello un ábaco.*

Testimonio de la importancia que se concedía en aquel momento a las aritméticas mercantiles por encima de los textos estrictamente matemáticos es el hecho de que la obra incuestionable de Euclides, los *Elementos*, no fuera impresa hasta 1482, en traducción latina y con el título *Elementa Geometriae*. La *Aritmética* de Boecio no se imprimió hasta 1488. La primera álgebra impresa fue la *Summa de Arithmetica, Geometrica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* de Luca Pacioli,

que se publicó en Venecia en 1494, y a su vez generó durante todo el siglo XVI una larga serie de textos explicativos muy populares por necesarios, pues el nivel de la obra de Pacioli era considerablemente elevado. No obstante, y a pesar de la importancia de estas ediciones, en aquellos años la mayoría de libros publicados fueron aritméticas mercantiles.

Retrato del matemático Luca Pacioli realizado por Jacopo de'Barbari hacia 1496.

UN PROBLEMA DE ARITMÉTICA COMERCIAL

El manuscrito 102 (A. III 27) de la Biblioteca degl'Intronati de Siena es uno de los cuatro manuscritos dedicados a la aritmética comercial anteriores al año 1500 que han llegado hasta nuestros días. En él figura el siguiente problema, que mostramos a modo de ejemplo: «Si quieres saber de un hombre cuánto dinero tiene en la bolsa haz así: supón que tiene 4, dile que los doble y serán 8, y después que añada 5 y serán 13, después que lo multiplique todo por 5 y serán 65, que añada 10 y serán 75, entonces que lo multiplique por 10 y serán 750; ahora que reste 350 y serán 400, que corresponden a 4, y como cada centenar corresponde a un número, así pues 400 serán 4».

Las fracciones y los decimales

Cuando los números arábigos llegaron a Occidente sólo representaban números enteros. Los números fraccionarios se continuaron representando en la base sexagesimal, como en Babilonia. Kūshyār ibn Labbān describe el procedimiento en su libro *Principios de cálculo indio*, mostrando los números como grados: 1/60 como minutos (*daqā'iq*), $1/(60^2)$ como segundos (*thawānī*), $1/(60^3)$ como terceros (*thawālith*), $1/(60^4)$ como cuartos (*rawābi'*), etc. Las medidas se indicaban ya con los símbolos que tan familiares nos resultan hoy día: los grados se indicaban con °, los minutos con ', los segundos con '', los terceros con '''...

No fue hasta el siglo XVI cuando Simon Stevin escribió un tratado en el que subrayaba la importancia de la notación decimal, incluso en las fracciones, e inició una campaña frente a los gobernantes para que se adoptara este sistema. Antes de Stevin, la notación decimal ya se había utilizado para las fracciones, pero no de forma general. El matemático y astrónomo persa Ghiyath al-Kashi (1380-1429), de la gran academia de Samarcanda, lo empleaba ya un siglo antes en sus importantes trabajos de trigonometría y cálculo del número π. Al-Kashi también conocía el llamado triángulo de Pascal o Tartaglia.

SIMON STEVIN

El matemático, ingeniero, físico, e incluso semiólogo flamenco Simon Stevin (1548-1620) publicó en 1585 *De Thiende* (*El decimal*), tratado que versaba sobre la notación decimal y cómo realizar cálculos con ella. Fue el primer matemático que reconoció la validez de los números negativos, al aceptarlos como resultado de los problemas con los que trabajaba. También desarrolló el algoritmo para obtener el máximo común divisor de dos polinomios. Escribió todas sus obras en neerlandés con el objetivo de poder ser entendido por los artesanos, por lo que sus textos fueron muy populares y se vendieron con facilidad, favoreciendo el éxito de la notación decimal.

El número π

Como ya se ha mencionado, el persa al-Kashi contribuyó también al cálculo de los decimales de π. Si Zu Chongzhi los calculó utilizando el polígono regular de $12.288 = 3 \cdot 2^{12}$ lados, al-Kashi lo hizo hasta un polígono de $805.306.368 = 3 \cdot 2^{28}$ lados, lo que le permitió obtener 14 decimales correctos hacia el año 1430.

Los matemáticos al-Kashi y Ludolph van Ceulen ampliaron los decimales del número π hasta entonces conocidos.

El profesor de la Universidad de Leyden, Ludolph van Ceulen, prosiguió los cálculos de al-Kashi, y en 1596 obtuvo 20 decimales correctos con un polígono de $515.396.075.520 = 60 \cdot 2^{33}$ lados. Más tarde, en 1615, obtuvo 35 decimales correctos con un polígono de $4.611.686.018.427.387.904 = 2^{62}$ lados.

El sistema de aproximar el número π mediante polígonos daba buenos resultados con muchos decimales, pero numerosos matemáticos creían que era posible encontrar alternativas más eficientes. Se consideró la posibilidad de encontrar π como resultado de sumar o multiplicar una serie de infinitos términos. El primero en encontrar una expresión de este estilo en Europa fue François Viète, uno de los

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603)

Viète fue abogado y parlamentario, pero sobre todo un matemático de reconocido prestigio, pionero en la representación de los parámetros de una ecuación con letras. Brilló en el desciframiento de códigos secretos mediante técnicas estadísticas, y supo descifrar el código español, que era muy complejo, lo que dio ventaja a los franceses en sus guerras contra España. Poco antes de morir escribió un memorándum sobre criptografía que dejó obsoletos los métodos de cifrado de su época.

padres del álgebra moderna, que desconocía, no obstante, la expresión de Madhava de Sangamagrama explicada en el capítulo anterior. La construcción de Viète se basaba en un producto de infinitos términos que jugaban con la raíz cuadrada de 2. Aunque no permitía encontrar decimales de π con comodidad, la definición abrió nuevas vías para aproximarse al esquivo número con un mayor número de decimales. En todo caso, se trató del primer producto infinito de la historia de las matemáticas que daba una expresión de π. La expresión era como sigue:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdots$$

Capítulo 3

Los primeros instrumentos mecánicos de cálculo

La introducción de los números arábigos permitió mejorar el cálculo, y la ciencia humana siguió evolucionando. En el siglo XVIII un prolongado proceso produjo cambios decisivos en la visión del universo, el método científico y la concepción misma de la ciencia occidental. Este momento se ha denominado a menudo como la «revolución científica», y abrió la puerta a la Ilustración, ya en el siglo XVIII. El pensamiento humano evolucionaba muy rápidamente. La ciencia generaba nuevos cálculos y azuzaba el desarrollo de instrumentos cada vez más poderosos, sofisticados y precisos para hacerlos. Como el cálculo manual está siempre sujeto a errores, el objetivo de reducir la intervención humana al mínimo con el fin de evitarlos espoleaba la mecanización de los instrumentos de cálculo. En los trescientos años que abarcan los siglos XVII, XVIII y XIX, se construyeron así los primeros instrumentos mecánicos de cálculo.

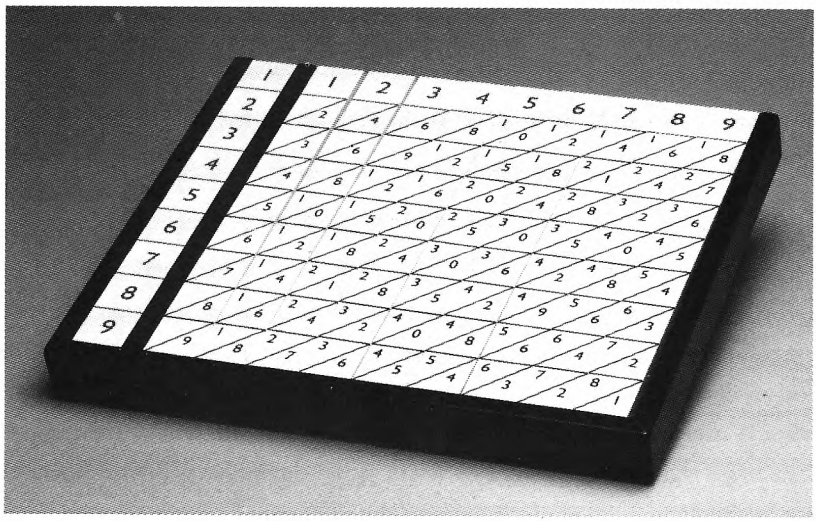
El siglo XVII

En 1617 el matemático escocés John Napier inventó una de las primeras herramientas de cálculo, un ábaco conocido como «los huesos de Napier». El instrumento era tan eficaz que en algunos lugares fue utilizado hasta principios del siglo XX.

JOHN NAPIER (1550-1617)

El matemático John Napier descubrió la teoría de los logaritmos, que él llamó «números artificiales» y dio nombre a los logaritmos neperianos. Muy interesado en la teología, aplicó el formalismo matemático para interpretar el Apocalipsis de San Juan, lo que le permitió calcular que el fin del mundo llegaría entre los años 1688 y 1700.

Los huesos de Napier estaban construidos sobre un concepto en realidad muy sencillo, pues, de hecho, constituían una suerte de tabla de multiplicar. Se trataba de diez barritas de madera con sección cuadrada, numeradas del 0 al 9 que incluían nueve espacios en los que se encontraban los nueve múltiplos del número, expresados mediante dos cifras separadas con una barra inclinada, como se puede apreciar en la figura.



Reconstrucción moderna de los huesos de Napier.

Para ver un ejemplo de operación con este instrumento, consideremos la multiplicación de 35.672, un número que permite jugar con todas las barras. Se deben colocar en secuencia las barritas correspondientes a los cinco dígitos del número, es decir, primero la barrita numerada como 3, a continuación la 5, después la 6, la 7 y la 2. La simple observación de las barras en esta disposición ya muestra todas las posibilidades de multiplicación de 35.672 por cualquier número del 1 al 9, que aparecen en cada fila. Por lo tanto, para multiplicar 35.672 por 4 se toman los números que aparecen en la fila 4, que en este caso corresponden a:

$$1/2 \quad 2/0 \quad 2/4 \quad 2/8 \quad 0/8.$$

Entonces, se suman los números contiguos entre las divisiones inclinadas:

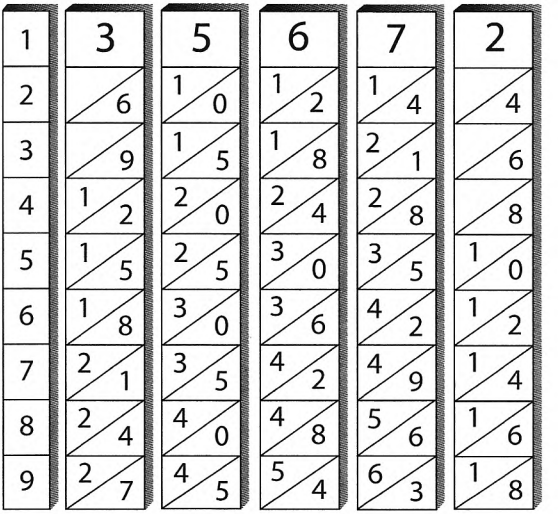
$$1/2 + 2/0 + 2/4 + 2/8 + 0/8.$$

De donde se obtiene:

$$1 / 4 / 2 / 6 / 8 / 8.$$

Es decir, 142.688. Se puede comprobar este resultado a mano o con calculadora; en todo caso, corresponde al producto 35.672 por 4:

$$35.672 \cdot 4 = 142.688.$$



Los huesos de Napier utilizados para multiplicar 35.672 por 4.

En el caso de la multiplicación por números de varias cifras, la operación es esencialmente la misma que se realiza en la actualidad, es decir, se multiplica cada dígito del segundo número por el primer número, y después se suma. Para obtener las multiplicaciones parciales, se aplica el sistema básico. Debe observarse que todas las multiplicaciones parciales necesarias se encuentran en las mismas tablillas. Por ejemplo, para multiplicar 35.672 por 436, se realizarán los cálculos anteriores para las filas 4, 3 y 6 de las tablillas. De ellas se obtendrá los números que siguen, que se deberán presentar alineados de acuerdo con las divisiones inclinadas de las tablillas.

1/2 2/0 2/4 2/8 0/8
0/9 1/5 1/8 2/1 0/6
1/8 3/0 3/6 4/2 1/2

Con los números dispuestos de esta manera, es posible realizar la multiplicación de 35.672 por 436 como la suma de los resultados de las multiplicaciones parciales, lo que se muestra a continuación situando primero los resultados de las multiplicaciones parciales, después las sumas parciales de acuerdo con las disposiciones en diagonal, y finalmente la propagación del acarreo.

$$
\begin{array}{r}
1/2\ \ 2/0\ \ 2/4\ \ 2/8\ \ 0/8 \\
0/9\ \ 1/5\ \ 1/8\ \ 2/1\ \ 0/6 \\
1/8\ \ 3/0\ \ 3/6\ \ 4/2\ \ 1/2 \\
\hline
1\ /\ 4\ /\ 13\ /\ 23\ /\ 21\ /\ 19\ /\ 9\ /\ 2 \\
\hline
1\ /\ 5\ /\ 5\ /\ 5\ /\ 2\ /\ 9\ /\ 9\ /\ 2
\end{array}
$$

Realizando la operación con una calculadora, puede comprobarse una vez más que el resultado es perfectamente correcto:

$$35.672 \cdot 436 = 15.552.992.$$

Puede verse que las filas calculadas corresponden a las que se obtendría con el algoritmo de multiplicación que se conoce hoy en día. Estos resultados parciales son:

$$
\begin{array}{rr}
 & 35.672 \\
\times & 436 \\
\hline
 & 214.032 \\
 & 107.016 \\
 & 142.688 \\
\hline
 & 15.552.992.
\end{array}
$$

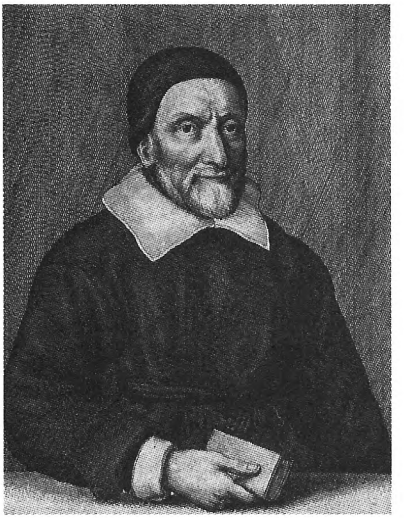
Pero los huesos de Napier no sólo ayudan a realizar multiplicaciones. La división de un número de varias cifras por otro se realiza mediante la colocación de las tablillas correspondientes a las cifras del divisor. Entonces, los múltiplos del divisor aparecen en las diferentes líneas de las tablillas, con lo cual se puede determinar más fácilmente las cifras del resultado.

John Napier es el padre también de otro descubrimiento de importancia capital para el cálculo: los logaritmos. El escocés descubrió que mediante los logaritmos las operaciones más complejas podían transformarse en operaciones más sencillas. La multiplicación se transformaba en una suma; la división se convertía en una resta; la exponenciación, en una multiplicación, y las raíces, en divisiones. Esta simplificación del cálculo era fundamental para realizar operaciones complejas a mano y dio un espaldarazo decisivo a la ciencia de las matemáticas.

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$
$$\log(a^b) = b \cdot \log(a).$$

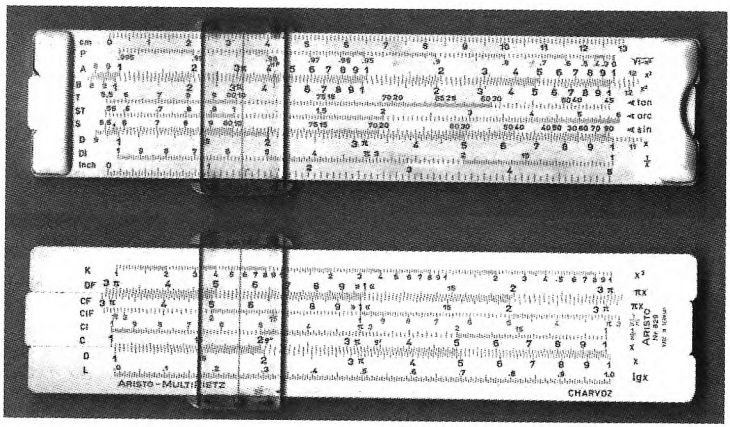
Por tanto, para calcular $a \cdot b$ es suficiente calcular $e^{\log(a)+\log(b)}$.

Los logaritmos fueron la base de la regla de cálculo, otro gran instrumento de cálculo que desarrolló el matemático británico William Oughtred (1574-1660), introductor del símbolo $\times$ para la multiplicación y *sin* y *cos* para las funciones seno y coseno. Este matemático trabajó a partir de una herramienta anterior de Edmund Gunter, un instrumento que utilizaba una única escala logarítmica, mientras que las reglas de cálculo combinaban dos de ellas. Más tarde, en 1859, el francés Amédée Mannheim introdujo las mejoras que le dieron la forma moderna.



Retrato de William Oughtred, quien está considerado como el inventor de la regla de cálculo.

Las reglas de cálculo no se empleaban para hacer sumas y restas, sino que eran más adecuadas, y, de hecho, ésa era su principal utilidad, para realizar las operaciones de producto y división; las más modernas eran capaces incluso de hacer operaciones como raíces, funciones trigonométricas, exponenciales y logaritmos. Debe decirse, sin embargo, que la precisión de este sistema era limitada. Por lo común, se utilizaban los tres dígitos más significativos, aunque reglas más precisas, y de tamaño superior, lograban una mayor precisión. El operador debía tener en cuenta las magnitudes, pues éstas se ignoraban al operar con la regla. Las reglas de cálculo fueron utilizadas como herramienta de cálculo científico hasta que el desarrollo de las calculadoras electrónicas de bolsillo las dejó obsoletas a partir de la década de 1970.

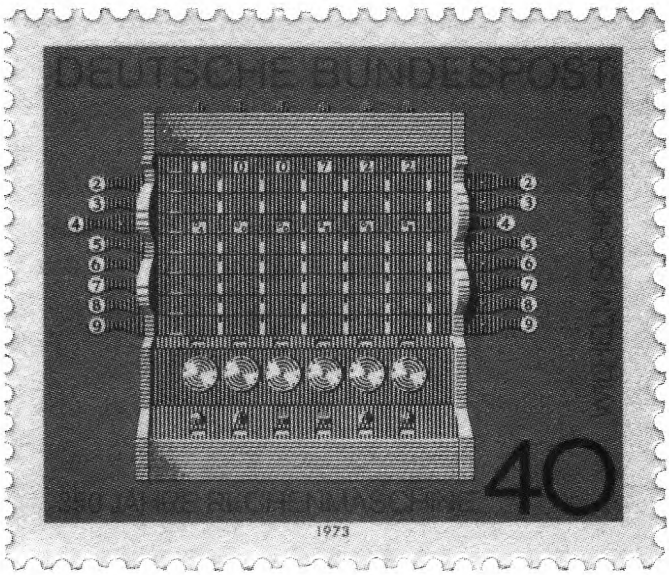


Un modelo de regla de cálculo de la década de 1960, cuando estas herramientas pronto serían sustituidas por las calculadoras.

Las primeras calculadoras

La primera calculadora electrónica de bolsillo llegó en 1972 y fue el célebre modelo Hewlett-Packard HP-35. Hasta este punto, el presente libro ha estado narrando la evolución del cálculo y su automatización, es decir, la evolución de la base teórica que condujo al asombroso resultado de una pequeña calculadora que cabe en una mano, y, como consecuencia ulterior, al desarrollo de la informática que domina nuestros días. Pero lo cierto es que no hace falta llegar hasta el siglo xx para recolectar el producto concreto que había sembrado toda la teoría precedente. La que se considera la primera calculadora de la historia se desarrolló ya en el siglo xvii, en el marco de la eclosión de los instrumentos mecánicos de cálculo de la que estamos

hablando. Se llamó el «reloj calculador» y lo creó Wilhelm Schickard (1592-1635) en el año 1623, en Tubinga.



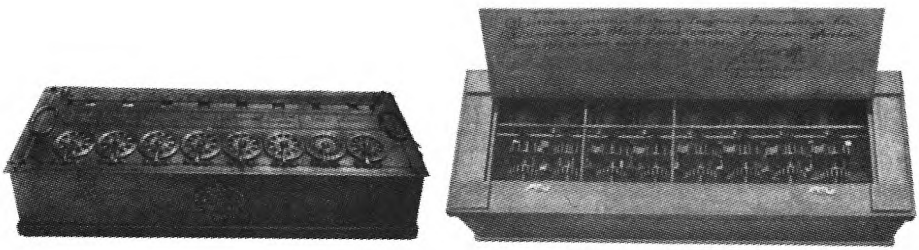
Sello alemán dedicado al «reloj calculador» de Wilhelm Schickard.

La primera calculadora del mundo permitía realizar las cuatro operaciones aritméticas básicas. La suma y la resta se realizaban de forma completamente mecánica, pero no era del todo así en el caso de la multiplicación y la división, que necesitaban del operador humano para pasos intermedios. La máquina operaba mediante elementos parecidos a los huesos de Napier, y realizaba el acarreo de forma mecánica mediante una serie de ruedas dentadas que incrementaban, por ejemplo, el contador de decenas cuando se completaba una vuelta de las unidades. Este procedimiento de acarreo por ruedas se había utilizado en Europa desde el siglo XVI, como mínimo, para construir podómetros, que permiten contar el número de pasos realizados y, a partir de ello, inferir las distancias recorridas. El podómetro más antiguo conocido fue una invención del francés Jean Fernel realizada en el año 1525.

La calculadora de Schickard no tuvo un gran impacto en la historia de la computación porque su inventor murió víctima, al parecer, de una de las terribles plagas que azotaron Europa en aquella época y la máquina se perdió y no volvió a ser hallada hasta el siglo XX. Se supo de ella por la correspondencia que su inventor mantuvo con Johannes Kepler, con quien colaboró. En sus cartas incluyó numerosos bocetos

de su ingenio; gracias a ellos se ha podido reconstruir y comprobar que realmente funcionaba. En una carta, Kepler afirma que había pedido una copia de la calculadora a su amigo y colaborador Schickard.

La «Pascalina», la calculadora que inventó Blaise Pascal, fue la primera que entró en la historia por la puerta grande. El filósofo y genio matemático la presentó en público en 1642, cuando tenía 19 años. El mecanismo era parecido al de Wilhelm Schickard; también operaba incrementando una unidad superior a partir de una vuelta completa de la unidad anterior. Lamentablemente, este sistema de funcionamiento mecánico causaba problemas, porque a veces las ruedas dentadas no encajaban adecuadamente.



La Pascalina inventada por Blaise Pascal.

Se ha podido comprobar que Pascal desarrolló su invento de forma independiente a las evoluciones de Wilhelm Schickard. De hecho, la Pascalina era más sencilla y sólo permitía sumar y restar, teniendo en cuenta para la resta el complemento del número a restar. La primera versión podía operar cinco dígitos, a diferencia de los seis de la máquina de Schickard, aunque se hicieron versiones posteriores que permitían operar con más dígitos. Algunas de las calculadoras fueron puestas a la venta, pero su elevado coste impidió que fuera un éxito comercial para la familia Pascal. La Pascalina acabó reducida a un juguete que simbolizaba estatus para las clases acomodadas de Francia y Europa. Pascal siguió mejorando su diseño durante toda una década, en la que creó hasta cincuenta versiones más.

A pesar de sus fallos y limitaciones, la contribución de estos primeros ingenios fue determinante, pues a partir de su aparición estalló en toda Europa una furia inventora que impulsó a matemáticos e ingenieros a intentar diseñar y construir más y mejores calculadoras mecánicas. Algunas de ellas aportaron soluciones técnicas que superaban a la Pascalina, mientras que otras proponían simples variaciones. El inglés Samuel Morland (1625-1695), por ejemplo, construyó una máquina de cálculo adaptada al sistema de moneda inglés, que no es decimal, con centavos, chelines y libras. A diferencia de la

BLAISE PASCAL (1623-1662)

El matemático, físico, filósofo y teólogo francés Blaise Pascal está considerado el padre de las computadoras junto con Charles Babbage. Fue un niño prodigio: con sólo 11 años escribió un pequeño tratado sobre los sonidos de cuerpos en vibración y una demostración independiente de que los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos. Con 12 años, estudió a Euclides y atendió a reuniones de los mejores matemáticos y científicos de Europa: Roberval, Desgargues, el propio Descartes... Escribió sus fundamentales tratados sobre geometría proyectiva nada menos que a los 16 años. Cuando Descartes leyó el manuscrito se negó a creer que fuese obra del adolescente. Pascal fue un matemático y físico de primer orden, cuyos logros brillan con fuerza en la ciencia contemporánea.

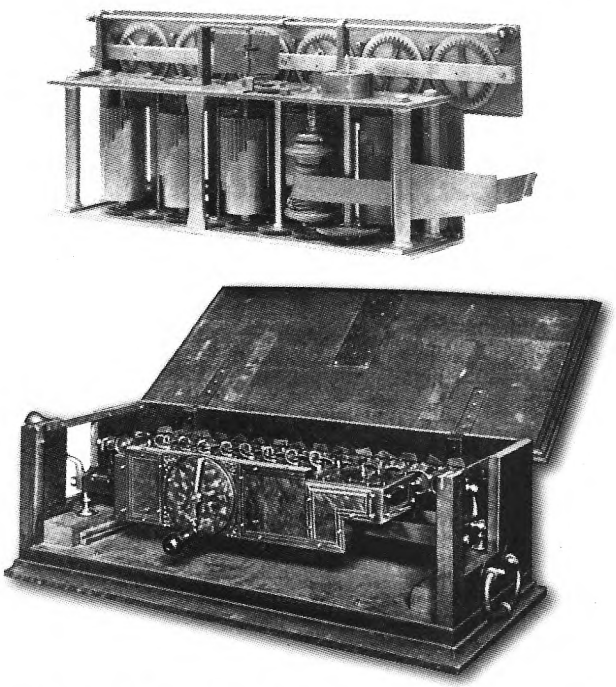
Pascalina, su calculadora no realizaba el acarreo de forma automática. Disponía de una rueda de acarreos por cada unidad, y el propio usuario tenía que acumular los acarreos una vez finalizadas las sumas parciales. El logro más espectacular de Morland fue que consiguió construir una calculadora tan pequeña que podía llevarse en el bolsillo.

Machina Nova
CYCLOLOGICA
Pro Multiplicatione.
OR,
A new Multiplying-
INSTRUMENT:
Invented, and humbly prefented to the Kings moſt Excellent MAJESTY
CHARLES II.
By S. MORLAND, 1666.

El libro The Description and Use of two Arithmetick Instruments, *editado en Londres en 1673, describía la máquina de cálculo inventada por Samuel Morland.*

La calculadora que desarrolló Gottfried Leibniz sí que supuso un gran avance en relación a la máquina de Pascal, ya que permitía hacer la multiplicación de forma automática. Hasta esa fecha la multiplicación mediante calculadora se hacía de forma tediosa con la ayuda del operador humano en los pasos intermedios. Pero el problema era el de siempre: las complicaciones técnicas hacían que las máquinas no acabaran de funcionar del todo. La precisión de las piezas no era suficiente para que la máquina tuviera la fiabilidad necesaria. Aun así, las mejoras que introdujo Leibniz tuvieron un gran impacto en los desarrollos posteriores. Entre ellas, destacan las dos mejoras que permitían multiplicar: el engranaje de Leibniz, un cilindro que soportaba varios engranajes dentados a distancias crecientes, y un carro móvil. De hecho, las mejoras técnicas imprescindibles para que estos ingenios fueran verdaderamente viables y tuvieran alguna razón de ser no se consolidarían hasta 1822, cuando el francés Charles-Xavier Thomas de Colmar inventó, y después comercializó, el Arithmometer.

Pero las aportaciones de Leibniz al cálculo fueron muchas más que la construcción de una calculadora mecánica no del todo precisa. Así, mucho más importante, por ejemplo, fue su trabajo sobre el sistema de numeración binario, que está en la base



El mecanismo interior del Arithmometer de Charles-Xavier Thomas de Colmar (arriba), y la calculadora inventada por Gottfried Leibniz.

de la informática moderna. Este sistema de numeración había sido estudiado con anterioridad por el inglés Thomas Harriot (1560-1621), pero sus ideas no habían sido publicadas. El sistema de numeración binaria emplea sólo dos dígitos, el cero y el uno, a partir de los cuales se representan los números. En la siguiente tabla se muestra la representación binaria de los números del 1 al 16.

0 = 0 decimal	100 = 4 decimal	1000 = 8 decimal	1100 = 12 decimal
1 = 1 decimal	101 = 5 decimal	1001 = 9 decimal	1101 = 13 decimal
10 = 2 decimal	110 = 6 decimal	1010 = 10 decimal	1110 = 14 decimal
11 = 3 decimal	111 = 7 decimal	1011 = 11 decimal	1111 = 15 decimal

Tampoco la influencia de Leibniz se limita al cálculo. El filósofo alemán desarrolló muchos aspectos relacionados con la lógica. Éstos se conocieron póstumamente, ya que, según parece, no estaba del todo satisfecho con los resultados que había conseguido. De hecho, tituló uno de sus trabajos *Post tot logicas nondum Logica qualem desidero scripta est*, que puede traducirse como *Después de tantas lógicas, la lógica que he soñado*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

El pensador alemán Gottfried Leibniz fue uno de los tres grandes racionalistas del siglo XVII, junto a Descartes y Spinoza. Fue matemático, lógico, filósofo, geólogo, historiador e incluso experto en jurisprudencia; también hizo grandes contribuciones a la tecnología y anticipó nociones de biología, medicina, psicología y hasta ciencias de la información. Descubrió el cálculo infinitesimal de manera independiente a Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces. No es posible hacer un recuento integral de sus logros porque hasta el momento no se ha realizado una edición completa de todos sus escritos, desperdigados en diarios, cartas y manuscritos, algunos no publicados. Leibniz estableció una relación entre el sistema de representación binario y la creación del mundo: en su cosmovisión matematizada, de reminiscencias pitagóricas, el cero representaba el vacío y el uno, a Dios.

no se ha escrito todavía. Su objetivo en relación a la lógica era construir un cálculo universal. Pretendía encontrar un sistema para determinar qué tipo de inferencias eran válidas desde un punto de vista lógico. Así, podría aplicar el cálculo lógico a proposiciones científicas arbitrarias. En una de sus obras, afirmaba:

> «Si lo conseguimos, cuando aparezca la controversia, no habrá más necesidad de discutir entre dos filósofos que entre dos matemáticos. Será suficiente tomar plumas y sentarse con el ábaco, diciéndose uno a otro, o si lo desean, llamando a un amigo: calculemos».

La influencia del trabajo de Ramon Llull asoma en estas ideas. De hecho, la obra de Leibniz *Dissertatio de Arte Combinatoria* se inspira en el *Ars Magna* de Llull. Para el alemán, incluso la aproximación al saber divino debía conseguirse mediante una combinación de conceptos básicos. Estos conceptos básicos no definibles deberían expresarse de forma matemática y, a partir de ellos, mediante unas reglas deductivas claras se podrían obtener proposiciones ciertas. Sea como fuere, estos conceptos y procedimientos están en la base de la lógica matemática. Leibniz consideraba que había una relación muy estrecha entre la lógica, las matemáticas y la metafísica. Aseguraba que «mi metafísica es completamente matemática» y que «veo que la verdadera metafísica es difícilmente diferente de la verdadera lógica».

Nuevas expresiones para calcular el número π

A lo largo del siglo XVII diversos investigadores tomaron el testigo sobre el cálculo del número π mediante series infinitas en el punto en el que lo había dejado François Viète, y prosiguieron la misma línea de investigación. Uno de ellos fue el inglés John Wallis (1616-1703), de la Universidad de Oxford. En su obra *Arithmetica Infinitorum*, publicada en 1655, Wallis describió varias expresiones para integrales, y a partir de ellas obtuvo la expresión para el número π que se muestra a continuación:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\ \ldots$$

A partir de una manipulación de esta expresión, el matemático y filósofo William Brouncker (1620-1684), miembro fundador y primer presidente de la Royal Society, construyó en 1658 la fórmula siguiente:

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}}$$

La siguiente expresión importante conocida en Europa procedía de fuera de sus fronteras. Se trataba de la expresión de Madhava de Sangamagrama, que Leibniz redescubrió en 1671 a partir de la expresión de James Gregory para la arcotangente. Recordemos que sus términos eran:

$$\pi /4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots + (-1)^n / (2n + 1) + \ldots,$$

y que se obtenía a partir de la expresión de la función arcotangente:

$$\arctan x = x - (x^3) / 3 + (x^5) / 5 - (x^7) / 7 + \ldots$$

El siglo XVIII

El siglo XVIII ha pasado a la historia como el Siglo de las Luces, la edad de la Razón. No es propósito de este libro, ni mucho menos, poner la Ilustración en tela de juicio, pero lo cierto es que, desde el punto de vista de la computación, no hubo en ella avances que superaran al siglo anterior. Quizá la ciencia del siglo XVII había sido tan brillante que el hombre estaba deslumbrado por todo lo que la luz científica había puesto ante él, y tal vez tenía trabajo suficiente estudiando y considerando lo que se le estaba revelando. Sea como fuere, la computación, la lógica y el cálculo del número π continuaron en estos años la línea de los logros del siglo XVII.

El cálculo del número π en el siglo XVIII

El siglo XVIII proporcionó algunas nuevas expresiones para el cálculo del número π. La primera de ellas fue resultado de los trabajos del astrónomo John Machin (1680-1751), que mantuvo su hegemonía durante siglos, incluso en plena era informática. Machin estudió la función arcotangente y, utilizando la fórmula de Gregory, Leibniz y Madhava, obtuvo que el ángulo cuya arcotangente es 1/5 se podía expresar como:

$$\alpha = \arctan(1/5) = (1/5) - ((1/5)^3) / 3 + ((1/5)^5) / 5 - ((1/5)^7) / 7 + \ldots$$

A partir de la arcotangente del ángulo $4\alpha - \pi/4$ construyó una serie para calcular el número π basada en la inversa de la cotangente. A diferencia de las anteriores, esta serie convergía más rápidamente. Con ella, el inglés pudo calcular de forma efectiva 100 decimales del número π. La serie correspondía a:

$$\pi / 4 = 4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239).$$

Esta expresión se describe mediante la siguiente serie:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \ldots\right].$$

Leonhard Euler también contribuyó en el desarrollo de series para el cálculo de decimales para el número π. Con una de sus expresiones calculó 20 decimales de π en menos de media hora.

LEONHARD EULER (1707–1783)

El matemático y físico suizo Leonhard Euler vivió la mayor parte de su vida en Rusia y Alemania. Se le considera el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes de todos los tiempos. Hizo descubrimientos esenciales en cálculo infinitesimal y teoría de grafos y también introdujo gran parte de la terminología y la notación matemática modernas, sobre todo en el área del análisis, como, por ejemplo, la noción de función matemática. Además realizó aportaciones fundamentales en mecánica, dinámica de fluidos, óptica y astronomía. Autor increíblemente prolífico, se calcula que sus obras completas podrían ocupar entre 60 y 80 volúmenes.

EL SÍMBOLO π

El uso de la letra griega *pi* (π) para denotar el número π fue generalizado por Leonard Euler en su libro *Introductio in analysim infinitorum*, de 1748, donde lo empleó tomándolo de *periphéreia*, la palabra griega para decir «circunferencia». Euler introdujo otros símbolos muy populares y utilizados en las matemáticas actuales: la letra *e* para representar la base del logaritmo natural, la letra *i* para representar la raíz cuadrada de menos uno, el símbolo Σ para representar la suma en series y Δ para representar una diferencia finita.

La lógica

La investigación del siglo XVIII no vio avances significativos en el ámbito de la lógica, pero no cabe duda de que Kant, aunque no realizó aportaciones directas en este campo, proporcionó elementos clave para el desarrollo posterior. De hecho, las ideas de Kant llevaron la filosofía hacia el positivismo lógico y la filosofía analítica. Años más tarde, fueron Frege, Hilbert, Russell y Gödel quienes realizaron las grandes aportaciones a la lógica.

El filósofo alemán Immanuel Kant (1724-1804) estableció los fundamentos de tres de las características principales de la lógica moderna: la distinción entre el concepto y el objeto, la primacía de la proposición como unidad de análisis lógico y la concepción de la lógica para estudiar la estructura de los sistemas lógicos y no únicamente para validar las inferencias individuales.

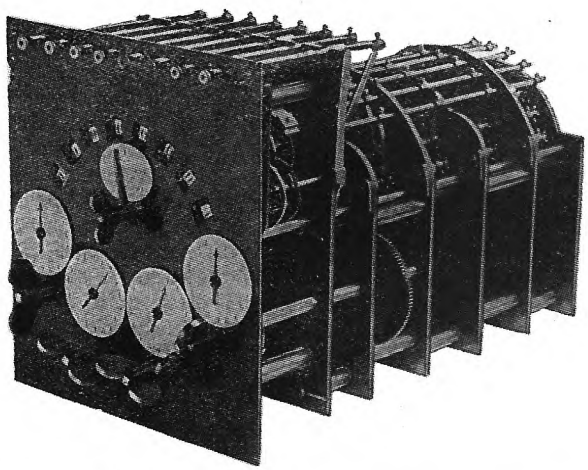
Profesor de Lógica y Metafísica en la Universidad de Königsberg, su ciudad natal, Immanuel Kant es uno de los pensadores capitales en toda la historia de la filosofía. Sus estudios abarcaron las más diversas disciplinas, como el derecho o la estética, y fueron especialmente significativos en el ámbito de la lógica.

DISTINCIÓN ENTRE CONCEPTO Y OBJETO

Gottlob Frege (1848-1925) estableció que cualquier sentencia o proposición consiste en una expresión que significa un objeto y un predicado que significa un concepto. En la expresión «Sócrates es filósofo», por ejemplo, «Sócrates» es el objeto y «filósofo» el concepto de ser un filósofo. Este punto de vista difería sustancialmente del que había imperado hasta el momento, donde se consideraba una proposición como dos términos unidos por el verbo ser. La nueva manera de ver la relación concepto-objeto fue básica para entender los conjuntos y la relación de pertenencia de un elemento y un conjunto.

El siglo XIX: algunos elementos de cálculo

La primera calculadora que se comercializó fue el aritmómetro del francés Charles-Xavier Thomas de Colmar (1785-1850), que no sólo se vendió con gran éxito en Francia sino también en otros países. La competencia le surgió de inmediato, y en pocos años se construyeron varios modelos alternativos. Los más relevantes fueron la calculadora *Arithmaurel*, del también francés Timoleón Maurel (1849); la calculadora de rueda dentada del estadounidense Frank Baldwin (1872), que también desarrolló de manera independiente el sueco establecido en San Petersburgo Willgot Odhner (1874), y la calculadora circular del inglés Joseph Edmonson (1885). Todas estas máquinas se utilizaron hasta bien entrado el siglo XX.



El mecanismo del Arithmaurel, la calculadora inventada por Timoleón Laurel.

A partir de la máquina de Maurel, las calculadoras introdujeron las raíces cuadradas, además de las operaciones aritméticas básicas. La operación de raíz cuadrada estaba basada en el desarrollo siguiente para el cuadrado x^2:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2x - 1)^2 = x.$$

Dado un número n que es cuadrado perfecto, la raíz cuadrada de n puede conseguirse mediante la resta sucesiva de 1, 3, 5... hasta llegar al número cero. El número de restas realizadas es la raíz cuadrada del número. Por ejemplo, si se considera la raíz cuadrada de 100, se restará 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Por lo tanto, como se estarán restando 10 números, la raíz cuadrada de 100 será 10.

Cuando n no es un cuadrado perfecto, la última resta devuelve un número negativo. El número de restas será una aproximación de la raíz cuadrada. Para conseguir decimales, se puede proceder multiplicando por potencias de 100 para cada decimal que se desee obtener. Por ejemplo, multiplicando 2 por 100 para calcular la raíz cuadrada de 200, se obtiene un decimal. Esto es,

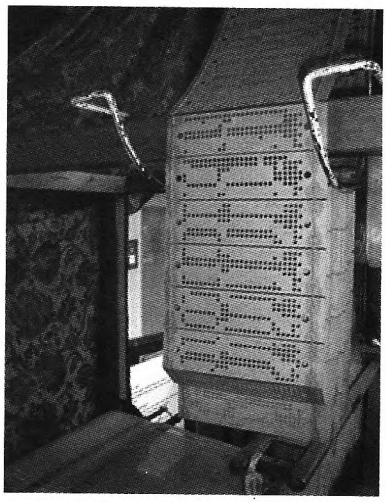
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 =$$
$$= 196 < 200 < 225 =$$
$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29.$$

Obsérvese que en el término superior hay 14 sumandos y en el inferior, 15. Por lo tanto, la raíz cuadrada de 200 está entre 14 y 15, y la de 2 está entre 1,4 y 1,5.

El siglo XIX vio avances científicos que preparaban de manera directa nuestro presente computerizado. En 1835 el físico estadounidense Joseph Henry, conocido por su trabajo acerca del electromagnetismo, inventó el relé electromecánico, un paso decidido hacia los ordenadores. Por otro lado, otro avance mucho más específico, la aparición del teclado numérico, prefiguró la parte esencial de la interfaz que las computadoras tendrían en el futuro. Hasta el momento, las calculadoras empleaban métodos para introducir los números que multiplicaban el tiempo de las operaciones, y además, requerían entrenamiento en cálculo. El teclado permitió reducir el tiempo de operación y puso la calculadora al alcance de cualquier persona.

Con la progresiva implantación de las soluciones industriales que acabarán cristalizando en la revolución industrial, la computación automática comenzó a correr en paralelo al proceso de automatización de la industria textil, que fue nutriendo con sus recursos e instrumentos cada vez más perfeccionados las máquinas de calcular y los

ordenadores. El francés Basile Bouchon había iniciado, ya en el año 1725, las técnicas para programar telares mediante una cinta perforada que contenía la información de los patrones. La cinta se desplazaba para ir construyendo el tejido. Pocos años después, en 1728, su ayudante Jean-Baptiste Falcon perfeccionó el sistema y reemplazó la cinta por un sistema de tarjetas perforadas. En 1803 Joseph Marie Jacquard (1752-1834) desarrolló un sistema basado en el diseño del ingeniero Jacques de Vaucanson, que había empleado tarjetas y un tambor rotatorio para producir tejidos de forma automática con un único operador en 1740. Fue el conocido telar de Jacquard. El sistema de tarjetas perforadas, el más efectivo hasta el momento, siguió evolucionando y llegaría, como está grabado en la cultura popular del siglo XX, a los ordenadores. Sería el estadístico Herman Hollerith (1830-1929) quien utilizaría las tarjetas perforadas para codificar los datos del censo americano de 1890, por lo que está considerado como el primer informático, es decir, el primero que logró el tratamiento automático de la información, donde la palabra «informática» es la unión de los términos «información» más «automática».

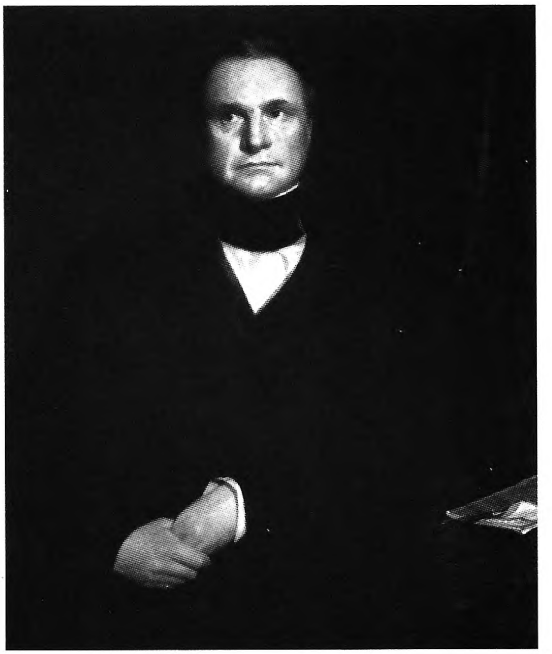


Las tarjetas perforadas en el telar Jacquard expuesto en el Museo de la Ciencia y la Industia de Manchester.

Charles Babbage

El filósofo, matemático, inventor e ingeniero mecánico inglés Charles Babbage, considerado el padre de la computación, es uno de los personajes más brillantes y controvertidos de nuestra pequeña gran historia. Se cree que nació en las afueras de Londres en 1791, pues consta, al menos, que fue bautizado el 6 de enero de 1792

en Saint Mary Newington. Estudió matemáticas y química, primero en el Trinity College de Cambridge, donde ingresó en 1810, y después en el Peterhouse (1812), un *college* más pequeño y con menos prestigio. Se ha dicho que Babbage decidió el cambio pues dos de sus amigos íntimos del Trinity College, John Herschel y George Peacock, le superaban intelectualmente, y en Peterhouse pudo graduarse como el primero de su clase en 1814, y obtuvo su máster en matemáticas en 1817.



Retrato de Charles Babbage realizado por Samuel Laurence.

En 1812 Babbage, Herschel, Peacock y otros colegas, bajo la dirección del profesor Robert Woodhouse, fundaron la Analytical Society con el objetivo de oponerse al cálculo newtoniano y promover el cálculo analítico de Leibniz. Las dos actividades más relevantes de la sociedad en ese momento fueron la traducción del francés del libro de Sylvestre François Lacroix *Traité de calcul différentiel et intégral* (*Tratado de cálculo diferencial e integral*) (1816) y la introducción por parte de Peacock de la notación de Leibniz en ciertos exámenes (1817). El libro de Lacroix, de tres volúmenes, fue traducido por Babbage, Herschel y Peacock, y tuvo una gran difusión en Inglaterra. En 1819 la sociedad pasó a llamarse Cambridge Philosophical Society, que sigue siendo su nombre actual.

En el mismo año de su graduación (1814), Babbage se casó con Georgiana Whitmore, con quien tuvo ocho hijos. Cuando su padre, su esposa y al menos uno de sus hijos murieron en 1827, Babbage recibió una herencia que incluía propiedades y una suma cuantiosa, pero quedó destrozado anímicamente. Siguiendo los consejos de su médico, viajó por Europa durante un año. Al volver ocupó la plaza de profesor en Cambridge que había pertenecido a Newton, aunque consideraba que el sueldo era bajo y sólo asistía a la universidad cuando era necesario evaluar a los candidatos del premio Smith a mejor estudiante de Cambridge. De sus ocho hijos, sólo sobrevivieron tres.

Charles Babbage ha pasado a la historia como el diseñador de máquinas mecánicas de cálculo. La primera de ellas fue la máquina diferencial (*Difference Engine*), que el británico construyó con el objetivo de calcular los valores de un polinomio. El diseño estaba basado en las diferencias finitas, para evitar la multiplicación y la división. La máquina se empezó a fabricar en 1822 con financiación del gobierno británico, pero el proyecto no se completó. Su desarrollo fue abandonado en 1834, cuando se quedó sin financiación.

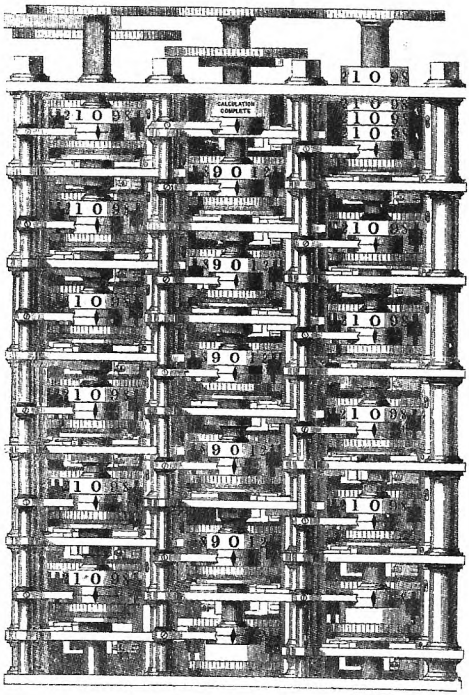


Ilustración de la máquina diferencial de Charles Babbage aparecida en la revista Harper's *en diciembre de 1864.*

Algunos investigadores han defendido que la máquina de Babbage no pudo finalizarse a causa de las limitaciones técnicas imperantes en aquel momento. Sin embargo, los suecos Per Georg Scheutz (1785-1873) y su hijo Edvard construyeron una máquina que fue presentada en 1843, después de leer un artículo sobre la máquina diferencial de Babbage. Y más tarde, en 1851, construyeron con ayuda de la Academia Sueca de Ciencias una máquina más grande que realizaba cálculos con una precisión de quince decimales y además disponía de un sistema para imprimir los resultados.

Charles Babbage no pudo acabar su máquina, pero ésta funcionaba. En 1991 el Museo de la Ciencia de Londres construyó, y acabó, el primer prototipo del inventor utilizando la tecnología de su época. Se ha fabricado un segundo prototipo que se encuentra en el Museo de la Historia de la Informática, en Mountain View, California. La máquina de Babbage tiene una precisión de 31 dígitos, puede calcular polinomios de grado 7, y mide 2,4 × 2,1 × 0,9 metros. La máquina de los Scheutz media únicamente 54 × 86 × 65 centímetros, pero su mejor modelo sólo podía calcular polinomios de grado 3, con 15 dígitos de precisión. En el año 2000 el Museo de la Ciencia de Londres construyó también la impresora que Babbage diseñó para su máquina.

Después de abandonar su máquina diferencial en 1834, Babbage trabajó en el diseño de un nuevo aparato, que llamó *Analytical Engine* y que es el antecesor más directo de nuestros modernos ordenadores. Mientras que la máquina diferencial sólo podía calcular polinomios, la máquina analítica estaba pensada con un propósito general, es decir, para poder calcular una función arbitraria. La nueva máquina de Babbage se alimentaba con energía generada por un motor a vapor; como entrada, tenía tarjetas perforadas, y como salida, disponía de un sistema de impresión y de otro para perforar nuevas tarjetas. También incluía una memoria capaz de almacenar 1.000 números de 50 dígitos (decimales), y una unidad aritmética con las cuatro operaciones fundamentales, que Babbage llamaba «el molino» (*the mill*). Para programarla, se utilizaba un lenguaje específico, prefiguración de los lenguajes ensambladores actuales. Además de las instrucciones básicas para operar, este lenguaje permitía bucles, condicionales y almacenaje. Desde un punto de vista formal y matemático, el conjunto de operaciones posibles que Babbage preveía en su proyecto tendrían una potencia, o capacidad de cálculo, equivalente a una máquina de Turing, aunque el tiempo de procesamiento no tenía comparación, claro está.

Para el desarrollo de la máquina, Babbage contó con una colaboración muy especial, la de Ada Lovelace, hija de Lord Byron. Sus aportaciones se han reconocido

ADA BYRON, CONDESA DE LOVELACE (1815-1852)

Ada Augusta Byron fue la única hija que tuvo Lord Byron con su esposa Annabella Milbanke. La niña nunca conoció al poeta, pues sus padres se separaron un mes después de su nacimiento y Lord Byron abandonó Inglaterra para no volver. Su naturaleza enfermiza, heredada de su padre, favoreció que la educaran en casa, especialmente en matemáticas y ciencias, profesores de renombre como William Frend, William King, Mary Somerville y Augustus de Morgan. Sus maestros creían que podía ser una investigadora original y de primer nivel, y de hecho, fue Mary Somerville quien la presentó a Charles Babbage. En reconocimiento a su tarea pionera en la programación mediante los lenguajes informáticos, el Departamento de Defensa de Estados Unidos dio su nombre al lenguaje de programación que definió en 1979: el lenguaje Ada.

tardíamente, pero Ada Lovelace está considerada hoy en día la primera programadora informática. Además de programar en el lenguaje de programación de la máquina analítica, dedujo y previó la capacidad de las computadoras para ir más allá de los simples cálculos de números, en lo que el propio Babbage se centraba únicamente.

La historia de su colaboración comenzó cuando Babbage pidió a Ada Byron que tradujera un texto que Luigi Menabrea había escrito en francés sobre la máquina analítica, a raíz de una conferencia que Babbage había dado en Turín, invitado por el matemático Giovanni Plana. Ada añadió una serie de notas a la traducción que resultaron ser más extensas que la memoria de Menabrea. La celebradísima nota G describe, entre otros contenidos de gran relevancia para la historia de la computación, cómo calcular los números de Bernoulli en el lenguaje de programación de la máquina de Babbage empleando dos bucles que demostraban la capacidad de bifurcación de la máquina. Fue el primer programa informático de la historia. Ada describió también cómo se podían calcular operaciones trigonométricas que contaban con variables.

EL FUTURO EN LA NOTA G

En la nota G, Ada Lovelace manifestó su confianza en que, ya no sólo la máquina de Babbage, sino esta nueva manera de manejar la información, supondrá una revolución para la ciencia: «La máquina analítica no tiene pretensión alguna de originar nada. Puede hacer cualquier cosa que nosotros sepamos ordenarle. Puede seguir un análisis, pero no tiene el poder de anticipar ninguna relación ni verdad analítica. Su habilidad es ayudarnos a hacer más disponible aquello que ya conocemos. En principio y, sobre todo, producirá su efecto en ese terreno, pero es muy probable que ejerza una influencia indirecta y recíproca, de otras maneras, en la propia ciencia. La distribución y combinación de certezas y fórmulas de análisis sometidas con facilidad y rapidez a las combinaciones mecánicas de la máquina, darán una nueva luz a las relaciones y la naturaleza de muchas materias científicas, que podrán investigarse con más profundidad. Quizá se trate de una consecuencia indirecta y un tanto especulativa de esta invención, pero no cabe duda de que esta nueva forma de registrar y trabajar las certezas matemáticas sugiere nuevas perspectivas, aunque sea en el estadio más teórico de la materia. En todos los territorios del poder humano y en las adquisiciones de su conocimiento, confluyen siempre influencias diversas y colaterales además del propósito principal».

Algunos investigadores han arrojado dudas sobre la autoría de la nota G. ¿La escribió quizás el mismo Babbage? Como fuere, el conocimiento matemático y la familiaridad de Ada con el funcionamiento de la máquina analítica son indiscutibles, y su colaboración con el inventor fue tan estrecha que no se puede cuantificar hasta qué punto influyó en su diseño. De hecho, Ada era una experta conocedora del sistema de los telares de Jacquard, y hay autores, a veces los mismos que los anteriores, que consideran que partió de ella la idea de emplear las tarjetas perforadas de aquella máquina para la entrada de programas y datos. Ada desarrolló conceptos tan familiares en el mundo de los lenguajes de programación como las instrucciones y los bucles o subrutinas. De hecho, por su conocimiento de las matemáticas y su talento, Babbage la llamaba «la Encantadora de Números» (*the Enchantress of Numbers*).

Una vez más, la máquina no se pudo construir, esta vez por cuestiones financieras, políticas e incluso legales. Sólo llegaron a existir algunas secciones, como partes de la unidad aritmética o del sistema de impresión. No se desarrolló la memoria ni ninguna parte programable. Computadores que fueran lógicamente comparables sólo serían construidos cien años más tarde. La máquina analítica fue olvidada por todo el mundo excepto por varios inventores, en cuyos logros latió la influencia de los poderosos conceptos que había aportado aquélla.

El contable irlandés Percy Ludgate diseñó en 1903 una máquina con prestaciones similares a la de Babbage, aunque ya era eléctrica en lugar de propulsada por vapor. Leonardo Torres y Quevedo, ingeniero y matemático español, prolífico inventor, se basó en aquellas ideas para crear el autómata *El Ajedrecista* en 1911, que jugaba un final de rey y torre contra el rey de un oponente humano de manera no muy precisa pero siempre en el número mínimo de movimientos y, por supuesto, resultando victorioso.

Más tarde, en la década de 1930, el científico estadounidense Vannevar Bush construyó varias máquinas para resolver ecuaciones diferenciales y diseñó una computadora electrónica digital. Incluso el primer ordenador electromecánico, el Harvard Mark I, desarrollado entre 1939 y 1943 por el ingeniero norteamericano Howard Hathaway Aiken, con el apoyo de IBM, basaba sus 760.000 ruedas y 800 kilómetros de cable en las nociones expuestas por la máquina de Babbage.

De haberse construido, la máquina analítica hubiera medido 30 metros de largo por 10 de ancho y hubiera tenido unos 4,5 metros de altura. Una suma hubiera requerido 3 segundos y una multiplicación, entre 2 y 4 minutos, suponiendo que los datos ya estuvieran introducidos en la unidad aritmética. Llevar los números a la unidad aritmética hubiera costado 2,5 segundos.

Charles Babbage es conocido por muchos otros descubrimientos y aportaciones. Rompió el código criptográfico de Vigenère, una variación del código de Julio César; inventó el quitapiedras de las máquinas de tren, con que se eliminan los obstáculos de la vía, e incluso influyó en la economía describiendo lo que se denomina actualmente «el principio de Babbage». También propuso el sistema de franqueo postal que se usa hoy en día y fue el primero en señalar que la anchura del anillo de un árbol dependía de la meteorología de aquel año, por lo que sería posible deducir climas pasados estudiando los árboles de más edad.

Sin embargo, en el terreno de la filosofía y la teología, que también quiso transitar, no fue tan brillante. Era un hombre muy creyente, y en 1837 publicó el *Ninth Bridgewater Treatise* (*El noveno tratado de Bridgewater*), que seguía a los ocho tratados sobre teología natural financiados con la herencia del reverendo Francis Henry, conde de Bridgewater, publicados hasta el momento. Babbage se unía a la justificación de la existencia de Dios del reverendo desde las matemáticas automatizadas. Escribió que Dios, como legislador divino, hacía leyes o programas que producían las especies cuando era necesario, en lugar de interferir directamente en la Tierra. También justificó los milagros de forma matemática, calculando probabilidades. El texto fue contemporáneo de la obra de Charles Darwin (1809-1882).

La lógica y George Boole

En 1847 George Boole publicó su libro *Mathematical Analysis of Logic* (*Análisis matemático de la lógica*), en el que presentaba lo que hoy se conoce como el álgebra de Boole, un intento de utilizar las técnicas algebraicas para tratar expresiones de la lógica proposicional (o lógica de orden uno), y más tarde, de la lógica de predicados. En la actualidad, el álgebra booleana se aplica de forma generalizada en el diseño electrónico, pero en sus inicios los descubrimientos de Boole tuvieron un reconocimiento limitado a los expertos en el terreno, los lógicos. Hasta llegar el siglo XX no se comprendería adecuadamente su importancia ni su utilidad en el campo de la informática.

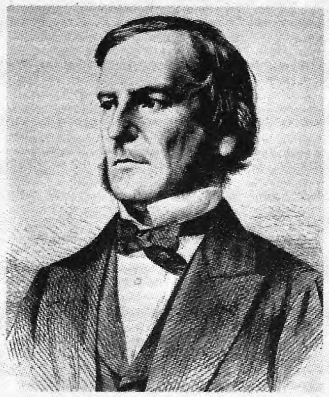
El gran responsable de su recuperación fue Claude Shannon (1916-2001), el ingeniero y matemático norteamericano considerado el padre de la teoría de la información. Shannon conoció el trabajo de Boole en las clases de filosofía de la Universidad de Michigan, y en 1937 realizó su tesis de máster en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) demostrando que el álgebra booleana servía para optimizar circuitos. En 1935, de forma paralela e independiente a Shannon, el lógico Víctor Shestakov (1907-1987) había utilizado también el álgebra de Boole en la Universidad Estatal de Moscú con el mismo propósito.

El álgebra booleana resulta tan útil en la informática porque proporciona el escenario ideal para el desarrollo de una lógica binaria. Juega con los valores cero y uno, que rigoriza con las operaciones básicas Y, O y NO, esto es, la conjunción (operación binaria denotada $\wedge$), la disyunción (operación binaria denotada $\vee$) y la negación (operación unaria denotada $\neg$), aunque hay más propiedades y operaciones más complejas. Las operaciones se pueden definir mediante las tablas de verdad:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Las otras operaciones usuales, como la implicación, se expresan a partir de las tres operaciones anteriores $(x \rightarrow y) = \neg x \vee y$. Además, cualquier otra función construible a partir de las entradas puede expresarse como combinación de las operaciones básicas. De hecho, la llamada ley de De Morgan permite que sean únicamente dos las operaciones básicas. Por ejemplo, la disyunción y la negación, expresando en este caso la conjunción en términos de la disyunción y la negación.

GEORGE BOOLE (1815–1864)



El británico George Boole fue el matemático y filósofo que desarrolló el álgebra que daría base a la aritmética computacional moderna, por lo que se le considera uno de los fundadores de las ciencias de la computación. Sus obras matemáticas más importantes fueron *Treatise on Differential Equations (Tratado sobre ecuaciones diferenciales)*, de 1859, y su continuación, *Treatise on the Calculus of Finite Differences (Tratado sobre el cálculo de las diferencias finitas)*, de 1860. Sin embargo, fue en su obra de lógica *Una investigación sobre las leyes del pensamiento*, cuyo título en inglés era más extenso y explícito, *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, donde desarrolló su sistema de reglas para expresar, manipular y simplificar por procedimientos matemáticos problemas lógicos y filosóficos cuyos argumentos admitieran dos estados, verdadero o falso.

El álgebra de Boole se axiomatiza mediante propiedades, lo que significa informalmente que estas propiedades son necesarias y suficientes para construir las tablas de verdad.

Asociatividad	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
Conmutatividad	$x \vee y = (x \vee y)$	$x \wedge y = x \wedge y$
Absorción	$x \vee (x \vee y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
Complementos	$x \vee \neg x = 1$	$x \wedge \neg x = 0$
Distribución	$x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$	

El número π en el siglo XIX

A mediados del siglo XVIII, en 1761, Johann Lambert (1728-1777), matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán de origen francés, había demostrado que tanto el número π como su cuadrado π^2 eran irracionales, con lo que cerró la posibilidad de poder determinar una cifra «exacta» para este número. Tuvieron que pasar más de ciento veinte años para que el cálculo de π viviera su siguiente momento de mayor relevancia matemática. Fue en 1882 cuando el matemático Ferdinand Lindemann

(1852-1939) demostró que el número π era un número trascendente, lo que venía a resolver el problema de la cuadratura del círculo por la vía de probar que era imposible cuadrar el círculo usando regla y compás.

En la actualidad existen todavía problemas matemáticos abiertos sobre el número π, por ejemplo, la normalidad de π. Un número irracional es normal cuando la frecuencia de todas las secuencias de números de la misma longitud tienen la misma probabilidad de aparición; por ejemplo, que todos los dígitos aparezcan con probabilidad de 1/10, que todas las secuencias de dos números aparezcan con probabilidad de 1/100, etc. No se ha podido demostrar que π sea un número normal, aunque se cree que lo es y se han hecho análisis de las frecuencias que soportan la teoría. A finales del siglo XX, el matemático norteamericano David Bailey realizó un estudio de los 29.360.000 primeros decimales, teniendo en cuenta secuencias de hasta 6 dígitos, y no descubrió ninguna irregularidad. Las diferencias entre las frecuencias son menores y no tienen importancia estadística. Como ejemplo, se dan a continuación las frecuencias de los dígitos 0-9 según el trabajo de David Bailey:

Dígito	Frecuencia
0	2935072
1	2936516
2	2936843
3	2935205
4	2938787
5	2936197
6	2935504
7	2934083
8	2935698
9	2936095

NÚMEROS ALGEBRAICOS Y NÚMEROS TRASCENDENTES

Un número es algebraico cuando puede expresarse como la solución de un polinomio de una variable con coeficientes enteros. Todos los enteros y los racionales son algebraicos, y algunos de los números irracionales también. De los irracionales, el más conocido es la raíz cuadrada de 2: $\sqrt{2}$, que es la solución del polinomio $x^2 - 2 = 0$. El conjunto de números algebraicos es numerable. Un número es trascendente cuando no es algebraico, es decir, que no puede escribirse como solución de un polinomio de coeficientes enteros. Los más conocidos son el número π y el número e.

Capítulo 4

El hardware en el siglo xx

El convulso siglo xx se vio sacudido por todo tipo movimientos de cambio político, social y, por supuesto, en los ámbitos del pensamiento y la ciencia, encabezado, este último terreno, por una espectacular revolución de la técnica. En este escenario repleto de grandes teorías, logros increíbles y clamorosas decepciones, la computación vivió su momento estelar, que le permitió modelar el mundo a su imagen y semejanza a través de la revolución digital. La evolución de la informática fue asombrosa, pero lo cierto es que la arquitectura de las máquinas no sufrió tantas diferencias. Los ordenadores actuales siguen básicamente la arquitectura creada por Von Neumann.

La serie Z de Konrad Zuse

A su paso por el siglo xx, la historia de la informática y los ordenadores tiene unos protagonistas excepcionales e ineludibles que durante años fueron anónimos absolutos: el alemán Konrad Zuse y sus máquinas de la serie Z. La mayoría de los ingenios de Zuse pasaron desapercibidos hasta mucho tiempo después de ser construidos porque nacieron poco antes de comenzar la Segunda Guerra Mundial y se desarrollaron en el tiempo que duró el conflicto. Para crear su estructura, Zuse siguió los diseños de Charles Babbage sin saberlo, pues desconocía los trabajos anteriores. A su vez, cuando John von Neumann describió más tarde la estructura que había concebido, tampoco conocía los trabajos de Zuse. Sin duda, aquella estructura era la más razonable, y así se lo parecía a los expertos en lógica: un sistema de control, una memoria y la correspondiente unidad aritmética para realizar los cálculos.

Zuse construyó sus dos primeras máquinas entre 1935 y 1939, cuando el periodo de entreguerras había alcanzado su masa crítica y la Segunda Guerra Mundial estaba a punto de estallar. Su primera solicitud de patente está fechada el 11 de abril de 1936. En 1938 solicitó una patente en Estados Unidos; le fue denegada por falta de detalle en la exposición de los ingenios. Las máquinas se llamaban Z1 y Z2. Zuse había considerado primero el nombre V1, por *Versuchsmodell*, que significa «modelo experimental», pero cambió el nombre para no causar confusión con los cohetes V1 y V2 desarrollados por Von Braun.

La Z1, la primera de las máquinas, tenía unas dimensiones de 2 × 1,5 metros. Estaba construida con acero y funcionaba con algunas dificultades, pues al cabo de algunos minutos de uso siempre había que efectuar ajustes. En realidad, no era más que una calculadora mecánica binaria, operada con electricidad y con programabilidad limitada. El alemán construyó la Z2 para solucionar los problemas de la primera máquina; la segunda máquina empleaba relés para la memoria y números de punto fijo.

A sugerencia de Helmut Schreyer, Zuse consideró más tarde el uso de válvulas de vacío y diseñó la Z3, que resultó plenamente operativa. Se presentó el 5 de diciembre de 1941 en el Instituto de Investigaciones Aeronáuticas de Alemania. En la Z3 los datos se introducían desde un teclado y el programa de control se establecía mediante una cinta de celuloide. Contaba con una memoria de 64 números, que se representaban en binario con coma flotante. Cada número se mostraba con un total de 22 bits: un bit de signo, siete de exponente y catorce de mantisa. Zuse descubrió que con una representación en coma flotante, el primer bit podía hacerse siempre igual a uno; sólo era necesario tener el exponente adecuado. Esta representación es la que se emplea en la actualidad, porque permite ahorrar el bit que es siempre uno. En el caso de la Z3 esto significaba que la máquina podía representar números como si la mantisa fuera de 15 bits. Sin embargo, la máquina tenía una limitación importante: no incluía saltos condicionados. En cuanto a su velocidad, podía realizar tres o cuatro sumas por segundo, y podía multiplicar dos números en cuatro o cinco segundos.

Zuse comenzó de inmediato el diseño y la construcción de la Z4 como encargo del Instituto de Investigaciones Aeronáuticas de Alemania. La máquina se presentó el 28 de abril de 1945. Contaba con una memoria de 1.024 números de 32 bits e incorporaba los saltos condicionales y las subrutinas. Además, implementaba un mecanismo que leía dos instrucciones por adelantado, de manera que podía invertir las operaciones si ello no modificaba el resultado, permitiendo un mejor rendimiento en términos de tiempo. Este procedimiento también fue común en los ordenadores posteriores, y se conoce en inglés como *lookahead*.

Cuando la guerra estaba a punto de acabar, Zuse se trasladó a una granja de los Alpes, donde comenzó a escribir su tesis doctoral: *Teoría de computación general*. En este texto, que acabó en 1946, define el *Plankalkül* (cálculo de planes), considerado un protolenguaje de programación, que, no obstante, no fue implementado. El *Plankalkül* estaba diseñado para resolver tanto problemas numéricos como no numéricos, y tenía un elevado nivel de abstracción, muy superior a intentos similares de la misma

KONRAD ZUSE (1910–1995)

En sus años de formación universitaria, el ingeniero alemán Konrad Zuse tuvo que hacer cálculos rutinarios a mano hasta el aburrimiento y comenzó a soñar con una máquina que pudiera ayudarle. Al acabar la carrera, y tras comenzar a trabajar en una fábrica de aviones, renunció al trabajo para perseguir su sueño y desarrolló su primera máquina en el apartamento de sus padres. No tardaría mucho en convertirse en el creador de la primera computadora programable que funcionaba de verdad. Construyó la mítica serie Z, de propósito general; las máquinas S1 y S2, para efectuar cálculos relacionados con el lanzamiento de bombas, y la máquina L1, para la evaluación de funciones lógicas. También definió el lenguaje de programación *Plankalkül*, aunque sólo en un plano teórico. Fundó varias compañías para la construcción de sus máquinas, la más importante de las cuales fue la Zuse KG, que desarrolló parte de la serie Z y está considerada la primera compañía de ordenadores.

época. De hecho, el primer lenguaje que realmente pudo compararse con él fue un auténtico lenguaje informático, el Algol, que se desarrolló años más tarde.

A partir de 1947, en el devastado mundo de la posguerra, Zuse volvió a trabajar con sus máquinas. Tuvo contactos con IBM y más tarde con Remington-Rand, con la que llegó a un acuerdo. Desarrolló máquinas con tubos de vacío, como la Z22, y de transistores, como las Z23 y Z3. Más tarde construyó la Z64, un plóter controlado por una máquina.

La única muestra de las primeras máquinas de Zuse que ha llegado hasta nosotros es la Z4, que se convirtió en la primera computadora comercializada. Esta máquina fue utilizada hasta 1959 por multitud de instituciones y actualmente existe un ejemplar en el Deutsches Museum de Munich, junto a una reconstrucción de la Z3. Desafortunadamente, todas las demás máquinas fueron destruidas durante los bombardeos de Berlín.

La máquina de Turing y el Colossus

El matemático Alan Turing, quien está considerado como uno de los padres de la computación.

Aunque de niño quería ser médico, Alan Turing (1912-1954) acabó siendo matemático, filósofo y criptógrafo, y se convirtió en el precursor de la informática moderna. Se le conoce sobre todo por sus desarrollos teóricos, pero, de hecho, tuvo un papel muy relevante en la realización material de uno de los primeros ordenadores. Turing comenzó pisando fuerte en el plano más teórico de las matemáticas en 1936, cuando resolvió el problema de la decidibilidad, conocido por su nombre alemán, *Entscheidungsproblem*, que había sido formulado por David Hilbert. Para resolverlo diseñó un modelo de cálculo en el que formalizaba el concepto de algoritmo (o programa) y que ha pasado a la historia como la máquina de Turing.

En 1928 el influyente matemático alemán David Hilbert (1862-1943), que había propuesto su famosa lista de problemas en 1900, retomó el problema de la decidibilidad, que se remontaba a Leibniz. En su opinión, no existía ningún problema irresoluble, y proponía la hipótesis de que es siempre posible construir un programa (algoritmo) que, dada una descripción de una pregunta, conteste sí o no de acuerdo con la falsedad o certeza de la pregunta. De manera independiente, Alan Turing y su colega norteamericano Alonzo Church demostraron que Hilbert se equivocaba: existen problemas irresolubles y no es posible construir el programa (algoritmo) que proponía Hilbert. Por lo tanto, las matemáticas no son decidibles, es decir, que no hay un método definido que pueda aplicarse a cualquier sentencia matemática para establecer si es cierta o no.

Church y Turing emplearon sus propios modelos en sus respectivas demostraciones: el primero usó el cálculo lambda, y el segundo, su máquina. Ambos formalizaban el concepto de algoritmo y basaban sus demostraciones en preguntas sobre aritmética, pues si se demostraba que con este tipo de preguntas no había solución, tampoco podría haberla en general. Pero el estudio de Turing era mucho más accesible e intuitivo. El británico redujo el problema de la decidibilidad al problema de la parada, para demostrar que éste era irresoluble por sus máquinas: no es posible

decidir algorítmicamente si una máquina de Turing dada llegará a pararse o no. Los dos teóricos lógicos no se enfrentaron, sino al contrario; conscientes de que sus modelos, aunque formalmente distintos, tenían un poder de expresión equivalente, reunieron esfuerzos.

¿CÓMO FUNCIONA LA MÁQUINA DE TURING?

Imaginemos una cinta infinita, en la que se encuentran los símbolos de entrada de un problema y en la que se puede escribir. La máquina de Turing tiene un lector en una cierta posición de la cinta. Este lector le permite leer y escribir en la cinta, y el programa de la máquina le permite desplazarlo una posición. Los estados posibles de la máquina se representan mediante un conjunto de estados Q, y la programación de la máquina se representa mediante una función llamada «de transición» que explicita que, a partir del estado actual y del símbolo que se encuentra en la entrada, a qué nuevo estado se pasa a continuación.

Formalmente, una máquina de Turing se define en base a una tupla formada por 7 elementos. Una tupla es una secuencia ordenada de objetos, esto es, una lista con un número limitado de objetos que se denomina «familia». Las tuplas se emplean para describir objetos matemáticos que tienen estructura. Denotamos la tupla que va a procesar nuestra máquina de Turing como

$$MT = (\Gamma, \Sigma, b, Q, q_0, f, F).$$

Sus elementos se definen como sigue:

- Γ: es el alfabeto de los símbolos de la cinta.
- $\Sigma \subset \Gamma$: es el alfabeto de los símbolos de entrada. El conjunto de símbolos que pueden aparecer en la entrada es un subconjunto de los que puede haber en la cinta. En la cinta habrá también aquellos que la máquina ha escrito.
- $b \in \Gamma$, $b \notin \Sigma$: b denota el espacio en blanco. Es un símbolo que no pertenece a la entrada. Inicialmente la cinta contiene un número finito de símbolos de Σ, y en el *resto*, puesto que es infinita, contiene símbolos b.
- Q: es el conjunto de estados.
- $q_0 \in Q$: es el estado inicial.
- f: es la función de transición. Dado un estado y un elemento de la cinta, esta función pasa a un nuevo estado, escribe un símbolo en la cinta y modifica el lector de la cinta hacia la izquierda (I), la derecha (D) o quedándose quieta (P, por parada). Esto es, f es una función de la forma f: $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{I, D, P\}$.
- $F \subseteq Q$: es el conjunto de estados finales.

En abril de 1936 el matemático norteamericano Alonzo Church, de la Universidad de Princeton, había publicado un trabajo sobre el problema de la decidibilidad. Church llegaba a la misma conclusión que Turing y demostraba que no todo es computable. Para ello utilizaba el cálculo lambda, radicalmente diferente a la máquina de Turing, que había desarrollado junto a su colega Stephen Kleene. Turing publicó su solución a la decidibilidad al poco tiempo, en agosto. Fue el memorable estudio *Los números computables, con una aplicación al Entscheidungsproblem*, que reformulaba los resultados de Kurt Gödel (1906-1978) sobre los límites de la demostrabilidad y la computación e incluía una referencia al trabajo de Church. Sin embargo, en vez de pelearse por la paternidad de su descubrimiento, en septiembre de aquel mismo año, Turing se estableció en Princeton para realizar su tesis sobre la decidibilidad bajo la dirección de Church. La presentaría en 1938, obteniendo el título de doctor, para después regresar a Cambridge. Una feliz reunión de talentos que benefició a la humanidad.

BLETCHLEY PARK Y ENIGMA

La legendaria instalación militar de Bletchley Park estaba situada en Buckinghamshire, a 80 kilómetros de Londres, entre Cambridge y Oxford. Los científicos ingleses más reputados realizaron allí los trabajos de descifrado de códigos alemanes durante la Segunda Guerra Mundial. Recibía su nombre de la mansión victoriana que domina el lugar. Actualmente, el espacio es un museo sobre criptografía. En Bletchley Park se descifró el código de la máquina Enigma, una máquina que disponía de un mecanismo de cifrado rotatorio que permitía cifrar y descifrar mensajes a las fuerzas militares de la Alemania nazi. El esfuerzo de los británicos por romper su código no fue en balde, pues se ha dicho que la lectura de los mensajes alemanes supuestamente protegidos adelantó el final de la guerra quizás un par de años.

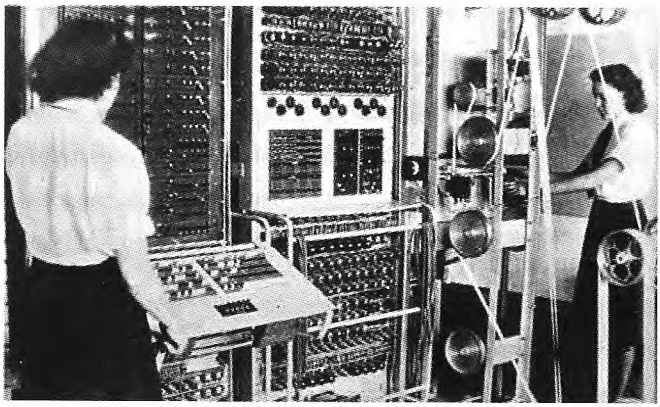
Estos acontecimientos decisivos y apasionantes en el plano más teórico del conocimiento estaban teniendo lugar en uno de los momentos más procelosos de la historia contemporánea. La situación política de Europa se enrarecía y derivaba hacia un clima prebélico. Temeroso de que Inglaterra entrase en guerra con Alemania, Turing se aplicó en el estudio de la criptografía mientras preparaba su tesis doctoral. El gobierno británico lo reclutó en 1939 para trabajar en Bletchley Park, junto a otros investigadores, con la misión de romper el código secreto que utiliza el ejército alemán, el código Enigma. Los conocimientos de Turing permitieron descifrar el código de la fuerza aérea alemana a mediados de 1941, pero en febrero de 1942 los alemanes lo complicaron y volvió a ser ininteligible para los británicos.

Para romper el código alemán, Turing y sus colegas construyeron algunas máquinas de cálculo. Turing ya había construido una máquina para multiplicar durante su estancia en Princeton. Ahora la necesidad de conseguir una mayor velocidad de cálculo llevó al grupo de Turing a construir la máquina llamada Colossus, que se considera el primer ordenador electrónico programable digital del mundo. Se llegaron a construir diez ejemplares. El primero de ellos comenzó a funcionar en diciembre de 1943, dos años antes que el ENIAC estadounidense, del que se hablará más adelante. En aquella misma época, a finales de 1942 y principios de 1943, Turing viajó de nuevo a Estados Unidos, en esta ocasión para asesorar a los norteamericanos sobre el desciframiento de los códigos alemanes; en aquel viaje conoció a Claude Shannon, el creador de la teoría de la información y la definición de entropía.

Cuando acabó la guerra, Turing fue contratado por el NPL (siglas en inglés de National Physical Laboratory, el Laboratorio Nacional de Física), que desarrollaba estándares de ciencia y tecnología en el Reino Unido. Allí trabajó el diseño del ACM (Automatic Computer Machine, es decir, la Máquina de Computación Automática), una máquina de propósito general, y lanzó el concepto que ahora se conoce por microprogramación, el hecho de que la unidad aritmética ya esté programada. La alternativa es que esta unidad esté directamente implementada en el hardware y que, por lo tanto, las operaciones no puedan modificarse. Turing definió también entonces los conceptos de subrutina y biblioteca de software.

En 1947 se tomó un año de descanso en Cambridge, durante el cual escribió un informe que describe lo que se hoy se conoce como red neuronal, un modelo basado en la fisiología y la neurología. Al año siguiente, viendo que la máquina del NPL no avanzaba, se trasladó a la Universidad de Manchester, donde trabajó en el desarrollo de software del Mark I de Maxwell Newman. Durante aquella etapa realizó sus estudios más abstractos. Escribió el célebre artículo *Máquinas de computación e inteligencia*, publica-

do en la revista *Mind* en octubre de 1950, en el que presentó su punto de vista sobre la inteligencia artificial y propuso el experimento conocido como «la prueba de Turing» para demostrar la existencia de inteligencia en una máquina y decidir si es «sensible».



Dos operarias manipulan la versión Mark 2 del Colossus.

VERGÜENZA E INJUSTICIA

El pensador matemático y lógico al que debemos gran parte del rostro y las entrañas del mundo contemporáneo sufrió en sus últimos años una persecución tan vergonzosa e injusta por culpa de los prejuicios de la Gran Bretaña de la posguerra que acabó arrebatándose la vida. La brillante carrera de Alan Turing se vio truncada cuando lo procesaron por su homosexualidad, todavía ilegal en aquella época en el Reino Unido, con los mismos cargos que se habían imputado a Oscar Wilde más de cincuenta años antes. Turing sabía que no tenía de qué avergonzarse y se sometió a un proceso judicial ampliamente difundido. El tribunal le dio la opción de ir a prisión o someterse a un tratamiento químico de reducción de la libido. Quiso evitar la cárcel, pero un año de tratamiento con estrógenos le produjo importantes alteraciones físicas, además de dejarle impotente. Entonces, se suicidó con cianuro. Resulta aún más dramático comprobar que, en sus cartas a sus colegas, su mayor preocupación fue siempre que los ataques a su persona pudieran oscurecer sus razonamientos sobre la inteligencia artificial, que estaba convencido de que aportarían grandes avances al mundo. En 2009 el entonces primer ministro de Gran Bretaña, Gordon Brown, emitió un comunicado de disculpa en nombre del gobierno británico por el trato que recibió Alan Turing en los últimos años de su vida. Una retractación con cincuenta años de retraso para un hombre que, además, había prestado un servicio de valor incalculable a su país y a todo el mundo civilizado en la lucha contra los nazis.

En 1951 fue elegido miembro de la Royal Society. Sin embargo, el final de su vida estuvo lejos del reconocimiento que se le debía. Años después de su trágica muerte, en 1966, la Asociación Americana de Informática (ACM) instituyó el premio que lleva su nombre, el Premio Turing, considerado el equivalente al Premio Nobel en el mundo de la computación. Sus premiados son personajes destacados por sus logros en hardware y software, bases de datos, fundamentos teóricos de la informática (incluyendo la criptografía) y redes.

La arquitectura Von Neumann

La entrada de John von Neumann en la historia de la informática también tuvo lugar en el absorbente escenario de la Segunda Guerra Mundial, cuando trabajaba en el proyecto Manhattan con el objetivo de desarrollar la bomba atómica. Las necesidades del proyecto requerían el empleo de potentes máquinas de cálculo, de las que el mundo comenzaba a ver sus retoños más avanzados y funcionales. Von Neumann buscó a los más destacados investigadores en computación por todos los Estados Unidos. Entre ellos, contactó con John Presper Eckert (1919-1995) y John William Mauchly (1907-1980), que habían construido en la Universidad de Pensilvania el ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer, es decir, Computador e Integrador Numérico Electrónico), respuesta norteamericana al Colossus. Los investigadores tenían intención de construir una nueva máquina mejorada, que será el EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer, Computador Electrónico Automático de Variable Discreta). En marzo de 1945, Von Neumann formalizó sus ideas en el ya célebre documento *Primer borrador de un informe sobre el EDVAC*, firmado sólo por él, lo que llevó a disputas con los otros dos investigadores.

El *Primer borrador* presenta lo que hoy se conoce como la arquitectura Von Neumann, la estructura más eficiente para un ordenador. Esta estructura considera el almacenamiento interno de los programas, esto es, que los programas deben residir en la memoria, y la separación de las unidades de proceso y de almacenamiento. Además, propone que se utilice el mismo dispositivo de memoria para los programas y la información con el objetivo de ahorrar memoria. El procedimiento general de la arquitectura Von Neumann sigue un esquema de tres pasos:

1. Recuperar la instrucción de memoria.
2. Decodificar.
3. Ejecutar.

EL ENIAC

El ENIAC fue finalizado y presentado a la prensa en 1945 y se apagó definitivamente diez años después, en 1955. Los impulsores de su construcción habían sido Herman Heine Goldstine, John Presper Eckert y John William Mauchly. Su espectacular masa ocupaba 63 m^2, tenía 30 toneladas de peso, y medía 2,6 metros de altura por 0,90 de ancho y 26 de largo. La máquina se componía de 18.000 válvulas de vacío, 72.000 diodos, 70.000 resistencias y 1.500 relés. Para construirla se hicieron unos 5 millones de soldaduras. Costó casi medio millón de dólares de la época. No disponía de memoria, pero sí de 20 acumuladores que permitían almacenar 20 números, cada uno con 10 dígitos. Además, unos interruptores permitían almacenar los valores de funciones (104 valores de 12 dígitos). El tiempo de cálculo era de 0,2 milisegundos para una suma y 2,8 milisegundos para la multiplicación. El ENIAC elevaba la temperatura de la sala a 50 °C y se rumoreaba, quizá maliciosamente, que cuando se ponía en funcionamiento, la ciudad de Filadelfia, donde estaba instalada, sufría apagones, pues consumía 160 kW.

Este proceso se aplica de forma secuencial a las instrucciones que se encuentran en memoria en posiciones sucesivas, excepto si hay una instrucción de salto incondicional. Esta arquitectura no difiere demasiado de los diseños que habían empleado Charles Babbage y Konrad Zuse, la misma que da estructura a los ordenadores actuales todavía.

JOHN VON NEUMANN (1903-1957)

El húngaro-estadounidense John von Neumann fue uno de los científicos más importantes del siglo xx. Pionero de la computación digital moderna, sus logros se proyectaron en muchas áreas: física cuántica, cibernética, economía, y, por supuesto, matemáticas. Fue un niño prodigio, y en 1926, con sólo 23 años, obtuvo el grado de doctor en matemáticas con su tesis doctoral sobre la axiomatización de la teoría de conjuntos. En Europa investigó en matemáticas y mecánica cuántica, principalmente en Gotinga bajo la dirección de David Hilbert, y escribió en alemán el libro *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*. En 1930 emigró a Estados Unidos, y a los 29 años obtuvo una de las primeras cinco plazas como profesor en el IAS de Princeton, otra de las cuales fue para Albert Einstein. Está considerado el padre de la teoría de juegos y del concepto MAD (*Mutually Assured Destruction*, o «Destrucción Mutua Asegurada»). Trabajó en el proyecto Manhattan y desarrolló la bomba de hidrógeno.

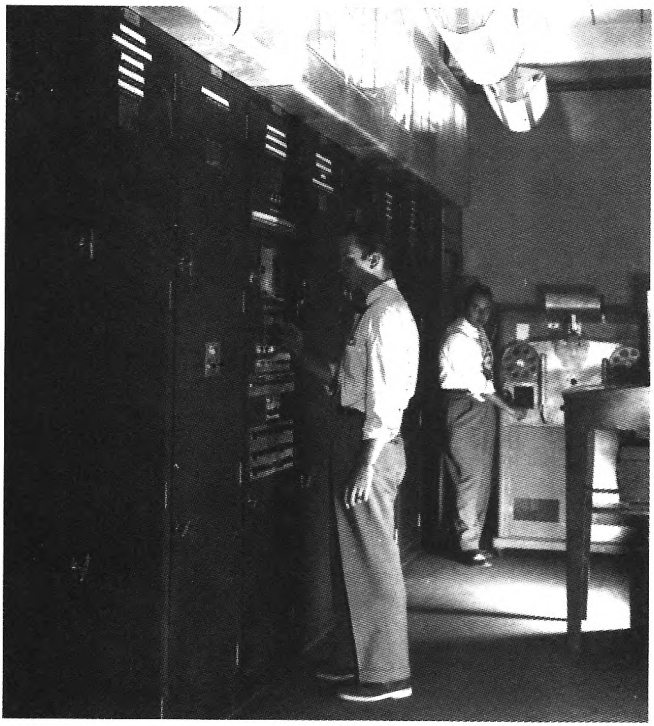
Tras la publicación del *Primer borrador*, Von Neumann buscó financiación para la construcción de una máquina más potente. Fue el ADIVAC, que se desarrolló en el IAS (Institute for Advanced Study) de Princeton y comenzó a operar en 1953.

Los primeros ordenadores en Estados Unidos

Como ordenador de propósito general, el ENIAC supuso un gran avance, pero algunas de sus soluciones técnicas dejaban mucho que desear. Su principal problema era que no estaba controlado por un programa y para reprogramarlo había que cambiar las conexiones de sus circuitos. Como no tenía un programa en memoria, como los ordenadores actuales, para determinar qué cálculos debía hacer y en qué orden debían hacerse, había que conectar o desconectar ciertos interruptores, como en las antiguas estaciones telefónicas. Esta tarea era ardua y consumía tanto tiempo que la ventaja de su velocidad de cálculo quedaba en cuestión.

Solucionar los problemas del ENIAC dirigió el trabajo de los diseñadores del EDVAC. Eckert, Mauchly y Von Neumann consideraron muy seriamente cómo debería realizarse la programación del ordenador y llegaron a la conclusión de

que había que utilizar un programa no cableado, que se almacenase en memoria de forma similar a como se almacenaban los números. Hoy en día nos parece una idea extravagante, incluso difícil de entender, que en algún momento pretérito del desarrollo de los ordenadores la programación (el software) y la configuración del ordenador (el hardware) no estuvieran separados. El momento de esa feliz idea significó también el nacimiento de los lenguajes de programación y de la programación como área de estudio.



El EDVAC supuso un gran paso adelante en la historia de la informática.

El EDVAC fue finalizado en 1949 en la Moore School of Electrical Engineering de la Universidad de Pensilvania. En aquel momento sus diseñadores Eckert y Mauchly ya no estaban en el proyecto, que habían abandonado en 1946. La máquina empleó 6.000 válvulas de vacío y 12.000 diodos, pesaba 7.850 kilos y ocupaba 45,5 metros cuadrados. Su funcionamiento necesitaba 56 kW. Era mucho más ligero que el ENIAC, si es posible decir tal cosa teniendo en cuenta estas cifras. También mejoraba sus marcas de tiempo: tardaba 864 microsegundos en hacer una suma y 2.900 microsegundos en hacer una multiplicación.

Mientras tanto, el *Primer borrador* de Von Neumann dejaba notar su influencia en el Reino Unido. Maurice Wilkes, de la Universidad de Cambrigde, construyó el EDSAC (*Electronic Delay Storage Automatic Calculator*, Calculadora Automática Electrónica de Almacenamiento de Retraso) también en 1949. Fue el primer calculador electrónico en contar con órdenes internas, aunque no el primer computador con programas internos, que fue la SSEM. Su memoria consistió inicialmente en 512 posiciones con 17 bits disponibles cada una. El primer videojuego de la historia, un tres en raya electrónico llamado OXO, se desarrolló para la EDSAC. El diseño de esta máquina proporcionó la base para el primer computador con aplicación comercial, el LEO I. En el EDSAC se implementaron subrutinas e incluso subrutinas múltiples.

New Calculating Wizard

EDSAC, a British cousin of our electronic mathematical brains, such as ENIAC and EDVAC (PS, May '47, p. 95), will handle 10,000 multiplications a minute. Now under construction at England's Cambridge University, EDSAC will remember details of calculations and use "judgment" in choosing the best way to reach a result.

Recorte de prensa británico que se hace eco de la construcción del EDSAC.

Al dejar la Universidad de Pensilvania, Eckert y Mauchly fundaron una empresa, la Eckert-Mauchly Computer Corporation, para construir el UNIVAC, acrónimo de *Universal Automatic Computer*, donde «universal» quería dar a entender que la máquina era de propósito general y podía resolver problemas relacionados con los ámbitos de la ciencia, de la ingeniería, de la economía...

El primer cliente del UNIVAC de Eckert y Mauchly fue la oficina del censo de Estados Unidos. Cuando se acabó su construcción, en 1951, la empresa de los diseñadores había sido absorbida por otra mayor, la Remington Rand. La segunda máquina la compró el Pentágono en 1952. Estos ejemplares se consideran los primeros ordenadores comerciales, y en la mayoría de los casos se utilizaron más para el procesamiento de datos que para los cálculos relacionados con la física o las matemáticas. La oficina del censo de Estados Unidos empleó su UNIVAC para procesar datos censales y para hacer clasificaciones.

El ordenador de control del UNIVAC I, máquina expuesta en el Museo de la Ciencia de Boston.

Para muchos de sus usuarios, el avance más importante del UNIVAC no era sólo la velocidad, sino que en lugar de utilizar tarjetas perforadas para leer y almacenar la información, empleaba cintas. Las tarjetas necesitaban gestión humana, y sustituirlas por una cinta significaba mejorar la automatización de la máquina. La selección de los datos la realizaba la misma máquina. El UNIVAC sumaba dos números en 0,5 microsegundos.

Hasta la entrada del UNIVAC en el mercado, la compañía IBM se había centrado en el negocio de las calculadoras con tarjetas perforadas. Sin embargo, al ver el interés causado por la nueva computadora, la empresa inauguró una nueva línea de desarrollo de proyectos en aquella dirección. Su primera máquina en esa línea fue el IBM 701, similar al UNIVAC, llamada «máquina electrónica de procesamiento de datos». Von Neumann, que se encontraba en ese momento construyendo su ordenador en Princeton, colaboró en su creación como consultor. El IBM 701 se finalizó en 1952 y fue enviado a principios de 1953 al laboratorio de armas atómicas de Los Álamos.

El número π en el siglo XX

La evolución del hardware a lo largo del siglo XX proporcionó nuevas herramientas para calcular aproximaciones más precisas al número π. Actualmente, el número de decimales calculados de este número está por encima del billón. La última gran aproximación tiene casi 2,7 billones de dígitos correctos, esto es, $2{,}7 \cdot 10^{12}$ decimales.

Pero, antes de la llegada de los computadores, las mejores aproximaciones fueron las del inglés D. F. Ferguson, que, sólo con ayuda de calculadoras, consiguió sobrepasar la cifra de los mil decimales: 620 decimales en 1946, 808 decimales en 1947, y 1.120 decimales en 1949, con la colaboración de John Wrench.

Fue John Wrench quien, aquel mismo año, realizó la primera aproximación del número π mediante ordenador. Lo hizo con el ENIAC, a instancias de John von Neumann, y el cálculo duró 70 horas, que proporcionaron 2.037 decimales. Cinco años más tarde, en 1954, Nicholson y Jeenel superaron la marca anterior consiguiendo 3.092 decimales en sólo 13 minutos con el IBM NORC, el ordenador más potente en aquel momento. En 1959, tras otro intervalo de cinco años, un IBM 704, el primer ordenador producido en masa con hardware basado en aritmética de punto flotante, calculó 16.167 decimales en 4,3 horas. Los cálculos los realizó François Genuys en París. La barrera de los 100.000 decimales no tardaría en batirse: lo consiguieron en 1961 Daniel Shanks y John Wrench, con el nuevo IBM 7090, que usaba transistores en lugar de tubos de vacío, lo que le daba seis veces más velocidad que sus antecesores. El ordenador tardó 8,7 horas en conseguir 100.265 decimales.

La espectacular cifra del millón de decimales la batieron Jean Guilloud y Martin Bouyer en 1973, con un CDC 7600, de la compañía Control Data Corporation, competidora de IBM con ordenadores de segunda generación, esto es, con transistores en los circuitos digitales, que se impusieron en la década de 1960; tardó 23 horas y 18 minutos para obtener exactamente 1.001.250 decimales. Guilloud había

conseguido en 1966 el récord de 250.000 decimales, obtenidos en 41 horas y 55 minutos, y también se había hecho en 1967 con el de 500.000 decimales, calculados en 28 horas y 10 minutos. La década de 1980 perteneció a los japoneses Yasumasa Kanada y Kazunori Miyoshi: en 1981 consiguieron sobrepasar los 2 millones de decimales en 137 horas; en 1982, los 8 millones en 6 horas y 52 minutos; en 1983, los 16 millones en un tiempo inferior a 30 horas, y en 1987, el computador japonés NEC SX-2 les llevó a los cien millones en 35 horas y 15 minutos de cálculo. En 1989 Gregory Chudnovsky, considerado uno de los mejores matemáticos vivos, y su hermano David sobrepasaron los mil millones de decimales con un IBM 3090.

El billón de decimales los superó de nuevo Yasumasa Kanada y su equipo con un HITACHI SR8000/MPP. Fue en Tokio, en diciembre del 2002. Los 1.241.100.000.000 decimales se obtuvieron tras 600 horas de cálculo, es decir, 25 días, lo que supone el cálculo de 574.583 decimales por segundo. En abril de 2009 el también japonés Daisuke Takahashi superó los 2 billones en la Universidad de Tsukuba, con 29,09 horas de cómputo. El récord actual de casi 2,7 billones de decimales lo ostenta el programador informático francés Fabrice Bellard, que empleó un PC con sistema operativo Linux y 131 días para calcularlo.

La mayor parte de estos resultados se basan en los desarrollos del brillante y enigmático matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920), uno de los cuales, publicado en 1914, permite calcular 8 nuevos decimales por cada término de la serie. Es la serie siguiente:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}.$$

A partir de los resultados de Ramanujan se han definido series que convergen más deprisa, y por cada término de la serie se obtienen varios dígitos correctos. La serie de los hermanos canadienses de origen escocés Jonathan y Peter Borwein permite obtener 31 dígitos nuevos con cada término de su serie.

El resto de los resultados, entre los que destacan los de Yasumasa Kanada, se basan en una fórmula de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que establece una relación entre el número π y la media aritmética-geométrica. La fórmula de Gauss es la siguiente:

$$MAG\left(1,\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{\quad},$$

donde $\quad = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^4}}\, dz.$

En esta expresión, *MAG(a,b)* corresponde a la media aritmética-geométrica de *a* y *b*.

Las igualdades formuladas recientemente por David Bailey, Peter Borwein y Simon Plouffe son el resultado reciente más interesante sobre π. En 1997, estos investigadores publicaron una serie de fórmulas que permiten calcular el dígito binario de π que ocupa una posición arbitraria sin necesidad de calcular los otros dígitos. El mismo método sirve, evidentemente, para calcular dígitos en cualquier base múltiplo de dos, en particular, en base hexadecimal. Los autores demostraron su método calculando el dígito hexadecimal de π que ocupaba las posiciones un millón, 10 millones, 100 millones, 1.000 millones y 10.000 millones, que dieron como resultado los dígitos hexadecimales que se muestran a continuación:

Posiciones	Dígitos hexadecimales a partir de la posición correspondiente
1.000.000	26C65E52CB4593
10.000.000	17AF5863EFED8D
100.000.000	ECB840E21926EC
1.000.000.000	85895585A0428B
10.000.000.000	921C73C6838FB2

MEDIA ARITMÉTICA GEOMÉTRICA

La media aritmética geométrica se define formalmente a partir de la convergencia de dos series, una formada por medias aritméticas y la segunda, por medias geométricas. Recordemos las expresiones de ambas medias:

$$MA(a,b) = \frac{a+b}{2},$$

$$MG(a,b) = \sqrt{ab}.$$

Entonces, se definen los primeros términos de las series **ma** y *mg* como: $ma_1 = MA(a,b)$, $mg_1 = MG(a,b)$, y, a partir de ahí, se definen los términos generales como:

$$ma_{n+1} = MA(ma_n, mg_n),$$

$$mg_{n+1} = MG(ma_n, mg_n).$$

Estas dos series convergen en el mismo valor, la media aritmética-geométrica: *MAG(a,b)*.

Una de las fórmulas que Bailey, Borwein y Plouffe proponían es la siguiente:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) .$$

El término 16^n es el que permite en esta expresión encontrar los dígitos binarios. La siguiente es otra de sus propuestas:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{-8}{8n+1} + \frac{8}{8n+2} + \frac{4}{8n+3} + \frac{8}{8n+4} + \frac{2}{8n+5} + \frac{2}{8n+6} - \frac{1}{8n+7} \right) .$$

El cálculo de decimales de π ha protagonizado una alocada carrera que ha ocupado las mentes abstractas más destacadas de la humanidad durante varios milenios. Actualmente, gracias a los ordenadores, el número de decimales conocidos de π pasa los billones; sin embargo, bastan unos pocos decimales para la mayoría de cálculos.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Como su nombre indica, el sistema de numeración decimal utiliza diez dígitos distintos. La notación más habitual es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

La notación binaria utiliza únicamente dos: el 0 y el 1. La notación hexadecimal utiliza 16. Los símbolos utilizados de forma más frecuente en ella son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E, F.* El símbolo *A* tiene un valor de 10 en numeración decimal; el símbolo *B,* un valor de 11, C es 12, *D* es 13, *E* es 14 y *F* es 15.

La notación binaria y la hexadecimal están muy relacionadas, pues el 16 es un múltiplo de 2, y es muy fácil pasar de una a la otra.

Para pasar de la binaria a la hexadecimal, deben agruparse los bits de 4 en 4, donde a cada grupo de cuatro dígitos le corresponderá un dígito hexadecimal.

Para pasar del sistema de numeración hexadecimal al binario, a cada dígito hexadecimal le corresponderán cuatro binarios, con las siguientes equivalencias:

0000: 0,	0001: 1,	0010: 2,	0011: 3
0100: 4,	0101: 5,	0110: 6,	0111: 7
1000: 8,	1001: 9,	1010: 10,	1011: 11
1100: 12,	1101: 13,	1110: 14,	1111: 15

En un artículo de 1984 publicado en una revista especializada, los hermanos Borwein no justificaban la búsqueda ni se preguntaban el porqué, sólo constataban su propio asombro:

> «En la práctica, se necesitan sólo 39 dígitos de π para calcular la circunferencia de un radio de 2×10^{25} metros (una cota superior de la distancia recorrida por una partícula moviéndose a la velocidad de la luz durante 20.000 millones de años y, por lo tanto, una cota superior del radio del universo) con un error de menos de 10-12 metros (una cota inferior del radio del átomo de hidrógeno). No cabe duda de que el cálculo de π con la mayor exactitud posible tiene una importancia matemática que va más allá de su utilidad».

Capítulo 5

La programación y el software

El desarrollo del hardware informático ha corrido en paralelo a la evolución de los lenguajes de programación. De manera sencilla y directa, un lenguaje de programación se puede definir como el idioma que permite explicarle a un ordenador cómo debe comportarse para hallar la solución a un problema dado, es decir, la lista de pasos, en el orden adecuado, expresada de manera comprensible para él, de los cálculos que debe realizar para entregar el resultado que se le solicita. De manera inmediata, esta definición trae a la memoria aquellos viejos conocidos de la historia de las matemáticas que se han visto en los primeros capítulos: los algoritmos, venerables artefactos matemáticos que tienen ese mismo objetivo. Efectivamente, la definición más formal de un lenguaje de programación lo expresa como el idioma que describe al ordenador los algoritmos que dirigirán su funcionamiento.

Necesariamente, las descripciones que propone un lenguaje de programación tienen que ser rigurosas, sin lugar a ambigüedades, y siempre estarán diseñadas para resolver un problema concreto. La notación deberá permitir el recurso fundamental en los algoritmos y en los lenguajes de programación: la repetición. Los lenguajes de programación implementan la repetición a través de dos métodos: la iteración o la recursión. La iteración es una repetición explícita que se expresa con instrucciones como *repeat*, *while* y *for*. La recursión es una repetición implícita, en la que parte de una acción es repetirse a sí misma, que se articula haciendo que los procedimientos se llamen a sí mismos.

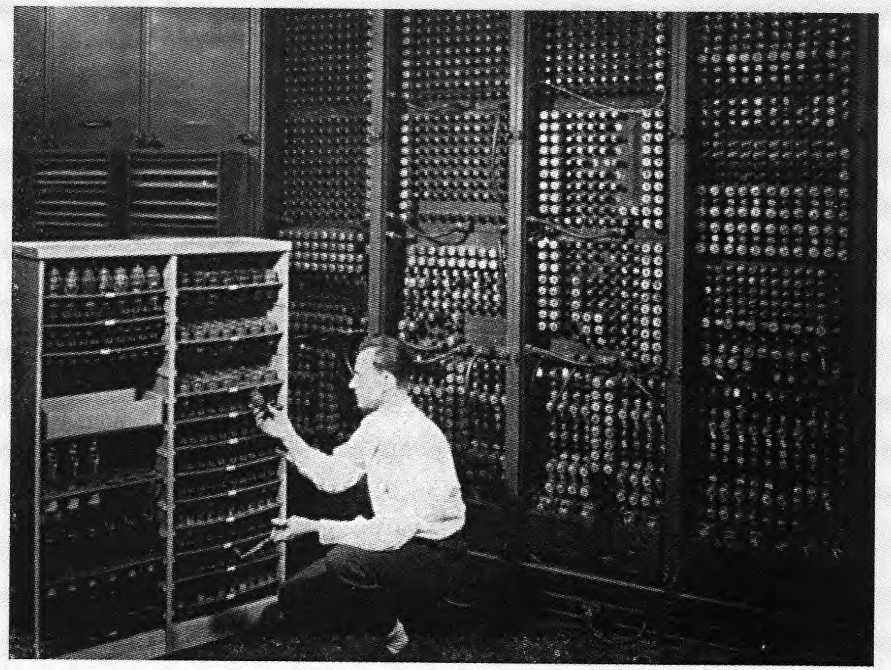
A lo largo de este libro se ha podido comprobar que el término algoritmo es muy anterior a los ordenadores. En sus orígenes, dentro de las matemáticas puras, la palabra se refería únicamente a la descripción de los procedimientos para los

EL TÉRMINO «IMPLEMENTAR»

Implementar es poner en funcionamiento, aplicar los métodos adecuados para llevar algo a cabo. En informática, el término se aplica a la programación de un determinado algoritmo en un lenguaje específico.

EL TÉRMINO «PROGRAMACIÓN»

El uso de la palabra «programar» (*to program*) para definir la acción de fijar las acciones que debe realizar un computador tiene su origen en el grupo que creó el ENIAC en la Moore School of Electrical Engineering, de la Universidad de Pensilvania. En ese momento, la palabra más utilizada era configurar (*to set up*), pues el ENIAC (en la ilustración inferior) se programaba cambiando conexiones y activando interruptores, es decir, modificando directamente el cableado de la máquina. Pero poco a poco, a medida que cristalizaba la separación entre *software* y *hardware*, fue tomando forma la idea de «programación».



cálculos aritméticos, y fue más tarde cuando adoptó el sentido más genérico, sobre todo relacionado con la informática, que es tan popular hoy día. En todo caso, los lenguajes de programación son sólo una evolución de aquellas descripciones, en pos del formalismo con la máxima precisión, imprescindible para la comprensión de los ordenadores.

Los algoritmos más antiguos, que permitieron a los babilonios erigirse como los primeros matemáticos que pudieron resolver problemas de cierta complejidad, resuelven ecuaciones algebraicas y se describen con una forma general en la que

se insertan ejemplos concretos. En ellos no hay iteración ni tampoco expresiones condicionales de la forma «si x < 0 entonces», puesto que los babilonios no conocían el cero. Para expresar más de una posibilidad, los matemáticos de

IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO DE EUCLIDES

A modo de ejemplo, a continuación se presenta la implementación del máximo común divisor de dos números *A* y *B*, primero en lenguaje PROLOG y después en Java. Las siglas *gcd* hacen referencia *a great common divisor*, máximo común divisor en inglés.

La implementación en PROLOG emplea tres reglas, correspondientes a los tres casos posibles. En todos los casos, los dos primeros argumentos son los números y el tercer argumento se puede interpretar como el resultado. La primera regla considera que el caso en el segundo argumento es cero; la segunda regla se aplica cuando el primer argumento es mayor que el segundo, y la tercera, cuando el segundo es mayor que el primero.

```
gcd(A, 0, A).
gcd(A, B, D) :- (A > B),(B > 0),R is A mod B,gcd(B,R,D).
gcd(A, B, D) :- (A < B),(A > 0),R is B mod A,gcd(A,R,D).
```

La implementación en Java se basa también en las reglas anteriores. Recibe como parámetros de entrada los dos números A y B, y devuelve como resultado el máximo común divisor de éstos. La primera versión es recursiva, y la segunda, iterativa.

```
public static int gcd (int A, int B) {
        if (B == 0) { return A; }
        else if (A > B) { return gcd(B, A % B); }
        else if (A < B) { return gcd(A, B % A); }
        return 1;
}
public static int gcdIterative (int A, int B) {
        int r = 0;
        while (B > 0) {
          r = A % B;
          A = B;
          B = r;
        }
        return A;
}
```

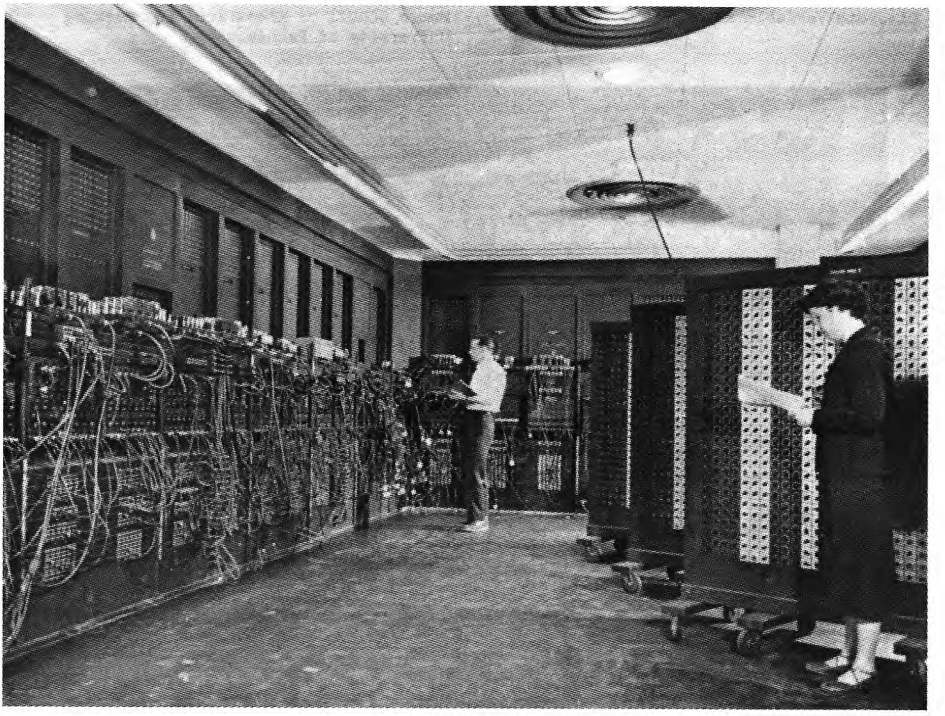
Babilonia repetían el algoritmo tantas veces como era necesario. Tuvieron que pasar muchos siglos para que el griego Euclides describiera, alrededor del año 300 a.C., un algoritmo para calcular el máximo común divisor de dos números. El algoritmo de Euclides, como se conoce en la actualidad, se implementa por lo general de forma recursiva.

De todas maneras, estos algoritmos no forman parte de un proceso continuo de evolución, sino que son casos aislados. Como procedimiento para la realización de tareas automáticas, que es la acepción más actual del término, el gran hito en la historia de su aplicación fue la programación de los telares, que comenzó Jacquard. El telar de Jacquard determinaba el dibujo de la tela mediante cartones o tarjetas perforadas. De una manera primitiva, por lo tanto, las tarjetas contenían lo que llamaríamos el «programa» que la máquina debía ejecutar. Charles Babbage aplicó la idea de las tarjetas perforadas a la computación en sus máquinas. Desde la perspectiva actual, se entiende que aquellos primitivos programas ya estaban escritos en lenguaje máquina, por eso se reconoce a Ada Byron como la primera programadora. Sin embargo, la noción del programa almacenado en memoria aún tenía que concebirse.

A pesar de estos primeros intentos y de los trabajos teóricos de las décadas de 1930 y 1940, sobre todo el cálculo lambda y la máquina de Turing, la descripción de algoritmos no se desarrollaría plenamente hasta la llegada de los primeros ordenadores: el Colossus, el Mark I, el ENIAC, el EDSAC y el UNIVAC. Los lenguajes de programación almacenados en memoria surgieron como solución para acortar el tiempo y simplificar el trabajo que suponía la manipulación directa del *hardware*, que era la forma de programar hasta el momento.

La programación de los primeros ordenadores se hacía en base octal (base 8). Algunos de los primeros lenguajes que permitían la representación de símbolos fueron el Short Order Code (1949) de John Mauchly o el Sort-Merge Generator de Betty Holberton. El primero operaba originariamente en un BINAC como lenguaje interpretado. Las rutinas correspondientes a los símbolos se encontraban en memoria y eran invocadas por el sistema. El UNIVAC heredó este sistema. Los programas escritos en este lenguaje interpretado eran unas 50 veces más lentos que el mismo programa en lenguaje máquina.

Por su parte, el Sort-Merge Generator era una aplicación desarrollada para el UNIVAC, que producía, previa especificación de los ficheros que debía operar, el programa en código máquina para ordenar y mezclar ficheros que contenían las operaciones de entrada y salida.



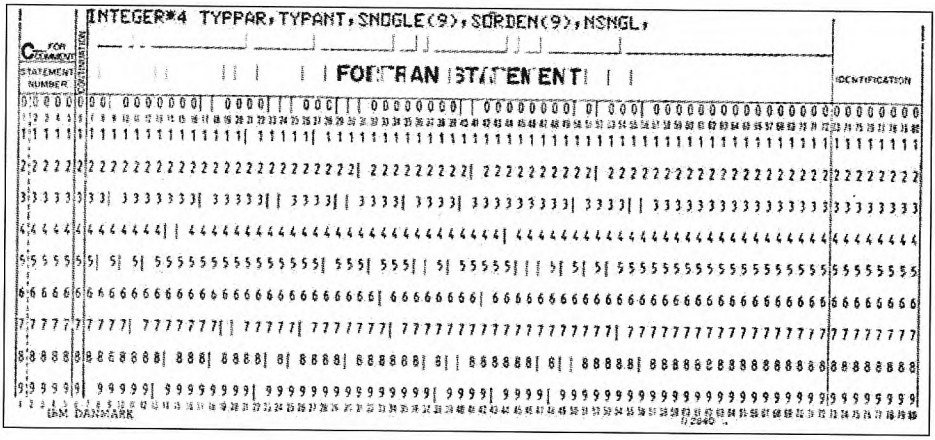
Betty Holberton, que en esta fotografía aparece realizando las labores de control del ENIAC, desarrolló uno de los primeros lenguajes de programación.

Estos primeros sistemas, los sistemas de programación automática (*automatic programming systems*), se limitaban a proporcionar códigos de operación mnemotécnicos y direcciones simbólicas, o a obtener subrutinas de una biblioteca de rutinas e insertar el código previa sustitución de las direcciones de los operandos. Algunos sistemas permitían la interpretación de operaciones de coma flotante y de indexación (*indexing*). De todas maneras, con excepción del compilador A-2 y el sistema algebraico de Laning y Zierler, hasta el año 1954 ni siquiera los sistemas más potentes proporcionaban más que una máquina sintética con un código diferente al de la máquina real.

Pero los problemas de aquel modelo no eran sólo técnicos, sino económicos. El coste de los programadores asociados a un centro de computación superaba el coste del ordenador, en una escala creciente, pues la tecnología iba bajando de precio, y con ello descendían los precios de los ordenadores. Además, entre el 25% y el 50% del tiempo de uso del ordenador se perdía en la programación y la depuración (*debugging*). Los sistemas de programación automática dividían la velocidad de la máquina en un factor de 5 a 10. Los vendedores exageraban tanto sus prestaciones, en la peor

tradición comercial engañosa, que resultaron contraproducentes y generaron un amplio escepticismo hacia estos sistemas.

En aquel escenario, a mediados de 1954, IBM comenzó a desarrollar el lenguaje FORTRAN (*FORmula TRANslation*) bajo la dirección de John Backus, con la intención de solventar todos estos problemas. El compilador se centró sobre todo en conseguir un código objeto eficiente, y lo consiguió. De hecho, la calidad del código objeto y las transformaciones que realizaba para obtener un programa eficiente sorprendieron incluso a los que habían participado en su implementación.

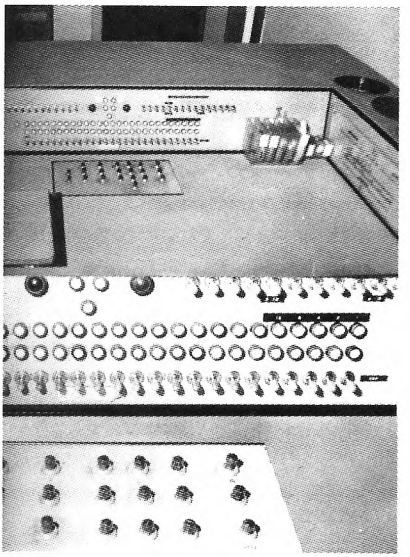


Tarjeta perforada realizada en lenguaje FORTRAN.

Con la aparición del FORTRAN, el programador podía especificar procedimientos matemáticos con un lenguaje preciso. Como el lenguaje permitía un cierto nivel de abstracción, el código era traducible a diferentes máquinas. Así aparecieron las primeras abstracciones de datos. La información se guardaba en posiciones de memoria, y ya no se veía almacenada como una secuencia de bits sino como un valor entero o real. En el lenguaje, aparecían algunas de las construcciones básicas de los lenguajes imperativos: el condicional (IF <condición> salto-cierto salto-falso) y el bucle (DO final-bucle variable=inicio, final, paso).

Al FORTRAN le siguieron una serie de lenguajes que utilizaban también la idea de las abstracciones de datos: el ALGOL-60 (uno de cuyos responsables fue el científico holandés Edsger Dijkstra), el COBOL y el LISP (antecedente de los lenguajes funcionales del que se hablará en detalle más adelante). Cada uno incluía aquellos tipos de datos que eran necesarios para las aplicaciones que se querían construir. Estos lenguajes eran específicos para resolver determinados problemas.

A diferencia de ellos, el PL/I fue diseñado con propósito general, y para ello incorporó todas las innovaciones de los lenguajes anteriores, lo que lo hizo enorme y difícil.



La consola Electrologica X1, que estuvo operativa entre 1958 y 1965, utilizaba el lenguaje Algol-60.

La siguiente generación de lenguajes fue menos ambiciosa aunque más efectiva. Entre ellos, destacaban el Simula-67 y el Pascal. En lugar de disponer de un conjunto exhaustivo de abstracciones definidas *a priori*, disponían de mecanismos flexibles y apropiados para definir nuevas abstracciones. El Pascal y el ALGOL-68 permitían definir nuevos tipos mediante los básicos predefinidos y ciertos constructores de tipos (*array*, *record*, etc.). Estos nuevos podían verse como una abstracción construida sobre una representación interna, y tenían asociado un conjunto de operaciones. Pero este modelo, aunque flexible, tenía un problema. Mientras que no podía accederse a la representación de los tipos predefinidos, es decir, que no podía manipularse un objeto predefinido directamente (sólo podía hacerse a través de las operaciones), sí podía accederse a la estructura de los tipos definidos y modificar sus valores. Ello se debía a que el lenguaje no diferenciaba entre dos niveles de abstracción: el nivel en el que el programador utiliza un tipo como un objeto y el nivel en el que implementa ese tipo. Y esa confusión dificultaba la lectura de los programas, la corrección de errores y sus posibles modificaciones. Cuando los programas adquirían cierto tamaño, la tarea era colosal.

La solución vino de mano de los tipos abstractos de datos, y los lenguajes que los soportan (Ada, Modula-2 y CLU), con la diferenciación de los dos niveles y la ocultación de información. En el nivel en que el programador utilizaba el tipo como un objeto no era posible acceder a la estructura que lo implementaba. La manipulación sólo se realizaba mediante el conjunto de operaciones especificadas en la interfaz. La representación quedaba completamente oculta. En el nivel de implementación se definían las operaciones especificadas en la interfaz junto a la estructura que las soportaba.

Como el programador conocía las operaciones de un tipo y su comportamiento, pero no su representación, razonaba en términos de una abstracción. Cualquier cambio en la implementación que no modificara la interfaz, no afectaría a los módulos que lo utilizaran, ya que no se podía acceder a la representación, sino sólo a las operaciones de la interfaz.

Estos mecanismos de abstracción permitían a aquellos lenguajes estructurar los programas en términos de objetos (representar el tipo junto a sus operaciones). Esta estructuración era opcional en algunos lenguajes, como Ada y Modula-2, pero se volvía obligada en otros casos. En lenguaje CLU, el programador debía agrupar los datos de la aplicación en clases, llamadas *clusters*. También lo hacían así los lenguajes orientados a objetos, que incorporaban, junto a los objetos, la noción de herencia, que permitía definir un objeto a partir de otro predefinido.

La programación orientada a objetos es un paradigma de programación que usa objetos y sus interacciones para diseñar aplicaciones y programas de ordenador. Se desarrolló con dos objetivos: implementar programas a gran escala y modelizar el razonamiento humano en la inteligencia artificial. En este último campo, han contribuido al desarrollo de técnicas de estructuración del conocimiento, agrupando en una entidad única la información y las propiedades relativas a un mismo concepto.

El primer lenguaje que agrupó los datos y los procedimientos en una única entidad fue el Simula-I. Destinado a problemas de simulación, como su nombre sugiere, este lenguaje fue desarrollado en el Norwegian Computing Center (NCC) bajo la dirección del matemático y político noruego Kristen Nygaard. La primera versión se acabó en enero de 1965. Su sucesor fue el Simula-67, de propósito general, que formalizó los conceptos de objeto y clase, e introdujo también la herencia. Más tarde, el lenguaje Smalltalk-80, que descendía del Simula a través de dos versiones previas (Smalltalk-72 y Smalltalk-76), generalizó el concepto de objeto y lo convirtió en la única entidad que manipula el lenguaje. El Smalltalk era un lenguaje orientado a objetos que podría considerarse de tipo puro: concebía que las clases de objetos eran también objetos y

las estructuras de control eran operaciones sobre las clases adecuadas. A principios de la década de 1970, el Xerox Palo Alto Research Center, conocido como Xerox PARC, vio los primeros pasos del sistema Dynabook, una herramienta personal para la gestión de la información, con una interfaz basada en ventanas, menús de texto e iconos, es decir, una interfaz gráfica (en inglés, GUI, Graphical User Interface) tal y como lo conocemos hoy. El Dynabook fue concebido por el estadounidense Alan Kay con la intención de introducir a los niños en el mundo de los ordenadores. Estaba escrito en BASIC y se finalizó en 1972. Incorporaba el mecanismo de paso de mensajes y, además, los conceptos de clase e instancia de Simula.

Alan Kay en el momento de ser investido doctor Honoris Causa por la universidad española de Murcia, que deseaba premiar su contribución al desarrollo de la informática. Esta ceremonia tuvo lugar el 28 de enero de 2010.

En la actualidad, existen muchos lenguajes orientados a objetos (Eiffel, C++, etc.), algunos de los cuales son extensiones de otros lenguajes. C++ es una extensión de C desarrollada por el danés Bjarne Stroustrup, incorporando las clases de Simula. CLOS fue desarrollado para estandarizar el sistema de objetos de Common LISP. Las ideas de objeto y herencia se han empleado en el campo de la inteligencia artificial para desarrollar lenguajes basados en lenguajes de *frames*, como KRL o KL-ONE, y lenguajes de actores, como Act1, Act2, Act3, ABCL/1...

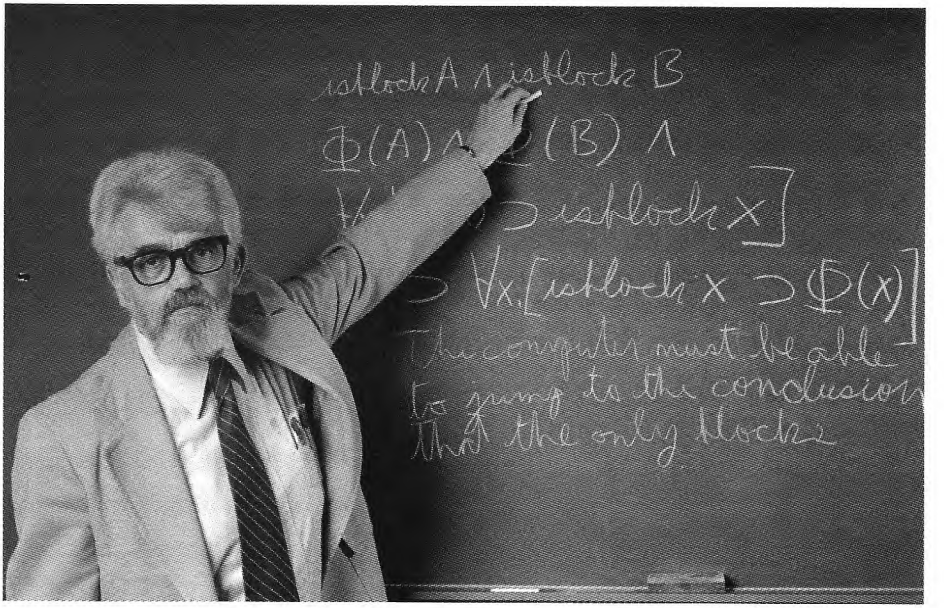
La abstracción y los objetos aparecen en todos los lenguajes de los últimos años, tanto en los que se definen directamente en los lenguajes orientados a objetos, por ejemplo Java y Python, como en los que son por procedimientos pero incorporan construcciones orientadas a objetos, como PHP. Pero se han desarrollado también lenguajes orientados a construir aplicaciones de forma rápida y lenguajes de *scripts*. Así lo hacen PHP o el JavaScript, ambos desarrollados en la última década del siglo XX. El objetivo de estos lenguajes es hacer más rápida y fácil la creación de programas. Ciertamente, lo consiguen en el caso de programas pequeños, pero, en comparación con los lenguajes anteriores, el diseño de programas de grandes dimensiones resulta más complicado. Sea como fuere, la influencia de los lenguajes orientados a objetos en el diseño de programas ha proporcionado nuevas herramientas, por ejemplo, los lenguajes de modelado, como el UML.

El paradigma funcional

En los lenguajes imperativos la computación se consigue a través de una modificación de las variables mediante asignaciones. Un programa en un lenguaje imperativo imita la estructura de la máquina Von Neumann, en la que hay celdas con valores. Una asignación a una variable no es más que el cambio de valor de una celda. En los lenguajes funcionales el resultado se obtiene mediante la aplicación de funciones definidas por composición o recursión.

Los lenguajes funcionales tienen su origen en el trabajo del John McCarthy, creador del término «inteligencia artificial», en el seno del MIT (Instituto de Tecnología de Massachusetts), que se publicó en 1960 en *Comunicaciones del ACM*, la revista mensual de la veterana Asociación Americana de Informática (ACM), la sociedad que concede el Premio Turing.

Todo empezó en 1958, cuando McCarthy estudiaba el uso de operaciones con listas encadenadas para un programa de diferenciación simbólica. Como la diferenciación es un proceso recursivo, usó funciones recursivas. Además, creyó conveniente pasar funciones como argumento a otras funciones. El proyecto de implementación de aquel nuevo lenguaje empezó en otoño de ese mismo año. El resultado publicado dos años más tarde se tituló *Funciones recursivas de expresiones simbólicas y su computación por parte de la máquina, Parte I* (la Parte II nunca fue publicada), y era la primera versión del LISP (*List Processing*), el primero de los lenguajes funcionales, pionero en muchas ideas en el terreno de las ciencias de la computación. Para definirlo, McCarthy utilizó la notación de Alonzo Church, el cálculo lambda.



John McCarthy, creador del término «inteligencia artificial», en una fotografía tomada en 1980 en la californiana Universidad de Stanford.

EL CÁLCULO LAMBDA

Este modelo de cálculo fue definido por Church y Kleene a principios de la década de 1930, con una capacidad expresiva equivalente a la máquina de Turing, aunque con un funcionamiento diferente. Desde un punto de vista formal, el cálculo lambda utiliza expresiones y reglas de reescritura de las expresiones, que modelizan la aplicación de funciones o computación. Como ejemplo, consideramos la definición de cierto y de falso:

cierto: λ xy.x

falso: λxy.y

La función «AND» se define entonces como:

AND: λpq.p q p

Así, para calcular «AND cierto falso», sustituimos cada término por su expresión equivalente en cálculo lambda:

(λpq.p q p) (λ xy.x) (λxy.y)

Y después aplicamos las reglas de escritura, que nos lleva a la expresión (λxy.y), equivalente, como hemos dicho, a falso. Los números y las operaciones numéricas se definen de forma similar.

El LISP representaba de forma uniforme los datos y los programas. Utilizaba la recursión como estructura fundamental de control y evitaba los efectos laterales insoslayables de la programación imperativa. En este lenguaje, se introdujeron también las expresiones condicionales y la notación prefija (o polaca) de Lukasiewicz.

NOTACIÓN PREFIJA O POLACA

Las expresiones matemáticas se expresan con el símbolo correspondiente a la operación, situado antes de los operandos. Así, tenemos que

$$(a + b) - (c \cdot d)$$

se traduce en notación polaca como:

$$- + ab \cdot cd.$$

A mediados de la década de 1960 Peter Landin diseñó un nuevo lenguaje funcional, el ISWIM (If You See What I Mean), que estaba basado en el LISP y el cálculo lambda. El ISWIM produjo toda una familia de lenguajes funcionales (ML, FP, Miranda...). En aquella época la programación funcional interesaba a un número muy reducido de investigadores, pero comenzó a recibir mayor atención a partir de 1978, cuando John Backus, creador del FORTRAN, publicó su artículo *¿Se puede liberar la programación del estilo Von Neumann?* Backus criticaba con dureza los lenguajes de programación convencionales y pedía el desarrollo de un nuevo paradigma, al que llamó programación funcional, que pusiera el acento en los funcionales (funciones que operan sobre otras funciones). En su artículo, que le valió el Premio Turing, describió el lenguaje FP (Functional Programming), en el que no existían variables. Aquel golpe sobre la mesa disparó el interés de los investigadores en los lenguajes funcionales, y, con ello, la aparición de nuevos lenguajes.

En la actualidad, existen dos grandes familias de lenguajes funcionales: la que sigue el estilo LISP y la que sigue el ISWIM. Entre los primeros, habitan dialectos de LISP, como el Common LISP, y lenguajes propios, como Scheme. En la segunda familia se encuentra el Standard ML, resultado de un proceso de estandarización a partir del ML y el Hope, ambos desarrollados en la Universidad de Edimburgo. El ML es un lenguaje funcional muy tipado (*strongly-typed language*), a diferencia del LISP, lo que significa que toda expresión de este lenguaje tiene un tipo que el sistema deduce en tiempo de compilación (un tipo estático). Además, mediante mecanismos

de definición de tipos abstractos de datos, el programador puede incorporar nuevos tipos al sistema. EL ML permite la definición de módulos y de módulos genéricos, los functores. En el lenguaje Hope, a diferencia del ML, las definiciones necesitan una declaración explícita de los tipos.

LENGUAJES FUNCIONALES: EJEMPLOS DE IMPLEMENTACIÓN

Los siguientes ejemplos corresponden a la definición del factorial y en ellos pueden apreciarse las similitudes de la sintaxis de las dos grandes familias de lenguajes funcionales. En los lenguajes LISP (Scheme, Hope y ML) hay variables aunque sean funcionales, y la definición del factorial es recursiva y parecida a la definición de Java que ya se ha visto. Por el contrario, en el lenguaje FP no existen variables. La definición en FP utiliza la función *iota*, que, aplicada a un número, retorna la lista de todos los naturales de uno hasta ese número. A esta lista se le aplica la construcción /*, que multiplica sus elementos. Formalmente, /op extiende una operación binaria a una lista.

Definición en LISP:

```
(defun factorial (n)  (if (= n 0) 1 (* n (factorial (- n 1)))))
```

Definición en Scheme:

```
(define factorial
    (lambda (n)
      (if (= n 0) 1 (* n (factorial (- n 1))))))
```

Definición en Hope:

```
dec fact : num - > num;
- - - fact 0 < = 1;
- - - fact n < = n*fact(n-1);
```

Definición en ML:

```
fun f (0 : int) : int = 1
  | f (n : int) : int = n * f (n-1)
```

Definición en FP:

```
fact ≡ /* o iota
```

LISTAS INFINITAS EN LENGUAJE HASKELL

Las siguientes definiciones de dos listas infinitas en Haskell ayudan a comprender la diferencia entre la evaluación ávida y la evaluación perezosa. Las definiciones son recursivas, es decir que se llaman a sí mismas.

La primera corresponde a la lista de los números naturales. Por inducción, se supone que la lista ya está definida de forma correcta. Entonces, se incrementa en uno todos los elementos de la lista, de donde se obtiene la lista 2, 3, 4..., y se añade el 1 a ella. En la definición, se incrementa en uno a toda la lista de naturales mediante la construcción «map (+1) naturales».

La segunda recoge los números de Fibonacci. Suponiendo que la lista ya existe, la construcción de los números se basa en la alineación de cada número con su siguiente y la suma de los números alineados. En la definición, se alinea «listafibs» con la cola de listafibs, que se calcula con «tail listafibs». Después, se suman los pares formados con un número de cada lista mediante «zipWith (+)».

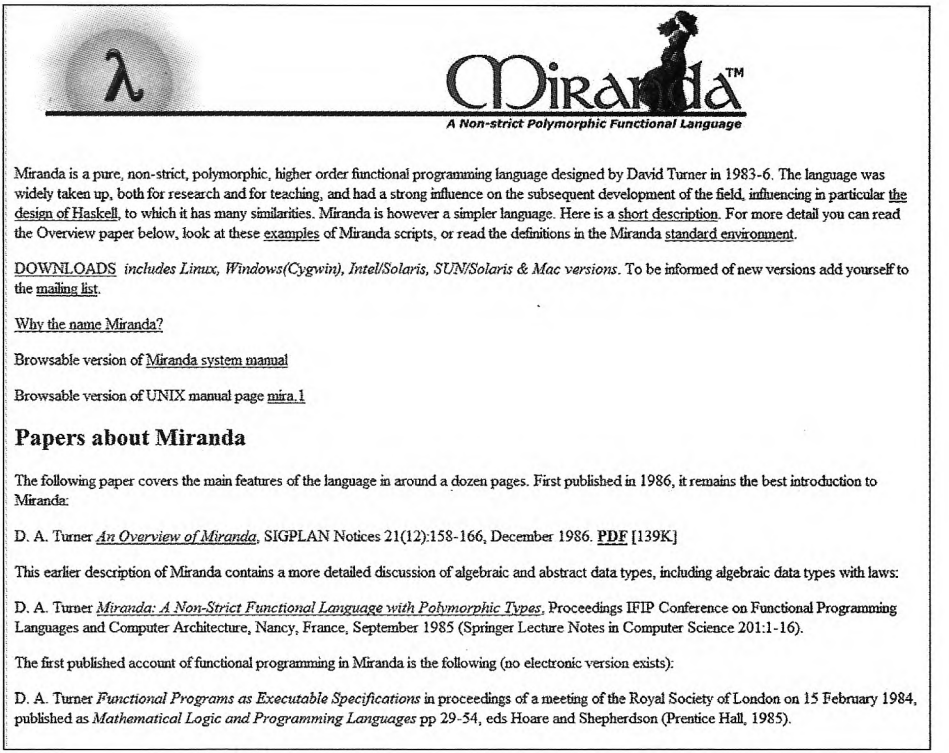
```
naturales = 1 : map (+1) naturales
listafibs = 0 : 1 : zipWith (+) listafibs (tail listafibs)
```

Estas definiciones funcionan porque la evaluación es perezosa. La evaluación ávida que emplean la mayoría de lenguajes dejaría el ordenador pensando infinitamente al evaluar las expresiones. Obsérvese que la definición de los naturales requeriría definir primero la lista infinita y después sumar uno a todos sus elementos.

Los lenguajes LISP y ML son de evaluación ávida (*eager evaluation*), lo que quiere decir que todos los argumentos de una función son evaluados antes de su aplicación.

Pero también existen los lenguajes sin evaluación, o con evaluación perezosa, como el Haskell, el Lazy ML, algunas versiones de Hope, pero sobre todo el Miranda, definido por David Turner a partir del KRC y el SASL. En estos lenguajes la evaluación de un argumento sólo se lleva a cabo cuando es necesario conocer su valor, lo que permite construir programas que nunca acabarían con una evaluación ávida.

Por ejemplo, se puede definir una lista infinita de números, que no se evaluará jamás en su totalidad, y únicamente se evaluarán los términos necesarios en cada momento.



Miranda™

A Non-strict Polymorphic Functional Language

Miranda is a pure, non-strict, polymorphic, higher order functional programming language designed by David Turner in 1983-6. The language was widely taken up, both for research and for teaching, and had a strong influence on the subsequent development of the field, influencing in particular the design of Haskell, to which it has many similarities. Miranda is however a simpler language. Here is a short description. For more detail you can read the Overview paper below, look at these examples of Miranda scripts, or read the definitions in the Miranda standard environment.

DOWNLOADS *includes Linux, Windows(Cygwin), Intel/Solaris, SUN/Solaris & Mac versions.* To be informed of new versions add yourself to the mailing list.

Why the name Miranda?

Browsable version of Miranda system manual

Browsable version of UNIX manual page mira.1

Papers about Miranda

The following paper covers the main features of the language in around a dozen pages. First published in 1986, it remains the best introduction to Miranda:

D. A. Turner *An Overview of Miranda*, SIGPLAN Notices 21(12):158-166, December 1986. **PDF** [139K]

This earlier description of Miranda contains a more detailed discussion of algebraic and abstract data types, including algebraic data types with laws:

D. A. Turner *Miranda: A Non-Strict Functional Language with Polymorphic Types*, Proceedings IFIP Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture, Nancy, France, September 1985 (Springer Lecture Notes in Computer Science 201:1-16).

The first published account of functional programming in Miranda is the following (no electronic version exists):

D. A. Turner *Functional Programs as Executable Specifications* in proceedings of a meeting of the Royal Society of London on 15 February 1984, published as *Mathematical Logic and Programming Languages* pp 29-54, eds Hoare and Shepherdson (Prentice Hall, 1985).

La página de inicio de la web dedicada a Miranda, el lenguaje de programación ideado por David Turner.

El paradigma lógico

Cuando las familias de lenguajes imperativos y funcionales ya estaban establecidas, una alternativa surgió a su paso. El tercer paradigma lo protagonizaron los lenguajes lógicos. La programación lógica consistía en la aplicación al diseño de lenguajes de programación de la lógica filosófica, la ciencia formal que estudia los principios de la demostración e inferencia válida. No debe confundirse con la lógica computacional, que es la lógica matemática aplicada a las ciencias de la computación.

Los paradigmas imperativo y funcional plantean un programa como una función que calcula un resultado a partir de unos valores de entrada. En el lenguaje imperativo, por ejemplo, el programa es una orden que lee unos ficheros de entrada y, después de efectuar los cálculos, escribe las salidas en otros ficheros. En su lugar, en un lenguaje lógico el programa implementa una relación. Mediante un conjunto de reglas, las cláusulas de Horn, el programador establece los hechos que son ciertos, a partir de

los cuales el usuario puede preguntar la certeza o la falsedad de una relación. La computación se basa en el principio de resolución de Robinson y consiste en evaluar si la relación dada por el usuario es cierta o falsa, o establecer en qué casos es cierta.

LAS CLÁUSULAS DE HORN

Las cláusulas de Horn son un conjunto de reglas lógicas del tipo «si es verdad el antecedente, entonces es verdad el consecuente». Se puede decir que son implicaciones en las que existe una conjunción de premisas y un único consecuente. Las premisas pueden ser 0, 1 o más de una:

$$a1 \wedge a2 \wedge \ldots \wedge aN \rightarrow b.$$

El lenguaje lógico por excelencia es el PROLOG, que proviene de *PROgrammation en LOGique*. Se desarrolló en 1972 y es el único lenguaje de esta familia cuyo uso se ha extendido hasta el momento. La primera versión fue diseñada bajo la dirección del investigador Alain Colmerauer en el grupo de Inteligencia Artificial de la Universidad de Aix-Marsella, con la colaboración del lógico británico Robert Kowalski, de la Universidad de Edimburgo. El nacimiento del lenguaje fue la confluencia de dos líneas de investigación: la primera, de Colmerauer, no estaba relacionada directamente con la computación, sino que estudiaba el procesamiento del lenguaje natural; y la otra, la de Kowalski, estudiaba las demostraciones automá-

UNA DEFINICIÓN EN PROLOG

Como ejemplo de programación en PROLOG, presentaremos un pequeño programa para calcular números naturales. Para ello, definiremos nat(*N*) de manera que se cumpla únicamente cuando *N* es un natural. La definición es constructiva en el sentido de que el lenguaje calculará naturales cuando le preguntemos qué valores de *N* satisfacen el predicado. El programa es como sigue:

nat(*N*): $-N = 0$.
nat(*N*): −nat(*Np*), *N* is *Np* + 1

La primera línea afirma que el cero es un natural. La segunda línea expresa que, si existe un natural *Np*, entonces *Np* + 1 también es un natural. Más formalmente, el programa está diciendo que *N* es un natural si *N* es cero, o si existe un natural *Np* tal que *N* es *Np* + 1.

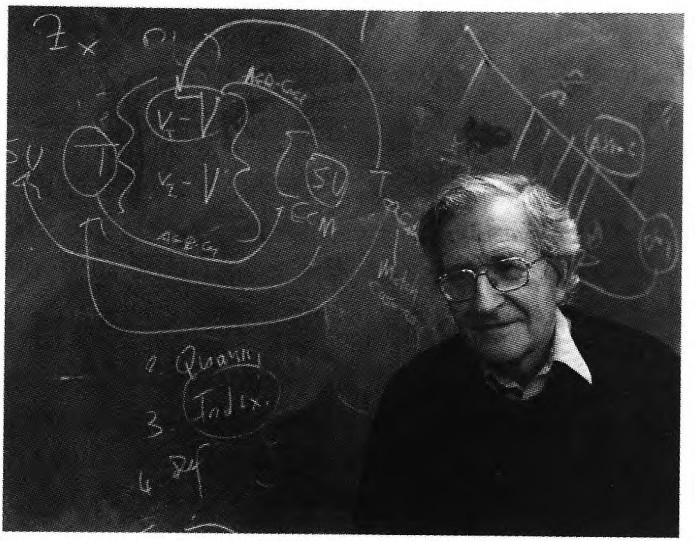
ticas de teoremas. En el lenguaje influyeron las gramáticas W, una notación utilizada para describir ALGOL-68, y el lenguaje Planner, desarrollado en la Universidad de Stanford. El éxito del PROLOG se debió a la implementación que desarrolló David Warren, del grupo de Kowalski en Edimburgo. La denominada Máquina Abstracta Warren (WAM) ejecutaba los programas a una velocidad comparable a la podían alcanzar los programas en LISP.

Descripción formal de los lenguajes de programación

La descripción sintáctica y semántica de los primeros lenguajes de programación se realizó mediante métodos informales. La comunidad científica comenzó considerando la cuestión de la sintaxis. En 1960, para describir la sintaxis del ALGOL-60, John Backus y Peter Naur diseñaron la notación conocida como BNF (Notación de Backus-Naur), que, además de ser útil en la descripción formal de la sintaxis del lenguaje, contribuyó mucho en su diseño. Pocos años después de su desarrollo, se descubrieron semejanzas significativas con las reglas de la gramática establecidas en el siglo IV a.C. por Pānini, que describía el sánscrito clásico.

Al mismo tiempo que se diseñaba la BNF, el celebérrimo lingüista, filósofo y analista político Noam Chomsky desarrolló su teoría de las gramáticas, conocida como la jerarquía de Chomsky. Esta teoría clasifica las gramáticas, y los lenguajes que generan, en cuatro tipos según su capacidad de expresión. El tipo 3 comprende las gramáticas regulares, que son las más restrictivas. El tipo 2 agrupa las gramáticas libres de contexto, que pueden ser descritas mediante el BNF. El tipo 1 son las gramáticas sensibles al contexto y el tipo 0, las gramáticas sin restricciones, teniendo ambas mayor expresibilidad que las anteriores. La jerarquía de Chomsky está relacionada con la capacidad de cálculo. Un sistema de computación general podrá reconocer sentencias de cualquier lenguaje expresado mediante una gramática de tipo 0. Una máquina de Turing o el cálculo lambda pertenecen a esta categoría de sistemas de computación. Los autómatas regulares son sistemas de computación de tipo 3.

Años más tarde, el Premio Turing suizo Niklaus Wirth, diseñador de numerosos lenguajes, especificó la sintaxis del lenguaje Pascal introduciendo los diagramas sintácticos y una ampliación de la BNF, la EBNF (Extended BNF). Aunque estas notaciones no conseguían aumentar la capacidad de expresión del BNF, su uso se ha extendido en la actualidad, pues existen programas que generan de forma automática reconocedores sintácticos a partir de descripciones de la sintaxis.



El lingüista Noam Chomsky, quien acuñó la jerarquía que lleva su nombre.

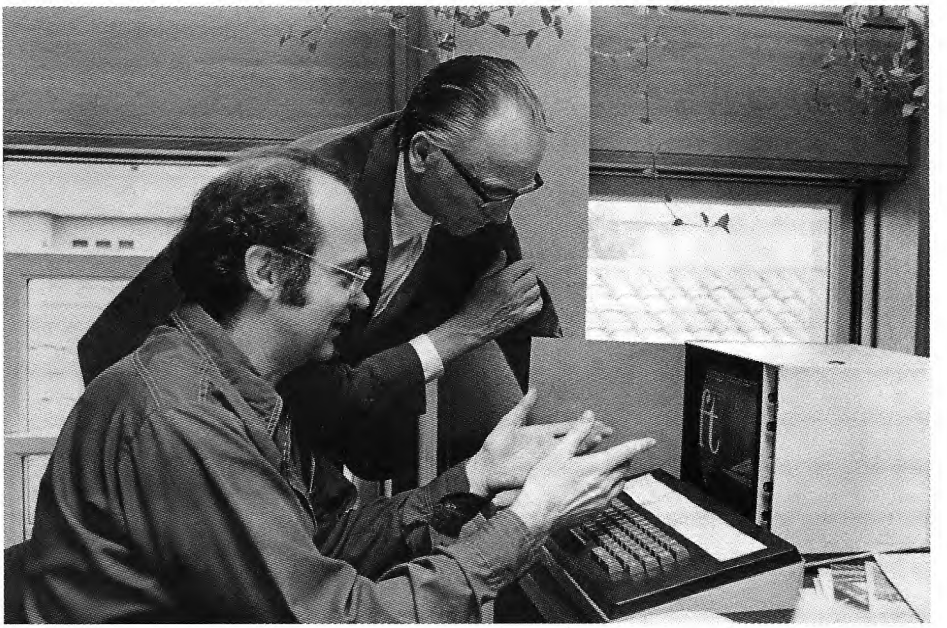
Menos éxito que la sintaxis ha tenido la especificación formal de la semántica de los lenguajes de programación, esto es, de cómo deben comportarse los lenguajes de programación. Hasta el momento se han elaborado diversos formalismos, pero ninguno ha conseguido la popularidad de los modelos desarrollados para la sintaxis.

La primera propuesta fue el VDL (Vienna Definition Language), desarrollado en el Laboratorio de Viena de IBM para especificar formalmente el lenguaje PL/I. Consiste en 2 partes: la primera es un traductor que construye un árbol de sintaxis abstracta para cada programa PL/I; la segunda es un intérprete que especifica cómo debe ser ejecutado o interpretado el programa que representa el árbol. Este tipo de semántica se denomina operacional y es intrínsecamente muy detallada. Como el lenguaje PL/I es muy grande, irregular y lleno de casos particulares, su especificación formal produjo un documento inmenso y difícil de entender, cuyo tamaño le ganó el apodo irónico de VTD, iniciales de Vienna Telephone Directory, es decir, el listín telefónico de Viena. A pesar de ello, constituyó un logro importante en este campo.

El laboratorio de Viena continuó esta línea de investigación para generar una segunda propuesta mejorada: el VDM (Vienna Development Method), que incluía algunas características *ad hoc* para especificar los lenguajes de programación imperativos. Fue desarrollado en 1982 y en él se dio la conjunción de dos visiones, la de Dines Bjørner y la de Cliff Jones, que acabarían desembocando en dos escuelas de

pensamiento en programación, la escuela danesa y la escuela inglesa, respectivamente. El VDM se empleó para especificar los lenguajes Pascal y ALGOL-60, y también para un subconjunto de Ada'79.

Por otro lado, el destacado científico informático estadounidense Robert Floyd mostró en 1967 de qué manera se podía razonar sobre la corrección de un programa asociando aserciones (*assertions*) a los arcos de su diagrama de flujo. Cada aserción es una fórmula lógica que relaciona el valor de las variables del programa, con el objetivo de establecer una aserción que se mantiene cierta al final del programa y que relaciona las entradas y las salidas del mismo. Las técnicas de Floyd fueron refinadas y mejoradas por el lógico británico Charles Hoare, que las expresó como un sistema de axiomas y reglas de inferencia asociadas a las construcciones de los lenguajes de programación, con lo que definía la semántica axiomática. En 1973 Hoare y Wirth publicaron la especificación axiomática de un subconjunto de Pascal. Durante su construcción, habían encontrado algunas irregularidades en el diseño original del lenguaje que llevó a un diseño mejorado. Al año siguiente, Hoare y Lauer exploraron la utilización complementaria de las semánticas axiomática y operacional. Edsger Dijkstra introdujo el uso de la precondición más débil en 1975.



Donald Knuth (a la izquierda) y Herman Zaph discuten las características de una nueva tipografía informática en esta fotografía realizada en la universidad californiana de Standford en 1980.

Existen otras formas de describir la semántica de un lenguaje. Las gramáticas de atributos aparecieron en 1968 de manos de uno de los más reconocidos expertos en ciencias de la computación, famoso por su sentido del humor, Donald Knuth. Estas gramáticas se estudian de forma extensiva en relación a las técnicas de compilación. Pero también hay un cuarto tipo de semántica, la denotacional, que desarrollaron en la Universidad de Oxford el norteamericano Dana Scott y el británico Christopher Strachey a principios de los 70. La semántica denotacional asigna a cada programa un significado, una denotación (*denotation*), en términos de una entidad matemática, que normalmente es una aplicación de valores de entrada a valores de salida. Se han estudiado sistemas para generar compiladores a partir de la semántica denotacional del lenguaje, pero hasta el momento, se han mostrado extremadamente ineficientes.

Así, la historia de la computación está lejos de haber llegado a un punto concluyente que culmine todos los esfuerzos y conocimientos precedentes. Muy al contrario, su evolución continúa, ligada más que nunca al desarrollo tecnológico, que ofrece perspectivas jamás soñadas. Los lenguajes informáticos ya no sólo configuran nuestros ordenadores, sino también nuestros televisores, teléfonos móviles e incluso los más insignificantes electrodomésticos. Una vez más, damos los primeros pasos en un nuevo mundo, pero, como se ha visto, llegar hasta aquí no ha sido fruto de la casualidad sino del empeño que el hombre ha puesto en desarrollar su conocimiento, una empresa en la que el presente no es más que un episodio hacia un futuro imprevisible, seguramente asombroso.

Bibliografía

Al-khwarizmi, M. Ibn Musa, *El libro del álgebra*, Madrid, Nivola, 2009.

Bentley, P. J., *El libro de las cifras*, Barcelona, Paidós, 2008.

Boyer, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza, 1996.

Coello, C. A., *Breve historia de la computación y sus pioneros*, México, Fondo de Cultura Económica, 2003.

Ifrah, G., *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa-Calpe, 2002.

Smith, D. E., *History of Mathematics*, Nueva York, Dover Publications, obra de 1921 reeditada en 1951.

Índice analítico

ábaco 31-33, 39, 43-45, 53, 64-71
  escuelas de 67-69
ACM (Association for Computing Machinery) 113, 134
Ada (lenguaje) 98, 132, 143
Ada Augusta Byron, condesa de Lovelace 97-99
Ahmes, papiro 26
Alejandro Magno 51
Algol 107, 130, 131, 141, 143
Al-Kashi, G. 73, 74
Al-Khwarizmi 64-66, 69
Almagesto 33, 34, 37, 41
Apolonio de Perga 41
Arquitas 21
Aristóteles 12, 61
Arquímedes 7, 34, 35
Aurillac, G. de 64, 65

Babbage, C. 85, 94-100, 105, 114, 128
Backus, J. 130, 136, 141
Baldwin, F. 92
BASIC 133
Bernoulli, números de 98
bisección, función 21, 46
Bjørner, D. 142
Bletchley Park 110, 111
BNF 141
Boole, G. 101-102
Borda, recuento de 64
Bouchon, B. 94
Brahmagupta 53
Brouncker, W. 88
Bruno, G. 63
Bush, V. 100

C 133
C++ 133
cálculo lambda 108, 110, 128, 134-137, 141
Cambridge Philosophical Society 95
cero 19, 43, 53, 54, 64, 66, 67, 127
Ceulen, L. van 74
Chiarini, G. di Lorenzo 69
Chomsky, jerarquía de 141
Chomsky, N. 141-142
Chongzhi, Z. 50, 74
Chou 43
Church, A. 108, 110, 134, 135
Cicerón 37
cifra 17, 52, 53
Cirilo 40
CLOS 133
CLU 132
Colmerauer, A. 140
Condorcet 64

Darwin, C. 100
Diofanto de Alejandría 37, 41

EBNF 141
Eckert, J.P. 113-116, 118
ecuación
  de segundo grado 21, 22, 27
  de tercer grado 21, 27

EDSAC 117, 128
EDVAC 113, 115, 116
Eiffel 133
ENIAC 111, 113-116, 119, 126, 128, 129
Entscheidungsproblem 108, 110
Euclides 36, 57, 71, 85, 128
Euclides, algoritmo de 127
Euler, L. 0-91

Falcon, J.-B. 94
Fan, W. 46
Fernel, J. 83
Fibonacci (Leonardo de Pisa) 53, 67, 68
Floyd, R. 143
FORTRAN 130, 136
FP 136, 137
fracciones, representación en Egipto 13, 25-27
Frege, G. 91, 92
Frend, W. 98

Galigai 67
Gödel, K. 91, 110
Goldstine, H.H. 114
Gregory, J. 54, 89
Gunter, E. 81
Gutenberg, J. 70

Haskell 138
Henry, F., conde de Bridgewater 100
Henry, J. 93
Herodoto 12
Herón de Alejandría 21
Herschel, J. 95
Hilbert, D. 91, 108, 115
Hipatia 40-41
Hoare, C. 143
Holberton, B. 128-129
Hollerith, H. 94
Hope 136-138
Horn, cláusulas de 139-140

IBM 100, 107, 119, 120, 130, 142
imprenta 38, 70
Ishango 10
ISWIM 136

Jacquard, J.M. 94, 98, 128
Java 127, 134, 137
JavaScript 134
Jones, C. 142

Kant, I. 64, 91
Kay, A. 133
Kepler, J. 83-84
King, W. 98
Kleene, S. 110, 135
Knuth, D. 143-144
Kowalski, R. 140
KRC 138
Kūshyār ibn Labbān 53, 54, 65, 73

Lacroix, S.F. 95
Landin, P. 136
Lebombo 9
Leibniz, G.W. 55, 57, 59, 63, 86-89, 95, 108
LISP 130, 133, 134, 136-138, 141
lenguajes
funcionales 130, 134, 136, 137

imperativos 130, 134, 139
lógicos 139
orientados a objetos 132-134
Lookahead 106
Ludgate, P. 100
Liu Hui 41, 42, 46, 49, 50

Machin, J. 89
Madhava de Sangamagrama 54, 75, 89
Mannheim, A. 81
máquina
analítica 97-100
diferencial 96-97
Mark I, ordenador 111, 128
Mauchly, J.W. 113-116, 118, 128
Menabrea, L. 98
Miranda 136, 138, 139
ML 136-138
Modula-2 132
Morgan, A. de 98, 101
Morland, S. 84, 85

Napier, J. 77, 81
Narmer, rey 12
Naur, Peter 141
Newman, M. 111
Nicolás de Cusa 64
Nuzi 19
Nygaard, K. 132

Odhner, W. 92
oficina del censo de Estados Unidos 94, 118
Orestes 40
Oughtred, W. 81

Pacioli, L. 71, 72
Papo 37, 40, 41
Pascal (lenguaje) 131, 141, 143
Pascal, B. 84, 85
Pascal, triángulo de 73
patrología latina 65
Peacock, G. 95
Pegolotti, F.B. 69
PHP 134
pirahã 9, 11
PL/I 131, 142
Plana, G. 98
Plankalkül 106-107
PROLOG 140-141
Ptolomeo 19, 33, 34, 35, 37, 41
Python 134

regla de la posición falsa 27, 42
Rhind, papiro de 26, 27, 29
Royal Society 88, 113

Salamina 32
Samarcanda 73
Sangi 44
Santcliment, F. 71
SASL 138
Scheutz, P.G. 97
Schickard, W. 83
Schreyer, H. 106
Scott, D. 144
Shannon, C. 101, 111
Short Order Code 128
Silvestre II, Papa 64-65
Simula 131-133
Sinesio de Cirene 40
Smalltalk 132

Somerville, M. 98
Soroban 45
Sort-Merge Generator 128
Stevin, S. 13, 73
Strachey, C. 144
Suan 43
Suiko, emperatriz 44
Susa 20, 22

Tartaglia, triángulo de 73
Thomas de Colmar, C.-X. 86, 92
Torres y Quevedo, L. 100
Turing, Premio 113, 134, 136, 141
Turing, A.M. 108, 110-112
Turing, máquina de 97, 108-113, 128, 135, 141

UML 134
Uruk 15-16
Uzzano, A. da 69

Vaucanson, J. de 94
VDL 142
Vestonice 9
Viète, F. 74, 75, 88
Vigenère 100
Von Neumann, J. 105, 113-115, 117, 119, 134, 136

Wallis, J. 88
Warren, D. 141
Whitmore, G. 96
Wilhelm, G. 63, 83, 84, 87
Wilkes, M. 117
Wirth, N. 141, 143
Woodhouse, R. 95

Xerox Palo Alto Research Center (Xerox PARC) 133

Z, serie 105, 107
Zuse, K. 105-107, 114