La burla de los sentidos

El arte visto con ojos matemáticos

Francisco Martín Casalderrey

El mundo es matemático

La burla de los sentidos

El arte visto con ojos matemáticos

La relación entre el arte y las matemáticas ha sido mucho más profunda y fecunda de lo que pueda parecer a simple vista. Las ideas matemáticas y el arte, como productos humanos, han seguido desarrollos históricos paralelos. Los conceptos de tiempo, espacio y medida, objeto de estudio en matemáticas, están en la base de la creación artística. Mirar el arte con ojos matemáticos proporciona al espectador un valor añadido y le ayuda a percibir de otra manera lo que mira.

La burla de los sentidos

El arte visto con ojos matemáticos

Francisco Martín Casalderrey

El mundo es matemático

© 2010, Francisco Martín Casalderrey por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6965-2
Depósito legal: NA-1660-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. La invención de la perspectiva 9
La prueba de Brunelleschi 9
La perspectiva intuitiva 16
Pero ¿qué es la perspectiva? 18
El vocabulario de la perspectiva 20
La perspectiva según Alberti 21
El método de la perspectiva de Piero della Francesca 25
Durero y el método de la diagonal 27
Las máquinas de la perspectiva de Durero 29
La revolución renacentista de Masaccio. *La Trinità* 32
La difusión de la perspectiva 39

Capítulo 2. Matemáticos artistas y artistas matemáticos 43
Yendo a la escuela de ábaco 43
Obras matemáticas de Piero della Francesca 50
El volumen de una bóveda de rincón de claustro 52
Los poliedros como género artístico 56
De la perspectiva a la realidad virtual 65
Los *Juegos matemáticos* de Alberti 67
La horquilla, la línea ígnea y la línea oval de Durero 73

Capítulo 3. El tiempo, el espacio y la luz 77
El tiempo en Botticelli 79
El espacio. La *Pala de Brera* 84
La reconstrucción de las medidas originales. Una hipótesis 90
El espacio en la *pala* de Piero della Francesca 91
La peana sobre la que está el sitial de la Virgen es un cuadrado 92
El punto de fuga está sobre el rostro de la Virgen 92
El eje de simetría del cuadro divide la peana de la Virgen en dos partes iguales 93
Dividimos la peana en cuatro 93
Ajedrezado del suelo 93

Medición del espacio 94
El ábside no es semicircular 95
La Virgen mide más de dos metros de altura 95
Reconstrucción de la planta 96
Determinación del punto de vista 97
La luz, la ubicación, la época y la hora 99
La *Pala de Brera* en tres dimensiones 102

Capítulo 4. El Greco, Zurbarán y Velázquez con ojos matemáticos 105
El Greco y la cuarta dimensión 105
Sobre el hexaedro y el teseracto 108
Anamorfosis en un cuadro de Zurbarán 114
Pintar una batalla 117
Una mirada matemática sobre *La defensa de Cádiz* 119
Anamorfosis y otras deformaciones 122
Velázquez y el espacio abstracto 125
La idea de espacio 126
El espacio de Descartes y de Newton 129
Pablo de Valladolid 130
Más allá de este cuadro de Velázquez 132

Capítulo 5. Arquitectura y geometría 133
Números y formas en el Panteón de Roma 133
Santa Maria Novella. Arquitectura humanista y grupos de Leonardo 142

Bibliografía 155

Índice analítico 157

Prefacio

La historia de las matemáticas y la historia de los conocimientos humanos han evolucionado en paralelo a lo largo del tiempo. Los avances científicos y tecnológicos en cada etapa de la historia de la humanidad no habrían sido posibles sin el avance anterior en los conocimientos matemáticos sobre los que éstos se fundamentaron.

La física, la astronomía y el resto de las ciencias, pero también más recientemente la economía y las ciencias sociales, y todo lo relacionado con el cuarto sector productivo, el de la información, dependen en su base de las matemáticas, usan modelos de análisis matemáticos o tienen en la matemática una herramienta auxiliar fundamental.

Si bien esta afirmación resulta obvia para cualquiera, la relación de las matemáticas con la creación artística es, sin duda, mucho menos patente. Las matemáticas forman parte del núcleo de la cultura humana, muy cerca del lugar que ocupa la creación artística, rodeando el centro, que está constituido, sin duda, por la lengua materna, necesaria para expresarnos y esencial para poder hablar de cultura. Orbitando en torno a ese núcleo se sitúa el resto de los conocimientos humanos, formando un todo atómico, en el sentido etimológico, unitario y sin partes.

Debido a esta proximidad, las relaciones entre arte y matemáticas han sido mucho más profundas y fecundas de lo que pueda parecer. Las ideas matemáticas y la creación artística, como productos humanos, han seguido desarrollos paralelos.

En el presente libro animamos al lector a redescubrir estas ideas. Así, en el Renacimiento, la invención de la perspectiva matemática supuso un cambio fundamental en la concepción de la pintura que, tras abandonar el planteamiento medieval, se convirtió en algo totalmente nuevo. Ésta fue una etapa histórica en la que las profesiones de pintor, arquitecto y matemático se confundieron: hubo artistas-matemáticos y matemáticos-artistas, y esta relación resultó positiva para ambos campos del conocimiento.

Los grandes conceptos de tiempo, espacio y medida han preocupado al ser humano desde la Antigüedad. La filosofía, pero también las matemáticas y la pintura, los han abordado a lo largo de la historia. Analizaremos aquí estos tres conceptos, desde el punto de vista matemático, a través de algunas obras de grandes pintores.

El arte es asimismo un ámbito adecuado para pensar matemáticamente. Con su metodología específica y su forma de ver la realidad, las matemáticas pueden contribuir al análisis de la obra de arte y a su lectura, proporcionando al que la contem-

pla herramientas que permitan obtener un valor añadido y, en general, que contribuyan a que el espectador perciba de otra manera, distinta, lo que mira.

A través de la «mirada matemática» analizamos algunos cuadros y obras de arquitectura, buscando un nuevo acercamiento que aporte una ayuda a la lectura de la obra artística. Dicha mirada no se centra exclusivamente en los aspectos más formales del lenguaje artístico, la geometría de la composición o la estructura narrativa. Este nuevo acercamiento será un complemento a otras visiones —la visión estrictamente artística, la histórica, la narrativa, entre otras— que, junto a las demás, permita una mejor contemplación y que, en definitiva, nos haga disfrutar más del arte a través de las matemáticas.

Capítulo 1

La invención de la perspectiva

La prueba de Brunelleschi

—Soy Vanni, del taller de maese Filippo. Vengo con el encargo de decirle a tu amo que hoy a mediodía lo espera delante de San Giovanni.

—Pasa y habla directamente con él. Está en su despacho, allá, al otro lado del patio, donde se ve la luz.

Vanni golpeó en la puerta de manera casi imperceptible y después de escuchar «adelante», giró el manubrio muy lentamente y abrió la puerta que crujía un poco. Se quedó allí, parado en el umbral, de pie, con las manos sujetando el gorro que respetuosamente se acababa de quitar de la cabeza, mirando al suelo.

Donatello alzó la cabeza de unos papeles y le dijo después de dirigirle una mirada de arriba abajo:

—¿Qué quieres, muchacho?

—Soy Vanni, trabajo en la casa de maese Filippo de los Brunelleschi, que me ha mandado venir para pedirle que acuda a mediodía a la puerta de San Giovanni.

—¿Y sabes por qué quiere tu amo que vaya?

—Eso no me lo sé, pero sí puedo decirle que debo también pasar por casa de maese Luca della Robbia, y que antes de venir aquí le he dado este mismo recado a maese Lorenzo Ghiberti, y que aún deberé pasar por otro taller más antes de regresar donde el amo.

—Está bien, dile que allí estaré.

Algo extraño había en esa convocatoria de Filippo Brunelleschi. No desde luego en la hora, poco antes de comer, cuando las tareas de todos los talleres artísticos se interrumpían para el rezo del ángelus y para comer juntos los empleados con el amo. Pero sí por el sitio: no los convocaba en su casa sino en un lugar público, la puerta del Baptisterio, en la plaza del inacabado Duomo, cuyos trabajos parecían eternos y llevaban siglos ejecutándose. Al paso al que iban, tardarían muchos siglos más en concluirse.

Toda Florencia era una ciudad a medio construir. La mayor parte de las innumerables iglesias tenían sus fachadas de ladrillo, sin recubrimiento alguno, y se habían

deteriorado con el paso del tiempo. Las familias que se habían enriquecido a lo largo de los últimos años con los negocios de la banca o con el comercio, los Pazzi, los Medici, los Strozzi, los Rucellai y todos los demás, estaban decididos a construirse su propio palacio, cada uno más lujoso que el del vecino, para demostrar que su poderío no sólo era en lo que al dinero se refiere sino, fundamentalmente, para hacerse un hueco en la escena política.

Algo importante debía de ser lo que motivaba a Filippo, el más viejo y sabio de todos los artistas de la época, en opinión de Donatello, a convocarles de esa manera y en ese lugar.

Acudió a la cita callejeando desde su casa. Cuando llegó sonaban todas las campanas de Florencia indicando que era mediodía. Era una mañana fresca del final del invierno de 1416, con una atmósfera clara y transparente. Al acercarse vio a Filippo Brunelleschi, acompañado, como siempre últimamente, por un joven aprendiz que, a pesar de no trabajar en su taller y de tener sólo quince años, se había ganado la amistad del maestro y, con ella, el respeto de todos los demás artistas de su círculo. Era Tommaso di ser Giovanni, al que todos llamaban Masaccio, un joven alto y algo desaliñado. También estaba Vanni, el muchacho que le había llevado el recado de acudir, con un cofre de madera, al lado del maestro. Filippo estaba sonriente, vestido con un sayal azulado de lana para aguantar el frío del invierno y con la cabeza cubierta con un gorro rojo brillante que más parecía una tela en la que se enrollaba el pelo, cubriéndolo totalmente, para caer después por la espalda. Este tipo de tocado no era inusual, aunque en opinión de Donatello resultaba algo pasado de moda. Al lado del joven Maso, a Filippo se le veía mucho más bajo.

Se saludaron unos a otros y se quedaron expectantes mirando al maestro. Brunelleschi comenzó a hablar lenta y parsimoniosamente, con el tono característico de quien está acostumbrado a enseñar a otros y a dar explicaciones, con pausas medidas para hacer pensar al que le escucha y mirando siempre alrededor para comprobar que es atendido y que sus explicaciones se comprenden.

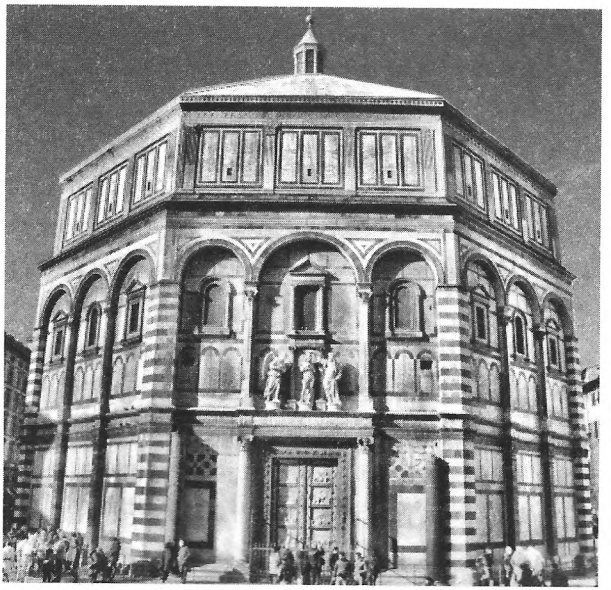
—Os he convocado para mostraros algo en lo que he estado trabajando en los últimos meses. Sabéis que desde hace años estudio cómo hacer que lo representado en un cuadro se muestre a los ojos de quien lo mira como si él mismo mirase la realidad que el pintor ha pintado. Valiéndome de mis estudios de geometría y de otros conocimientos de matemáticas he descubierto un procedimiento que permite al pintor representar sobre la tabla lo que ve con una perfección tal que el que mire después la pintura no sea capaz, si el pintor es hábil y gentil en el uso del color y de las sombras, de distinguir lo real de lo pintado.

»Y la prueba de que siguiendo las instrucciones que he establecido para ello se consigue ese resultado se encuentra en este cofre que he mandado traer. Lo que os mostraré será la demostración incuestionable de que mi método efectivamente funciona.

Todos miramos instintivamente en la dirección señalada por Filippo, hacia el cofre cerrado custodiado por Vanni. Filippo permaneció impasible, esperando, mientras nos preguntábamos, en silencio también, sobre el contenido del misterioso cofre.

Unos operarios de la obra del Duomo de Florencia abrieron las dos hojas de su puerta principal, la que queda frente al Baptisterio, justo al lado de las escaleras sobre las que estábamos todos escuchando al maestro formando un pequeño círculo.

Por fin, Brunelleschi se acercó hasta el cofre y mandó abrirlo. Extrajo de él una tabla pequeña, cuadrada, de cerca de medio brazo de lado. Había hecho sobre ella una pintura en la que se representaba, visto desde fuera, el templo de San Giovanni de Florencia, el Baptisterio, ante el que nos encontrábamos, tomando todo lo que de él se ve con una mirada desde el exterior, cuando el pintor se sitúa en la puerta de en medio de Santa Maria del Fiore adentrándose unos tres brazos desde el umbral. La pintura estaba hecha con tanta diligencia y gentileza, y los colores de los mármoles blancos y negros estaban tan adecuadamente elegidos, que ningún miniaturista lo



Baptisterio de San Giovanni, fotografiado desde la puerta de Santa Maria del Fiore, aproximadamente desde el mismo punto que eligió Brunelleschi para su prueba (fuente: FMC).

habría podido hacer mejor. Se representaba en él en primer plano el Baptisterio y la parte de la plaza que percibe el ojo desde el punto que se ha dicho. En lo que respecta a la parte del cielo, es decir, donde el contorno del dibujo se recortaba en el aire, había puesto en el cuadro plata bruñida, de manera que el aire y los cielos naturales se reflejasen en ella, y también las nubes, que se veían moverse empujadas por el viento.

Brunelleschi alzó la tablita y la mostró a todos para que pudiéramos observarla y preguntó qué veíamos de extraño en ella, girándola en torno al círculo que formábamos escuchándole. Todos permanecimos en silencio.

Finalmente fue Masaccio el que habló:

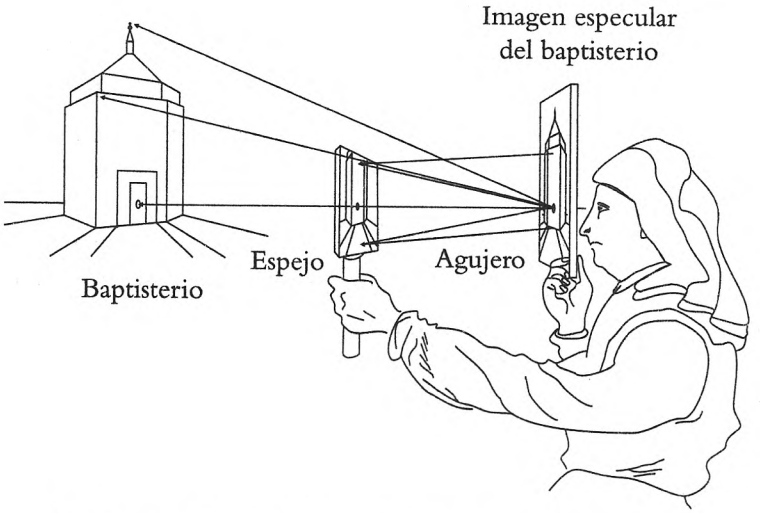
—Maestro. No cabe duda de que la tabla ha sido realizada con gran cuidado y que resulta verdaderamente bella, pero si me permitís os diré que he notado que habéis cometido un error, que por otra parte no hace disminuir en nada la calidad de la pintura. He notado que en vuestro dibujo la columna del milagro de San Zanobi se encuentra en el lado contrario del que se encuentra en realidad, como todos podemos observar desde aquí, y lo mismo sucede con el lado de la Misericordia, que en la pintura está dibujado en la parte contraria. Quizás, al trasladar vuestro boceto tomado de la realidad a la tabla no os disteis cuenta de que invertíais los lados.

Brunelleschi sonreía en silencio mientras escuchaba a Tommaso: ésa era la observación que estaba esperando, pero dejó que el joven pintor siguiera hablando, y que el rubor subiera a sus mejillas, al sentir que estaba descubriendo un error en la pintura del maestro.

Intervino Filippo y dijo:

—Ésa es precisamente la respuesta que esperaba. Efectivamente, he pintado en la tabla la derecha en el lado de la izquierda y la izquierda, en el de la derecha, tal y como se vería si reflejáramos la plaza en un espejo, pero no ha sido por error, ha sido hecho a propósito como parte de la prueba que me propongo realizar con vosotros, mis amigos.

»Observad también este agujero que he hecho en la tabla. Es pequeño por el lado de la pintura, como una lenteja, mientras que hacia la parte de atrás se va abriendo con la forma de un sombrero de paja de señora, hasta alcanzar el tamaño de un ducado aproximadamente. Lo he dispuesto así para poder mirar a través de él. Y puesto que el pintor ha de suponer que su pintura se mira desde un único punto que ha de ser en altura, en anchura y en distancia igual a la altura, anchura y distancia del punto desde el que él tomó la escena.



Brunelleschi realizando la prueba *que lleva su nombre (fuente: FMC).*

Y dirigiéndose a mí me dijo:

—Ven tú, Donato, y toma la tabla con tu mano derecha, dejando el lado pintado hacia fuera y la trasera de la tabla hacia ti. Y ponte aquí en el medio del umbral de la puerta, dos pasos hacia dentro de Santa Maria del Fiore; acerca tu ojo al agujero y mira a través de él, hacia el Baptisterio, y dime, ¿qué ves?

—Veo el Baptisterio, maestro. ¿Qué otra cosa podría ver si no? —le respondí.

Brunelleschi sonrió y me dijo:

—Ahora toma con tu mano izquierda este espejo y, alargando el brazo todo lo que puedas, ponlo de manera que tape el Baptisterio y muévelo de un lado a otro. Dinos, ¿qué ves ahora?

Yo me quedé callado un rato, admirado. El espejo parecía no existir. Conforme lo movía sujeto con mi mano izquierda, con el brazo alargado como me había dicho Filippo, la parte del Baptisterio que el espejo ocultaba era sustituida por un trozo de la pintura de la tabla del maestro reflejada en el espejo, de un modo tal que la línea del borde del espejo se difuminaba, uniendo perfectamente la imagen real que mis ojos percibían del templo y la reflejada por el espejo, formando entre las dos una sola cosa uniforme y continua.

A duras penas pude encontrar las palabras que transmitieran todo esto a mis amigos, que enseguida quisieron poder mirar ellos también. Tabla y espejo pasaron de mano en mano y se sucedieron los comentarios. El joven Masso, cuando fue su turno, después de mirar un rato dijo:

—Ahora entiendo, maestro, por qué habéis dibujado el templo con los lados cambiados. Así, cuando vuestra pintura se refleja en el espejo, todo vuelve a su lugar. El agujero sirve para fijar el punto desde el que se ha de mirar. Incluso he observado una cosa más: al alargar el brazo para sujetar el espejo, la distancia entre el ojo y el espejo, si la medimos en los brazos pequeños en los que está dibujado el templo en la tabla, es igual a la distancia desde punto en el que estamos mirando hasta el templo verdadero.

La cara de Brunelleschi estaba ahora radiante.

—Exacto —exclamó casi gritando—, ésa es la clave del razonamiento y, como veréis, mi pintura se confunde con la verdadera visión de nuestro ojo. He encontrado, queridos amigos, un método sencillo y fácil para poder representar cualquier

BRUNELLESCHI. EL RAZONAMIENTO AFINADO POR LA PRÁCTICA

Filippo di Ser Brunellesco Lippi, Filippo Brunelleschi (1377-1446), arquitecto, escultor, pintor y matemático florentino, es conocido sobre todo como artífice de la construcción de la gran cúpula del *Duomo* de Santa Maria del Fiore, en Florencia.

Parece que recibió formación básica en letras y algo de matemáticas en una de las escuelas de ábaco que en los siglos XIV y XV existían en Florencia. Su padre, que era notario, quería garantizar de esa forma que Filippo, el segundo de sus tres hijos, pudiera seguir sus pasos como funcionario público.

Las aptitudes artísticas del joven hicieron que su padre le permitiese finalmente asistir a una escuela para convertirse en orfebre. Unos años más tarde se inscribió, ya como maestro orfebre, en la histórica corporación del *Arte della Seta* («Gremio de la Seda»), que agrupaba diversos gremios además de los sederos, y entre ellos los orfebres, los metalistas y los batidores de bronce. Esta importante institución le haría después uno de los encargos más significativos de su carrera, el Hospital de los Inocentes. Giorgio Vasari en sus *Vite* dice:

> «Cuando Micer Paolo del Pozzo Toscanelli [importante cosmógrafo, hijo del físico Domenico Toscanelli y al que se le atribuye la idea del viaje a Cipango cruzando la Mar Océana, base para el viaje de Colón] volvió de sus estudios, para celebrarlo con sus amigos dio una cena en un jardín, e invitó a Filippo, que, oyéndole discurrir sobre las artes matemáticas, tomó tal intimidad con él que aprendió geometría de Micer Paolo; y aunque Filippo no tenía estudios, razonaba tan bien en cada materia con su instinto, afinado por la práctica y la experiencia, que muchas veces lo confundía».

cosa que el ojo vea, en la proporción y tamaño justo para que el que observe el cuadro vea lo que el pintor vio cuando lo pintó. Y he de deciros que es un procedimiento que se rige por leyes matemáticas.

Esta última afirmación fue sin duda la que más extrañados y admirados dejó a sus amigos.

—Desde ahora, todo aquel que quiera dedicarse al arte de la pintura deberá estudiar a Euclides, y después, partiendo de los conocimientos que haya adquirido, estudiar la dulce ciencia de la perspectiva. Todo artista que quiera verdaderamente serlo, deberá, además, convertirse en un ávido lector, estudiar a los sabios antiguos, y, al igual que hace el resto de las personas cultas, crear nuevas ideas partiendo de lo aprendido.

Su interés por las matemáticas y por la geometría le llevó a la formulación de las primeras reglas matemáticas de la perspectiva. Entre sus seguidores se encuentra Masaccio. Como artista fue pintor, escultor y arquitecto. La obra de la cúpula de Santa Maria del Fiore le fue asignada en 1420 tras la convocatoria de un concurso público del que resultó ganador junto con Lorenzo Ghiberti, aunque finalmente sería Brunelleschi el verdadero autor en exclusiva del proyecto y el responsable de su ejecución; los trabajos se prolongaron hasta 1434.

Además de esta obra y del Hospital de los Inocentes, también se basa en un proyecto de Brunelleschi el Palacio Pitti, aunque éste se construyó después de su muerte.

Filippo Brunelleschi, pintado por Masaccio, Capilla Brancacci, Florencia (fuente: FMC).

Con Filippo Brunelleschi se redefine la figura profesional y social del arquitecto para acercarse a la concepción moderna. Éste deja de ser un mero artesano encargado de la parte «mecánica» del proceso de construcción y sólo responsable de la fase técnico-operativa, como hacían los jefes de obras medievales, para adquirir un papel fundamental y consciente en el proceso de elaboración del proyecto. La arquitectura se convierte así en un «arte liberal» que se apoya en las matemáticas, la geometría y los conocimientos artísticos e históricos.

Con esta escena hemos recreado uno de los momentos clave de la historia del arte y también de la historia de las matemáticas. Un punto en el que las dos líneas históricas se entrecruzan. A lo largo de este estudio veremos que no ha sido el único momento en que ha tenido lugar tal encuentro.

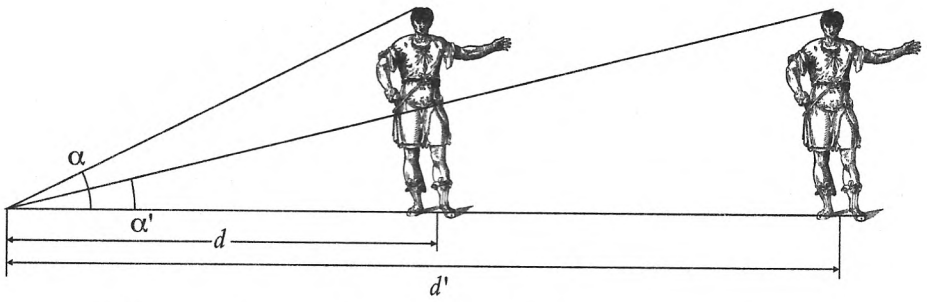
Filippo Brunelleschi es el padre de la *perspectiva artificialis* o perspectiva matemática, en contraposición a la *perspectiva naturalis* u óptica, estudiada por Euclides. Pero Brunelleschi no puso por escrito su procedimiento. Años más tarde, Leon Battista Alberti, miembro de una rica familia de comerciantes y banqueros expulsados de Florencia en 1401 por motivos políticos, de regreso a su ciudad se incorporó a los círculos humanistas de la capital toscana. Trabó amistad con los artistas más señalados del momento, Donatello, Ghiberti, Luca della Robbia y, sobre todo, con Brunelleschi. En 1435 Alberti escribió su *De pictura*, libro que dedicó al propio Brunelleschi y que fue el primero que contenía instrucciones para pintar en perspectiva matemática.

La perspectiva intuitiva

La idea de que la pintura ha de representar la realidad tal y como la vemos no es algo que se haya establecido desde siempre. Al contrario, en muchas ocasiones el lenguaje del símbolo o el narrativo tenían una función preponderante sobre el verismo. El pintor se planteaba en primer lugar hacer una obra bella y, en segundo, cumplir una función específica que satisficiera las demandas del comitente: contar una historia, contribuir a la fe, explicar un concepto, homenajear a un personaje... Sólo en este último caso el verismo era, en cierto sentido, necesario, pero de una manera relativa, ya que estaba supeditado al fin primordial: ensalzar las virtudes del retratado, principalmente las morales. Para lograr esta finalidad el artista se podía tomar ciertas licencias en la descripción física del personaje, mejorando su aspecto o, al menos, disimulando sus defectos.

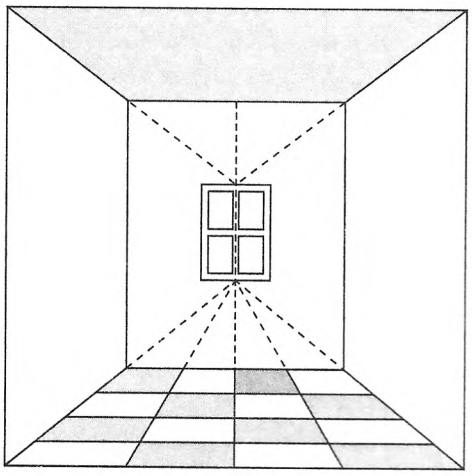
Con Giotto las cosas empezaron a cambiar y nació de alguna manera una idea moderna de la pintura. El pintor, cuando narra, ha de hacer creíble su narración, y cuando retrata, ha de buscar el parecido físico. Lo simbólico está al servicio del artista y no al revés. Su finalidad es más icónica, en el sentido moderno del término: cuando pinta un San José, del que por razones obvias no puede hacer un retrato verista, le pondrá una vara florida en la mano, para que todos sepan que es San José. Pero cuando retrate, por ejemplo, a Dante Alighieri, del que existe documentación fehaciente acerca de su aspecto, el verismo será una necesidad.

Desde antiguo, y de manera intuitiva, se sabía que los objetos más alejados deben representarse más pequeños que los cercanos. Esto lo venían haciendo desde siempre los dibujantes, tratando tan sólo de representar lo que el ojo ve de manera simple. Ejemplos de representaciones perspectivas realizadas de este modo intuitivo se encuentran, por ejemplo, en algunos frescos de Pompeya. La disminución del tamaño de los objetos se consideraba que guardaba alguna relación con el ángulo formado por las líneas visuales que los abarcan, que es menor cuando el objeto se aleja.



El ángulo de visión α, con el que se ve una figura a una determinada distancia d, *disminuye a α' al aumentar la distancia,* d', *del observador al objeto (fuente: FMC).*

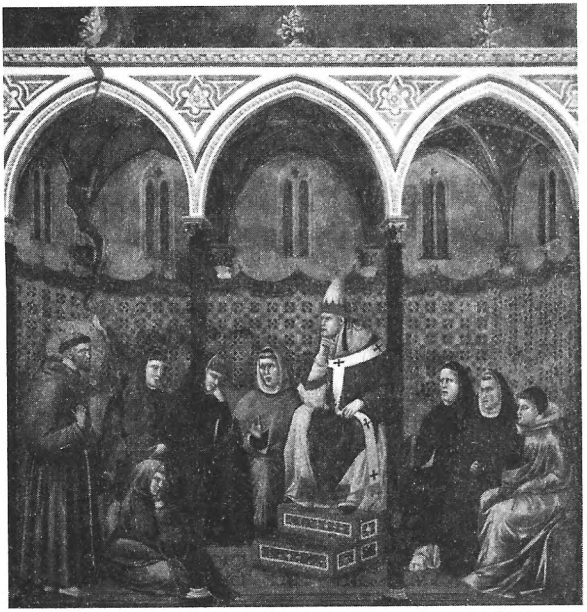
También de una manera intuitiva se sabía que, al representar un interior, las líneas paralelas del suelo convergían en un mismo punto, y también las del techo, pero, lejos de considerar que este punto del infinito fuese el mismo en ambos casos, se pensaba que eran distintos y se situaban en una misma línea vertical. En la serie de frescos de Giotto en la basílica de San Francisco, en la ciudad de Asís, pueden verse representaciones basadas en esta perspectiva intuitiva.



Un interior pintado intuitivamente, con dos puntos de fuga distintos (fuente: FMC).

Por ejemplo, en el fresco *San Francisco predicando ante el papa Honorio III* vemos, detrás de tres arcadas, la escena. El papa ocupa el lugar central sentado sobre su cátedra. Los escalones de acceso a ésta no guardan la debida ali-

neación con respecto a la bóveda que cubre el espacio. El ojo duda de si algunos personajes representados se encuentran delante o detrás de las columnas. Sin embargo, esto no impide que la escena resulte armoniosa y que trasmita una cierta sensación de profundidad y volumen. Las líneas del suelo y del techo convergen en puntos distintos, aunque están situados en la misma vertical.



San Francisco predicando ante el papa Honorio III,
obra de Giotto di Bondone.

Pero ¿qué es la perspectiva?

Debemos aclarar de manera más conceptual qué entenderemos en el contexto de este libro por perspectiva. Erwin Panofsky, uno de los estudiosos más destacados en este campo, la define así en su obra *La perspectiva como forma simbólica*: «[...] La perspectiva es, en sentido pleno, la capacidad de representar varios objetos con la porción de espacio en que se encuentran, de modo tal que la representación del soporte material del cuadro sea sustituida por la imagen de un plano transparente a través del cual creemos estar viendo un espacio imaginario, no limitado por los márgenes del cuadro, sino sólo cortado por ellos, en el cual se encuentran todos los objetos en aparente sucesión».

PRÓLOGO A *DELLA PITTURA* DE ALBERTI

Yo solía maravillarme y a la vez dolerme de que tan excelentes y divinas artes y ciencias que, por sus obras y por la historia, veíamos que eran abundantes entre los antepasados virtuosísimos de la Antigüedad, ahora hayan desaparecido y se hayan casi totalmente perdido [...]. De donde estimo, dado que muchas de estas cosas son inauditas, que la naturaleza, maestra de las cosas, envejecida y cansada, ya no producía ni los gigantes ni los ingenios que produjo en gran número y maravillosos en sus tiempos juveniles y más gloriosos.

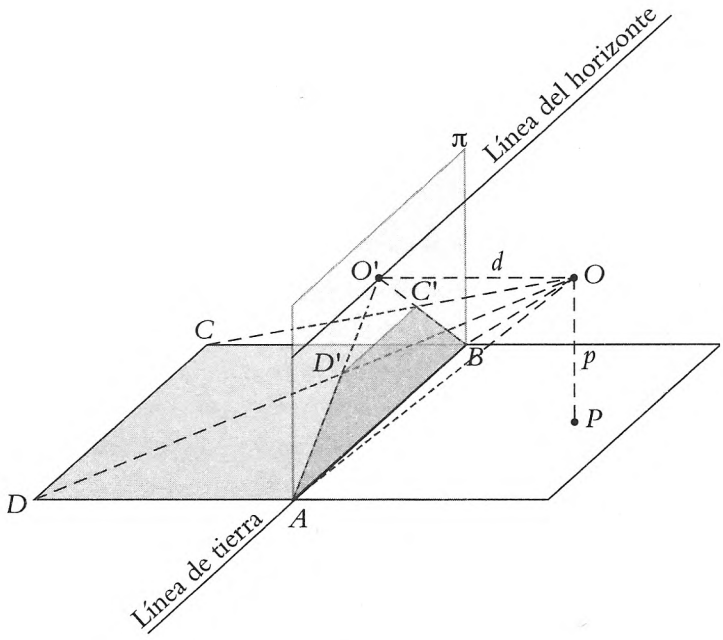
Pero cuando, tras el largo exilio, en el que envejecimos nosotros los Alberti, volví aquí, a nuestra honoradísima patria [Florencia], comprendí que en muchos, pero primero en ti, Filippo [Brunelleschi], y en nuestro gran amigo Donato [Donatello] el escultor, y en otros como Nencio [Ghiberti] y Luca [della Robbia] y Masaccio, había ingenio para todos los saberes dignos de alabanza para no ser relegados por ninguno de los antiguos y famosos en estas artes. Por tanto, me he convencido de que el poder de adquirir la fama en cualquier ciencia o arte reside más en nuestra industria y en nuestro esfuerzo que en los dones de la naturaleza y de los tiempos. Confieso que a los antiguos, teniendo como tenían ejemplos de los que aprender y a los que imitar, les era menos difícil alcanzar el conocimiento de las supremas artes, que hoy a nosotros nos es fatigosísimo aprender; pero por tanto más nuestro nombre debe considerarse grande, si nosotros sin preceptores, sin ningún ejemplo, encontramos artes y ciencias de las que nunca se ha hablado ni se han visto. ¿Quién, si no es duro o envidioso, no alabaría al arquitecto Filippo viendo aquí estructura tan grande, erguida sobre los cielos, amplia como para cubrir con su sombra todo el pueblo toscano, hecha sin ninguna ayuda de trabamientos o abundancia de maderos, artificio que, si lo juzgo bien, era impensable que en estos tiempos se pudiera realizar, como quizás incluso por los antiguos nunca fue sabido ni conocido?

Pero de tus honores y de las virtudes de nuestro Donato, junto con los otros que a mí me son gratísimos por sus obras, otro lugar encontrarán donde ser recitados. En tanto, persevera tú en encontrar, como haces día a día, cosas por las que tu ingenio adquiere fama y nombre perpetuo, y si tienes tiempo para el ocio, me gustará que revises esta obrita mía *De pictura*, que en tu nombre hice en lengua toscana. Verás tres libros: el primero, todo matemático, sobre las raíces que desde el interior de la Naturaleza hacen surgir esta bella y nobilísima arte. El segundo libro pone el arte en las manos del artífice, distinguiendo sus partes y demostrando todo. El tercero instruye al artista sobre cuál y cómo puede y debe adquirir perfecto conocimiento y noticia de toda la pintura. Por tanto, te ruego que me leas con diligencia y, si algo te parece que debe ser enmendado, corrígeme. Ningún escritor fue nunca tan docto que no le fueran utilísimos los amigos eruditos, y yo antes quiero ser enmendado por ti que mordido por detractores.

El primer libro en el que se recoge un procedimiento matemático para dibujar en perspectiva, como hemos señalado, lo describió el polifacético humanista Leon Battista Alberti en su tratado *De pictura*, originalmente escrito en latín y traducido por él mismo al toscano con el título de *Della pittura*, que dedicó a Filippo Brunelleschi.

El vocabulario de la perspectiva

La idea matemática que subyace en el dibujo en perspectiva se basa en la idea de pirámide visual. Ésta tiene su vértice en el ojo del pintor, que se supone único e inmóvil, y, como base, el contorno visible del objeto que se desea representar. El dibujo en perspectiva será la intersección de esta pirámide visual con el plano del dibujo. Si, por ejemplo, deseamos representar, sobre la superficie del plano pictórico π, un rectángulo $ABCD$ situado sobre el suelo, para que sea visto desde un punto P del suelo, con el ojo del espectador a una altura p y a una distancia d del cuadro, es decir, con el ojo del espectador situado en O, deberemos trazar la pirámide visual $OABCD$, que corta el plano pictórico π en los puntos $ABC'D'$. Pues bien, el trapecio $ABC'D'$ es la representación en perspectiva del rectángulo $ABCD$.



Conceptos básicos en perspectiva (fuente: FMC).

Es decir, la representación en perspectiva es una proyección de centro *O* sobre una porción del plano infinito π, delimitada por el contorno del cuadro. El plano pictórico π o *plano del cuadro* es en este caso perpendicular —aunque no sea esto necesario— al *plano del suelo* o *plano geometral*. La línea definida por el corte de ambos planos se denomina *línea de tierra*. El ojo del espectador o *punto de vista O* se encuentra a una altura *p* sobre el plano del suelo y a una distancia *d* del plano del cuadro π, sobre el que se proyecta perpendicularmente en *O'*, que es el punto de fuga principal. La línea paralela a la de tierra, contenida en el plano del dibujo, a la altura de O', es la *línea del horizonte*.

La representación en el plano del cuadro de un punto cualquiera, por ejemplo *D*, es el punto *D'*, donde se cortan la línea que une el ojo *O* con el punto *D* y el plano π.

La perspectiva según Alberti

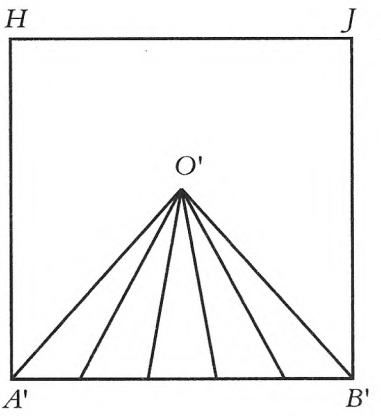
El método de Leon Battista Alberti no debía de ser muy distinto del original de Brunelleschi. Lo expone en su *De pictura* de un modo a veces algo confuso y oscuro. Además, la obra no tenía figuras. Trataremos de descifrarlo siguiendo directamente sus palabras y reconstruiremos en imágenes el proceso:

> «Para empezar, en la superficie donde debo pintar trazaré un cuadrángulo de ángulos rectos del tamaño que me parezca, que consideraré como si fuese una ventana abierta, por la que yo mirase lo que va a ser pintado. En él determino a mi antojo la estatura de los hombres que he de pintar y divido esta medida en tres partes. Cada una de éstas será para mí proporcional a aquella medida que se llama *braccio*, ya que la medida común de un hombre es de tres *bracci*».

El *braccio fiorentino*, o brazo de Florencia, era la medida tradicional de longitud, equivalente a 58,4 cm, por lo que, para Alberti, la medida común de un hombre era de unos 175 cm.

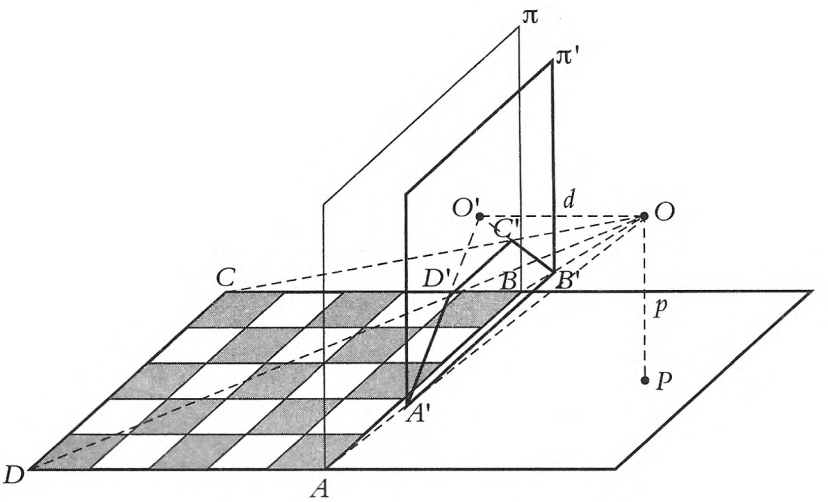
> «Y con esta medida divido el lado inferior del cuadrángulo en tantas partes como quepa. Después, dentro de este cuadrángulo, donde me parezca, sitúo un punto que estará en donde el rayo céntrico hiera, y por esto le llamo punto central. Se deberá situar este punto desde el lado inferior del cuadrángulo a una altura no superior a la del hombre que yo deba pintar, con lo cual tanto los objetos pintados como quien los mira parecerá que están en un

mismo plano. Una vez situado el punto central, como he dicho, trazo líneas rectas desde él hasta cada una de las divisiones de la línea inferior del cuadrángulo. Estas líneas me mostrarán, casi hasta el infinito, cómo se trasforma cada una de las transversales.»



El cuadrángulo de Alberti (fuente: FMC).

El esquema albertiano es, por tanto, como se ve en la figura siguiente:



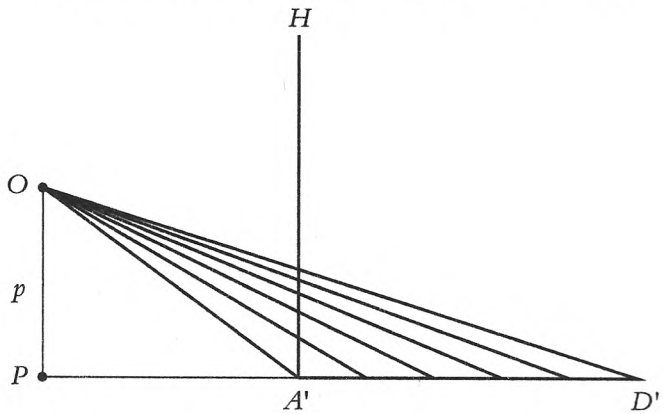
Esquema de la perspectiva de Alberti (fuente: FMC).

El plano del cuadro π' en el que se sitúa la «ventana» de Alberti no coincide con el plano π, sino que es paralelo a él, por lo que, en el cuadro, los objetos no son de tamaño real, sino proporcionales a los reales con una cierta escala. La escala la elige el pintor al determinar el tamaño con el que representará a un hombre en el cuadro. La pirámide visual, que parte del ojo del pintor O, y tiene por base $ABCD$, corta al plano del cuadro, formando en él el trapecio $A'B'C'D'$. La proyección perpendicular de O sobre el cuadro determina O', que es el punto que él llama central.

Para dibujar las transversales propone lo siguiente:

> «En una superficie pequeña tiro una recta y la divido en tantas partes como dividí la base del cuadrángulo. Sobre ella coloco un punto a igual altura que el punto central y trazo desde él rectas a todas las divisiones. Luego determino la distancia que me parece entre la vista y el cuadro y, prefijado ya el sitio de la sección, allí mismo, con una perpendicular que levanto, corto todas las rectas que encuentro desde ella. [...] Así, el punto donde esta línea perpendicular cortará a las otras me dará la sucesión de todas las cantidades de separación de las transversales. Y de este modo puedo dibujar todas las paralelas, es decir, todos los brazos cuadrados del pavimento en la pintura».

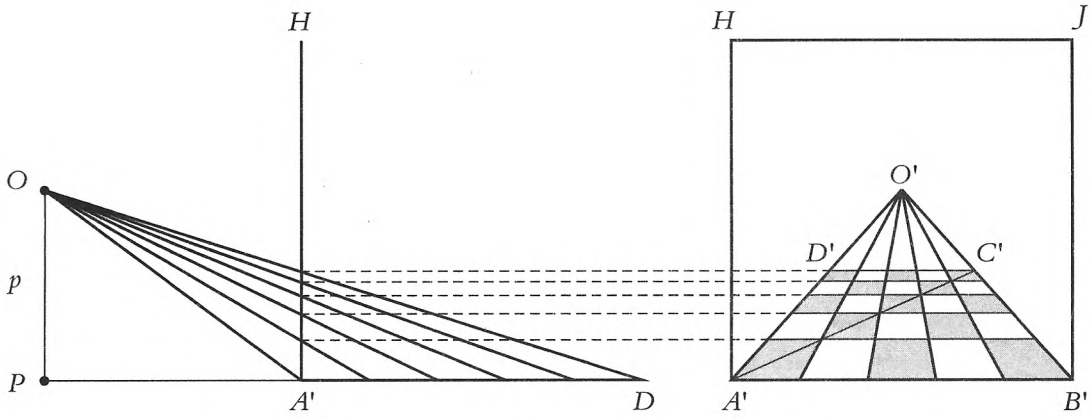
En esencia, lo que Alberti describe lo podemos representar en la siguiente figura:



Dibujo auxiliar en el método de Alberti (fuente: FMC).

Traza la línea $A'D'$ y la divide en tantas partes como había dividido la línea de base. Elige el punto P a la distancia a la que desea situar al observador del cuadro y sobre él fija el punto O, a la misma altura a la que se encuentra el punto central con respecto a la línea de base en el cuadro. Los cortes con la línea $A'H$ de las líneas

visuales desde O a cada una de las divisiones de $A'D'$ dan la secuencia de las separaciones entre las transversales:



Traslado de la secuencia de separación de las transversales (fuente: FMC).

Basta con llevarlas al cuadro, como se muestra en la figura anterior, para obtener el ajedrezado del suelo. Alberti, siguiendo un método experimental, propone como comprobación de que todo se ha hecho bien trazar la diagonal de uno de los cuadrados y prolongarla, comprobando que coincide con la de los otros cuadrados del suelo.

ALBERTI. EL HUMANISMO POLIFACÉTICO

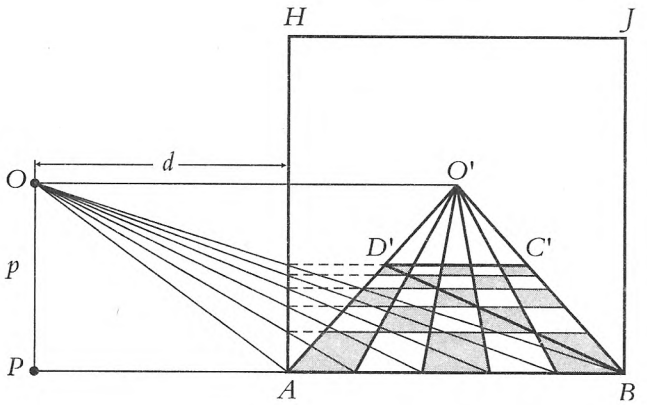
Leon Battista Alberti (1404-1472) fue quizá, junto con Leonardo, el mejor representante del polifacetismo entre los artistas del Renacimiento. Ejerció de arquitecto, matemático, humanista y poeta, además de criptógrafo, lingüista, filósofo, músico y arqueólogo.

Miembro de una rica familia de comerciantes y banqueros florentinos exiliados en Génova, realizó estudios primero en Venecia y luego en Padua, para trasladarse después a la Universidad de Bolonia, donde empezó a estudiar Derecho. Allí también aprendió música, pintura, escultura, matemáticas, filosofía y griego. Como escritor fue muy prolífico, tanto en latín como en toscano, lengua de la que fue ferviente defensor. Fue amigo de Brunelleschi, al que dedicó su *Della*

Leon Battista Alberti pintado por Masaccio, Capilla Brancacci, Florencia (fuente: FMC).

El método de la perspectiva de Piero della Francesca

Piero della Francesca retoma el método de Alberti en su *De prospectiva pingendi*, simplificando su ejecución. En lugar de usar un dibujo auxiliar, como hacía Alberti, Piero junta el alzado y el perfil en un solo dibujo, como puede verse en la figura siguiente:



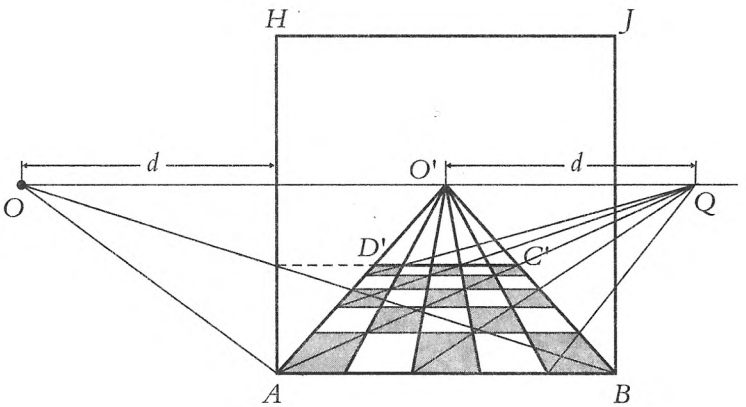
Esquema de la perspectiva de Piero della Francesca (fuente: FMC).

Pittura, y de Donatello, entre otros. En Florencia trabajó como arquitecto, sobre todo para el comerciante y humanista Rucellai, que le encargó varias obras, entre ellas, en 1446, la finalización de la fachada de la iglesia de Santa Maria Novella, paralizada, desde 1365, en el primer nivel de arcadas. También proyectó el palacio Rucellai y el templete del Santo Sepulcro en la iglesia de San Pancrazio de Florencia. En Rímini proyectó, en 1450, el llamado Tempio Malatestiano, y en Mantua, la iglesia de San Sebastiano.

Alberti fue, además, un importante tratadista. Según él, la función del arquitecto es matemática: crear, dar proporciones. La labor de aparejador la hacen sus discípulos, que son los que resuelven los problemas a pie de obra; el arquitecto es el que la inventa. Además de *Della Pittura*, escrita en 1436 en Florencia, en 1452 escribió en Roma su *De re aedificatoria*, un tratado sobre arquitectura que influyó en las bases de la construcción renacentista. El término *concinnitas*, que él usa en dicha obra y se puede traducir como «la justa proporción», cuando no sobra ni falta nada, es el concepto que hace que se vea algo bello aunque no sepamos el porqué.

Este método facilita, sin duda, el trabajo del pintor, pero en esencia es el mismo que el de Alberti, que a su vez debía de ser el que teorizó Brunelleschi. Piero dibuja en perspectiva un cuadrado *ABCD,* con el lado *AB* coincidente con el lado inferior del cuadro. Denomina *ojo* al punto *O'*, y hace converger sobre él los lados del cuadrado perpendiculares al plano del dibujo. Procede luego a la determinación en el plano del cuadro de la transversal *C'D'*, paralela a *AB*. Superpone a la vista de frente otra de perfil. Así, la línea *AH* representa, además de un lado del cuadro, el cuadro mismo de perfil. El punto *O* simboliza el ojo del espectador, que se encuentra a una distancia *d* del plano del cuadro *AH*. Tira una línea de *O* a *B* y el corte de esa línea con *AH* determina la separación en el cuadro de la transversal *C'D'* con respecto a *AB*.

Piero, además, incluye la forma de presentar diversas figuras planas en perspectiva, inscribiéndolas en un cuadrado y usando para ello un método distinto: método de los puntos de distancia. Trataremos de exponerlo brevemente.

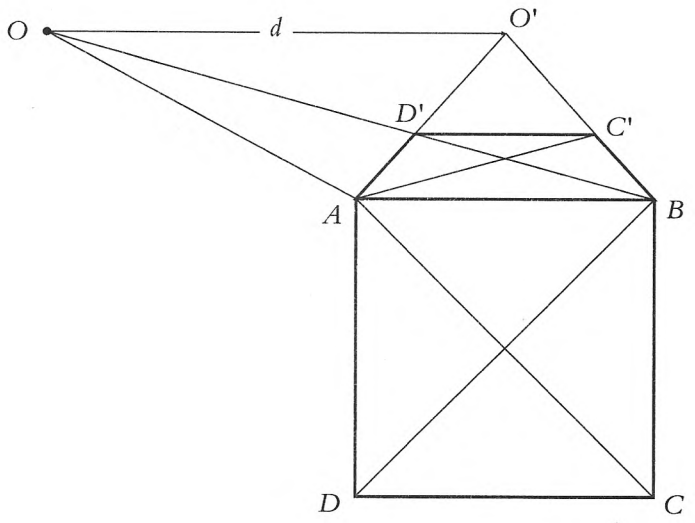


Las diagonales del suelo ajedrezado convergen en un punto llamado punto de distancia, *caracterizado en el dibujo como* Q *(fuente: FMC).*

Todas las líneas paralelas entre sí y horizontales, sea cual sea su posición en el espacio, convergen en un dibujo en perspectiva sobre un mismo punto de la línea del horizonte. Si esas líneas forman con el plano del cuadro un ángulo de 45°, como por ejemplo las diagonales de los cuadrados del suelo ajedrezado representado en la figura anterior, el punto al que convergen se encuentra a una distancia del punto central *O'* igual a la distancia *d* del observador al plano del dibujo. A ese punto Q

se le denomina *punto de distancia*. Obviamente, existen dos puntos de distancia sobre la línea del horizonte, uno a la derecha del punto central y otro a la izquierda.

Este nuevo método lo presenta Piero en su *De prospectiva pingendi* según se describe a continuación:



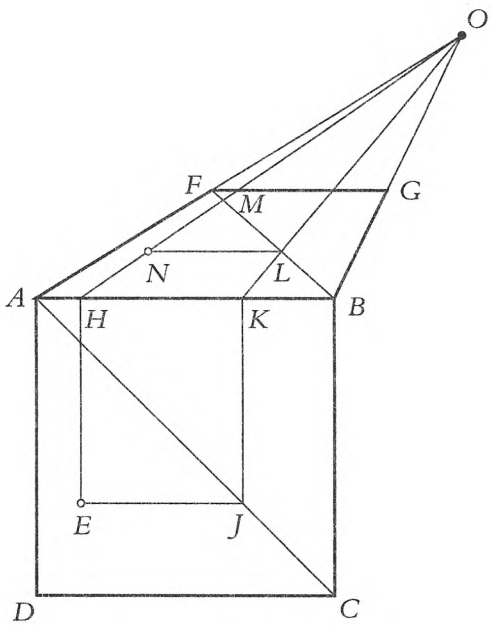
Método de los puntos de distancia de Piero della Francesca (fuente: FMC).

Se pretende representar en perspectiva un cuadrado de lado AB conociendo la altura sobre AB a la que se encuentra el ojo O' y la distancia d de éste al plano del dibujo. Para ello traza por O' una paralela a AB y la prolonga hasta un punto O a una distancia d de O'. Desde O tira una línea hasta B, que corta a AO' en D'. Por último, traza por D' una paralela a AB que corta a BO' en C'. $ABC'D'$ es la representación en perspectiva de $ABCD$.

Durero y el método de la diagonal

Piero della Francesca también introdujo un método para determinar la posición en la perspectiva de un punto cualquiera de posición conocida en el interior de un cuadrado. Es el conocido como *método de la diagonal*, que también recogió con posterioridad Alberto Durero en su *Underweysung der messung* (*Instrucciones para la medida*). Seguiremos directamente el texto de Durero en la traducción al español de su libro:

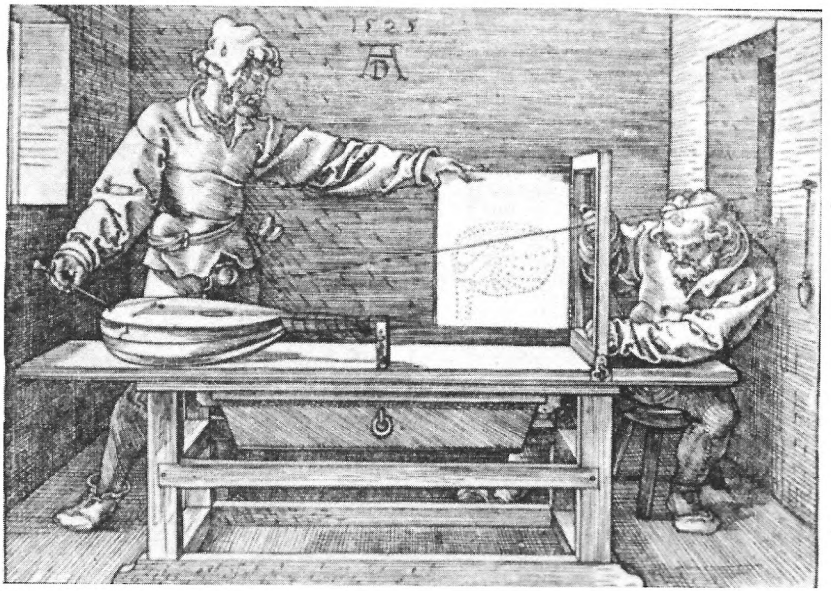
«Cuando quieres representar, en un plano visto en perspectiva, un punto dado en un cuadrado, procederás como sigue: traza un cuadrado *ABCD* de modo que *AB* sea el lado horizontal superior. Dibuja el cuadrado en perspectiva *ABGF* sobre éste. Sea *O* el ojo correspondiente a tu dibujo. Elige un punto cualquiera *E* en el cuadrado. Traza a continuación, en ese cuadrado, la diagonal *AC*. Dibuja también la misma diagonal *BF* en el cuadrado en perspectiva. Tira después, desde el punto *E*, una paralela al lado del cuadrado y prolóngala hasta la horizontal *AB*. Marca ese punto como *H*. Tira desde ese punto *H* una línea recta al ojo *O* que atraviese el cuadrado en perspectiva hasta la horizontal *FG*. Marca ese punto como *M*. Después traza en el cuadrado una recta paralela a *AB* por *E* hasta la diagonal *AC*. Marca ese punto como *J*. Traza ahora por *J* una paralela al lado del cuadrado hasta *AB* y marca ese punto como *K*. En el cuadrado en perspectiva traza por *K* una recta hacia el ojo *O* que cortará a la diagonal *FB* en *L*. Por fin tira desde *L* una horizontal paralela a *AB* hasta la línea *HM*. Marca ese punto como *N*. Ése es el punto buscado en el cuadrado visto en perspectiva, como se ve en la figura que he dibujado más abajo».



Método de la diagonal empleado para representar un punto en perspectiva, según Durero (fuente: FMC).

Las máquinas de la perspectiva de Durero

En las dos ediciones del *Underweysung*, Durero incluye unos dispositivos mecánicos para facilitar el dibujo en perspectiva. En la primera edición, de 1525, aparecen dos: *El retratista* y *El dibujante del laúd*. En la de 1538, impresa después de la muerte del artista, aparecen otros dos, *El dibujante de la jarra* y *La mujer desnuda*. Aunque algunos de éstos eran ya conocidos por artistas como Bramante o el mismo Alberti, hay uno que tal vez fuera inventado por el propio Durero, que publicó los detalles necesarios para su construcción. Se trata del método recogido en el grabado *El dibujante del laúd*.



El dibujante del laúd *sirve para ilustrar una de las máquinas de perspectiva de Durero.*

El dispositivo funciona del siguiente modo: sobre el plano de una mesa se sitúa un marco que jugará el papel de la ventana de Alberti. Tiene esta ventana una contraventana que puede girar hacia un lado. El dibujante, sentado, se sitúa ante la ventana abierta. Tras él, en la pared, y jugando el papel del punto de vista o del *ojo* de Piero, hay una hembrilla a través de la cual pasa un cordel. En el extremo que cuelga de esa cuerda, se ata un peso. La otra punta del cordel se encuentra unida al extremo de una especie de puntero o clavo largo que sujeta en la mano un ayudante. El cordel, entre el extremo de este puntero y la hembrilla, se man-

tiene tenso debido a la pesa que pende del otro extremo. El cordel sujeto por el ayudante atraviesa la ventana. El ayudante señala con el puntero distintos puntos del objeto que se desea dibujar, en este caso el laúd, siguiendo las indicaciones del dibujante. En el marco se han sujetado dos hilos, uno en el punto medio del lado

DURERO. LO QUE HAY DE INMORTAL EN UNA MIRADA

Alberto Durero, Autorretrato. *Museo del Prado, Madrid.*

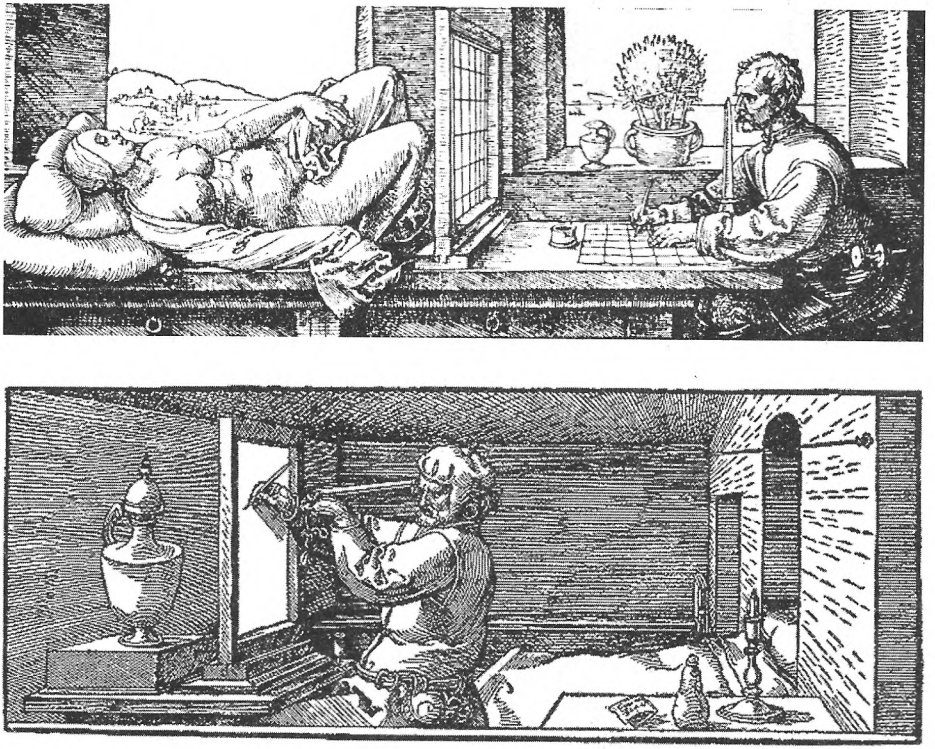
Alberto Durero (Albrecht Dürer en alemán) (1471-1528) fue un grabador, pintor y escritor alemán, y uno de los más altos representantes del Renacimiento en aquel país. Nació en Nuremberg, de una familia que tuvo dieciocho hijos, de los que sólo sobrevivieron tres. Su primer maestro fue su padre, orfebre de profesión, de origen húngaro. A los catorce años entró como aprendiz en el taller del pintor y grabador Michael Wolgemut, donde trabajó cuatro años. Viajero impenitente, recorrió Europa Central buscando trabajo y estudiando. En 1494, de regreso a Nuremberg, se casó y fundó su propio taller. Viajó después a Italia, donde entró en contacto con el nuevo estilo que se estaba consolidando, y aunque su formación era de base tardogótica y flamenca, su estancia en aquel país le permitió asimilar las bases artísticas del Renacimiento italiano. Probablemente también nació allí su interés por la geometría y las matemáticas.

De nuevo en Nuremberg, comenzó un estudio sistemático de las matemáticas guiado por el círculo de humanistas de aquella ciudad y especialmente por Willibald Pirckheimer. Volvió a Italia entre 1505 y 1507, esta vez no tanto para aprender como para consolidarse como artista de prestigio. De vuelta a su ciudad natal, pintó entre otras obras *El martirio de los diez mil cristianos*, donde puede verse el uso del color que había aprendido en Venecia. En 1512 fue nombrado pintor de corte del emperador Maximiliano I y de Carlos V, y se le concedió una pensión vitalicia. Sus últimos años los dedicó a su obra teórica, *Tratado sobre la proporción*, publicado en cuatro libros en 1525. Murió el 6 de abril de 1528. Su amigo Pirckheimer escribió en su epitafio: «En memoria de Alberto Durero. Todo lo que en él había de mortal está enterrado bajo este túmulo».

superior de la ventana y otro en el punto medio de uno de los laterales. El dibujante, valiéndose de estos hilos, los cruza en el punto en el que el cordel atraviesa la ventana y los sujeta con cera al lado opuesto del marco. Retirado el cordel que sujetaba el ayudante, el dibujante cierra la contraventa y, valiéndose de los dos hilos, marca en el papel el punto en el que éstos se cruzan. Obtiene así un contorno punteado de la figura que desea dibujar, que luego unirá para obtener el dibujo en perspectiva.

El método es sin duda engorroso y peca de un exceso de mecanicismo, pero cumple una función fundamental que es permitir al artista visualizar, de manera tangible, la intersección de las distintas líneas de la pirámide visual con el plano del cuadro, representado por la ventana y la hoja de papel. El punto de vista no se fija en el ojo del dibujante, sino en un punto determinado detrás de él que el artista elige antes de situar en él la hembrilla.

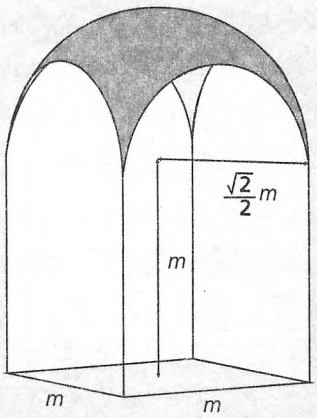
Éstos son otros grabados de Durero sobre las máquinas de la perspectiva:



Arriba, La mujer desnuda, *y abajo,* El dibujante de la jarra. *Ambos grabados aparecen en la edición de 1538 del* Uderweysung der messung *de Alberto Durero.*

LO SPEDALE DEGLI INNOCENTI O LA ARQUITECTURA MODULAR

Filippo Brunelleschi puede considerarse el inventor de la arquitectura modular, es decir, la que se basa en un módulo que se yuxtapone repetidas veces. La fachada del Spedale degli Innocenti le fue encargada por el *Arte della Seta*, uno de los gremios más importantes de Florencia, que era el patrón de este orfanato. Las decisiones tomadas por Brunelleschi pretendían abaratar los



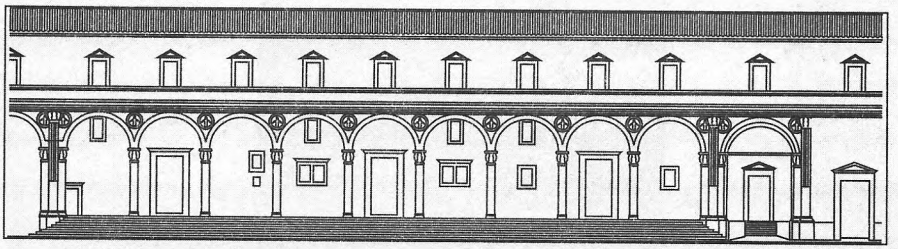
El Spedale degli Innocenti fue encargado a Filippo Brunelleschi en 1419. Constituye el primer ejemplo de arquitectura modular, basada en formas geométricas regulares. La ilustración de la derecha muestra la estructura de los módulos (fuente: FMC).

La revolución renacentista de Masaccio. *La Trinità*

Masaccio, siguiendo los pasos iniciados por Giotto en lo artístico y usando los procedimientos de Brunelleschi en lo espacial, fue el primer pintor que logró que sus pinturas adquirieran profundidad y verismo. Sus personajes, entroncando con el mundo clásico y la renovación de la escultura que en esos mismos años protagonizaba Donatello, cobran dinamismo. La escena —la *istoria,* en palabras de Alberti— enlaza con lo cotidiano y acerca lo divino a la vida diaria de los florentinos.

El conjunto de frescos de la Capilla Brancacci, que inició con Masolino y que fueron finalmente acabados por Filippino Lippi, muestra claramente esa evolución. En paredes consecutivas vemos la fusión y el paso del gusto tardomedieval de Ma-

costes. Eligió materiales de bajo precio, como la *pietra serena*, de color gris, con la que hizo las columnas y las nervaduras arquitectónicas, y el yeso blanco, lo que da al conjunto un equilibrio dicromático que se convirtió en uno de los rasgos característicos de la arquitectura renacentista florentina posterior, marcada por las decisiones de Brunelleschi en esa obra. La reducción de costes también le obligó a contratar mano de obra poco experta y, por tanto, a simplificar al máximo las tareas de medición. La medida entre las columnas, *m*, de 10 brazos florentinos, es la medida básica para cada uno de los módulos, que quedan constituidos por un cubo regular de lado *m*. Sobre él se eleva una semiesfera, de diámetro $m\sqrt{2}$, cortada por los planos de las caras del cubo. Así, los arcos tienen una anchura *m* y una altura $\frac{m}{2}$, y la elegante bóveda vaída se eleva $m(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ sobre el suelo.

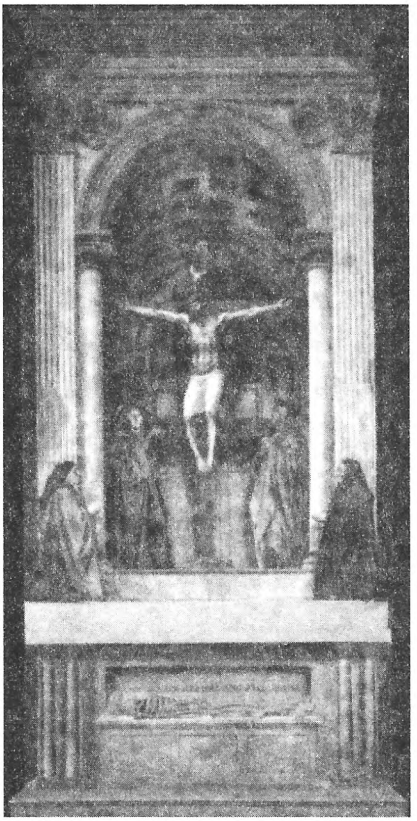


Alzado de la fachada del Spedale degli Innocenti. El módulo básico se repite nueve veces, generando ritmo y armonía (fuente: FMC).

solino a la revolución renacentista de Masaccio y, posteriormente, a la consolidación de ésta de la mano de Lippi.

En este contexto concibió Masaccio, se ignora por encargo de quién, su obra *La Trinità,* pintura al fresco de grandes dimensiones, en el muro izquierdo de la iglesia florentina de Santa Maria Novella, entre los años 1426 y 1428.

Tal vez sea ésta su última obra, ya que murió prematuramente en el verano de 1428, durante un viaje a Roma, tras un periodo activo de seis años escasos, cuando sólo contaba veintisiete de edad. Tal vez sea en *La Trinità* donde la influencia de las enseñanzas sobre perspectiva de Brunelleschi se aprecia más claramente. La escena se encuadra en una magnífica capilla, dibujada de tal manera que aparece real a los ojos del espectador.



La Trinità *de Masaccio, obra datada entre 1426 y 1428.*

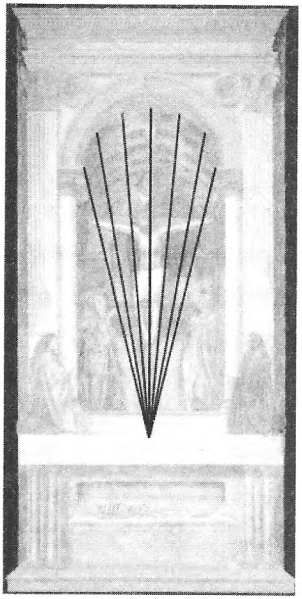
En el trazado de esta falsa capilla se aprecia también la influencia del estilo arquitectónico de Brunelleschi, aunque Masaccio sustituyera en ella el gris de la *pietra serena* que usaba el arquitecto por ese rosa intenso con el que pintó el arco. Ese arco que, sustentado sobre dos columnas jónicas, queda enmarcado a su vez por dos pilastras corintias de capiteles también rosas. La capilla se cubre con una bóveda de cañón decorada con casetones cuadrados.

El punto de fuga de la construcción en perspectiva es sorprendentemente bajo. Recordemos que debe situarse a la altura de los ojos del espectador que deambula por la iglesia y lo mira, ya que, de otra manera, no se podría conseguir la sensación de arquitectura verdadera que se pretende. Se ven también en perspectiva, en escorzo y, por tanto, como la bóveda, de abajo arriba, las figuras de la Virgen y de San Juan, ambas de pie, paralelas a las columnas y a las pilastras, enmarcando, en este caso, la escena central del cuadro, que representa a Cristo en la cruz.

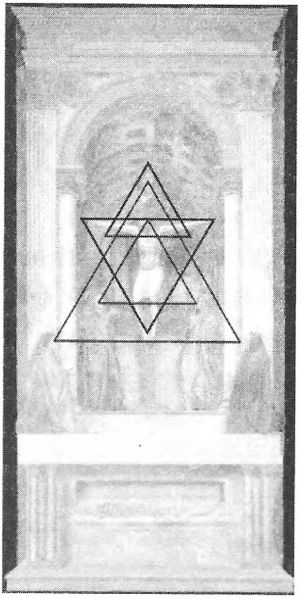
En esta parte superior de la composición destaca el eje central de simetría, que lo es también de la cruz. Sobre él yace el punto de fuga. Al fondo, el Padre Eterno, que sujeta los brazos de la cruz con sus manos, está también centrado con respecto a ese eje, como lo está el Espíritu Santo, en su habitual forma de paloma, que se alza entre Cristo y el Padre. A ambos lados de dicho eje, y simétricamente con respecto a él, se sitúan por parejas los otros cuatro personajes: la Virgen y San Juan, en primer lugar, y, fuera de la escena, arrodillados, los dos donantes.

Además, en la composición predomina el triángulo equilátero, para subrayar conceptualmente el dogma trinitario representado. Para no centrarnos demasiado en estos aspectos relacionados con la geometría de la composición, nos hemos limitado a indicar algunos de ellos: por ejemplo, el que une a los donantes, en la base, y la cabeza del Dios Padre, en el vértice. O el que forman los clavos de las manos y los pies de Cristo crucificado. Otro estaría formado por los ojos de María, Cristo y San Juan.

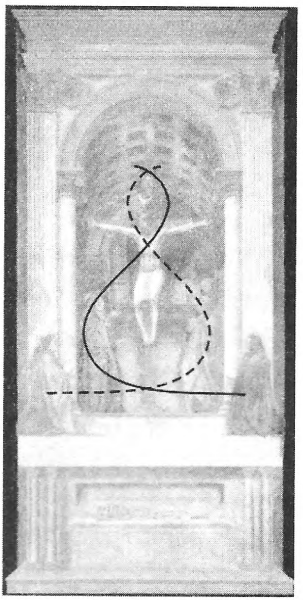
Más importante, a nuestro entender, es la alternancia de colores azules y rojos, a izquierda y derecha, que rompen la simetría axial predominante, proporcionando dinamismo y acentuando la profundidad creada hábilmente por el artificio del dibujo de la arquitectura en perspectiva.



Determinación del punto de fuga, muy bajo, de la construcción en perspectiva.



Algunos ejemplos de la composición basada en el triángulo equilátero.



Alternancia de colores azules y rojos en la composición.

Así, el rojo intenso de la saya y del tocado del donante, abajo a la izquierda, se une visualmente con el rojo más suave de la vestimenta de San Juan, a la derecha y, nuevamente a la izquierda, con la túnica que cubre uno de los hombros del Padre Eterno y, por último, con uno de los casetones rojos, a la derecha, que se alternan con los azules en una especie de ajedrezado en la bóveda. Se crea así un movimiento ascendente, alternativo y convergente hacia el eje de simetría. En sentido inverso, los azules se alternan simétricamente con los rojos, recorriendo el camino que empieza en el vestido de la donante, pasa por las ropas de la Virgen, la capa que cubre el otro hombro del Padre Eterno y termina en el casetón azul, simétrico del anterior con respecto al eje central.

La simetría axial se rompe así con esta especie de movimiento matemático de «deslizamiento» de los colores, que se alternan y elevan de forma evanescente siguiendo el eje central, hacia arriba.

Rompe también la simetría la parte inferior de la composición, en la que, separada por el tablero de un altar representado en perspectiva, se ve un esqueleto y sobre él una inscripción que dice: *Io fu già quel che voi sete: e quel chi son voi ancor sarete* («Yo fui antes lo que sois vosotros, y aquello que soy, vosotros también lo seréis»).

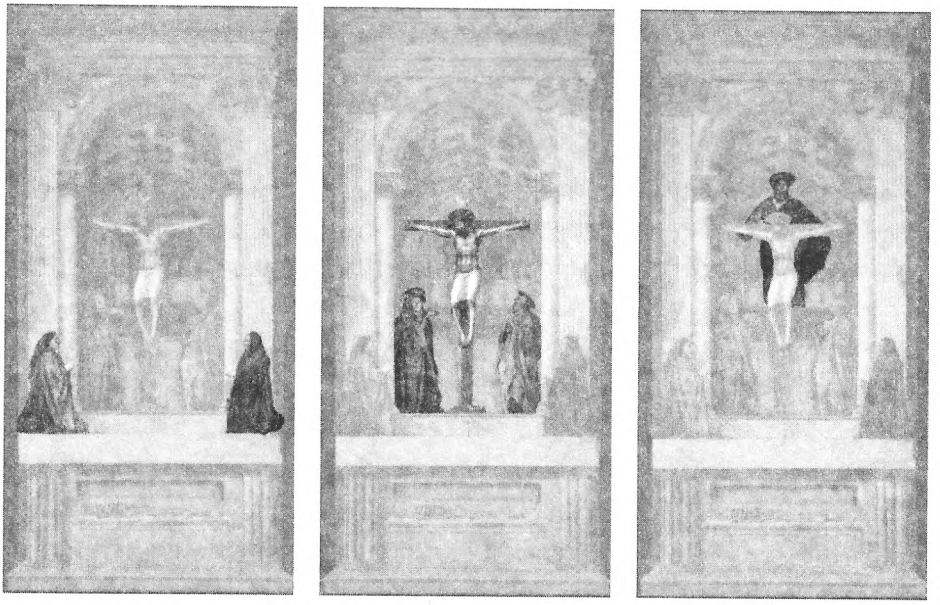
Este esqueleto y el montículo de tierra bajo la cruz tienen como referente la tradición bíblica según la cual el leño de la Pasión se habría fabricado con el tronco de un árbol crecido sobre la tumba de Abel, para darle sombra.

Hemos hablado de un primer eje, el de simetría, que articula la composición y le da fuerza. Otro, perpendicular a él, viene señalado por la línea sobre la que se arrodillan los donantes, la definida por el plano del altar al cortarse con el del dibujo. Un tercer eje, perpendicular a los dos anteriores, es sin duda el de la visión del espectador, que tiene sus ojos a la altura del punto de fuga de la perspectiva.

En planos perpendiculares a ese último eje se articulan en profundidad las tres escenas de la obra. En el más cercano a nosotros, fuera del arco, los donantes, arrodillados. Un poco más adentro, los tres personajes bíblicos coetáneos, San Juan, la Virgen y Cristo, que además están un escalón más arriba que los anteriores. Más adentro, hacia el eje de simetría, y más arriba aún, perdiéndose hacia el fondo, la Paloma y el Padre Eterno, que sujeta con sus brazos la cruz, de pie sobre una plataforma o una peana roja.

Si interpretamos los ejes de un modo cartesiano —lo cual es tomarnos una licencia de dos siglos, los que van del XV en el que vivió Masaccio, al XVII de Descartes— y este eje en profundidad lo llamamos y, cada uno de estos planos tendría una ecuación de la forma $y = k_j$, siendo $j = 1, 2$ y 3. Así, el plano de los donantes sería el de la ecuación $y = k_1$, el de la cruz, $y = k_2$, y el del Padre Eterno, $y = k_3$.

Y como a cada uno le corresponde un tiempo distinto, podemos identificar k_1 con el año 1428 (veáse la figura de la izquierda), cuando Masaccio terminó la obra, época en la que vivían los donantes que la pagaron; k_2 con el año 33 —obviamente después de Cristo— en el que la tradición bíblica sitúa la Pasión (figura central). Al analizar el valor de k_3, que define el plano del Padre Eterno, para ser coherentes teológicamente, lo mejor sería tomar un valor indeterminado que tienda hacia el $+\infty$ (figura de la derecha).



Intersección del espacio representado en la Trinità de Masaccio con planos paralelos al del dibujo y perpendiculares al eje del tiempo. Izquierda: plano del año 1428; centro: plano del año 33; derecha: plano del infinito.

Pero estos planos temporales no se acaban aquí. Hay un cuarto plano de ecuación $y = k_0$ que a primera vista nos pasa desapercibido. Se trata, como nos indica su ecuación, de un plano paralelo a los anteriores y al plano del dibujo, y por tanto, perpendicular al eje del tiempo. Es el plano en el que nos situamos nosotros, más hacia acá que los anteriores, cuando paseamos por Santa Maria Novella en Florencia y contemplamos *La Trinità*. Nos encontramos en ese plano, más abajo que los demás personajes, como corresponde a nuestro rango, que ni es divino ni noble, de pie sobre el suelo. La ecuación de este plano nuestro, de acuerdo con lo anterior, sería $y = 2010$, si es ése el año en el que damos nuestro paseo.

Pero, cuando de un modo virtual, y a través de las páginas de este libro, observamos *La Trinità* de Masaccio, estamos, de alguna manera, en otro plano distinto, uno también virtual, simétrico, metafóricamente, con respecto al plano del dibujo, de aquel que ocupa el Espíritu Santo y en el sentido contrario del eje. Digamos que, como lectores, estamos en algún lugar indeterminado que tiende hacia el $-\infty$. Masaccio, de una manera genial, nos ha previsto y nos ha atrapado. Nos ha incorporado a su pintura, no como meros espectadores, sino como nuevos personajes que contemplan la escena y se integran en esta geometría escalonada, con los pies en el suelo.

MASACCIO, TERRIBILITÀ Y PERSPECTIVA

A pesar de la brevedad de su vida, la obra de Tommaso di ser Giovanni di Mone Cassai, llamado Masaccio (1401-1428), pintor del *quattrocento* italiano, tuvo una importancia decisiva en la historia de la pintura. Se le considera pionero en la aplicación a la pintura de las leyes de la perspectiva científica, desarrolladas por Brunelleschi. Nacido en una localidad de Arezzo, a los cinco años quedó huérfano. Tras los primeros estudios y trabajos como pintor en su ciudad natal, se trasladó a Florencia, donde trabó amistad con Donatello y Brunelleschi, así como con los representantes del ambiente humanístico de la ciudad.

Masaccio, Autorretrato en la Capilla Brancacci, Florencia (foto: FMC).

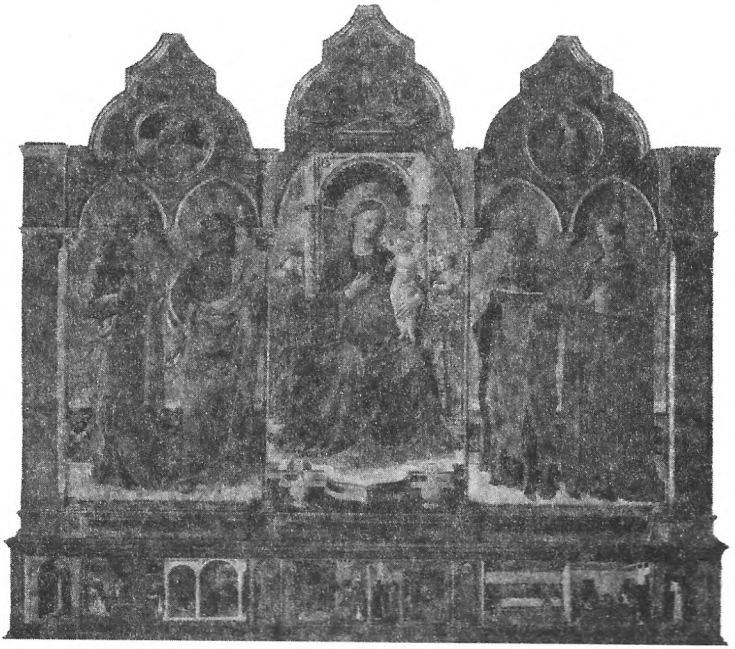
La primera obra que se le atribuye es el tríptico para *San Juvenal de Casia,* fechado el 23 de abril de 1422. Poco después comenzó a colaborar con Masolino en los frescos de la Capilla Brancacci, de la iglesia de Santa Maria del Carmine. Entre 1426 y 1428 pintó el fresco *La Trinità* en Santa Maria Novella. En 1428 se trasladó a Roma, invitado por el cardenal Brando da Castiglione, para decorar la Capilla de San Clemente, interrumpiendo los trabajos en la Capilla Brancacci, que continuaría sesenta años después Filippino Lippi. En Roma trabajó en el *Políptico de Santa Maria Maggiore*, del cual se conservan los Santos Jerónimo y Juan Bautista, actualmente en la National Gallery de Londres. Murió en Roma en otoño de 1428.

Destaca de Masaccio su uso de la perspectiva científica con la finalidad de dotar de un nuevo significado el concepto de espacio, que, junto a la expresividad de los personajes y un uso particular de la luz, constituyen los elementos cruciales del nuevo lenguaje renacentista.

La difusión de la perspectiva

Una vez establecidos los métodos matemáticos de representación en perspectiva, éstos se extendieron con mucha rapidez entre los pintores. Las ideas recogidas en el libro *Della pittura* de Alberti se difundieron pronto por toda Italia. Incluso pintores de reconocido prestigio no dudaron en adaptar sus estilos a esa nueva forma de pintar, aprendiendo para ello las técnicas matemáticas necesarias para poder usar la *perspectiva artificialis*.

En este sentido, resulta significativo, como muestra de esa evolución, comparar dos cuadros de Fra Angelico (1390-1455), el primero pintado antes de la generalización del nuevo estilo, y el segundo, poco tiempo después, cuando ya había asimilado las técnicas de la perspectiva.



Tríptico de Cortona, *de Fra Angelico (1436-1437), se encuentra en el Museo Diocesano de Cortona, Italia.*

Se trata, en primer lugar, del llamado *Tríptico de Cortona*, pintado entre los años 1436 y 1437. Aunque podamos distinguir en él cierto uso de la perspectiva, esta obra corresponde aún al paradigma gótico. Los fondos dorados, la imagen esencial-

mente plana, el hieratismo de los personajes, señalan ese extremo. La tridimensionalidad sólo se atisba ligeramente en el suelo sobre el que se encuentran, a ambos lados, las dos parejas de santos, así como en la tabla central, gracias a la arquitectura de una especie de baldaquín y al escalón del presbiterio sobre el que está sentada la Virgen. Se trata aún de perspectiva intuitiva. De hecho, el punto de fuga de la parte superior y el del pedestal, en la tabla central, no coinciden. No hay aún una articulación del espacio tridimensional, y los personajes no se destacan del fondo plano y uniforme de color dorado. Es patente que todavía no había sido influido por los nuevos planteamientos artísticos derivados de la obra de Alberti.

Pocos años más tarde, en 1450, Fra Angelico pintaría el *Retablo del convento franciscano de Bosco ai Frati*, en Mugello, Florencia, probablemente por encargo de los Medici. El tema es el mismo, una *sacra conversazione*, pero el estilo ha cambiado totalmente. Se nota a simple vista la asunción de las reglas matemáticas de la perspectiva de Alberti. La escena tiene profundidad. Los personajes dialogan entre sí en el espacio definido en el cuadro. Los fondos no son planos, sino que tienen relieve, sombras,

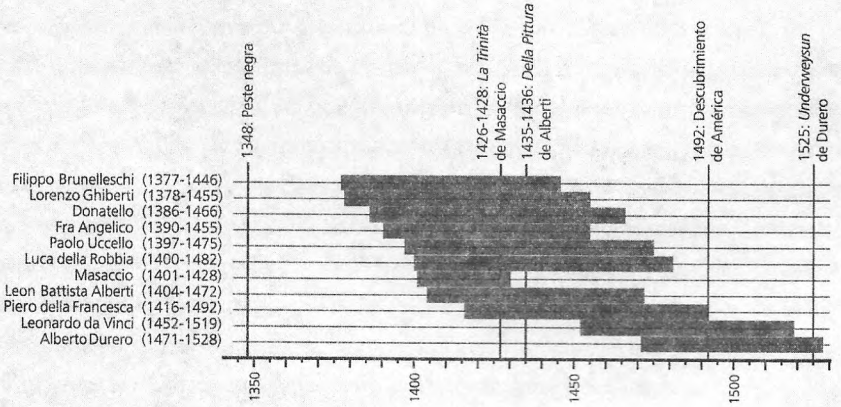
Retablo del convento franciscano de Bosco ai Frati,
pintado por Fra Angelico hacia 1450. Mugello, Italia.

volumen. La composición ha variado: ya no está compartimentada y forma parte de un todo armónico y dialogante. El verismo incorpora de alguna manera al espectador en la escena y acerca a los personajes, que ya no resultan distantes e hieráticos.

El éxito del tratado de perspectiva de Alberti fue total. En pocos años, la idea de la pintura cambió por completo. Y que esas ideas tuvieran su base en las matemáticas, junto con la necesidad expresada por Alberti de que el pintor debía estudiar geometría, supone también una redefinición de la profesión de pintor, que deja de ser un artesano, un mero asalariado, para elevarse a la categoría de humanista. Las cortes italianas renacentistas reclamaban la presencia en sus ciudades de pintores y científicos, y no sólo para que trabajasen para ellos en sus oficios, sino como intelectuales para intervenir en las tertulias palaciegas, incluso para asesorar a los duques y a los príncipes en política. A partir de este momento el artista deja de ser un artesano más que sabe pintar, y se convierte en un hombre culto, que lee y opina de filosofía, que conoce a Euclides, que piensa, y que expresa mediante el arte sus ideas y su visión del mundo que le rodea.

LA LÍNEA DEL TIEMPO

En este capítulo hemos hablado de una serie de personajes que unieron matemáticas y arte de manera indisoluble. Todos vivieron en un corto periodo de tiempo, como lo refleja el gráfico.



La narración con la que comenzábamos este capítulo pudo tener lugar en torno a 1416. Brunelleschi contaba con treinta y nueve años; treinta y ocho tendría Ghiberti; Donatello, treinta, y el joven Masaccio, sólo quince. Alberti, que tenía doce años, aún vivía exiliado con su familia fuera de Florencia.

Capítulo 2

Matemáticos artistas y artistas matemáticos

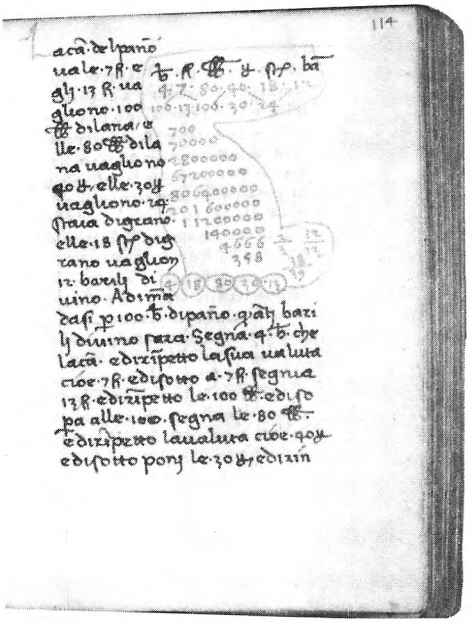
Yendo a la escuela de ábaco

A partir del siglo XII se empezaron a crear en Occidente las universidades, que estaban reservadas a una élite cultural muy concreta. Para satisfacer las necesidades de unos artesanos cada vez más profesionalizados y de los empleados en el floreciente comercio, surgieron también, en las postrimerías de la Edad Media, las llamadas «escuelas de ábaco», que, en cierto modo, podrían considerarse como las primeras escuelas de formación profesional. En ellas se daba la instrucción básica necesaria para los comerciantes, mercaderes y artesanos.

En la última etapa de la Edad Media apareció una nueva preocupación por el saber y por las formas de transmitirlo; un regreso a la ciencia y a la cultura griegas, la recuperación de los momentos más dorados del saber humano. Los matemáticos de aquella época tenían la necesidad obsesiva de renovar las ciencias matemáticas. Ellos mismos se referían a la tarea que debían realizar como restauración de la matemática, y también la designaban como reparación, restitución o instauración. En definitiva, lo que buscaban, lo que pretendían a veces de manera perseverante, era un re-nacimiento de las matemáticas, señalando así, al menos por lo que respecta a esta ciencia, los atisbos de ese renacimiento científico que se dibujaría plenamente en la segunda mitad del siglo XV. Esa etapa serviría de puente temporal entre la matemática medieval —escasísima pero enriquecida con la recuperación de la ciencia clásica y las aportaciones de la ciencia árabe— y la nueva concepción de la ciencia que llegaría con Galileo en el siglo XVII: la denominada ciencia moderna.

Curiosamente, este renacimiento científico que trató de restaurar la ciencia griega llegó a Europa a través de la matemática árabe traducida en la Escuela de Traductores de Toledo y, por vía marítima, a través del comercio de las llamadas Repúblicas Marineras italianas con el norte de África.

El surgimiento de una fuerte actividad económica vinculada a la navegación en ciudades como Venecia, Amalfi, Pisa y Génova, favorecido también por las cruza-



Trattato d'arismetricha *(ca. 1460), de Benedetto da Firenze, uno de los más famosos tratados de ábaco.*

das, trasformaron Italia en un puente natural para el comercio entre las regiones del norte de África y las de Oriente Próximo, por un lado, y las del norte de Europa, por otro. Los mercaderes italianos se transformaron en los interlocutores entre los mercaderes sudorientales, que proporcionaban mercancías preciosas, como la seda, las especias y las piedras preciosas, y los nórdicos, de los que provenía principalmente la lana y los tejidos elaborados. Este proceso evolutivo del comercio italiano llevó también a la creación de instrumentos comerciales nuevos, como la letra de cambio y el nacimiento de las primeras instituciones bancarias. Los comerciantes singulares, transformados en grandes empresas de distribución y comercialización, pasaron a necesitar empleados que supieran leer y escribir y que fueran capaces de hacer cálculos de manera ágil y rápida.

A lo largo el siglo XV Europa se fue recuperando de la gran crisis que supuso la peste negra, que, procedente de China, asoló el continente durante los años 1348-1350. La epidemia se extendió rápidamente por todo el mundo, causando estragos en la población, que se vio diezmada. En ciudades como Florencia, según cuenta Boccaccio en su introducción al *Decamerón*, murieron más de cien mil personas. Pero esta epidemia tuvo un efecto paradójico, puesto que la población que sobrevivió mejoró sus condiciones de vida: de una economía de subsistencia se pasó a una nueva situación en la que los salarios fueron más altos y los precios de los alimentos bajaron como nunca había ocurrido antes de 1348.

La evolución de la historia europea se vio afectada además por tres grandes acontecimientos que tuvieron lugar en el siglo XV y que marcarían la cultura occidental de manera muy significativa. Cronológicamente, éstos fueron: la invención de la imprenta de tipos móviles hacia 1447, la caída de Constantinopla en 1453 y el descubrimiento de América por Cristóbal Colón en 1492.

En aquel siglo, además, se produjo una convergencia de ideas entre artistas y matemáticos que se manifiestó a través de los problemas que les preocupaban y del estilo de pensamiento con el que los abordaban. Ésta sería una de las características principales del Renacimiento. Artistas como Piero della Francesca o Alberto Durero mostraban a través de sus obras artísticas y de sus escritos una viva atención a las matemáticas, que les llevaría a ambos a publicar tratados de esta disciplina.

La invención, por parte de Gutenberg, de la imprenta de tipos móviles revolucionó la difusión de las obras cultas. Desde la primera aparición, en 1447, de un libro impreso en Europa, en sentido moderno, hasta fines de siglo vieron la luz más de seis mil obras; son los llamados «incunables». Muy pocas de esas obras eran libros de ciencia o de matemáticas. De las pocas de contenido matemático, la mayoría correspondían a obras de árabes traducidas al latín, pues las obras aritméticas y algebraicas árabes ofrecían una utilidad práctica para los artesanos del nuevo paradigma económico y una relativamente menor dificultad conceptual que las obras clásicas griegas. Estas pocas obras matemáticas, que convivieron durante muchos años con los manuscritos elaborados por copistas, sirvieron para crear el caldo de cultivo adecuado para un nuevo desarrollo de las matemáticas en Occidente. Sólo a principios del siglo XVI el interés por las traducciones de obras clásicas de matemáticas creció, y multitud de estas obras vieron la imprenta.

El proceso de desarrollo del humanismo y el aumento de la fascinación que producía el descubrimiento de la ciencia y el arte de los griegos cambió paulatinamente el centro de atención de la matemática árabe a la griega. La geometría fue recuperando poco a poco su papel central en la matemática. De cualquier manera las dos concepciones de la ciencia, la medieval y la humanista, sobrevivieron en coexistencia durante un periodo muy largo de tiempo. Fruto indudable de esta convivencia fue el desarrollo del álgebra en la Italia el siglo XVI.

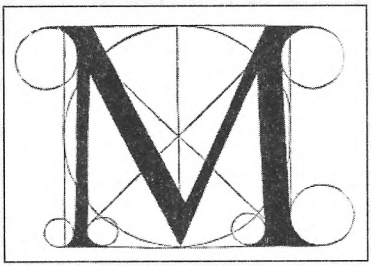
Las escuelas de ábaco aparecieron en el norte de Italia durante el siglo XIII y tuvieron vigencia hasta el XVI. Su nombre, quizá derivado del que pudo ser el primer libro escrito para este tipo de escuelas, el *Liber abaci* de Fibonacci, puede hacernos pensar que en ellas se enseñaba el manejo de este instrumento de cálculo. Sin embargo, nada más lejos de la realidad. De hecho, en este tipo de escuela se enseñaba a hacer cuentas prescindiendo precisamente del uso del ábaco. En su lugar se empleaban los números indoárabigos y las operaciones se realizaban mediante los algoritmos árabes, basados en el empleo de papel y pluma, relativamente parecidos a los usados actualmente. Se aprendía también la manera de aplicar estos conocimientos al comercio. Por consiguiente, en este contexto la palabra «ábaco» se entendía como

TIPOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

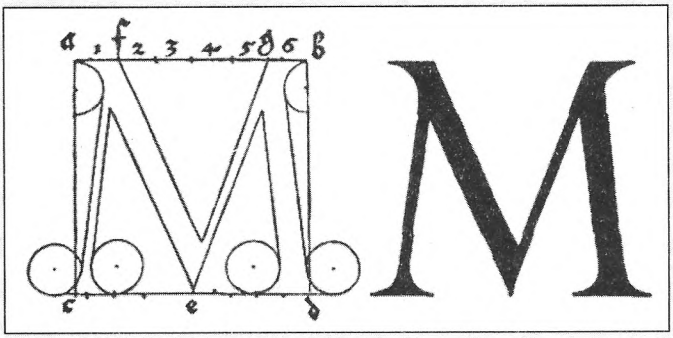
Con la invención de la imprenta de tipos móviles fue necesario diseñar nuevas tipografías. Algunas, por su elegancia y belleza, han sobrevivido hasta nuestros días, como la diseñada por Claude Garamond (1490-1561).

En el diseño de una buena tipografía influye la estética, la proporción y la geometría. No es de extrañar, por consiguiente, que tanto artistas como matemáticos se pusieran a la tarea de diseñar tipos matemáticos.

Pondremos dos ejemplos de letras «M», de Matemáticas, diseñadas en el cambio del *quattrocento* al *cinquecento*. Una de ellas es del matemático Luca Pacioli; la otra, del pintor Alberto Durero.



«M» de Luca Pacioli, diseñada en el año 1509.



«M» de Alberto Durero, creada en 1525.

sinónima de «cálculo» o de «operaciones». El título que Fibonacci puso a su obra, *Libro del ábaco*, debe ser entendido como *Libro de las cuentas*.

El *Liber abaci* dio origen a una rica producción de compendios y manuales de aritmética escritos en lengua vulgar. Son los llamados «tratados de ábaco», que aparecieron durante todo el siglo XIV y hasta principios del XVI. Estos libros tenían

como finalidad servir de guía a los maestros de ábaco que regentaban las escuelas. Se caracterizaban por su orientación práctica, pues estaban organizados por clases de problemas, y recurrían a metodologías repetitivas centradas en la resolución de problemas, sin buscar el aprendizaje de teorías generales; el hecho de estar escritos en toscano facilitaba la lectura. Se conservan aproximadamente unos 300 de estos textos, escritos entre los siglos XIV y XVI, algunos manuscritos y otros impresos. Algunos de ellos, por amplitud y riqueza, pueden ser considerados como auténticos compendios de la matemática del ábaco.

Aunque la tarea fundamental de estas escuelas era la formación de los empleados comerciales, a ellas acudían también artesanos, arquitectos, pintores, cartógrafos y, en general, todos aquellos que necesitaban una formación matemática de base. La educación de los jóvenes empezaba a los ocho años de edad. Durante un tiempo acudían a una escuela para aprender a leer y escribir. Unos dos años más tarde pasaban a una escuela de ábaco. La estancia en ella solía durar también dos años. Incluso a veces a estas escuelas se las denominaba también *botteghe d'abaco,* es decir, «talleres de ábaco», subrayando de este modo su estructura, similar a la de un taller artesanal, adonde se acudía a aprender un oficio. Los alumnos eran, de algún modo, aprendices del taller, y la denominación de «maestro» dada a los profesores es la misma que se daba al artesano que ejercía y enseñaba el oficio en su taller. Posteriormente, los que querían dedicarse a la actividad comercial o artesanal pasaban a trabajar como aprendices en prácticas en una compañía comercial o en un taller.

Del examen de estos tratados se deduce que la formación de un buen maestro de ábaco debía ser bastante completa: además de la aritmética práctica y comercial, tenía que tener nociones de aritmética teórica, teoría de números, geometría teórica y práctica y álgebra.

Por lo que respecta al currículo que estos maestros desarrollaban en las escuelas de ábaco, puede dividirse en tres niveles. En el más elemental se enseñaba la lectura y la escritura de los números usando el sistema de numeración indoarábigo, las técnicas para calcular con los dedos, los algoritmos para realizar las operaciones, las operaciones con fracciones, la regla de tres, los sistemas de las monedas, de los pesos y de las medidas, y ciertas nociones de geometría práctica. Éste era el nivel que seguían los artesanos y los empleados de los talleres artísticos. En el segundo nivel se enseñaba la aritmética comercial y la contabilidad y teneduría de libros. En este nivel adquirían la cualificación necesaria los empleados de las grandes compañías comerciales. El tercer nivel se reservaba para los aficionados a la matemática, y era también el que debían seguir los que quisieran, con el tiempo, convertirse en maes-

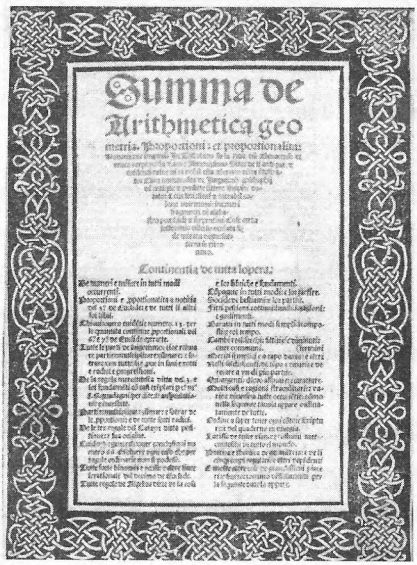
tros de ábaco. En él se enseñaba la resolución de ecuaciones y ciertos problemas de teoría de números. Se abordaban también algunos problemas mercantiles de mayor dificultad.

El libro que cierra el ciclo de los tratados de ábaco es la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*, de fray Luca Pacioli, cuya primera edición apareció publicada en Venecia en 1494.

LUCA PACIOLI Y LA *SUMMA DE ARITHMETICA*

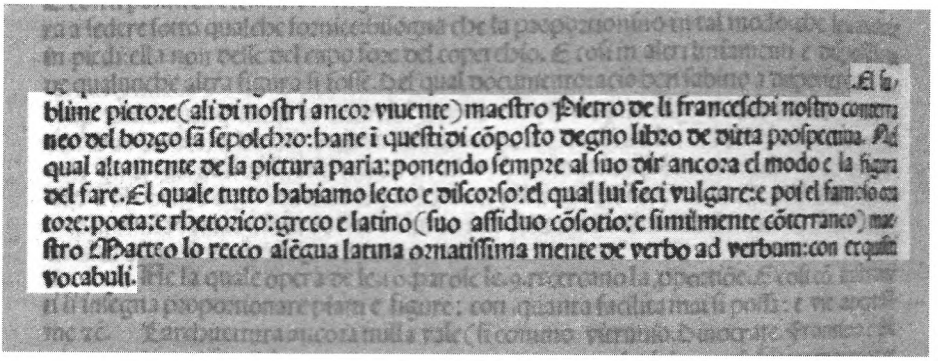
El fraile franciscano Luca Pacioli es uno de los personajes más curiosos del Renacimiento italiano y uno de los matemáticos más conocidos de aquella época. Nació en 1445 en Borgo San Sepolcro, al igual que Piero; tal vez este último fuera de algún modo su maestro matemáticamente hablando. Además, fue amigo de Leonardo da Vinci, con quien compartió casa unos años, y de Leon Battista Alberti, que acogió a ambos en Roma.

Su obra más importante es la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*, que terminó de redactar en 1494, y fue impresa en Venecia bajo su directa supervisión. La dedicatoria de esta obra está dirigida al duque de Urbino, Guidobaldo da Montefeltro. Escrita en italiano, la *Summa* de Pacioli compiló todos los conocimientos algebraicos de los siglos anteriores en una sola obra de carácter enciclopédico y más de 600 páginas. Se convirtió en lectura básica para los algebristas del siglo XVI, que, apoyados en ella, pudieron llevar a cabo nuevos descubrimientos. Todos ellos citan a Pacioli en sus obras: Gerolamo Cardano (1501-1576), en su *Arithmetica*, lo hace de manera reverencial, a pesar de dedicar un capítulo entero a corregir innumerables errores de la obra de Pacioli. Rafael Bombelli (1526-1572), en la introducción de su *Algebra*, llega a afirmar que después de Fibonacci, Pacioli «*primo fu que luce diedi a questa scientia*» («fue el primero que dio luz a esta ciencia»). Murió en su ciudad natal, según se cree, en el año 1517.


Summa de
Arithmetica geo
metria, Proportioni et proportionalita

Frontispicio de la Summa de arithmetica, *de Luca Pacioli.*

La admiración de Pacioli hacia el *De prospectiva pingendi* se manifiesta en el siguiente párrafo de la *Summa* de Pacioli:


blime pictore (ali dì nostri ancor viuente) maestro Piero de li franceschi nostro conterra neo del borgo sã sepolchro: hane i questi dì cõposto degno libro de ditta prospectiua. Nel qual altamente de la pictura parla: ponendo sempre al suo dir ancora el modo e la figura del fare. El quale tutto habiamo lecto e discorso: el qual lui feci vulgare: e poi el famoso ora tore: poeta: e rhetorico: greco e latino (suo assiduo cõsotio: e similmente cõterraneo) mae stro Matteo lo recco alẽgua latina ornatissima mente de verbo ad verbum: con exquisiti vocabuli.

Párrafo referente a Piero della Francesca en la Summa *de Pacioli, finalizado en el año 1494.*

«El su/blime pictore (ali dì nostri anchor vivente) maestro Piero de li Franceschi, nostro conterra/neo del borgo San Sepolcro, hane in questi dì composto degno libro de ditta prospectiva. Nel/ qual altamente de la pictura parla, ponendo sempre al suo dir ancora el modo e la figura/ del fare. El quale tutto habiamo lecto e discorso, el qual lui feci vulgare, e poi el famoso ora/ tore, poeta, e rethorico, greco e latino (suo assiduo consotio, e similmente conterraneo) mae/stro Matteo lo recco alengua latina ornatissimamente de verbo ad verbum, con exquisiti/ vocabuli.

[«El sublime pintor (en nuestros días todavía viviente) maestro Piero de li Franceschi, nuestro conterráneo del Borgo San Sepolcro, ha últimamente compuesto un digno libro sobre perspectiva, en el cual habla doctamente de pintura, contando con sus palabras, acompañado de figuras, el método de hacerla. El cual libro, que él escribió en vulgar, hemos leído y recorrido. Y después el famoso orador, poeta y retórico, griego y latino (su asiduo consocio y también conterráneo) maestro Matteo lo tradujo a lengua latina elegantísimamente palabra por palabra, con vocablos exquisitos.»]

Tal como afirma el texto, el *De prospectiva pingendi* de Piero della Francesca fue traducido al latín por su amigo, el maestro Matteo.

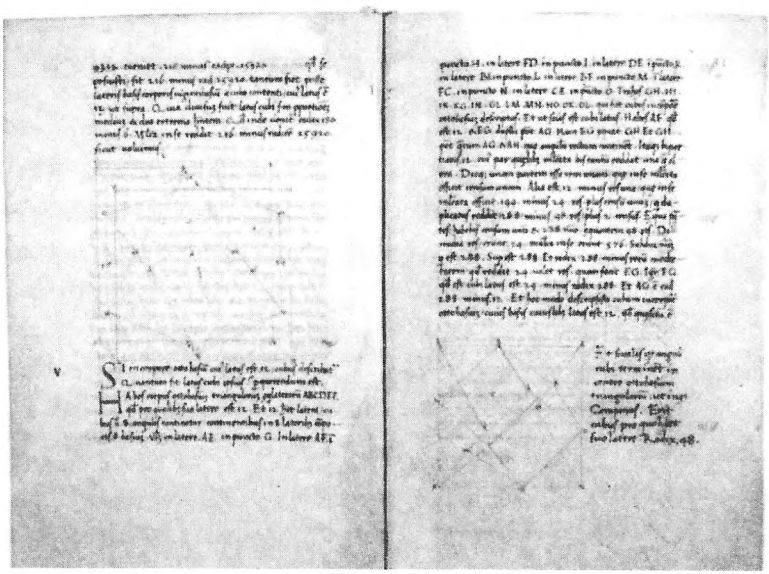
Obras matemáticas de Piero della Francesca

Piero della Francesca, además de un gran pintor, fue autor de varias obras matemáticas: la ya mencionada *De prospectiva pingendi*, un *Trattato d'abaco* y una obra geométrica titulada *Libellus de quinque corporibus regularibus*.

El *Trattato d'abaco,* según confiesa el autor en la introducción, no fue escrito para su uso en una escuela de ábaco, sino a petición de sus amigos, probablemente artesanos como él de la pintura. Por lo demás, su estructura es similar a la de otros tratados de ábaco, con una única novedad muy significativa: el peso de la geometría es mucho mayor de lo habitual. De hecho, 48 de las 127 páginas están dedicadas a ella. En el ámbito meramente aritmético, el *Trattato d'abaco* puede servir de muestra de otros tratados de la época. Veamos, a modo de ejemplo, cómo introduce la regla de tres:

«Siete varas de tela cuestan nueve libras, ¿cuánto costarán cinco varas?».

La libra era una moneda de la época, cuyo nombre derivaba del antiguo valor de una libra (de peso) de plata. Cada libra florentina estaba dividida en 20 sueldos, y éstos en 12 dineros, exactamente como las libras esterlinas, divididas en 20 chelines y éstos en 12 peniques, hasta la reforma decimal de 1971. La respuesta al problema es la siguiente:



Una doble página del Libellus de quinque corporibus regularibus *de Piero della Francesca.*

«Deberás hacer esto: multiplica la cantidad que desees saber por lo que cuestan las siete varas de tela, que eran 9 libras, esto es 5 por 9, que hacen 45; divide después el resultado por 7, obtendrás 6 libras y te restarán 3 libras; conviértelas en sueldos y obtendrás 60; divídelos por 7 y te dará como resultado 8 sueldos y te restarán otros 4; transfórmalos en dineros, eso hace 48; divide otra vez entre 7, el resultado es 6 dineros y 6/7. Por tanto, tendrás que 5 varas de tela a ese precio costarán 6 libras, 8 sueldos, 6 dineros y 6/7».

En el *Libelus de quinque corporibus regularibus* retoma muchos de los problemas geométricos del tratado de ábaco, pero, en algunos casos, de manera más desarrollada y completa. Se compone de cuatro tratados. En el primero, que tiene carácter introductorio, aborda los polígonos planos; en el segundo y el tercero, trata de los cinco poliedros platónicos —el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro— y de las inscripciones de unos en otros. En el cuarto y último tratado se abordan otros poliedros, entre los que considera seis de los trece llamados arquimedianos o poliedros semirregulares. En total, la obra contiene 140 problemas, de los que 59 se refieren a los poliedros regulares. Aun siendo una obra organizada por clases de problemas, tiene un carácter bastante innovador y presenta una estructura muy organizada. Retoma, además, uno de los temas clásicos de la geometría griega: los poliedros regulares, tratados por Euclides en sus *Elementos* y por Arquímedes en *Esferas y cilindros, conoides y esferoides*.

Los problemas presentados en este tratado son del tipo:

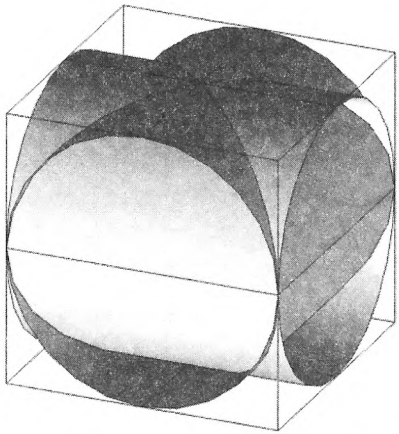
«Tomemos un cuerpo esférico cuyo diámetro mida 7. Quiero poner en él una figura con cuatro caras triangulares equiláteras, de manera que cada vértice toque la circunferencia [*sic*]. ¿Cuánto medirán las aristas?».

Como aproximación de π usa 22/7. Únicamente se conserva un ejemplar del *Libellus*, que se encuentra en la Biblioteca Vaticana. No obstante, es la única obra de Piero que fue impresa en el Renacimiento. De hecho, apareció, traducida al italiano, como apéndice del libro de Luca Pacioli, *De divina proportione*, publicado en Venecia en 1509, que contribuyó al interés por el estudio teórico y matemático de los cuerpos geométricos tridimensionales.

Para los artistas, el estudio de las matemáticas dejó de ser algo orientado exclusivamente a la práctica para convertirse en la vía de acceso al más elevado universo del saber.

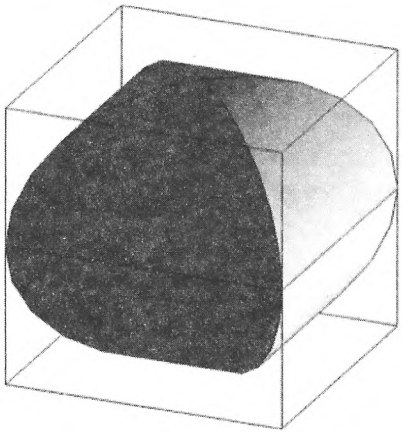
El volumen de una bóveda de rincón de claustro

En el *Libellus*, Piero aborda un curioso problema, que consiste en la determinación del volumen común a dos cilindros de igual diámetro que se corten perpendicularmente.



Corte de dos cilindros perpendiculares de igual diámetro (fuente: FMC).

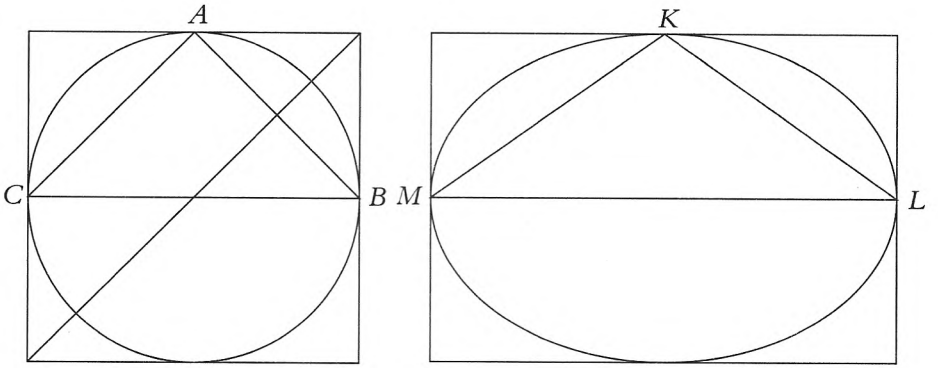
Piero pretende determinar el volumen de la siguiente figura:



Doble bóveda de rincón de claustro (fuente: FMC).

Pues bien, Piero afirma que el volumen es igual a $2/3 \cdot d^3$, siendo d el diámetro de los cilindros. Lo sorprendente para los libros de la época es que en vez de dejar

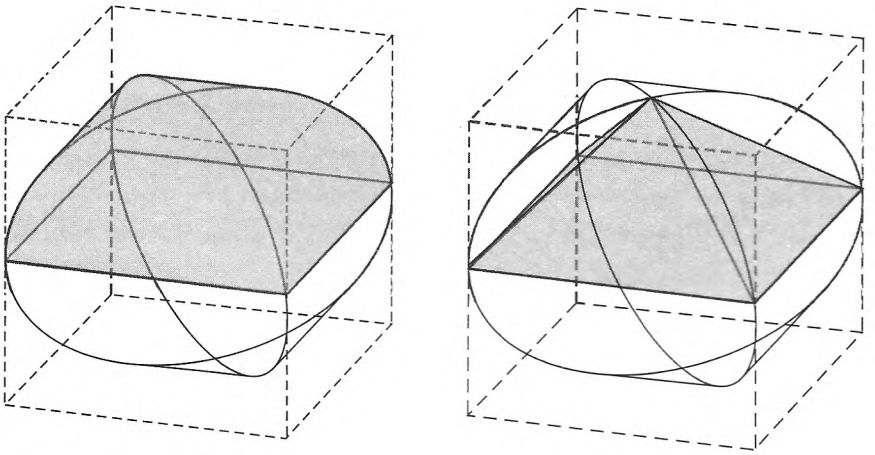
las cosas en este punto, Piero siente la necesidad de justificar el porqué de la fórmula. Y lo hace patiendo de estas dos figuras:



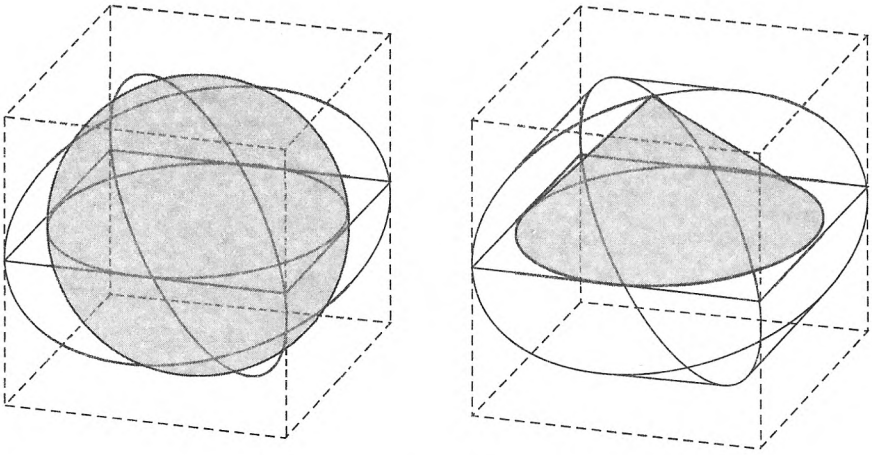
En la primera se representa un cuadrado con un círculo inscrito; a su vez, en el círculo se encuentra inscrito un triángulo *ABC*, en el que *BC* es su diámetro. En la segunda dibuja un rectángulo de la misma altura que el cuadrado anterior y de anchura igual a la diagonal de ese cuadrado. En su interior inscribe una elipse y, en ella, un nuevo triángulo *KLM*, en el que *LM* es el eje mayor de la elipse. Y establece la siguiente proporción:

$$\frac{\text{área del cuadrado}}{\text{áreal del rectángulo}} = \frac{\text{área del cículo}}{\text{área de la elipse}} = \frac{\text{area del triángulo } ABC}{\text{area del triángulo } KLM}.$$

De aquí pasa a las siguientes figuras tridimensionales:



Doble bóveda de rincón de claustro y pirámide inscrita (fuente: FMC).



Esfera inscrita en la doble bóveda de ricón de claustro y cono inscrito en la esfera (fuente: FMC).

De manera análoga a los dibujos bidimensionales anteriores, y sin aportar más explicaciones, afirma:

$$\frac{\text{volumen doble bóveda}}{\text{volumen de la pirámide}} = \frac{\text{volumen de la esfera}}{\text{volumen del cono}}.$$

Y, despejando, obtiene el volumen de la doble bóveda V:

$$V = \frac{\text{volumen de la esfera}}{\text{volumen del cono}} \cdot \text{volumen de la pirámide}.$$

Luego

$$V = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r} \cdot \text{volumen de la pirámide} = 4 \cdot \text{volumen de la pirámide}.$$

Es decir

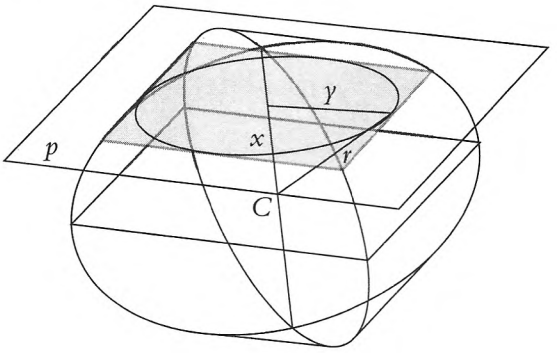
$$V = 4 \cdot \frac{1}{3}(2r)^2 \cdot r = \frac{16}{3}r^3.$$

Y como

$$r = \frac{d}{2},$$

$$V = \frac{16}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}d^3.$$

La solución que Piero da al problema es la correcta, como puede demostrarse mediante el cálculo integral:



Cálculo del volumen de la doble bóveda por integrales (fuente: FMC).

Si cortamos la figura por un plano p, paralelo al ecuador, y llamamos x a la distancia de ese plano al centro de la figura, tenemos, por el teorema de Pitágoras, que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Por tanto, el área del cuadrado sombreado, que tiene de lado $2y$, intersección de la figura con el plano p es

$$A(x) = 4\left(r^2 - x^2\right).$$

Y el volumen de la figura queda, por tanto, así

$$V = 2\int_0^r 4\left(r^2 - x^2\right)dx = 8\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] = \frac{16}{3}r^3 = \frac{2}{3}d^3.$$

El problema de calcular la intersección de dos cilindros perpendiculares del mismo diámetro había sido abordado por Arquímedes en su *Método,* pero este libro de Arquímedes, perdido desde la Antigüedad, no fue reencontrado hasta 1906, en un palimpsesto en el que había sido borrado el texto de Arquímedes para reescribir sobre el mismo pergamino una colección de salmos en un convento. No hay ninguna constancia de que el texto de Arquímedes fuera conocido en la época de Piero, y menos aún de que éste hubiera tenido acceso a él, por lo que se desconocen las fuentes en las que se basó para sus cálculos, que resultan en su concepción muy particulares.

Piero fue, por tanto, un matemático de primer orden, con una visión espacial y una intuición geométrica muy perspicaces. Sus ideas matemáticas y artísticas, refleja-

das en sus libros, y su manera de ver el espacio y las formas, mostradas en sus pinturas, lo convierten en el paradigma de ese momento especial, a finales del *quattrocento*, en el que el arte y la matemática anduvieron de la mano, apoyándose mutuamente.

Los poliedros como género artístico

Confluyen en el Renacimiento tres corrientes que facilitan el estudio de los poliedros. Por una parte, el retorno a los conocimientos de la Antigüedad vuelve a centrar el interés en estos objetos matemáticos que ya habían sido estudiados por Euclides en sus *Elementos,* desde un punto de vista matemático, y por Platón en sus *Diálogos*, como base de su cosmología. Por otra parte, la difusión de la perspectiva matemática permite, por primera vez, no relegar dichos objetos abstractos al ámbito de la imaginación espacial de los estudiosos, sino, de alguna manera, popularizar su estudio al poder «verlos» dibujados.

Así, en Urbino coincidieron dos de los autores que más se dedicaron a este estudio: Piero della Francesca y Luca Pacioli. El tratamiento que de los poliedros había dado Piero en su *Trattato d'abaco* y muchos de los ejemplos que incluyó fueron recogidos en la *Summa* de Pacioli. Posteriormente, volvemos a encontrar coincidencias que, en opinión de Vasari, son auténticos plagios de Pacioli, entre el *Libellus* de Piero y la *De divina proportione* (1497) de Pacioli, si bien el tratamiento de Piero es mucho más aséptico, digamos, más matemático, mientras que el de Pacioli es a veces místico-teológico. Y mientras que en el libro de Piero se pretende dar explicaciones, si no demostraciones, de las afirmaciones y justificaciones teóricas de sus procedimientos, Pacioli afirma que «lo que se expresa claramente no necesita ser probado» como justificación de su falta de demostraciones.

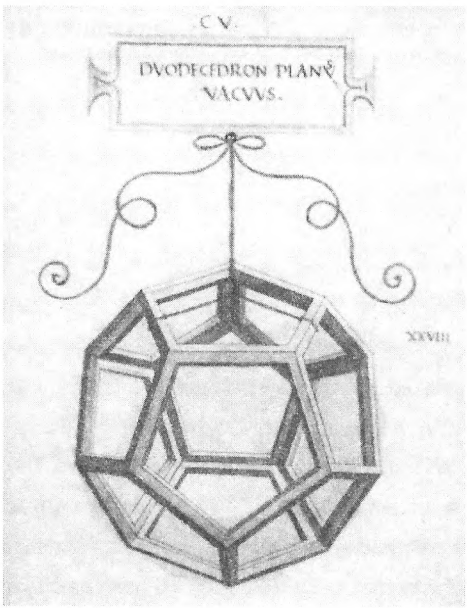
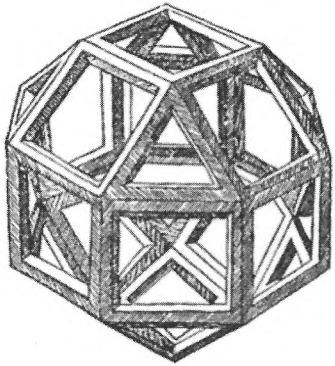


Ilustración del dodecaedro, obra de Leonardo da Vinci para el códice De divina proportione, *de Luca Pacioli.*

Pero, al margen de polémicas entre las distintas visiones de uno y otro y



Arriba, rombicuboctaedro, grabado basado en los dibujos de Leonardo da Vinci en la edición impresa de De divina proportione, *de Luca Pacioli, Venecia, 1509. A la derecha, taracea de Fra Giovanni da Verona (ca. 1457-1525), para la sacristía de* Santa Maria in Organo, *Verona.*

los posibles plagios, ambas obras comparten unos magníficos dibujos que las ilustran. En la obra de Piero todo parece indicar que son de factura propia; en *De divina proportione* son de Leonardo da Vinci y verdaderamente magníficos. Uno de los ejemplares se encuentra en la Bibioteca Nacional de España, en Madrid.

Posteriormente, como se ha señalado, el *De divina proportione* fue dado a la imprenta (1509). Esta edición incluye grabados basados en los dibujos de Leonardo. Pacioli decidió incluir la versión en vulgar del *Libellus* como anexo a esta edición de su obra.

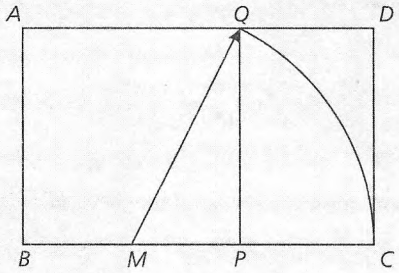
Los poliedros terminaron poniéndose de moda en las cortes italianas del Renacimiento. Varios nobles encargaron colecciones de poliedros, que, bajo la supervisión de un matemático —en algunos casos el propio Pacioli—, llevaban a cabo buenos artesanos de la carpintería.

También en el arte decorativo de la taracea se conjugaron la perspectiva y la moda de los poliedros. Así, es frecuente encontrar poliedros taraceados en paredes decoradas o en puertas de armarios de madera que, burlando los sentidos —en *trompe l'œil* o trampantojo—, nos muestran dichas puertas semiabiertas con su interior lleno de objetos, libros y poliedros.

En el caso de los diseñados por Fra Giovanni da Verona para la sacristía de la iglesia de Santa Maria in Organo en esa misma ciudad, la influencia de los dibujos de Leonardo da Vinci para *De divina proportione* es evidente, dejando fuera de dudas que Fra Giovanni conocía el texto de Pacioli.

LA RELACIÓN ENTRE LOS POLIEDROS Y LA PROPORCIÓN ÁUREA

Luca Pacioli llamó a su libro sobre los poliedros la «divina proporción» o proporción áurea. Pero ¿qué relación existe entre los poliedros y la proporción áurea? Tres dibujos nos lo aclararán.



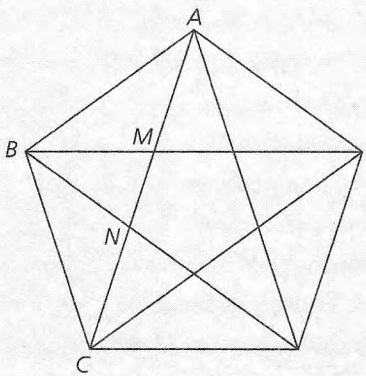
Construcción de un rectángulo áureo.

El primero nos muestra cómo construir un rectángulo áureo: trazamos un cuadrado *ABPQ* y, haciendo centro en el punto medio *M* del lado *BP* y con radio igual al segmento *MQ*, trazamos un arco de circunferencia que cortará en *C* la prolongación del lado *BP*. El rectángulo *ABCD*, que obtenemos cerrando la figura, es un rectángulo áureo, es decir, sus lados están en proporción áurea:

$$\frac{BC}{BP}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi.$$

Además, los rectángulos *ABCD* y *CDQP* son semejantes, por lo que se verifica que:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{CP}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi.$$



Algunas relaciones áureas en el pentágono regular.

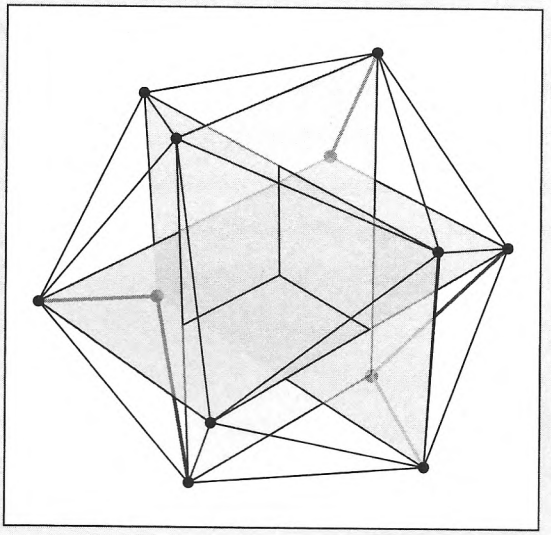
En la construcción del pentágono regular —y también en la del decágono— interviene la proporción áurea. De hecho, en los pentágonos podemos encontrar multitud de proporciones relacionadas con Φ (el número de oro). Veamos algunas de ellas:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MN} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

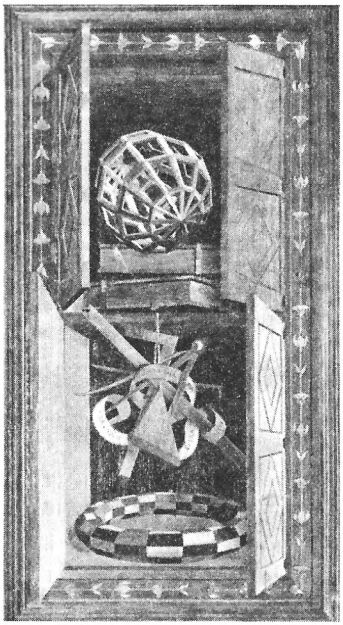
Por consiguiente, en el dodecaedro, formado por doce pentágonos, son muy frecuentes las relaciones áureas.

Por último, y sin pretender agotar las relaciones entre poliedros y razón áurea, también podemos encontrar proporciones áureas en el icosaedro. Si unimos dos aristas opuestas en un icosaedro obtenemos un rectángulo áureo. Si agrupamos los doce vértices tomando aristas opuestas de dos en dos, obtendremos la figura que vemos más abajo, en la que aparecen tres rectángulos situados en planos perpendiculares entre sí dos a dos.

Esta propiedad, debido a la relación de dualidad que se establece entre el icosaedro y el dodecaedro, puede aplicarse a este último, uniendo en este caso, en lugar de aristas opuestas, los centros de las caras.



Los tres rectángulos áureos inscritos en un icosaedro (fuente: FMC).



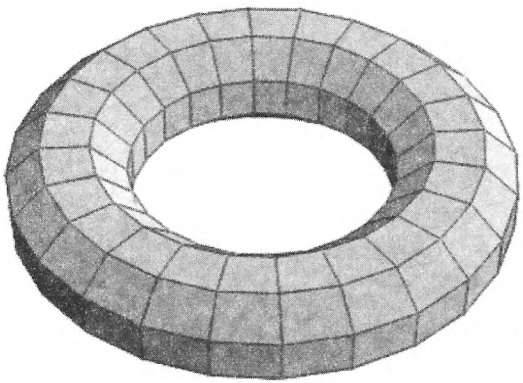
Taracea con un mazzocchio *de Giovanni da Verona, finales del siglo xv.*

En esta época empezó a ser frecuente en las obras artísticas, aparte de los poliedros regulares y de los semirregulares o arquimedianos, otros objetos geométricos, como conos, prismas o esferas facetados. De alguna manera son los precursores de la idea de límite, que no aparecería hasta varios siglos más tarde. Las esferas facetadas que podemos ver en el *De divina proportione* y en las taraceas de Fra Giovanni da Verona, se pueden inscribir en una esfera ideal, que es a su vez envolvente a todas las esferas facetadas del mismo radio.

Un objeto se convirtió en el icono de la perspectiva, y el pintor Paolo Uccello, en su principal promotor: se trata del *mazzocchio.* En su origen era una prenda para la cabeza que los florentinos del siglo xv usaban para sujetar un paño o velo; tenía una forma parecida a una rosquilla, es decir, lo que en matemáticas se denomina «toro».

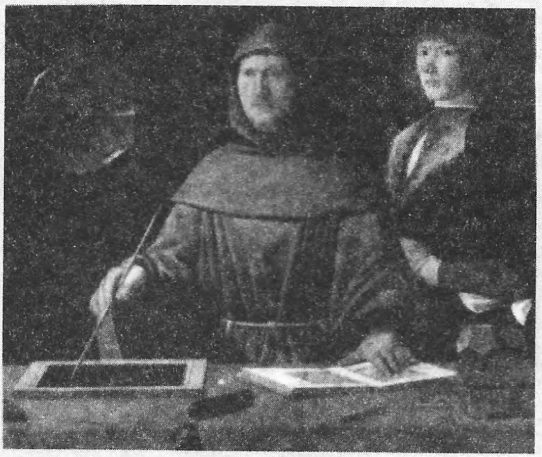
Podemos imaginar un toro de varias maneras. La más simple es verlo como la superficie generada por una circunferencia que gira de tal manera que su centro se desliza sobre otra mayor, situada en un plano perpendicular al anterior.

Otra posibilidad es imaginar un cilindro estrecho y alto de un material plástico y arquearlo en círculo hasta hacer coincidir la cara superior con la inferior. Si facetamos las superficies, para poder construirlo, por ejemplo, con cartulina, la imagen queda aproximadamente así:



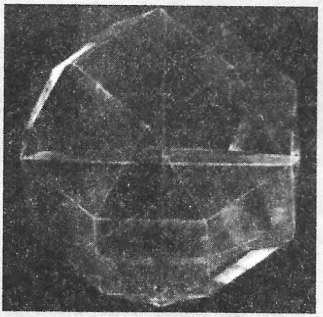
Mazzocchio *facetado (fuente: FMC).*

UN POLIEDRO LLENO DE AGUA



Retrato de Fra Luca Pacioli de Jacopo de' Barbari, en el Museo de Capo di Monte en Nápoles.

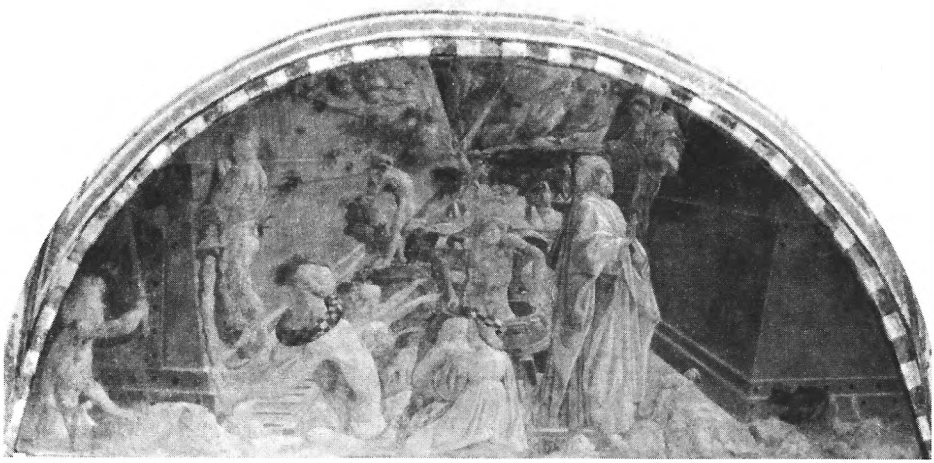
La amistad de Fra Luca Pacioli con diversos artistas hizo que varios de ellos le hicieran retratos. El que aquí aparece es obra de Jacopo de' Barbari, y en él vemos a Pacioli impartiendo una lección de matemáticas. El alumno es probablemente Guidobaldo da Montefeltro, futuro duque de Urbino. Pacioli tiene abiertos sobre la mesa los *Elementos* de Euclides, está dando una lección de geometría y, por el dibujo de la pizarra, parece que se trata del *pons asinorum*, el puente de los asnos, que establece que los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales. Hay quien opina que el nombre de *pons asinorum* deriva de la forma del dibujo, semejante a un puente, aunque más seguramente le fue dado por ser este teorema el punto a partir del cual las mentes simples ya no eran capaces de entender nada de los *Elementos*. A la derecha de cuadro vemos un ejemplar de la *Summa*. Encima aparece un dodecaedro y, suspendido del techo por una cadena dorada, con caras de vidrio y lleno de agua hasta su mitad aparece un misterioso poliedro que refleja la ventana por la que, desde la izquierda, entra la luz en el cuadro. Se trata de un rombicuboctaedro, con dieciocho caras cuadradas y otras ocho triangulares.



Poliedro de Pacioli.

Para su construcción se ha dividido el círculo pequeño en ocho partes, transformándolo en un octógono, y el grande, en veinticuatro. El *mazzocchio* queda así convertido en una figura formada por veinticuatro «gajos», cada uno de los cuales es una especie de prisma oblicuo, cuyas bases son octógonos regulares e iguales entre sí.

En la segunda de las taraceas ilustradas anteriormente se observa, en la balda inferior del armario, un *mazzocchio* de este tipo. Pero, como veremos, en aquella época dicha figura aparecía en muchos otros lugares. Uno de ellos sería el llamado Claustro Verde, en la iglesia de Santa Maria Novella, en Florencia. Allí Uccello pintó un fresco en una luneta titulado *El Diluvio*. En una escena un tanto caótica, en la que ningún personaje parece tener relación con los restantes y en la que domina una profunda perspectiva central, se ven dos *mazzocchios*. Uno rodea el cuello de uno de los personajes que, con un mazo en la mano, intenta arrebatar a otro, con el que lucha, una escalera para poder subir con ella al arca. El segundo *mazzocchio* aparece en la cabeza de una niña sentada de espaldas al espectador, con la cabeza de perfil. Se ignora el sentido simbólico que Uccello quiso dar en esta escena a los *mazzocchios*, si es que pensó siquiera en ello.



El Diluvio, *fresco de Paolo Uccello que se encuentra en el Claustro Verde de la basílica de Santa Maria Novella, Florencia (foto: FMC).*

En la serie de *La batalla de San Romano*, tres cuadros pintados por Uccello que hoy se conservan en los Uffizi de Florencia, en la National Gallery de Londres y en el Louvre de París, también aparecen varios *mazzocchios*.

OH CHE DOLCE COSA È QUESTA PROSPETTIVA!

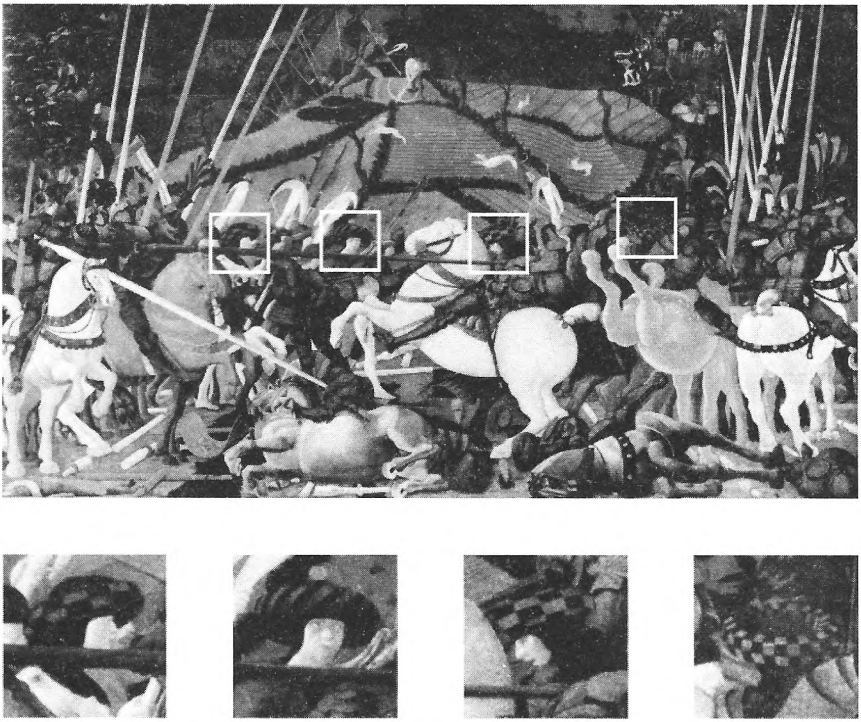
Retrato de Paolo Uccello (foto: FMC).

Paolo Di Dono, llamado Paolo Uccello (1397-1475) es el pintor florentino con el que el uso de las reglas de la perspectiva llegó a su apogeo. Trabajó como aprendiz en la escuela de Ghiberti junto a Donatello, cuando el primero realizaba la puerta norte del Baptisterio de Florencia. En 1416 se trasladó a Venecia para trabajar en la restauración de los mosaicos de la fachada de la basílica de San Marco, que habían quedado destruidos por un incendio, y en las taraceas de mármol para los mosaicos del suelo. En 1430, de regreso a Florencia, contempló los frescos de Masaccio en la Capilla Brancacci, y quedó tan fascinado por los avances en la perspectiva que la hizo suya, hasta convertirla en la característica principal de su particular estilo.

En 1436, para el interior de la basílica de Santa Maria del Fiore, recibió el encargo de hacer el fresco del *condottiero* John Hawkwood. Aplicando las normas de la perspectiva lo pintó a caballo, como si de una estatua ecuestre se tratara. En la década de 1440 pintó los frescos del Claustro Verde de Santa Maria Novella, que se encuentran actualmente bastante deteriorados. Pero las obras que mejor reflejan su pasión por la perspectiva son las tres grandes tablas de *La batalla de San Romano,* con la dificultad añadida de representar un exterior, en plena confusión de la batalla. En una de ellas, las lanzas caídas en el suelo parecen formar una red cartesiana de abscisas y ordenadas, casi doscientos años antes de que Descartes escribiera su *Geometría*. La perspectiva se convirtió para Uccello en una verdadera obsesión. Vasari llegó a afirmar:

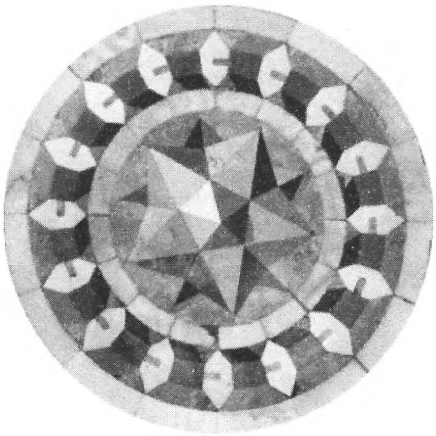
> «Donatello, que le conocía, siendo muy buenos amigos, a menudo le decía: "Paolo, tu perspectiva te hace abandonar lo cierto por lo incierto". Y esto ocurría porque Paolo le mostraba cada día *mazzocchios* con sus caras trazadas en perspectiva, y los de puntas de diamantes ejecutados con sumo esmero».

En 1452, cuando ya tenía más de cincuenta y cuatro años, contrajo matrimonio con Tommasa Malifici, con la que tuvo dos hijos, Donato y Antonia; ambos se dedicaron a la pintura. Nuevamente Vasari, no sin una cierta dosis de mala intención, afirma en sus *Vite* que Paolo pasaba toda la noche en el escritorio dedicado a la perspectiva, y cuando su mujer lo llamaba a dormir, él le decía: «¡Oh, que dulce cosa es esto de la perspectiva!».



Detalles de los mazzocchios *que se encuentran en* La batalla de San Romano *conservada en la Galleria degli Uffizi.*

Por último, comentaremos un poliedro especial de los llamados de Kepler y que actualmente se consideran poliedros regulares de tipo estrellado. Se trata del gran dodecaedro estrellado, formado por doce estrellas regulares de cinco puntas que coinciden de cinco en cinco en cada vértice. Aunque no fue estudiado por Kepler hasta 1619 en su *Harmonices mundi*, fue dibujado ya por Uccello en el suelo de la basílica de San Marco de Venecia hacia finales del *quattrocento.*



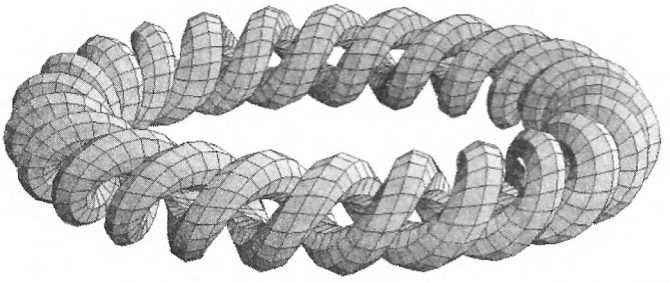
Mosaico diseñado por Paolo Uccello para el suelo de San Marco de Venecia. La figura representa un gran dodecaedro estrellado (fuente: AMA).

De la perspectiva a la realidad virtual

En el último tercio del *quattrocento*, la técnica de la perspectiva era una cosa asentada en los talleres de los artistas florentinos y se había extendido por el resto de Italia. Pero casi desde el principio se dio una paradoja: la perspectiva, nacida para pintar «la realidad», de manera creíble, pasó a tener una utilidad completamente distinta: convertir en real lo que no existe. Nació así, de alguna manera, lo que hoy día llamaríamos «realidad virtual».

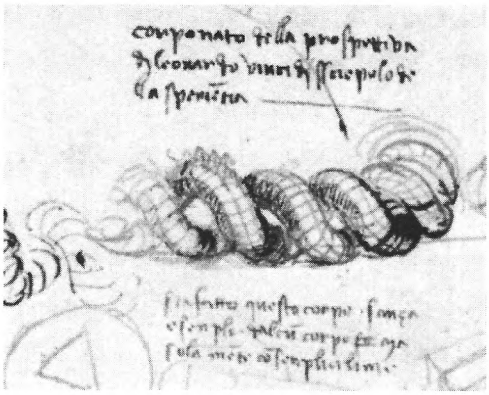
Leonardo da Vinci nos ofrece en el *Códice Atlántico* un nuevo ejemplo de su clarividencia. La imagen es ésta:

En la imagen se ve el esbozo de un toro. En realidad, lo que vemos es un toro que se enrolla en torno a otro; más aún, son dos toros paralelamente enrollados alrededor de un tercero. Esto se aprecia con más claridad en la figura reconstruida, que quedaría así:



Reconstrucción del mazzocchio *o toro de Leonardo en el* Códice Atlántico *(fuente: FMC).*

La imagen viene acompañada de dos textos, uno encima y otro debajo del dibujo. Leonardo era zurdo y escribía del revés, de manera que para poder leer sus textos es preciso obtener su imagen especular. El modo más sencillo es reflejarlos en un espejo o, con la ayuda de un programa de ordenador para la edición de gráficos, aplicar una simetría axial de eje vertical a la imagen... que es lo que hemos hecho:



El texto superior dice:

«corpo nato della prospettiva di Leonardo Vinci discepolo di la sperientia».	[cuerpo nacido de la perspectiva De Leonardo Vinci discípulo de la experiencia.]

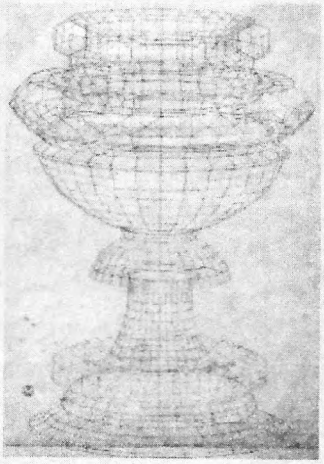
En el inferior se lee:

«si a fatto questo corpo senza esemplo d'alcun corpo, ma solamente con semplici linje».	[se ha hecho este cuerpo sin ejemplo de ningún cuerpo, sino solamente con simples líneas.]

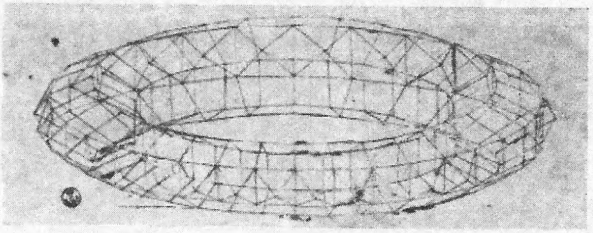
Leonardo es consciente desde el principio de lo que muchos otros harán más tarde. La perspectiva, inventada para representar lo real, sirve para generar realidades virtuales, cuerpos nacidos de la perspectiva, hechos «sin ejemplo de ningún cuerpo, con simples líneas», cuerpos no-reales que la pintura hace existir.

DOS DIBUJOS DE LOS UFFIZI

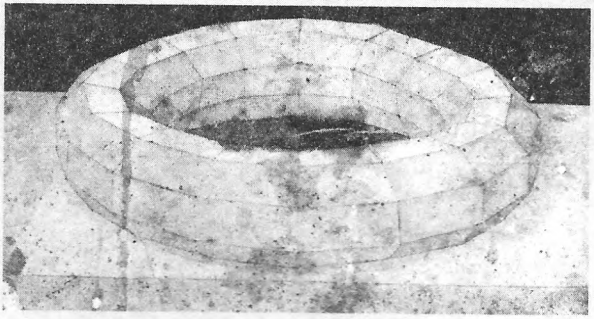
En el *Gabinetto Disegni e Stampe* de los Uffizi hay dos dibujos relacionados con los *mazzocchios*. Históricamente han sido atribuidos a Paolo Uccello y a Piero della Francesca, aunque se desconoce realmente su autor. Uno representa un *mazzochio*, con puntas de diamante en sus caras exteriores. El otro es el llamado *Calice degli Uffizi*, en el que se distinguen hasta tres *mazzocchios*, el más grande de los cuales tiene en su contorno puntas de diamante piramidales, con lo que ambos dibujos se suponen de la misma mano. A Paolo Uccello se atribuye el dibujo del *mazzochio* representado abajo.



Calice degli Uffizi.



Mazzocchio *de los Uffizi.*



Mazzochio *de Paolo Uccello.*

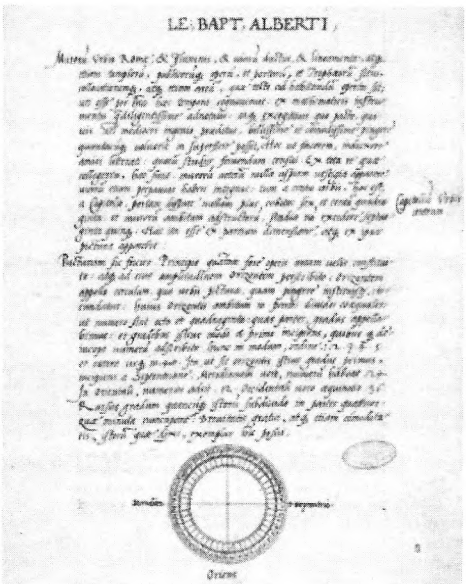
Los *Juegos matemáticos* de Alberti

Leon Battista Alberti es otro de los artistas que estudiaron matemáticas y escribieron sobre la materia. Además del *De Pictura* escribió también un libro titulado *Ludi matematici*, dedicado, en contra de lo que pueda parecer por el título, a la resolución

práctica de ciertos problemas geométricos que sirven para realizar medidas, como por ejemplo la determinación de la anchura de un río, la profundidad de un pozo, o para el levantamiento de mapas.

Alberti había realizado un levantamiento topográfico de Roma, del que no se conserva el correspondiente mapa, si es que lo llegó a realizar alguna vez. Los resultados de su trabajo los recogió en un libro al que puso por título *Descriptio Urbis Romae,* publicado en 1433, poco antes que *De pictura.* En la presentación se puede leer:

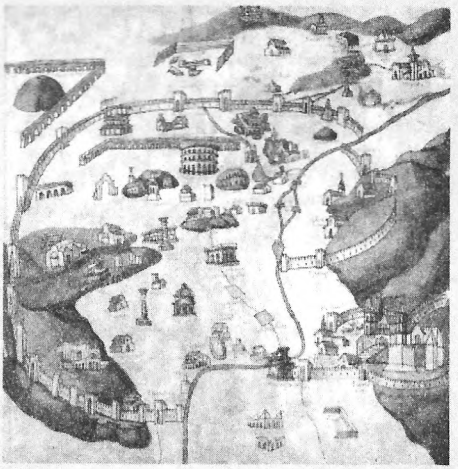
> «He realizado con el máximo cuidado, usando métodos matemáticos, el trazado y el dibujo de las murallas, del río y de las calles y, además, la situación y la posición de los templos, de los edificios públicos, de las puertas y los monumentos conmemorativos, la delimitación de las alturas y también la superficie ocupada por la parte habitada de la ciudad de Roma, tal y como ha llegado a nuestros días. También he ideado un método mediante el cual cualquiera que posea una inteligencia general estará en disposición de dibujar dichas cosas, de la manera más conveniente y adecuada, sobre una superficie tan grande como quiera. Me han animado a esta tarea mis doctos amigos, a cuyas peticiones accedí».



Manuscrito de Alberti del Descriptio Urbis Romae, *siglo xv.*

EL MAPA DE ROMA DE PIETRO DEL MASSAIO

El mapa de Alberti, que probablemente elaboró con los datos topográficos que recoge en su *Descriptio Urbis Romae,* no se ha conservado. No obstante, unos años más tarde, en 1464, Pietro del Massaio publicó en Florencia una edición de la *Geografía* de Ptolomeo, en la que incluía un precioso plano de Roma hecho por el procedimiento matemático de Alberti y que se reproduce aquí.



Podemos observar que, a excepción de San Pedro del Vaticano, que aparece abajo a la derecha, y algunas iglesias salpicadas aquí y allí, Massaio se preocupa sobre todo por los monumentos antiguos: los acueductos, el Coliseo, el Panteón y las columnas de Trajano y Marco Aurelio. Su principal defecto es que no queda claro si lo que pretende es hacer un plano de la Roma antigua o bien uno de la Roma de mediados del *quattrocento*. No obstante, la precisión matemática conseguida por el método de Alberti, a pesar de lo rudimentario de los aparatos tecnológicos usados, se puede apreciar comparando el mapa con cualquiera de los actuales.

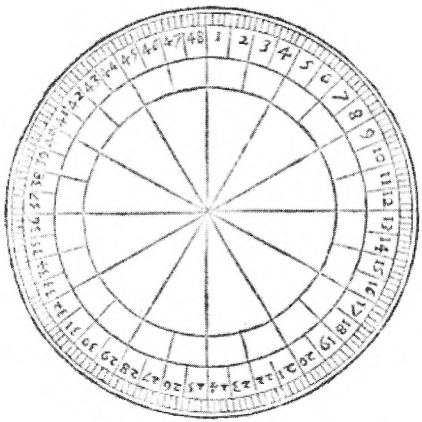
Unos años más tarde, en torno a 1450, el Duque de Ferrara, Borso de Este, le pidió que escribiera un libro contando los procedimientos matemáticos utilizados en la *Descriptio*; surgieron así los *Ludi matematici*. Extraeremos un fragmento de ellos en el que se explica cómo trazar un dibujo de un determinado lugar. Para ello, valiéndose de un instrumento que él mismo describe, levanta datos topográficos desde tres estaciones distintas y, usando la proporcionalidad de triángulos, traza el mapa del lugar.

El texto ha sido directamente traducido del italiano medieval respetando en la medida de lo posible el estilo albertiano:

«Deseo hablar ahora de cierto instrumento apto, como por vosotros mismos veréis, para estos asuntos, y más aún para los que usan el trabuco y similares

máquinas bélicas. Yo lo uso para cosas mucho más placenteras, como medir las dimensiones de un pueblo, o pintar un paisaje, como hice cuando retraté Roma. Por tanto, ahora os contaré cómo se hace.

»Tomad las medidas de un sitio o el ámbito de un terreno y de sus calles y cosas de este modo. Haced un círculo sobre una tabla de por lo menos un brazo de anchura [Un brazo florentino equivale a 58,40 cm] y dividid este círculo en tantas partes todo alrededor como deseéis, que cuantas más sean, mejor será, siempre que se distingan bien y no sean confusas. Yo suelo dividirlo en 12 partes iguales, trazando diámetros de un lado al otro del círculo. Después, el limbo, es decir el contorno, lo divido todo en cuarenta y ocho partes, y a estas cuarenta y ocho partes las llamo grados. Divido luego estos grados cada uno en cuatro partes, llamémoslas minutos. A cada grado le escribo su número correspondiente como lo he dibujado aquí.



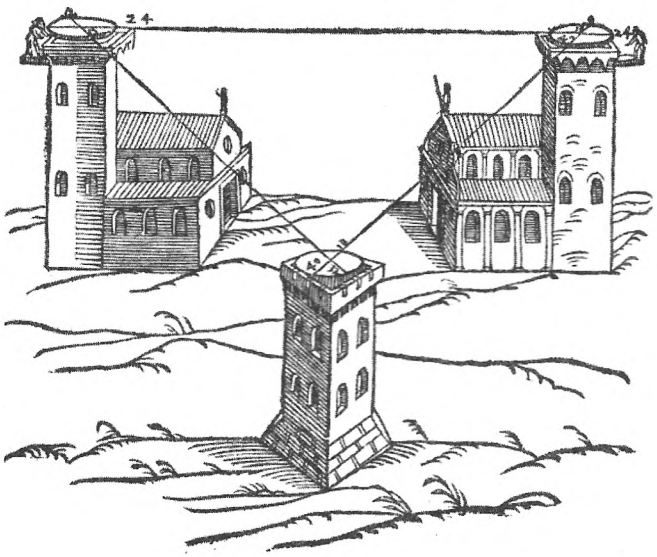
Goniómetro de Alberti, extraído de una edición de los Ludi matematici.

»Cuando queráis hacer vuestra pintura, pondréis este instrumento en un lugar plano y alto desde donde podáis ver muchos puntos del terreno que deseáis retratar, como campanarios, torres y similares. Sujetad un hilo con un plomito, separándoos de este instrumento dos brazos y mirad una a una las cosas notables, de modo que vuestra mirada, pasando a la vez por el hilo emplomado y por en medio del centro del círculo, se dirija a la torre a la que miráis. Y, según el número que la mirada atravesará en el extremo del círculo en la dirección hacia la que miráis, así tomaréis memoria sobre un trozo de papel que habréis llevado a tal efecto.

»Verbigracia: imaginad que estáis en la torre de un castillo con vuestro instrumento y miráis a la puerta allí arriba y veis que vuestra mirada pasa por los veinte grados donde se encuentra la división de dos minutos. Escribiréis sobre vuestro papel: puerta de arriba, veinte grados y dos minutos. Y no mováis el instrumento sino que debéis moveros vosotros y mirar los ángulos. Quizá vuestra mirada pasará sobre el punto donde está escrito en el instrumento veinticuatro grados y ningún minuto; pues escribid ángulo veinticuatro. Y de este modo todos los otros, sin mover el instrumento. Hecho esto, iréis a otro sitio parecido, que estuviera visible desde este primero, y pondréis allí vuestro instrumento y lo situaréis de modo que esté sobre la línea misma correspondiente al número a través del cual lo veíais antes rectamente sobre vuestro instrumento. Es decir, que si desde esa primera torre una nave tuviese que navegar hacia aquí, debiese venir por aquel viento señalado 20,2 o 24,0 grados o lo que fuere. Y aquí haréis lo mismo que hicisteis en el castillo: recorreréis el contorno y guardaréis memoria de todo sobre otro papelito.

»Ítem más, iréis a un tercer lugar y también allí haréis lo mismo, anotando todo y guardando de todo memoria. Os pongo un dibujo del modo de proceder que debéis observar, el cual dibujo servirá de demostración de lo que he dicho.

La linea ſtà nel ſuo numero, & lo inſtrumento è poſto ſu quella linea, cioè 24.



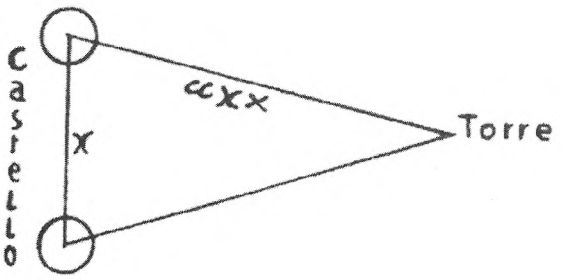
»A continuación haréis así. Comenzaréis sobre vuestra tabla, donde queréis hacer el dibujo, haciendo un punto donde os parezca adecuado para la figura que deseáis hacer de todo el dibujo, y éste será el sitio de uno de los lugares donde anotasteis las cosas. Verbigracia: sea el castillo; escribid encima del punto una vez hecho: El Castillo. Y sobre este punto poned un pequeño instrumento de papel de medio palmo de anchura, dividido y hecho igual al grande con el que anotasteis las cosas y colocadlo de manera que su centro sea exactamente el tal punto. Desde aquí, trazad líneas según lo que hayáis escrito en vuestra memoria. De modo similar haced un segundo punto sobre la línea anterior hecha sobre la tabla correspondiente a uno de los otros dos lugares desde donde mirasteis las cosas, y sobre este segundo punto poned un instrumento similar de papel, y situadlo de modo que la línea se corresponda con el número que apuntasteis al lado de Castillo en vuestra memoria. Es decir, que uno y otro instrumento estén con respecto a la línea del modo en que uno al otro se veían. Trazad desde aquí todas las líneas por los números anotados por vosotros en vuestro papel. Y donde la línea del primer instrumento que señala verbigracia Santo Domingo se corta con la línea del segundo instrumento que también señale a Santo Domingo, haced un punto y escribid encima Santo Domingo. Y haced lo mismo con todas las demás cosas. Si ocurriese que estas dos líneas no se cortasen bien, de modo que sea muy claro su ángulo, poned otro instrumento pequeño similar en el tercer punto, desde el que anotasteis las cosas, y disponedlo igual que los otros, de modo que entre ellos respondan a sus líneas respectivas, y así todo se os manifestará plenamente. Explicar estas cosas con palabras no es fácil, pero la cosa en sí no es difícil, es muy placentera, y es útil para muchas cosas, como por vosotros mismos podréis comprobar.

»Haciendo esto di con la forma de localizar cierto acueducto antiguo, del cual se veían ciertos indicios y su recorrido se perdía en el monte. Por este camino podréis anotar todos los viajes y las envolturas de cualquier laberinto y cualquier desierto sin el peligro de cometer errores.

»Y de este modo podréis medir las distancias muy precisamente. Si queréis, por ejemplo, medir cuánto hay de la Torre del Borrico hasta el Castillo, así haremos.

»Poned vuestro instrumento dispuesto como hemos dicho más arriba y anotad el número por el que se vea la dicha Torre, y después mirad otro

punto distante de este anterior sobre el que estabais. Verbigracia, estáis en uno de los extremos del corredor del Castillo; poned un cierto objeto en el otro extremo y miradlo; anotad sus grados y minutos. Después poned el instrumento al otro lado del pasillo, y situadlo como hemos dicho, haciendo que la línea discurra derecha por el corredor, y desde aquí mirad hacia la dicha Torre y anotad sus números. Hecho esto, disponed en la habitación, o en otro lugar, en plano, un espacio y como si quisieseis hacer un dibujo, como se indicó más arriba, haced vuestros puntos y trazad las líneas con el instrumento, tal y como arriba dije, y donde se corten señaladlo de esta forma:



»Afirmo que tantas veces como el espacio que hay desde uno de estos puntos dibujados al otro quepa en la línea que va de ese punto al punto corte, así de veces cabe el espacio de uno de los extremos del corredor al otro en el espacio que separa ese punto de la Torre del Borrico. Miradlo marcado en la figura con los números [romanos]. Si de un punto a otro hay diez pulgadas, y desde este punto hasta allí donde se cortan las líneas hay doscientos veinte, diréis que desde aquel punto del corredor hasta la Torre del Borrico hay veintidós veces lo que hay de un extremo del pasillo al otro. Y esto os servirá para pequeñas distancias pero para distancias mayores se necesita mayor instrumental».

La horquilla, la línea ígnea y la línea oval de Durero

Entre los muchos trazados geométricos que aborda Durero en su *Underweysung der messung*, se encuentra el trazado de las secciones cónicas. El libro arranca del siguiente modo:

«El más sagaz de todos los hombres, Euclides, sentó los fundamentos de la geometría. Quien los conozca bien no necesitará de nada de lo que sigue, que he escrito sólo para los jóvenes y para aquellos que no han sido enseñados adecuadamente».

Los artistas, de acuerdo con la concepción de Durero y de muchos otros pintores de la época, debían aprender por igual las técnicas de dibujo a mano alzada y la geometría, y ser igual de hábiles en el manejo de pinceles que en el de la regla y el compás. Durero cree que un artista debe saber «medir»; por eso titula su libro *Instrucciones para la medida.*

Durero aprendió matemáticas y perspectiva en sus viajes a Italia y, de vuelta a su Nuremberg natal, tuvo acceso, a través de las bibliotecas de sus amigos humanistas, a textos matemáticos clásicos y otros modernos, que empezaban a ser dados a la imprenta, convertida en una de las industrias más florecientes de la ciudad.

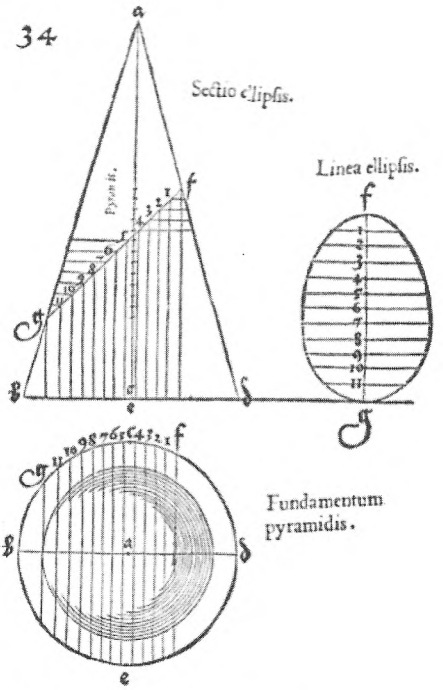
Estudió sin duda a Euclides y sus *Elementos*, pero también a Piero della Francesca y a Leon Battista Alberti. En su *Underweysung* hace un esfuerzo por ofrecer los métodos geométricos y presentarlos de una manera que facilite su aplicabilidad por parte de los artistas y artesanos. No centra su interés en la demostración ni en la teoría de la geometría pura. Los temas que aborda son la perspectiva lineal, los polígonos regulares, los poliedros y los sólidos platónicos, cuyo trazado narra con ese enfoque práctico, a la vez preciso y útil. Aborda también aplicaciones de la geometría al dibujo de tipos de imprenta y algunas otras sobre ingeniería o arquitectura.

Para hacernos una idea de su estilo y de la manera rigurosa y precisa en la que se expresa seguiremos sus palabras en la explicación de un método para el dibujo de la elipse:

«Los matemáticos de la Antigüedad enseñaron que hay tres formas de hacer una sección al cono. Las tres son distintas entre sí y no resultan de forma circular como lo es la base del cono. [...] Cada una de las tres secciones constituye una línea particular, que yo enseñaré a trazar. A la primera de estas secciones, que corta el cono en sentido oblicuo sin cortar la base, los eruditos la llaman elipse. [...] La segunda sección se traza cortando por una línea paralela al *ab* lado del cono [identifica el cono con su alzado] o al otro [es decir, a una generatriz] y los eruditos la llaman parábola. La tercera es una línea vertical, paralela a la línea que une el centro de la base del cono con el vértice y los eruditos la llaman hipérbola. No conozco si en alemán tienen nombre estas

tres líneas, pero yo se los daré para poderlas distinguir. A la elipse la llamaré línea oval, por ser casi igual al contorno de un huevo. A la parábola la denominaré línea ígnea, ya que si se hace un espejo con esa forma, se produce fuego. Por último, a la hipérbola la llamaré línea en horquilla.

»Si quiero dibujar la línea oval o elipse, empezaré dibujando el [alzado del] cono, señalando en él la sección que quiero efectuar; debajo dibujaré la planta. Luego procedo de la siguiente manera:



Dibujo que acompaña al texto de Durero.

»Sea *a* el vértice del cono y *bd* el diámetro de la base. Desde *a* trazo hacia abajo una línea vertical. Denomino *f*, arriba, y *g*, abajo, los extremos de la sección. Divido después esta sección *fg* con 11 puntos en 12 partes y las numero, comenzando desde el extremo *f*. Debajo de este [alzado del] cono he dibujado su planta. Llamo *a* al centro y *bcde* a su circunferencia, como se hizo en el alzado. Desde todas las divisiones bajamos líneas a la planta, que corresponden a los puntos *f*, *g* y los intermedios que hemos numerado 1, 2, 3, etc. Designo con las mismas letras y números los puntos de corte de estas líneas con la circunferencia de la base.

»Una vez hecho esto tomo el compás y apoyo una de sus puntas sobre el [alzado del] cono, en la línea vertical *ae* y a la altura de la división 1, y la otra punta la coloco a la misma altura sobre [la generatriz] *ad*. Llevo esa abertura del compás a la planta y, poniendo una de las puntas en el centro *a* y la otra sobre el trazado de la línea 1, dibujo un arco en dirección a *d* hasta encontrar de nuevo la línea 1. [Repite el proceso para cada una de las líneas de la 2 a la 11].

»A continuación, usaré la planta como referencia y trazaré la línea de la elipse del siguiente modo.

»Trazo en vertical una línea igual a la sección *fg*, manteniendo en ella los 11 puntos que la dividen en 12 partes. Trazo 11 líneas horizontales paralelas, una pasando por cada división de las anteriores. A continuación, sobre el segmento 1 de la planta, tomo la medida entre los dos puntos en que la corta el arco que tracé con el compás y la traslado, y llevándola al dibujo de la sección *fg*, la tomo sobre la línea 1 [centrándola] de ambos lados. Hago lo mismo con el resto de los segmentos numerados. Una vez hecho esto, trazo la línea oval o elipse uniendo punto a punto, como he hecho aquí».

El trazado de la «línea oval» es un buen ejemplo de este sentido práctico, pero a la vez preciso, que caracteriza las *Instrucciones para la medida* de Durero. Con él acabamos este capítulo dedicado a las obras matemáticas de algunos artistas del Renacimiento.

Capítulo 3

El tiempo, el espacio y la luz

El *Decamerón* de Giovanni Boccaccio es una de las obras más importantes de la literatura europea del siglo XIV y, probablemente, una de las que más han influido en el desarrollo posterior de distintas literaturas y no sólo de la italiana.

En el *Decamerón* se cuentan las diez jornadas (de ahí su nombre) que un grupo de jóvenes, siete mujeres y tres hombres, pasan fuera de la ciudad huyendo de la peste negra que asolaba esos días Florencia. Reunidos, hacen narraciones por turno que en muchas ocasiones son de tipo humorístico o bucólico-erótico, lo que le valió a la obra una fuerte censura en distintos momentos históricos.

La que cuenta la historia de *Nastagio degli Onesti* es una de las cien *novellas* que contiene esta obra. Nastagio es un burgués de la ciudad de Rávena que se vuelve muy rico tras la muerte de su padre y de su tío. Al poco tiempo se enamora de una joven, hija de Paolo Traversari. Tratando de atraerla empieza a derrochar su dinero organizando banquetes y fiestas en honor de la joven. Pero ella no le corresponde y, más aún, se divierte rechazándolo. Él, desesperado, alterna en sus pensamientos la idea de suicidarse, de convertir su amor en odio, o de tratar de olvidarla, pero nunca se decide por ninguna de las tres alternativas. Viendo que, debido a su sueño, Nastagio se está consumiendo física y económicamente, sus amigos y familiares intentan convencerlo de que abandone Rávena, poniendo tierra de por medio, para así intentar olvidar ese amor no correspondido. Terminan convenciéndolo y Nastagio deja la ciudad para trasladarse a la vecina Classe.

Un viernes de primavera, mientras pasea por un agradable paraje cercano al mar, en medio de un pinar, cuando el sol empieza a ponerse, Nastagio ve a una muchacha joven y bella que, desnuda, corre gritando y llorando perseguida por dos perros que cada vez que le dan alcance, la cosen a dentelladas, por lo que su piel sangra por distintos lugares. Tras los perros, un caballero vestido con una coraza y espada en mano, la amenaza de muerte. Nastagio trata de defender a la joven, pero el caballero se dirige hacia él y se presenta como Guido degli Anastagi, tras lo cual le cuenta una historia. Unos años atrás amaba locamente a la mujer que ahora perseguía, aunque ésta no quería corresponderle, lo que, con el paso del tiempo, hizo que él se suicidara. Cuando, más tarde, ella también murió, ambos fueron condenados a esta caza

infernal. «Por tanto —le dice el caballero—, yo no hago más que cumplir esa inefable condena. Cada viernes en ese paraje, la doncella debe ser perseguida hasta la muerte por los perros y por mí, para, a continuación, ver su cuerpo nuevamente recompuesto.» La condena debe durar un año por cada mes que duró su crueldad hacia el caballero. Nastagio, resignándose a la voluntad divina, decide no intervenir y contempla cómo el caballero da alcance a la dama y, tras abrir con la espada su cuerpo, da a las bestias sus vísceras como alimento. Al terminar, como por ensalmo, el cuerpo de la mujer, recompuesto, se alza del suelo y comienza de nuevo su huída, perseguida eternamente por perros, caballo y caballero hasta perderse, lejos ya de Nastagio.

Cavilando, éste decide aprovecharse de la escena que acababa de contemplar. Para ello, organiza un nuevo banquete en la pineda, que se celebra, obviamente, el siguiente viernes. Invita a sus parientes y amigos y a su amada con los padres de ella. Como él ya había previsto, a los postres se repite la escena del viernes anterior, con gran espanto de todos los asistentes. Cuando el cazador, recriminado por los presentes, tiene la oportunidad de contar de nuevo su historia y la condena a la que están sometidos los dos amates, la joven Traversari, viendo la similitud con su propia historia y recordando que siempre ha rechazado el amor que él siente hacia ella, ante el miedo a verse condenada a una pena parecida, decide ablandarse y acepta inmediatamente casarse con Nastagio, trasformando su anterior desprecio en verdadero amor. La boda se celebró el siguiente domingo y, en consecuencia, todas las muchachas de Rávena aprendieron a ser más gentiles con sus pretendientes. La historia no nos dice, sin embargo, si Nastagio y la joven fueron felices.

Hasta aquí la *novella* del *Decamerón* como la cuenta Boccaccio. Si nos fijamos, son dos historias en una: la de Nastagio y su joven amada de la familia de los Traversari, y la de Guido degli Anastagi y la muchacha condenada a ser asesinada todos los viernes. Como hemos visto, la segunda de estas historias influye decisivamente en la primera, en la narración de Boccaccio.

Pues aún hay una tercera historia que tiene relación con las anteriores. En 1483, Lorenzo de Medici propició la boda de dos ricas familias florentinas: el joven Gianozzo Pucci y Lucrezia Bini. No sabemos cuál sería el interés por esta boda de la joven Lucrezia que, como veremos, probablemente no debía de estar muy enamorada. Lo que sí está claro es que la boda suponía una importante alianza económica entre estas dos familias que, además, daba a los Medici estabilidad política en la convulsa Florencia de finales del siglo XV. Sean cuales fueren las circunstancias concretas, el caso es que Lorenzo de Medici quiso contribuir con un regalo a la felicidad de los novios e hizo un encargo al taller de Sandro Botticelli. Allí se pintaron

cuatro tablas que, por su forma y dimensiones, posiblemente sirvieron para decorar un arcón o la cama nupcial que Lorenzo regaló a la pareja. Hoy en día, desmembrados del mueble del que formaron parte, tres de ellos han recalado en el Museo del Prado de Madrid, mientras que el cuarto y último permanece en Florencia, todavía en la colección privada del Palacio Pucci. El tema de las cuatro tablas no es otro que la historia de Nastagio degli Onesti.

El tiempo en Botticelli

Sandro Botticelli se encontró de frente con un problema: en un cuadro se puede narrar un determinado momento, un instante. Nosotros, que conocemos el moderno lenguaje de la fotografía, usaríamos la palabra «instantánea». Como mucho, con una serie de cuadros, como había hecho Giotto en Asís, se podía apoyar la narración oral de un predicador que pretende contarnos un historia edificante. La tradición de usar dibujos para apoyar la narración oral de historias se extiende en el tiempo y llega hasta la España pícara del siglo XVI, con los romances de ciego, que perduran hasta el siglo XIX.

Si en el primer caso establecíamos la relación con la instantánea, en este último podríamos hablar de un fotorreportaje. Pero Botticelli se enfrentaba con la necesi-

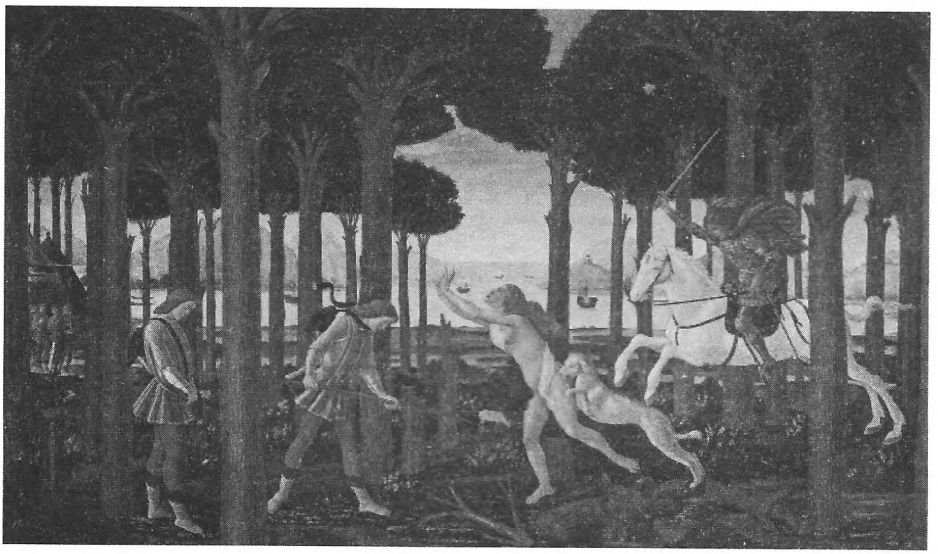
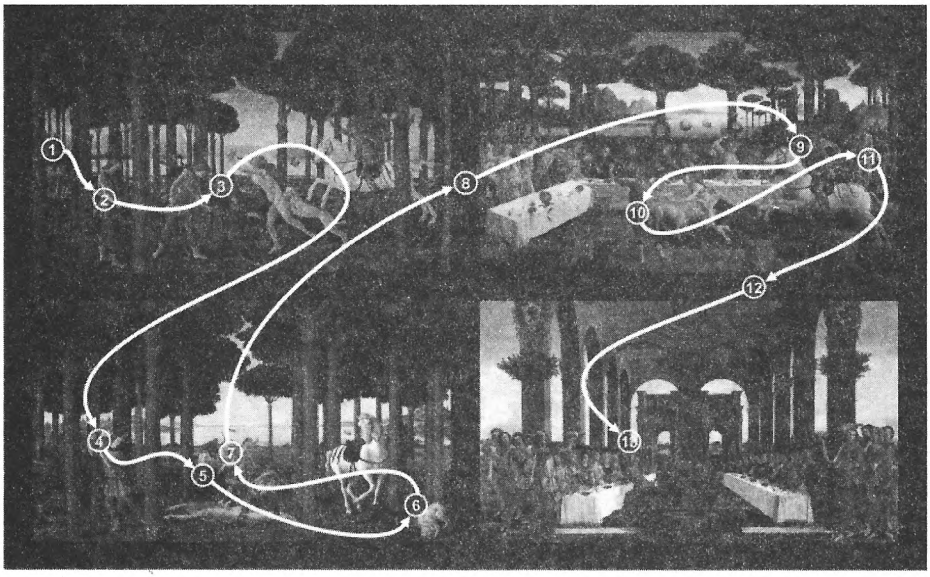


Tabla I de Nastagio degli Onesti, *en la que aparece en primer plano la muchacha perseguida por los perros y el caballero, ante la mirada de Nastagio. Museo del Prado, Madrid.*

dad narrativa de «pintar el tiempo». Necesitaba, realmente, imitar lo que hoy podría hacerse fácilmente con una película, pero usando los medios limitadísimos de cuatro tablas y su arte como pintor.

Botticelli no disponía de otros medios para narrar la historia de Nastagio, para contárnosla como si de una película se tratase, y para ello se valió de otros recursos. El más elemental era vestir a Nastagio siempre con las mismas ropas en los sucesivos momentos. Así, aunque aparezca varias veces en la misma tabla podremos saber que se trata de él y no de personajes distintos. Esta exigencia de la sintaxis narrativa se lleva hasta tal extremo que podemos llegar a pensar que no era sólo la reina Isabel de Castilla la que no se cambiaba de camisa, ya que el Nastagio pintado por Botticelli, pintor contemporáneo de Isabel, tampoco lo hacía nunca, ni para dar paseos por el bosque ni para ofrecer banquetes a sus invitados una semana más tarde, ni para casarse el domingo siguiente; su indumentaria no cambia en los diez días que dura la historia.



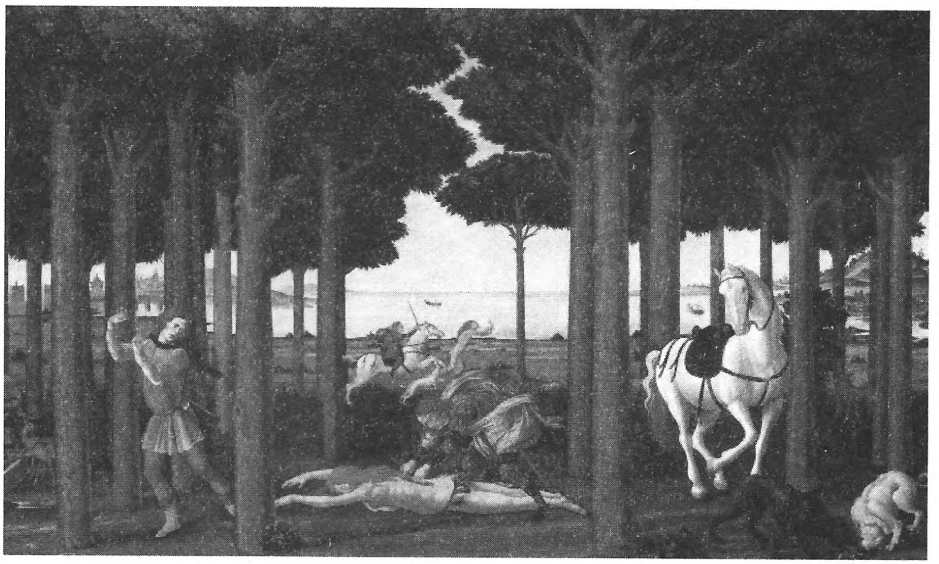
Secuencia temporal de las cuatro tablas de Nastagio degli Onesti *(foto: FMC).*

Así, en la primera tabla, la escena sucede en el bosque, al lado del mar. Nastagio, delante de una tienda, conversa con unos amigos (1). Poco después, nostálgico, recordando a su amada, pasea cabizbajo por entre los pinos (2), vestido con unas calzas rojas y un jubón de malla bajo el que asoma una camisa blanca. Sobre el jubón

lleva un sayo corto de color azul, fruncido en la cintura mediante un cíngulo dorado y anudado. Completan su indumentaria unos elegantes botines de cordobán o de tafilete con vuelta en la parte superior, que por fuera son del color natural del cuero y, por dentro, están teñidos en ocre, así como un sombrero negro adornado con una larga cinta del mismo color y una pluma blanca. El sombrero no lo lleva calado sino que pende a la espalda, sujeto con las manos por la cinta. Toda la indumentaria de Nastagio se repetirá en las cuatro tablas, con excepción del sombrero, que sólo aparece en las dos primeras.

Prosiguiendo la lectura de izquierda a derecha de esta primera tabla, volvemos a ver a Nastagio. Ante él ha aparecido la joven perseguida por los perros que la muerden y, detrás, el caballero con gesto de fiereza (3). Nastagio, con una rama que acaba de recoger del suelo, trata de espantar a los perros para que suelten a su presa. La luz, clara al fondo y más oscura en el primer plano, contribuye a dar profundidad en un espacio abierto en el que resulta más difícil dar la referencia espacial mediante el único recurso de la perspectiva. Los árboles entrecortan la escena, contribuyendo también a dar profundidad y relieve a la tabla.

En la segunda tabla Nastagio aparece sólo una vez (4). Con gesto asustado, ve cómo el caballero, que acaba de matar a la dama, extrae las vísceras por la brecha que ha abierto en su espalda (5) y las arroja a los perros que, a la derecha de la tabla, las



En la segunda tabla el caballero extrae las vísceras de la joven y se las echa a los perros. Nastagio contempla la escena despavorido. Museo del Prado.

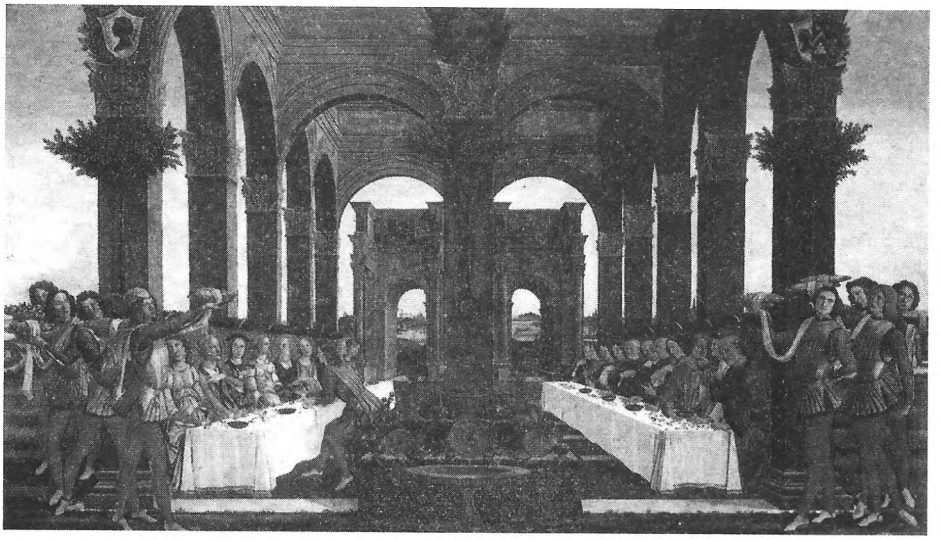
devoran (6). Los personajes repetidos en esta tabla son la joven y el caballero. En el primer plano éste aparece descabalgado e inclinado sobre el cadáver. Al fondo, el jinete, nuevamente a caballo, vuelve a perseguir a la joven desnuda a través del bosque (7). Esta escena es casi idéntica en su disposición a la que aparecía en la primera tabla como escena principal. Aquí sucede más al fondo, para indicarnos que, cronológicamente, ocurre más tarde, y está orientada de izquierda a derecha, para señalar que la historia es cíclica y repetitiva.

Pasada una semana (8), Nastagio ha reunido a sus invitados en torno a una mesa en el bosque. La preside, en el centro, el escudo de los Medici, y bajo él, altos dignatarios, probablemente el propio Lorenzo de Medici. A la izquierda, bajo el escudo de los Bini, se encuentran las mujeres de la familia de Lucrezia; la familia y amigos de Nastagio se sitúan a la derecha, bajo el escudo de los Pucci. En medio del banquete irrumpe la joven perseguida por los perros, que la muerden, y el jinete, montado en su caballo y blandiendo la espada (9). El sobresalto hace que la mesa de las damas se vuelque y se caigan las viandas al suelo. Nastagio, teatralmente situado en el centro, pide calma (10) y cuenta a los presentes la historia del caballero suicida y su despreciativa dama. Cuando la joven Lucrezia se arrepiente de su actitud hacia Nastagio y acepta casarse con él, éste acuerda los extremos de la boda con la madre de la joven en una escena que tiene lugar al fondo y a la derecha de la tabla (11).

En la tercera tabla, la muchacha, los perros y el caballero, en plena persecución, irrumpen en el banquete. Museo del Prado.

Pasan dos días (12) y la cuarta tabla nos presenta el banquete de bodas, del que nada dice Boccaccio en su *Decamerón*. Nuevamente bajo los escudos de los Bini, los Medici y los Pucci, en el interior de una arquitectura llena de vanos, que más que edificio parece un decorado, vemos dos hileras de camareros que llevan bandejas y manjares desfilando simétricamente desde la izquierda y la derecha de la composición.

La simetría central casi absoluta de los personajes, con las mujeres a la izquierda y los hombres a la derecha, subrayada por la arquitectura, sólo queda rota precisamente por Nastagio, que se sienta delante de su amada, que por fin sólo tiene ojos para él (13).



La cuarta y última tabla de Nastagio degli Onesti *se encuentra en Florencia y pertenece a una colección particular. La escena ilustra el banquete de bodas tras el enlace entre Nastagio y Lucrezia.*

En estos trece pasos, distribuidos en unas pocas escenas, a lo largo de las cuatro tablas, Botticelli logra contarnos la historia de Nastagio degli Onesti como nos la contaba Boccaccio en su *novella*, pero esta vez siguiendo las órdenes de Lorenzo de Medici, enmarcando la historia en el contexto de la boda entre Gianozzo Pucci y Lucrezia Bini, que él quería propiciar. Logra, por tanto, atrapar el escurridizo tiempo en estos cuatro cuadros de una manera dinámica, como una línea que zigzaguea a través de las pinturas.

GRÁFICOS DE CUENTO

El tiempo, como cuarta dimensión, resulta difícil de representar. La narración es, sin duda, el primer acercamiento a una descripción en la que el tiempo es relevante. Tiene la ventaja fundamental, sobre todo si la narración es oral, de que a su vez, para contar una historia se necesita tiempo. Ponemos así en relación casi funcional, en el sentido matemático, dos tiempos, el de la historia narrada y el de la narración. Ambos transcurren avanzando hacia el futuro: el de la historia narrada, desde principio hasta el final, en la secuencia de los hechos que se cuentan; el de la narración, desde el «Érase una vez...» hasta el «colorín colorado» con el que el narrador la acaba.

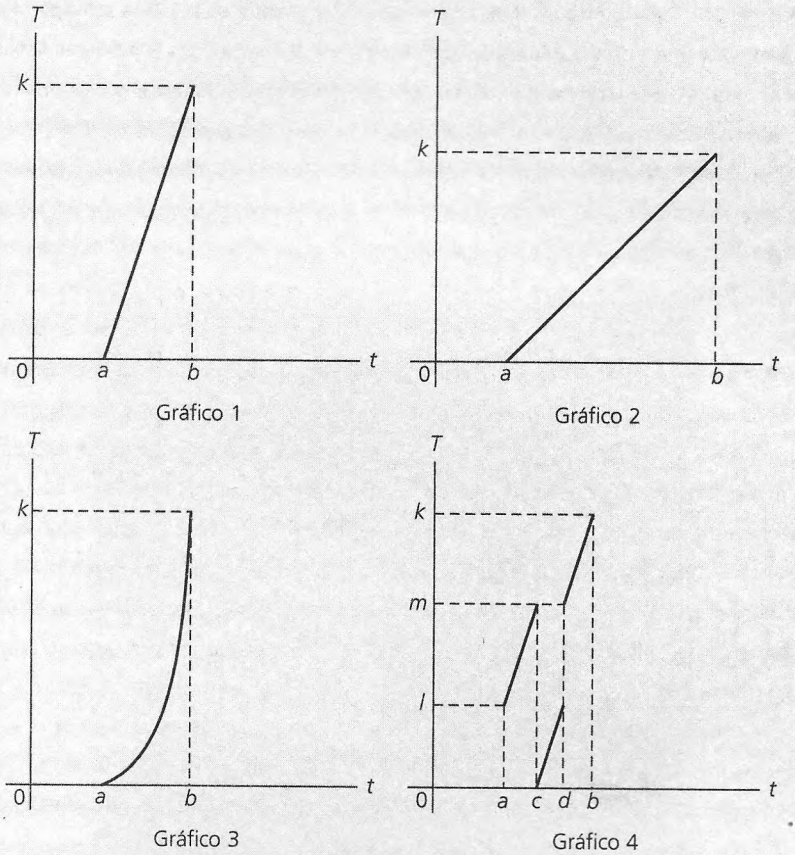
Pero en la relación de ambos, como sucede en las funciones, el tiempo de la narración no se corresponde exactamente con el de lo narrado. El gráfico 1 corresponde a la narración habitual: una historia que duró realmente *k* se narra en el intervalo temporal *(a, b)*, más breve.

Sólo en contadas ocasiones ambos tiempos coinciden. En el gráfico 2, tiempo de narración y tiempo narrado duran lo mismo, como en *La tempestad* de Shakespeare, que nos cuenta una historia que sucede a lo largo de seis horas y se cuenta en una representación teatral que dura seis horas. La novela del escritor español Miguel Delibes *Cinco horas con Mario*, es otro ejemplo. Nos narra el monólogo de una viuda que vela el cadáver de su marido durante cinco horas. La lectura de esta novela dura aproximadamente también cinco horas. Pero estas historias son las excepciones. En una película, lo normal es que nos encontremos con una gran variedad de formas de tratar el tiempo: acortamientos, supresiones o *flashbacks* son recursos para manipular el tiempo en el lenguaje cinematográfico, y tan acostumbrados estamos a la sintaxis de ese lenguaje que la mayor parte de estas figuras nos pasan casi desapercibidas. No obstante, no es extraño oír hablar de que una determinada película resulta «lenta» o que el género policíaco, con sus persecuciones y sus tiroteos, tiene un ritmo «trepidante». Ambos adjetivos hacen referencia al uso del tiempo en las películas. El gráfico 3 corresponde a una película de suspense; durante la primera mitad suceden pocas cosas pero el ritmo se acelera al acercarse el desenlace. Por último, en el gráfico 4 se representa un *flashback*. La narración empieza a la mitad de la historia, en el punto *l*. Más adelante, al llegar al punto *m*, la secuencia de la narración se interrumpe, dando un salto atrás; se nos narra el prin-

El espacio. La *Pala de Brera*

El 18 de junio de 1472, las tropas de Lorenzo de Medici, guiadas por el *condottiero* Federico de Montefeltro, conde de Urbino —dos años más tarde sería nombrado duque—, tomaron la ciudad de Volterra. Ese mismo año había nacido el primer hijo varón y futuro sucesor de los Montefeltro, Guidobaldo. Pero 1472 fue también un año

cipio de la historia. Cuando se alcanza de nuevo el punto *l*, enlazando con lo que se nos contó al principio, la narración se reanuda en *m*, donde había quedado interrumpida.



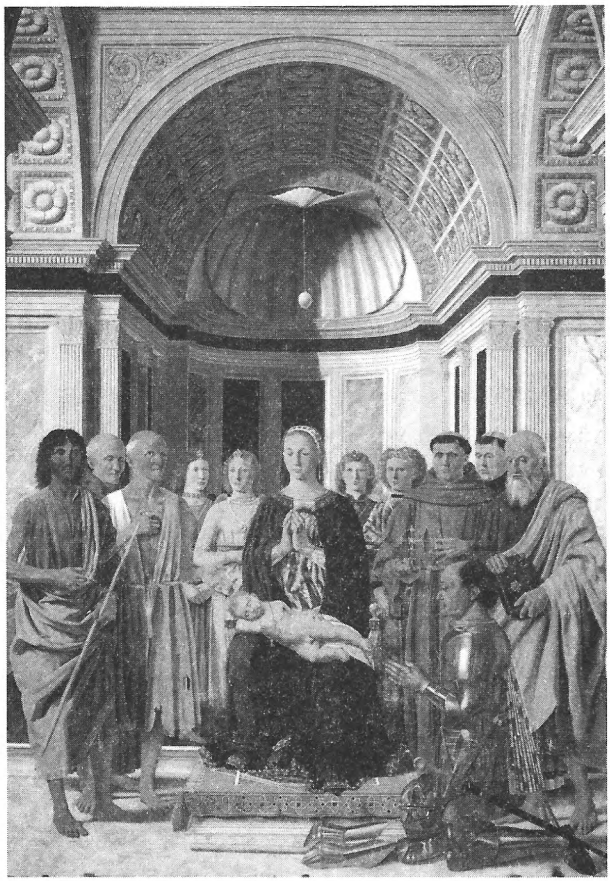
Cuatro relaciones funcionales entre el tiempo de la narración (t) *y el tiempo de lo narrado* (T) *(fuente: FMC).*

de desgracias: a los pocos meses del parto murió su inteligente mujer, Battista Sforza, a la que encargaba el gobierno de Urbino durante sus obligadas y largas ausencias como *condottiero* al servicio del papado, de los florentinos, del rey de Nápoles, o de quien le pagara adecuadamente y en contra de unos u otros, según la ocasión.

Bajo su mandato, Urbino se convirtió en una de las ciudades más importantes para el arte, del que Federico siempre fue mecenas. Por su corte pasaron, entre otros,

los pintores Piero della Francesca, el español Pedro Berruguete y el flamenco Justo de Gante, y arquitectos como Francesco di Giorgio Martini y Luciano Laurana.

Probablemente para celebrar la victoria en la batalla de Volterra y el nacimiento de su hijo Guidobaldo, Federico encargó a Piero della Francesca la llamada *Pala de Brera*, también llamada *Pala Montefeltro* o *Sacra conversación*. La palabra *pala* en italiano significa «retablo», es decir, cuadro de altar. Es esta pintura, por tanto, una tabla pensada para ser colgada sobre un altar en una iglesia, tal vez sobre una *predela*, es decir, una serie de pinturas más pequeñas en la parte inferior, que no se conservan. Parece ser que en un primer momento estaba destinada a la iglesia de San Donato degli Osservanti, donde fue enterrado Federico, y posteriomente fue trasladada a la iglesia de San Bernardino, concebida como mausoleo para los Montefeltro, una vez que



Pala de Brera *(1472). Esta obra de Piero della Francesca se conserva en la Pinacoteca de Brera, Milán.*

ésta fue acabada. El nombre de *Pala de Brera* se debe a su ubicación actual, en la Pinacoteca de Brera, Milán, adonde fue a parar, procedente de Urbino, tras las requisiciones napoleónicas, que dirigió el militar y matemático francés Gaspard Monge entre 1796 y 1798.

En el cuadro se observa un espacio arquitectónico de estilo clásico, representado en perspectiva cónica central, casi absolutamente simétrico en su disposición. Destaca, al fondo, lo que parece ser el ábside de una iglesia, que en un principio diríamos que es de planta semicircular. Los arcos de los lados nos hacen pensar en una planta en cruz, con dos naves perpendiculares. El ábside se cubre con una bóveda de cañón decorada con casetones. La bóveda termina en un cascarón a cuarto de esfera, cubierto en su interior por una concha de vieira gigante, desde la que pende, sostenido por una cadena dorada, un huevo. También aparentemente en semicírculo se disponen nueve personajes agrupados que rodean a la Virgen. Ésta, sentada en un trono y con las manos juntas, sostiene sobre el regazo al Niño, que duerme relajadamente.

La composición de los personajes resalta la simetría de la arquitectura y la subraya: la Virgen junta las manos y mira frontalmente al espectador, resaltando el eje vertical. Los restantes personajes se reagrupan en dos tríos de santos y otras dos parejas de ángeles, dispuestos también de manera simétrica con respecto al eje central. La simetría sólo se rompe, de manera rotunda, en la disposición del donante, arrodillado a la derecha en el primer plano. Se trata de Federico de Montefeltro, duque de Urbino, personaje controvertido, apasionado y apasionante de la Italia del *quattrocento,* vestido con una armadura de gala y, como en todos sus retratos, visto de perfil, ya que había perdido el ojo derecho y parte del entrecejo en un torneo. La asimetría en la disposición de Federico resalta, por ausencia, la reciente muerte de su mujer Battista Sforza, pocos meses después del nacimiento muy esperado de su primer hijo varón, Guidobaldo. La crítica no se pone de acuerdo en la datación del cuadro, aunque la mayoría de los autores lo sitúan entre 1472, año del nacimiento de Guidobaldo, y 1474.

Los santos son, de izquierda a derecha, San Juan Bautista, patrono de Battista Sforza, San Jerónimo y San Bernardino de Siena, de la orden franciscana, canonizado en 1450; a la derecha están San Francisco, mostrando sus estigmas, San Pedro Mártir de la orden dominicana, con la herida en el cráneo que le causó su asesino, y San Juan Evangelista, con su evangelio en la mano. Sabemos que el rostro de uno de los santos retrata a un amigo de Piero; se trata de fra Luca Pacioli. Los rostros de los ángeles, al contrario que los de los santos, resultan mucho menos realistas: probablemente era más difícil encontrar caras de amigos a los que retratar como ánge-

PIERO MATEMÁTICO

De la vida de Piero della Francesca se sabe poco. Vasari en sus *Vite* dice de él:

> «Piero estudió matemáticas en su juventud, y aunque desde los quince años se había encaminado a la pintura, nunca abandonó el estudio de esta ciencia. [...] Fue Piero un grandísimo estudioso del arte, se ejercitó mucho en la perspectiva, y alcanzó un altísimo conocimiento de Euclides. Comprendió mejor que todos los demás geómetras el trazado de los giros de los cuerpos regulares, y las mejores explicaciones que sobre estos asuntos existen provienen de su pluma».

Posible autorretrato de Piero della Francesca. Detalle de la Resurrección. *Sansepolcro, Museo Civico.*

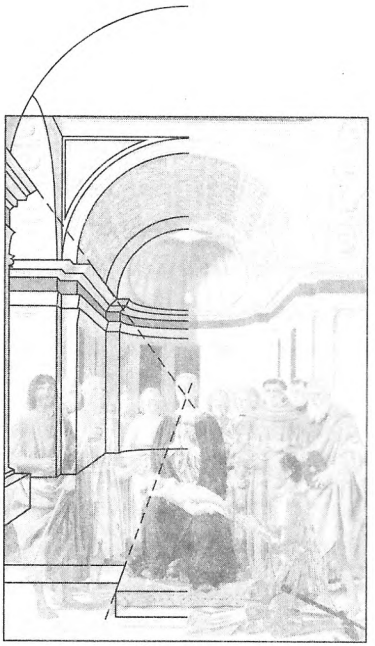
Piero nació en el Borgo Sansepolcro (Toscana), en 1416, en el seno de una familia relativamente acomodada; su padre fue dos veces concejal de la población. Como era habitual entre los hijos de los comerciantes, Piero debió de acudir a una escuela de ábaco, donde aprendería rudimentos de aritmética, geometría y un poco de álgebra y contabilidad. Sus estudios como pintor parece que empezaron como aprendiz en algún taller de su localidad natal, hasta que sus capacidades personales superaron el estrecho marco geográfico de su entorno y tuvo que viajar a Florencia y a otras cortes italianas renacentistas. Fue también a Roma, donde trabajó al servicio del Papa Pío II, pero sus frescos en las estancias vaticanas fueron destruidos poco más tarde, durante el pontificado de Julio II, para ser sustituidos por los de Rafael. Su obra artística fue poco conocida y estudiada hasta prácticamente el siglo XX; en la década de 1990 se restauraron sus magníficos frescos del *Ciclo de la Vera Cruz*, que se encuentran en la basílica de San Francisco, en Arezzo. Fue maestro y amigo de Luca Pacioli, también natural de Sansepolcro, al que retrató en la *Pala de Brera*, en el papel de San Pedro Mártir de Verona. En sus últimos años, con la vista muy deteriorada, redactó los tres libros matemáticos que han llegado hasta nuestros días, de los que ya se habló en los capítulos anteriores, aunque Vasari afirma que escribió muchos otros. Como vemos, Piero, además de un pintor excelente, fue un matemático de cierta altura en el contexto de su época. Además, sin esta consideración no se podría entender la obra artística de Piero della Francesca en su conjunto, ni la *Pala de Brera* en particular.

les y Piero los creó de su propia imaginación, vistiéndolos con telas lujosas, decoradas con joyas variadas.

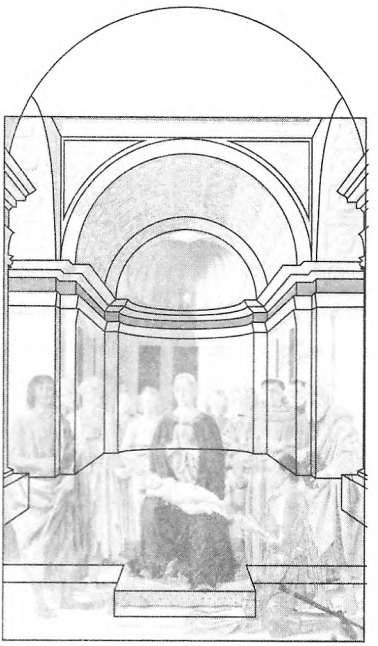
Simbólicamente el cuadro establece un paralelismo entre la arquitectura representada y los personajes. Así, la Virgen, en el centro, se identifica con el edificio que simbólicamente representa la Iglesia, como comunión de los fieles. Además, las cabezas de los santos están dispuestas en correspondencia con los pilares corintios acanalados del edificio, y los ángeles, con los paneles de mármol que decoran el ábside, de los cuales, el central, de pórfido, es el único que vemos de frente y se sitúa exactamente detrás de la Virgen.

Por último está la concha y, sobre todo, el huevo, que, en el plano de la imagen, pende sobre la cabeza de la Virgen. Parece ser que no era excepcional en las iglesias colgar huevos de avestruz, objeto extraño que podía atraer la atención de los visitantes, símbolo, según algunos, de la virginidad y, según otros, de la Iglesia.

Miremos con ojos matemáticos y comencemos a analizar el espacio delimitado por la arquitectura que vemos en el cuadro. Aprovechándonos de la simetría haremos el trazado de la mitad izquierda, para luego duplicarlo de forma especular sobre la derecha. El resultado aproximado es el que se muestra en estas dos figuras:



Trazado de la arquitectura de la Pala de Brera, *con el punto de fuga (fuente: FMC).*



Compleción por simetría del trazado de la arquitectura (fuente: FMC).

Observando el proceso vemos que la simetría del edificio representado es total, con la excepción de una estrecha franja en el lado derecho, que en la figura anterior viene marcada por las líneas arquitectónicas que sobresalen del contorno del cuadro. Se sabe, a raíz de la restauración llevada a cabo en 1982, que las dimensiones del cuadro original fueron recortadas en todos sus lados, pero fundamentalmente en la parte inferior.

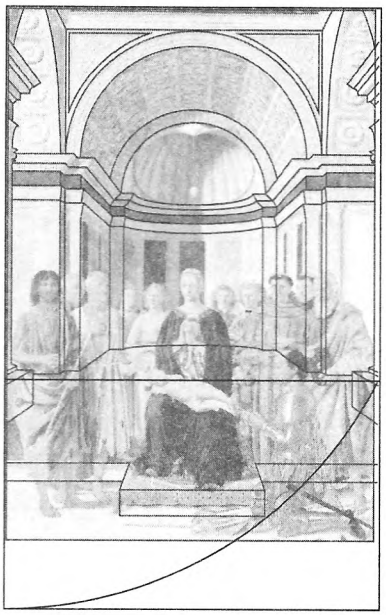
El soporte está formado en la actualidad por ocho tablas de madera dispuestas horizontalmente, pero parece demostrado que en su origen el número de tablas era nueve. Podemos suponer, sin por ello dar mucho margen al error, que el cuadro era, por tanto, de una altura aproximada de 9/8 de la actual.

Si observamos en detalle los arranques de los arcos que se ven sobre las molduras en los dos laterales, veremos que no pueden corresponder a la parte final de los que vemos en escorzo a ambos lados, sino que son los extremos de un nuevo arco, paralelo a los del ábside y al plano de la imagen, que hemos completado, por arriba, en las dos figuras anteriores. El recorte en los laterales y en la parte superior serían mucho menores y probablemente ocasionados sólo por el normal deterioro de los cantos sufrido en los traslados. El inferior, sin embargo, correspondería a una tabla entera.

La reconstrucción de las medidas originales. Una hipótesis

Las medidas actuales de la tabla son de 170 cm × 250 cm. Si añadimos en vertical 1/8 del total obtendríamos unas medidas de 170 cm × 281 cm, faltando por considerar los recortes laterales y superiores. Es razonable pensar, al menos en el terreno de la hipótesis, que al encargar la tabla al carpintero se le dieran unas medidas determinadas, y que probablemente una de las dos se expresase en un número entero de unidades de medida. Pues bien, la unidad de medida de longitud usada en esa época, como ya vimos, era el *braccio fiorentino*, que equivale a 58,36 cm.

Expresadas las medidas en brazos florentinos vemos que la anchura corresponde prácticamente a tres brazos florentinos (175,08 cm) y, multiplicando esta altura por el número áureo, Φ, obtendríamos 283,29 cm. La coincidencia numérica hace bastante plausible la hipótesis. En ese caso, el cuadro original sería un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de anchura, que habría sufrido un recorte de aproximadamente un octavo de su altura total en el lado inferior, un par de centímetros en el borde superior y otros recortes similares a ambos lados, algo mayor en el de la derecha, como se muestra en la figura siguiente:



Probables medidas originales de la Pala de Brera, *formando un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de anchura (175 cm x 283 cm). Según esta hipótesis, la tabla habría sido recortada en unos 33 cm de altura y 5 cm de anchura (fuente: FMC).*

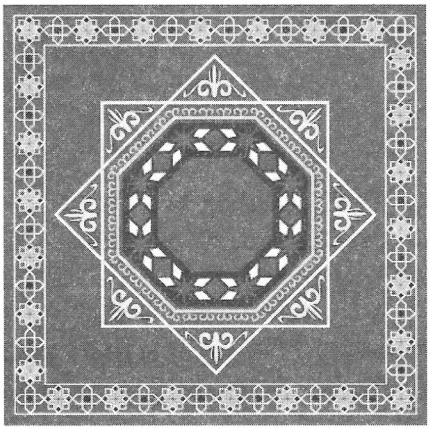
El espacio en la *pala* de Piero della Francesca

Los métodos de la perspectiva matemática descritos por Piero della Francesca en su *De prospectiva pingendi* alcanzan un grado altísimo de perfección en la concepción del espacio en el que se desarrolla la escena de la *Pala de Brera*. Intentaremos deshacer el proceso seguido por Piero y, de este modo, recomponer el espacio que vemos representado en el cuadro.

El proceso de representación en perspectiva no siempre puede invertirse, pues para ello es necesario valerse de ciertos recursos y disponer asimismo de algunos datos sobre lo que se encuentra representado. En primer lugar, es preciso localizar un cuadrado que se sitúe en un plano perpendicular al plano de la imagen, es decir, paralelo al suelo en un plano horizontal. Gracias a él podremos tomar medidas en los planos paralelos al del cuadro y determinar el punto de vista, es decir, la distancia a la que debe situarse el espectador para poder contemplar el cuadro de manera que la perspectiva resulte realista. Podremos también determinar la planta de la iglesia y la situación, en relación a ella, de los personajes representados.

La peana sobre la que está el sitial de la Virgen es un cuadrado

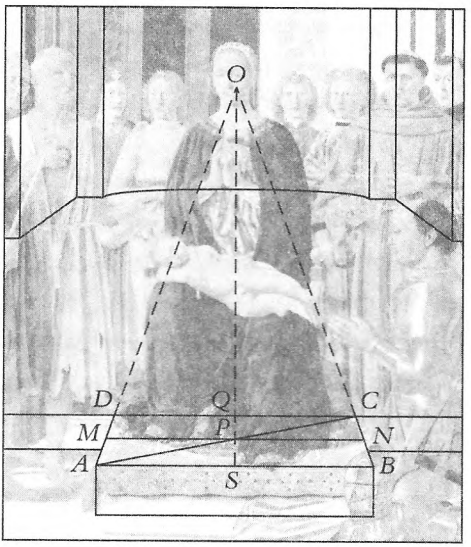
Observemos la plataforma en la que se encuentra el sitial de la Virgen. Esta cubierta por una alfombra que hemos reproducido abajo. Orlada por una cenefa estrellada, tiene dibujada una estrella de ocho puntas formada por dos cuadrados entrelazados que, entre sí, forman un ángulo de 45°. Si observamos la distancia de los vértices visibles de esa estrella en el lado izquierdo de la imagen y en el frontal, veremos que la separación de la cenefa es aparentemente la misma. Por simetría, hemos de suponer que la alfombra es cuadrada. Pero si nos fijamos, la cenefa cuelga por delante en su totalidad, mientras que a los lados, casi la mitad de ella se encuentra sobre la peana de la Virgen. Esto podría hacernos pensar que la plataforma es rectangular, pero, si analizamos que al estar unida al suelo del presbiterio, la alfombra no puede colgar por detrás, necesariamente y aun siendo ambas, peana y alfombra, cuadradas, el trozo que cuelga por delante ha de ser mayor que el que cuelga por los lados. Por tanto, podemos afirmar que la Virgen se encuentra sobre una peana cuadrada.



Reproducción de la alfombra bajo el sitial de la Virgen en la Pala de Brera *(fuente: FMC).*

El punto de fuga está sobre el rostro de la Virgen

Esto es fácilmente observable prolongando líneas perpendiculares al plano del dibujo y observando dónde se cortan. En la imagen de la pág. 89 puede verse cómo se ha calculado: hemos usado la línea de la cornisa que bordea el ábside —y reaparece en el lado izquierdo de la imagen—, y uno de los lados de la peana sobre la que está sentada la Virgen. En la figura siguiente se señala el punto de fuga con la letra *O*.



División, en cuatro cuadrados, de la peana sobre la que se sienta la Virgen (fuente: FMC).

El eje de simetría del cuadro divide la peana de la Virgen en dos partes iguales

Esto es obvio, ya que la arista frontal de la peana es paralela al plano del dibujo, y la línea que pasa por su punto medio y por el punto de fuga, es decir, el eje de simetría del cuadro, es la mediatriz de dicha arista.

Dividimos la peana en cuatro

Para ello, trazamos la diagonal y una paralela a la arista frontal por el punto de intersección de la diagonal y el eje de simetría. Es decir, sabiendo que *ABCD* es un cuadrado, trazamos la diagonal *AC*, que corta al eje central en *P* y, trazando una paralela a *AB* por *P*, obtenemos *MN*. Los cuadriláteros *ASPM*, *BNPS*, *CQPN* y *DMPQ* son todos cuadrados e iguales.

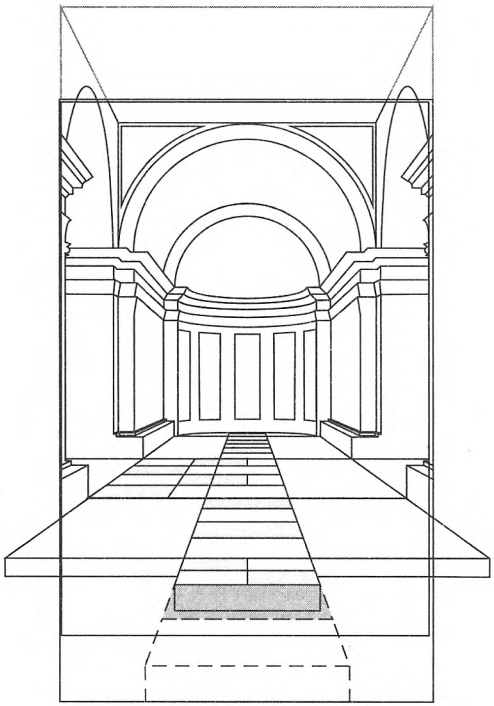
Ajedrezado del suelo

Usando ahora uno de estos cuadrados, por ejemplo *CQPN*, y trazando una diagonal, podemos formar una retícula de cuadrados sobre el suelo. El resultado del pro-

ceso lo podemos ver en la figura siguiente, en la que hemos cuadriculado el plano en el que se encuentra el presbiterio, usando como tesela el cuadrado de la peana de la Virgen.

Medición del espacio

El proceso anterior nos permite medir distancias en el espacio. Para usar como medida la peana de la Virgen observemos que San Juan Bautista, el primero de los santos por la izquierda, mide 3/2 del lado de dicha peana. Si atribuimos al santo una medida de 175 cm, entonces, el lado de la peana sería de 116,7 cm, que es aproximadamente dos brazos florentinos.



Cuadriculado del suelo en la Pala de Brera *(fuente: FMC).*

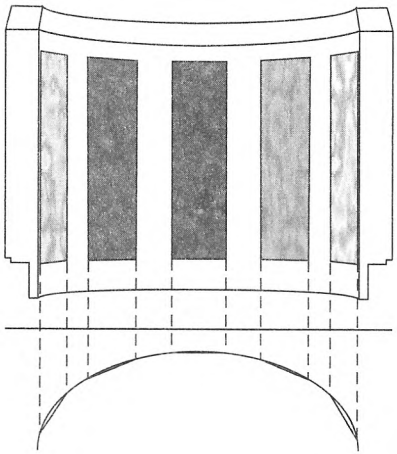
Las medidas totales, expresadas en brazos, serían aproximadamente las siguientes: la nave mide de anchura 8 brazos florentinos; la longitud visible la podemos dividir en varios tramos; el más cercano a nosotros mide, desde el borde del cuadro original hasta la línea que delimita el presbiterio, 6 brazos; el tramo comprendido entre la

línea del presbiterio y la más cercana del cruce de la nave y el crucero es un cuadrado de 8 brazos de lado, al igual que el cuadrado delimitado por el cruce de las naves; el espacio situado debajo de la bóveda de casetones mide 10 brazos de longitud por 8 de anchura, y el ábside en profundidad mediría algo más de 2 brazos. El espacio total resultaría así mucho más profundo de lo que aparenta y mucho menos monumental por su anchura y altura.

Las medidas resultan, por tanto, sorprendentes. Por ejemplo, la anchura de la nave mediría sólo 467 cm; el huevo estaría a una distancia horizontal de la cabeza de la Virgen de 26 brazos, es decir, unos 15 m. El diámetro de este último sería de 23 cm, lo que confirmaría que es un huevo de avestruz.

El ábside no es semicircular

Tal como ya hemos señalado, el ábside mide algo menos de 2 brazos de profundidad y 7 de ancho, ya que el arco que lo define tiene medio brazo de anchura. Resulta así semielíptico, con ejes de 7 y 2,15 brazos, lo que supone que la elipse puede inscribirse en un rectángulo áureo.



Reconstrucción de la planta del ábside en la Pala de Brera *(fuente: FMC).*

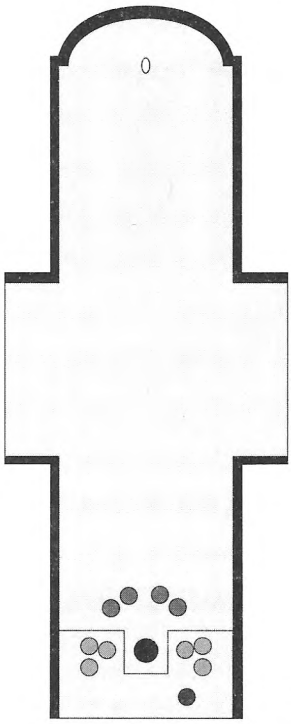
La Virgen mide más de dos metros de altura

Hemos convenido la altura de San Juan Bautista en 1,75 m. Él y la Virgen se encuentran más o menos en el mismo plano, paralelo al del dibujo. Una persona

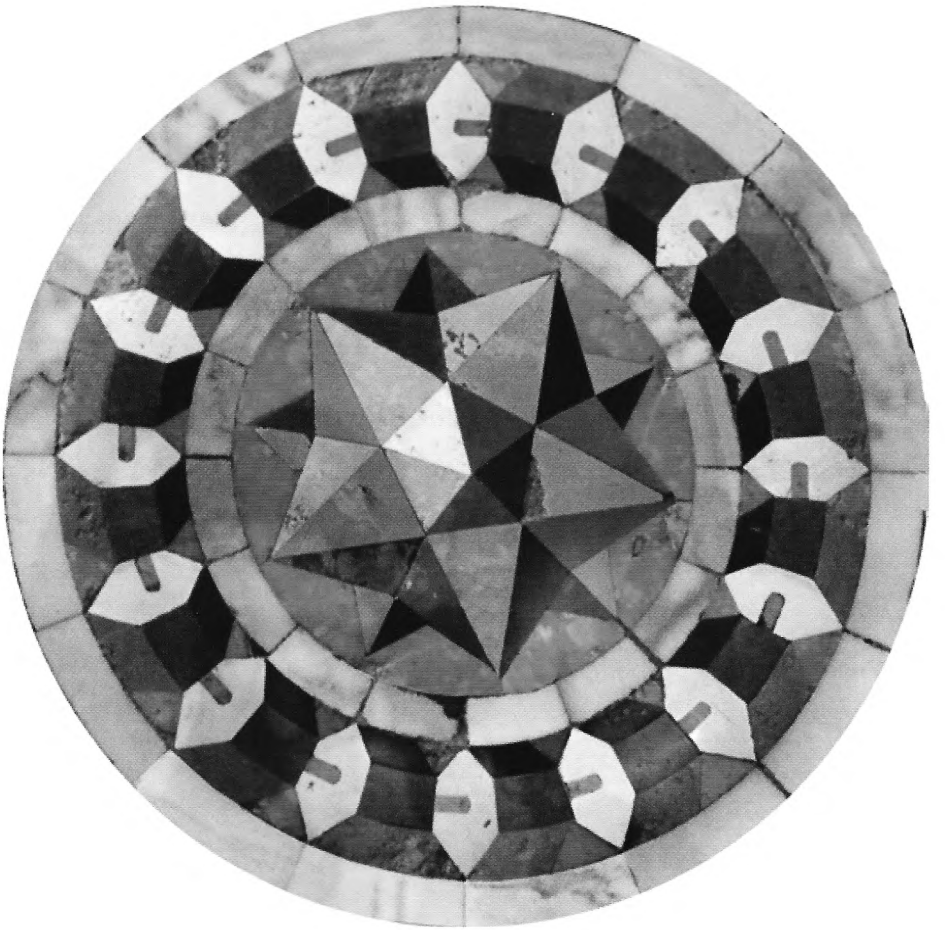
sentada en una silla disminuye su altura aproximadamente en un 20%, variando poco ese porcentaje con la altura de la silla y, puesto que la cabeza de la Virgen sobresale sobre la línea de las de los santos, aun considerando que éstos se encuentran en un plano unos 15 cm más bajo que el del sitial de la Virgen, ésta mediría en proporción 2,08 m de altura. Aunque no se aprecie a simple vista, la Virgen es desproporcionadamente grande en relación con los santos. Piero sigue en este cuadro la tradición medieval, que establece el tamaño con el que los personajes son representados en relación con su jerarquía. Los ángeles, por el contrario, resultan ser muy bajitos: miden poco más de 1,50 m.

Reconstrucción de la planta

Estamos ya en condiciones de reconstruir la planta del espacio escénico representado en la *Pala de Brera*. De acuerdo con los datos anteriores, la planta sería aproximadamente la que se ilustra aquí. Como ya hemos señalado, las dimensiones sorprenden: el espacio, que parecía mucho menos profundo, resulta ser enorme, de 20 m; la anchura es de medidas casi domésticas, pues ni siquiera alcanza los 5 m.



Reconstrucción de la planta de la nave (fuente: FMC).

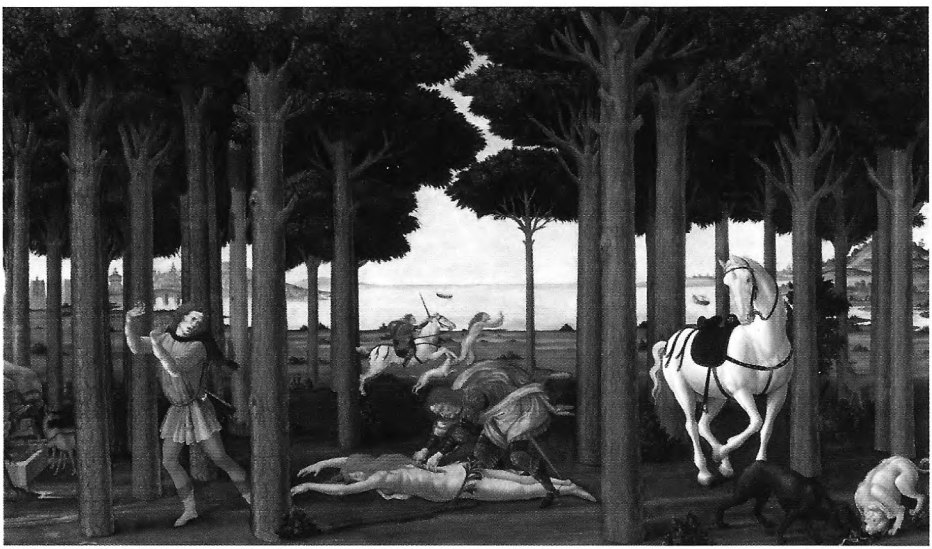


Mosaico diseñado por Paolo Uccello para el suelo de la basílica de San Marco de Venecia y que representa un gran dodecaedro estrellado (fuente: AMA).

La difusión de la perspectiva en dos obras de Fra Angelico.
Arriba: Tríptico de Cortona *(1436-1437). Museo Diocesano de Cortona, Italia.*
Abajo: Retablo del convento de Bosco ai Frati *(ca. 1450). Mugello, Italia.*

Alberto Durero, Autorretrato *(1518). Museo del Prado, Madrid.*

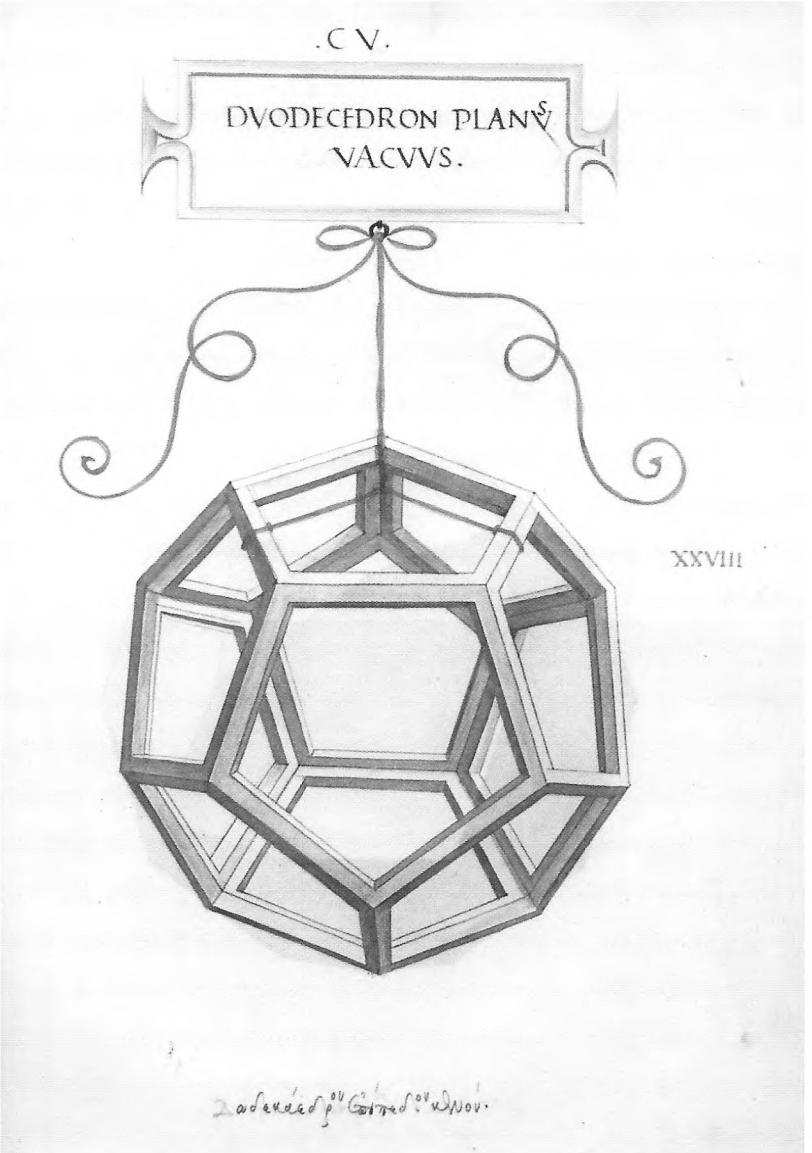
Sandro Boticelli y taller, Nastagio degli Onesti I *(1483), temple sobre tabla.*
Museo del Prado, Madrid.



Sandro Boticelli y taller, Nastagio degli Onesti II *(1483), temple sobre tabla.*
Museo del Prado, Madrid

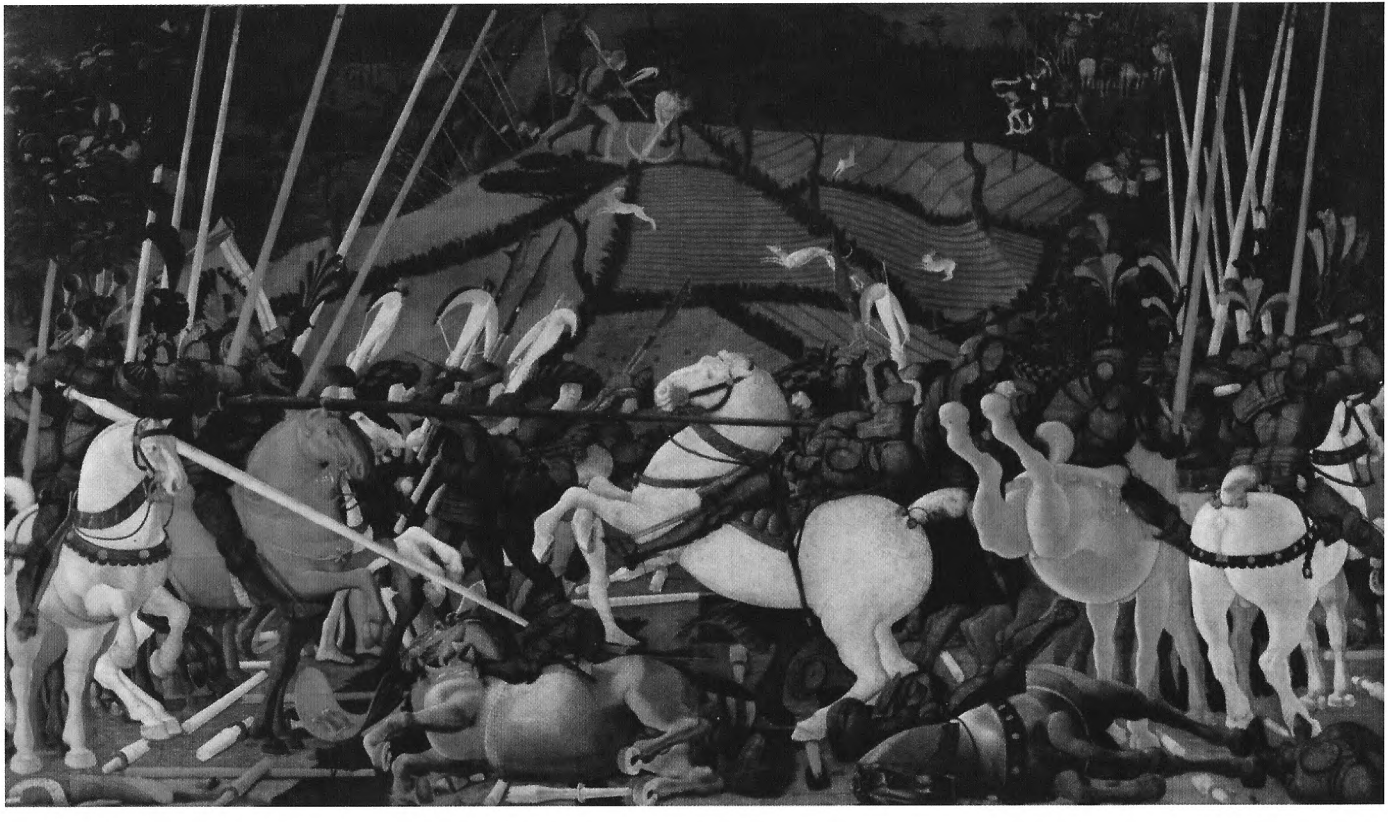
Sandro Boticelli y taller, Nastagio degli Onesti III *(1483), temple sobre tabla.*
Museo del Prado, Madrid.

Sandro Boticelli y taller, Nastagio degli Onesti IV *(1483), temple sobre tabla.*
Colección privada, Florencia.



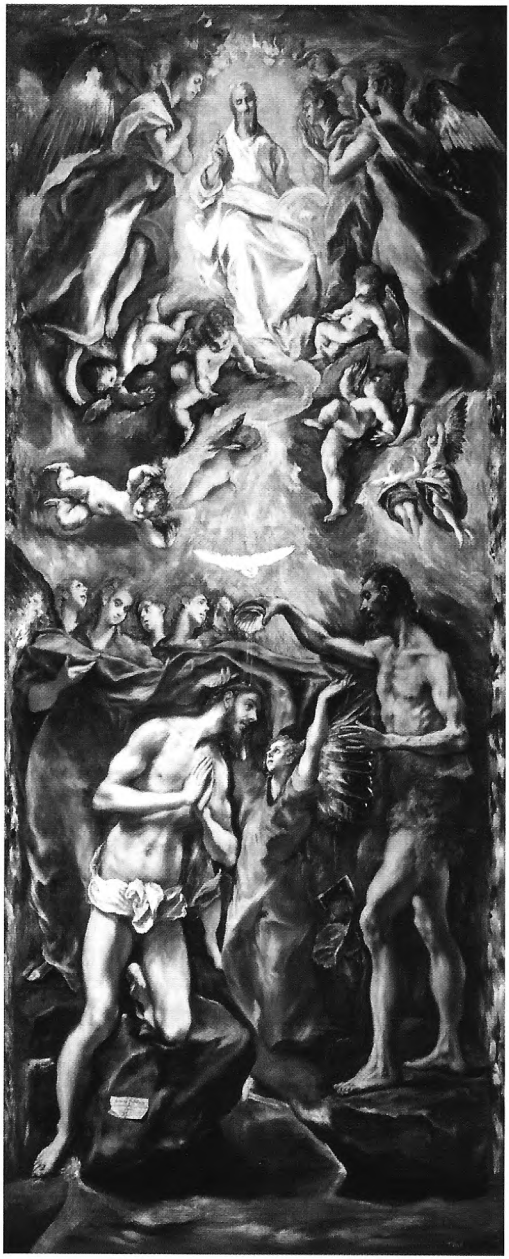
Leonardo da Vinci, Dodecaedro, *para el libro de Luca Pacioli*
De divina proportione *(1497). Biblioteca Nacional, Madrid.*

Piero della Francesca, Sacra conversación, Pala Montefeltro *o* Pala de Brera *(1472). Pinacoteca de Brera, Milán.*

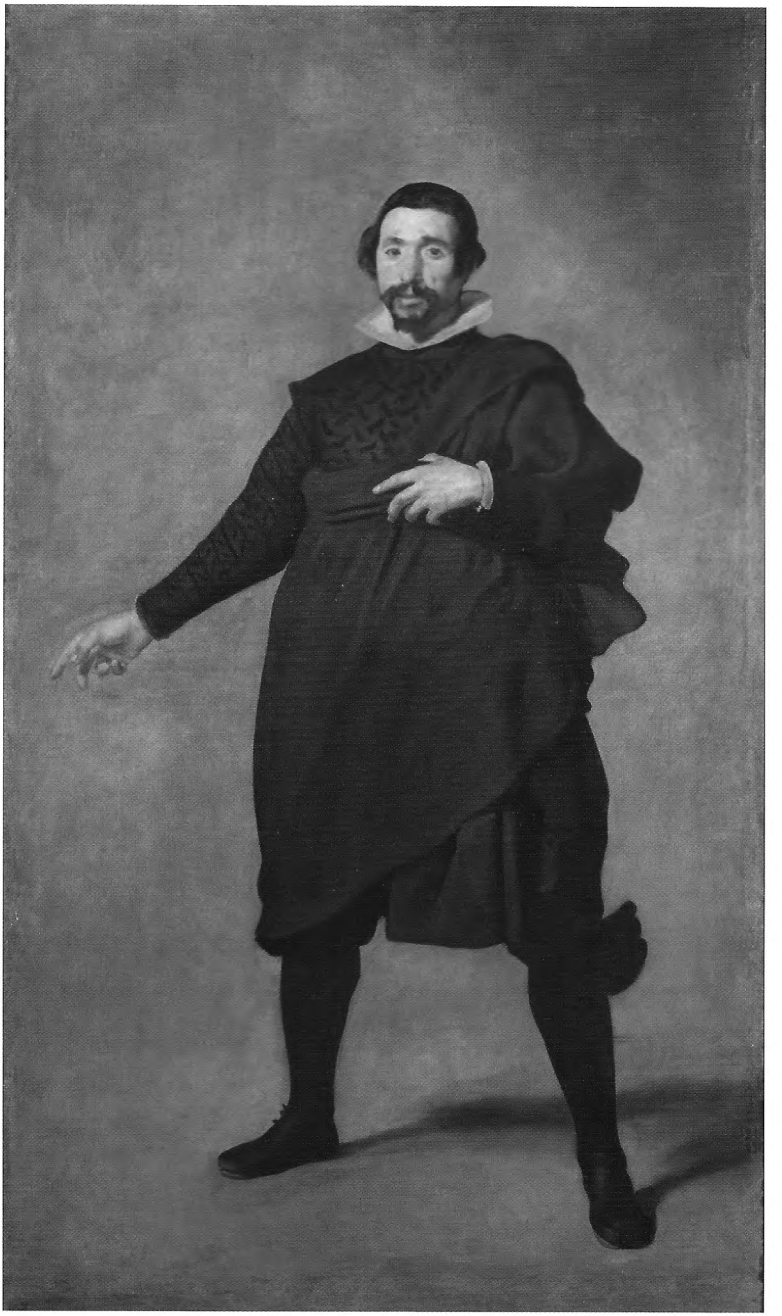


Paolo Uccello, La batalla de San Romano *(ca. 1450), témpera sobre tabla. Galleria degli Uffizi, Florencia.*

Paolo Uccello, El Diluvio *(1447-1448), fresco. Claustro Verde de Santa Maria Novella, Florencia.*



Doménikos Theotokópoulos, El Greco, El bautismo de Cristo *(ca. 1598). Formaba parte del retablo del Colegio de María de Aragón; actualmente se encuentra en el Museo del Prado, Madrid.*



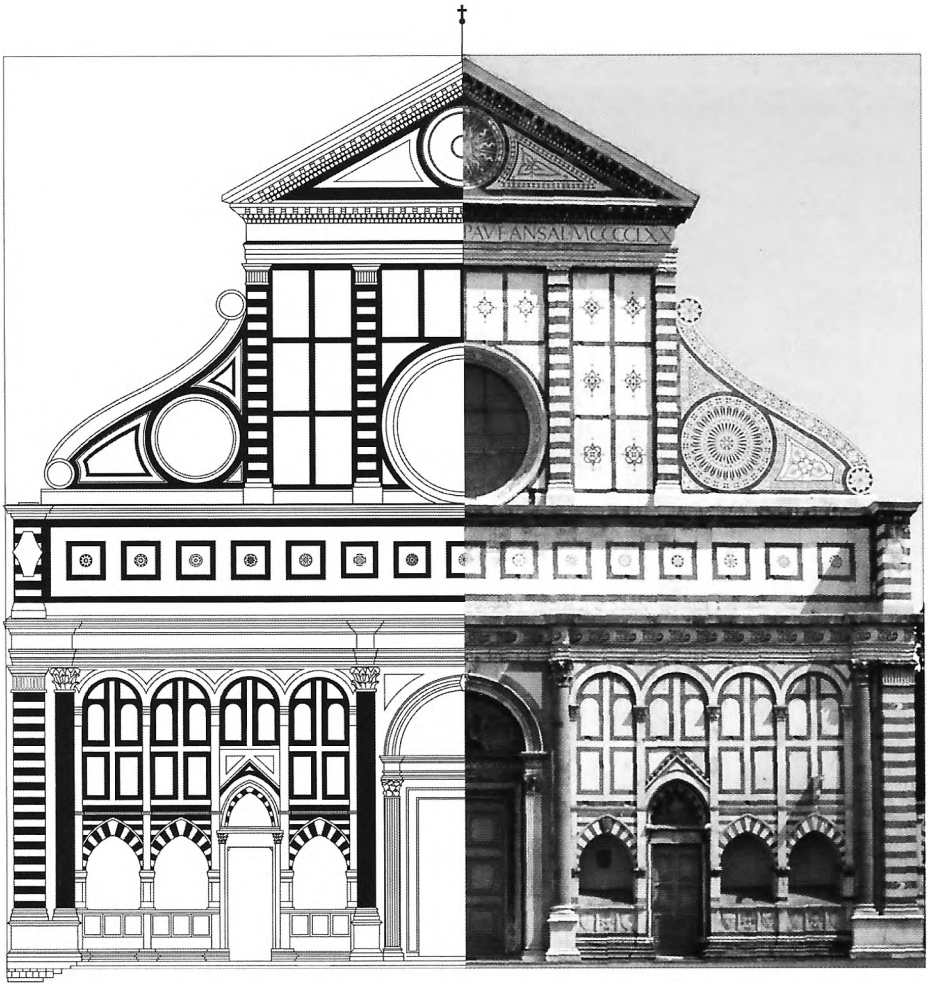
Diego Velázquez, Pablo de Valladolid (1633). *Museo del Prado, Madrid.*

Francisco Zurbarán, La defensa de Cádiz contra los ingleses *(1634), óleo sobre lienzo. Museo del Prado, Madrid.*

Transformación anamórfica de La defensa de Cádiz contra los ingleses, *de Zurbarán, según el punto de vista de un espectador en el Salón de Reinos, su ubicación original (fuente: FMC).*

Hans Holbein el Joven, Los embajadores *(1533), óleo sobre tabla de roble. National Gallery, Londres.*

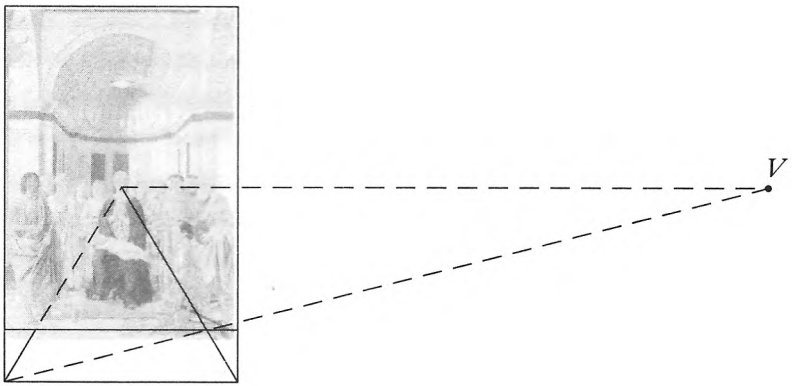
Masacchio, Frescos de la Capilla Brancacci *(detalle, 1427),*
Santa Maria del Carmine, Florencia.
De izquierda a derecha, Massolino, Masaccio, Alberti y Brunelleschi (fuente: FMC).



Leon Battista Alberti, fachada de Santa Maria Novella (1456). Florencia (dibujo: AMA; foto FMC).

Determinación del punto de vista

Piero della Francesca escribió su *De prospectiva pingendi* en la misma época en que pintó la *Pala de Brera*. Siguiendo, de manera inversa, las reglas por él establecidas en la tabla, obtenemos la siguiente figura, que fija el punto de vista a una distancia aproximada de 5,8 m, es decir 10 brazos florentinos.



Determinación del punto de vista (fuente: FMC).

Observando la figura descubrimos uno de los engaños a los que Piero somete a nuestros ojos: el huevo, que a simple vista parece pender sobre la cabeza de la Virgen, en realidad se encuentra a mucha distancia, a unos 26 brazos florentinos, que equivalen a unos 15 m, ya que, como vimos, un brazo florentino son 58,36 cm.

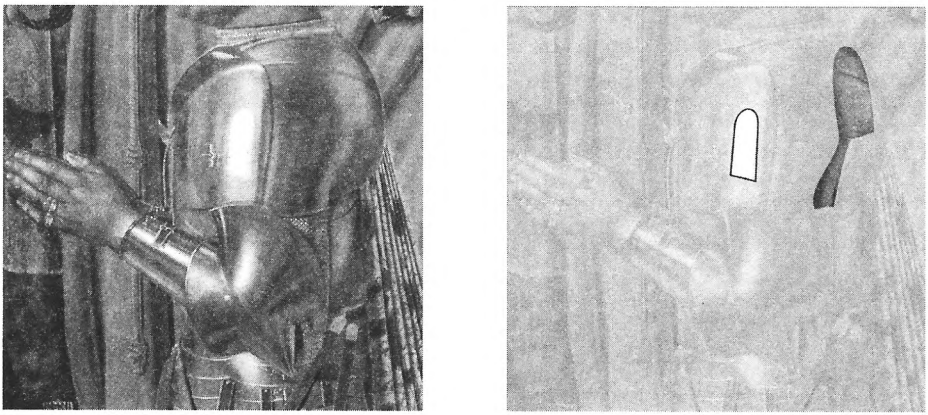
Nuestro dibujo, obviamente, no incluye aquellas partes sobre las que el cuadro no nos da información. Por ejemplo, no podemos calcular la longitud de la nave transversal, ya que sólo apreciamos en la pintura el arranque de las bóvedas y, de ellas, sólo la anchura correspondiente a un casetón.

Tampoco tenemos información sobre la longitud total de la nave principal, ya que queda a nuestra espalda como espectadores. El límite de lo visible define un plano vertical, perpendicular a dicha nave, que es precisamente el plano del dibujo. De todas formas, esta ausencia de información no es absoluta y, observando ciertos detalles, podemos encontrar mucha más información que permanece oculta y que, a simple vista, pasa desapercibida.

Cuando miramos el cuadro por primera vez tendemos a situar a los personajes en él representados en el crucero y a pensar que la luz que los ilumina procede de

la parte izquierda de la nave transversal. Sin embargo, cuando analizamos la situación real, con la reconstrucción de la planta de la iglesia y la situación de los personajes en ella, vemos que esto es imposible.

Deben existir, por tanto, al menos dos entradas distintas de luz. Una, la de la luz que ilumina el ábside y la concha, que procede, efectivamente, del lado izquierdo de la nave transversal. La otra, la de la luz que ilumina a los personajes, no puede provenir del extremo izquierdo de la nave transversal, ya que el crucero queda a la espalda de ellos. Debe, por tanto, ser distinta, y provenir de algún punto fuera del alcance de nuestra vista, por detrás del espectador, probablemente de una ventana en el lateral izquierdo de la nave principal. En efecto, en la hombrera de la armadura del duque podemos ver con claridad esa ventana, o mejor dicho, su reflejo anamórfico. Como la hombrera tiene una forma casi cilíndrica de eje vertical, esa ventana, rectangular y coronada por un semicírculo, debe encontrarse en el muro izquierdo de la nave principal y, efectivamente, puede ser la fuente de luz que ilumina a los personajes.



Detalle de la hombrera de la armadura del duque Montefeltro. Se distingue el reflejo de dos ventanas, la del lado izquierdo de la nave, muy iluminada, y la del derecho, en penumbra; entre ambas se extiende la nave, a espaldas del espectador, en la oscuridad.

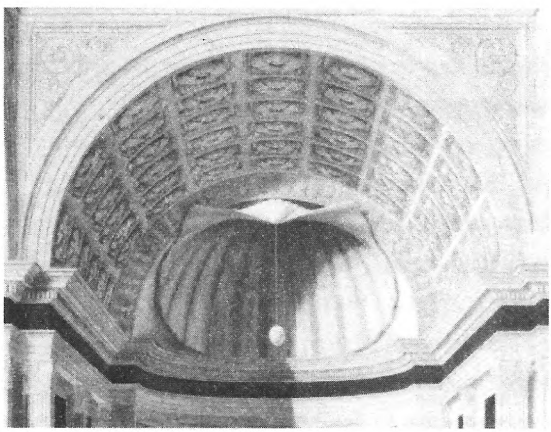
Además, si observamos con atención el espaldar de la armadura del duque, podemos distinguir otra ventana, ésta en penumbra, que correspondería a la que se encuentra en el muro opuesto de la nave, enfrentada a la anterior. Aparece mucho más oscura, ya que se encuentra del lado contrario al del sol, pues tiene que estar situada a la derecha de la nave. Entre los reflejos de ambas ventanas se ve una zona oscura más difícil de distinguir, que debe de corresponder a los pies de la iglesia, probablemente con el portal de acceso, a espaldas del espectador.

La luz, la ubicación, la época y la hora

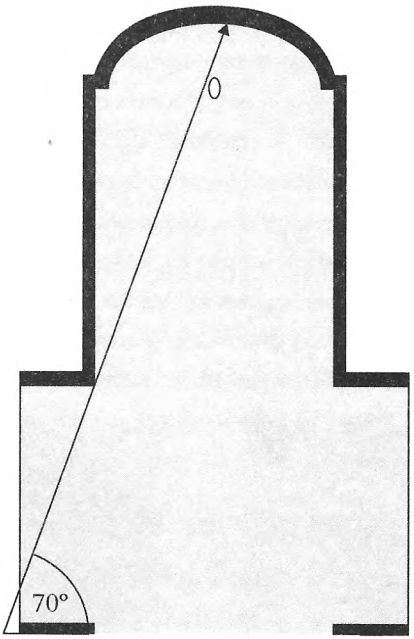
Que la luz provenga del lado izquierdo plantea un problema. Muchos críticos, analizando esta luz mágica que ilumina toda la escena y que proviene del exterior a través de dos ventanas distintas, como hemos visto, opinan que es una luz inventada, imaginada, puesto que si la iglesia se encontrase bien orientada, es decir, con el ábside apuntando hacia el Oriente, el sur quedaría a la derecha del espectador y, por tanto, nunca podría entrar desde la izquierda de la escena. Comprobaremos que ambas afirmaciones son discutibles.

No sabemos si Piero se basó en una iglesia real para concebir el cuadro, pero podemos suponer que se inspiró al menos en las luces de Urbino y que, por tanto, aunque sólo sea en su imaginación, la situó en sus proximidades. A estas alturas, y dadas las escasas dimensiones del edificio representado, más que iglesia deberíamos llamarlo capilla. Nuestra capilla la podemos considerar, por tanto, ubicada en la ciudad del duque Montefeltro. El palacio ducal, centro de la ciudad de Urbino, se encuentra a 43° 43' 26" norte y 12° 38' 13" este. Los 43°43' de latitud norte corresponden a los lugares más septentrionales de la Península Ibérica (la Estaca de Bares tiene una latitud más o menos similar).

En una iglesia bien orientada construida en estas latitudes, la luz entra desde el lado derecho, de manera tal que, a mediodía, cuando se celebra la misa mayor, el sol entra por el brazo derecho del crucero e ilumina el altar en el momento de la consagración. No obstante, los 23° 30' de la inclinación de la eclíptica con respecto al plano del ecuador terrestre hacen que en invierno el sol salga ligeramente por el sureste y se ponga ligeramente por el suroeste. En verano las cosas suceden al revés: el sol sale ligeramente por el noreste y se pone ligeramente por el noroeste. Si observamos la luz que se proyecta sobre el ábside (detalle de la derecha) vemos que ilumina el huevo y proyecta el arco del brazo izquierdo del crucero sobre la concha. Los casetones de este arco aparecen muy iluminados por la luz que atraviesa el arco, casi perpendicular a ellos.



En la imagen siguiente podemos apreciar que para que la luz del Sol pueda incidir en el huevo e iluminarlo, este ángulo debería ser de unos 70° con respecto a la dirección norte-sur.



Ángulo con el que debe incidir la luz para poder iluminar el huevo que pende del ábside (fuente: FMC).

Pues bien, si hacemos un estudio de las puestas de sol en la latitud de Urbino, encontramos un corto periodo del año en el que el último rayo de sol forma un ángulo menor o igual a 70°. Dicho periodo es breve, un intervalo de poco más de una semana, centrado en el solsticio de verano, es decir, del 17 al 25 de junio. Por tanto, durante esos días, el sol podría entrar en una iglesia bien orientada con un ángulo como el necesario para iluminar el huevo y reflejar la sombra del arco sobre la concha. Además, esto sólo ocurre durante unos minutos antes de la puesta de sol, cada uno de los días señalados.

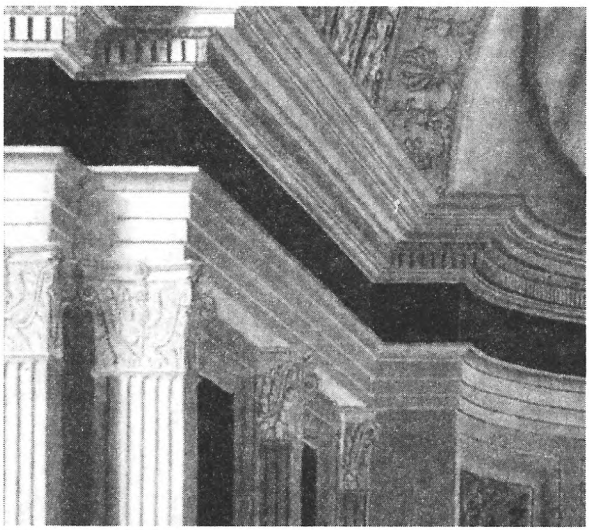
Esta afirmación la podemos corroborar de varios modos. Por un lado, observando de nuevo en el cuadro la proyección del arco sobre la concha. El punto más alto de la curva de la sombra reflejada se encuentra aproximadamente en el borde derecho de la concha. Si medimos cuánto ha bajado ese punto con respecto al arco, vemos

que es una cantidad muy pequeña, algo más de la cuarta parte del radio del arco, es decir, poco más de un brazo florentino. Sin entrar en cálculos trigonométricos detallados, podemos afirmar que es una luz sensiblemente horizontal, como correspondería a una luz del atardecer, poco tiempo antes de que se ponga el sol.

Por tanto, podemos afirmar con poco margen de error que si partimos de la hipótesis de que el cuadro de Piero está ambientado en Urbino, en una iglesia real o imaginaria lo suficientemente bien orientada, la escena representada tendría lugar durante la última semana de junio, alrededor de las 7 de la tarde, poco antes del atardecer.

Otra conclusión colateral es que para que esto sea posible, la longitud de los dos brazos de la supuesta nave transversal ha de ser bastante reducida, a lo sumo 2 brazos florentinos y medio. Del mismo modo, tendría que haber una ventana en el muro oeste del lado izquierdo de esa nave, más o menos en el vértice del ángulo señalado en la figura anterior.

Por último, esa misteriosa luz pálida que llena la escena nos permite apreciar la existencia de un altar de color claro o cubierto con un paño claro, situado en el ábside, oculto por los personajes que pueblan la escena. La luz reflejada por ese altar la vemos iluminando la parte inferior de la moldura en el lado izquierdo del presbiterio.



Reflejo de la luz sobre la moldura que se encuentra en el lado izquierdo del presbiterio.

La *Pala de Brera* en tres dimensiones

Para acabar esta mirada con ojos matemáticos a la *Pala de Brera,* y a modo de compilación de toda la información que hemos ido descubriendo, presentamos una reproducción aproximada en 3D de la escena representada. Hemos utilizado únicamente la información deducible del cuadro, sin licencias artísticas a la hora de describir lo que no se ve o lo que no puede ser calculado.

Las medidas de la maqueta son las que hemos calculado anteriormente, así como las medidas de los personajes. La ubicación se ha determinado en las coordenadas geográficas de Urbino. Las luces y las sombras que se aprecian en las distintas imágenes corresponden, de acuerdo con lo expuesto, a la luz de Urbino del 21 de junio, a las 7:15 de la tarde, hora solar.

No hemos prolongado la nave más allá del plano del dibujo, por lo que no están representadas las ventanas de las que hemos hablado, las que aparecen reflejadas en la hombrera y el espaldar de la armadura del duque. No obstante, la luz que ilumina a los personajes en nuestra maqueta proviene sustancialmente del mismo lugar y, desde luego, incide con el mismo ángulo.

Presentamos nueve vistas de la misma maqueta 3D y con la misma luz. La primera es muy parecida al cuadro de Piero: el huevo aparece suspendido sobre la cabeza de la Virgen y la simetría es central.

En la segunda se observa, desde cierta distancia, el aspecto global de la maqueta.

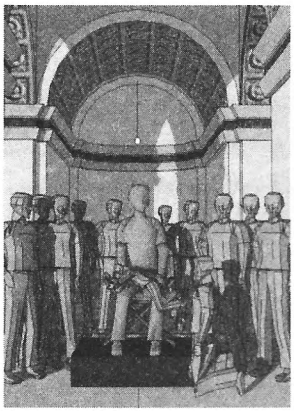
La tercera vista muestra las bóvedas desde un punto de vista situado a la altura de la cornisa, desde uno de los vértices del cuadro definido por el cruce de las naves.

La cuarta nos ofrece un picado desde detrás del huevo orientado hacia los personajes, que aparecen de espaldas.

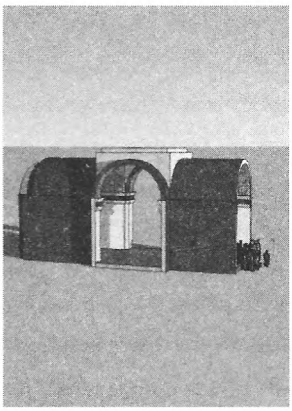
La quinta, al igual que la séptima, es un picado frontal, que sirve para apreciar la distancia que en realidad separa la posición del huevo de la cabeza de la Virgen. La sexta ofrece el picado inverso.

En la octava, el punto de vista se ha alzado con respecto a la primera, de manera que el aplanamiento se mitigue y podamos apreciar más fácilmente la profundidad de la nave.

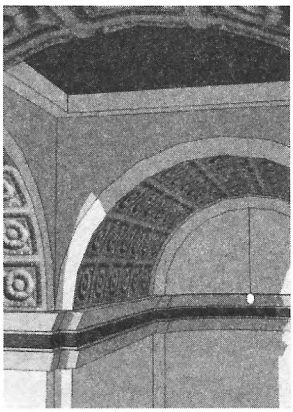
Por último, en la novena hemos querido ofrecer la perspectiva contraria a la mostrada en el cuadro original: manteniendo la simetría, la mirada se ha situado sobre el punto central de la cornisa que recorre el ábside. El huevo, en primer plano, suspendido sobre la cabeza de la Virgen, parece ahora enorme y queda aparentemente enmarcado por la bóveda bajo la que se encuentran los personajes.



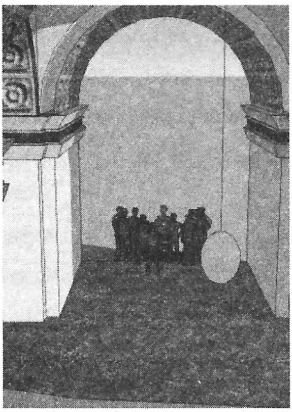
Vista 1



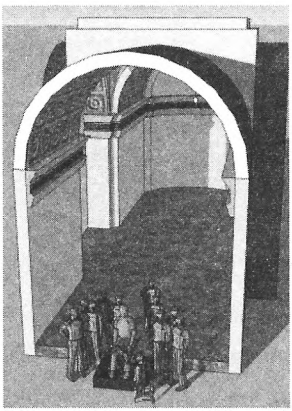
Vista 2



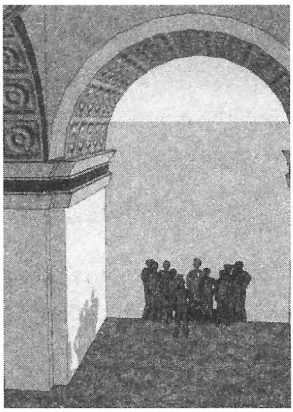
Vista 3



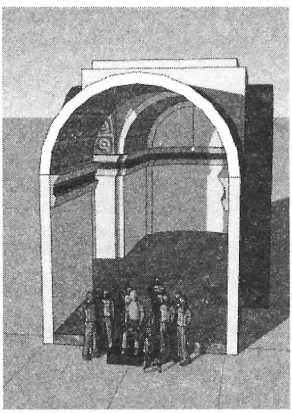
Vista 4



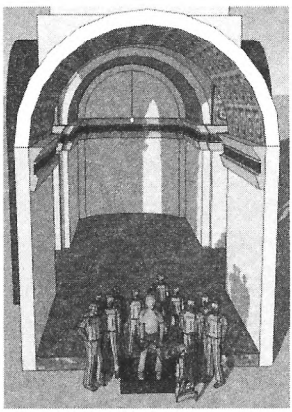
Vista 5



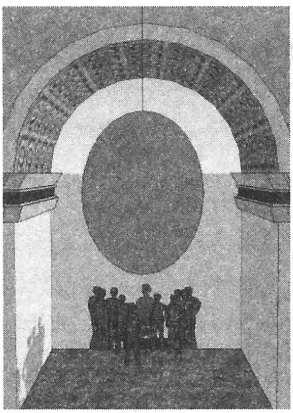
Vista 6



Vista 7



Vista 8



Vista 9

Fuente: FMC.

Hemos tratado de analizar algunos aspectos de esta espléndida obra de Piero della Francesca. Sin duda nuestras reflexiones, aun desde el punto de vista matemático, son sólo algunos de los muchos acercamientos posibles. Haciéndolas nos hemos sentido cómplices de este matemático y pintor que no descuidó ninguno de los detalles al concebir el espacio, los objetos, los personajes, la luz que lo ilumina todo...

Los engaños que el pintor dispone como trampas visuales ante el espectador se transforman en guiños cómplices para los ojos de quien, atravesando la tabla, va más allá y los descubre. El Piero matemático se vuelve cercano cuando aprendemos su lenguaje, descubrimos sus claves y apreciamos su arte con una mirada matemática.

Capítulo 4

El Greco, Zurbarán y Velázquez con ojos matemáticos

Analizaremos en este capítulo tres obras de tres de los grandes pintores universales del paso del siglo XVI al XVII. Se trata de Doménikos Theotokópoulos, conocido como *El Greco*, Francisco de Zurbarán y Diego Velázquez.

El Greco y la cuarta dimensión

Doménikos Theotokópoulos, *El Greco*, pintó *El bautismo de Cristo* para el Colegio de doña María de Aragón, de Madrid, hacia 1598. Es un cuadro de grandes dimensiones, 350×144 cm, y está claramente dividido en dos partes: en la inferior, el Bautista vierte con una concha el agua del Jordán sobre la cabeza de Cristo; en la superior, el Padre Eterno, rodeado de ángeles, arcángeles y algunos querubines, contempla la escena desde el cielo, complaciéndose de ella. Sobre la cabeza de Cristo se superponen un manto rojo, signo del sacrificio, la concha bautismal y La Paloma, que une ambas escenas, la superior y la inferior, en las que se desarrolla el cuadro. En la actualidad, y tras muchos avatares históricos, forma parte de la colección permanente del Museo Nacional del Prado de Madrid.

En 1596 encargaron a El Greco las pinturas que habían de decorar el Colegio de la Encarnación, convento y seminario de agustinas, aunque popularmente, en los casi doscientos años que existió, fue más conocido por el nombre de su patrocinadora, doña María de Córdoba y Aragón, una dama de la Corte de la reina Ana de Austria (1549-1580), esposa de Felipe II, y de la hija de este último, de su matrimonio con Isabel de Valois, la infanta Isabel Clara Eugenia de Austria (1566-1633). El colegio se situaba cerca del Real Alcázar, residencia de los reyes, al noroeste de la ciudad, y cerca del lugar que actualmente ocupa el Palacio del Senado Español.

Si doña María de Aragón fue la encargada de sufragar la obra del convento, la concepción y tal vez la responsabilidad de su desarrollo corrió a cargo de un personaje singular: fray Alonso de Orozco (1500-1591). Este fraile, escritor místico, es una de las figuras intelectuales más interesantes del reinado de Felipe II. En su pro-

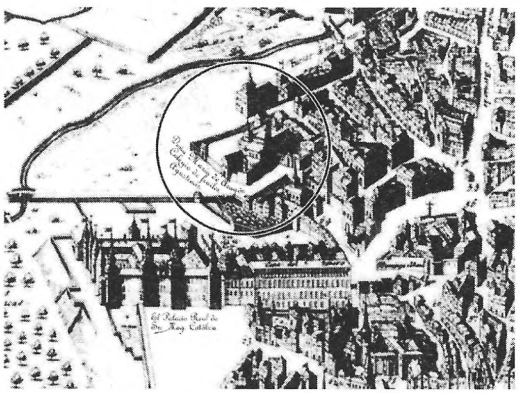
El Bautismo de Cristo, *de El Greco, hacia 1598, Museo del Prado, Madrid.*

ceso de beatificación intervinieron como testigos, entre otros, la infanta Isabel Clara Eugenia y los escritores Lope de Vega y Francisco de Quevedo. Finalmente fue canonizado en 2002 por el papa Juan Pablo II.

Probablemente fue Alonso de Orozco el inspirador espiritual y temático de las obras encargadas a El Greco. Y fue sin duda, aun con los parámetros de la época, un encargo sumamente importante, tanto por la relevancia del Colegio y por su ubicación como por la entidad artística del encargo y el precio pagado. Doménikos cobró una buena cantidad de reales por la realización del retablo completo, que parece que

constaba de seis cuadros, todos ellos de grandes dimensiones, además de la arquitectura de sostén que los enmarcaba, que se ha perdido, y probablemente de algunas esculturas y de un séptimo cuadro más pequeño, que se situaba en el centro, sobre los demás, y que no se conserva.

El convento fue clausurado en 1809 por decreto del rey José Bonaparte. En 1814 el retablo se desmontó para convertir el edificio en Salón de Cortes, transformándose la planta original, rectangular con un ábside, en un rectángulo con dos semicírculos en los lados menores. Aunque el edificio retomó por breves periodos su función de iglesia, el retablo no fue nunca montado de nuevo. Las piezas que lo componían fueron a parar a distintos lugares hasta recalar todas ellas en el Museo del Prado de Madrid, a excepción de la titulada *Adoración de los pastores*, que se encuentra en el Museo Nacional de Arte de Rumania, en Bucarest.



Colegio de doña María de Aragón o de la Encarnación, Madrid.

El Greco realizó su trabajo entre los años 1596 y 1600 en su taller de Toledo, trasladando hasta el convento las distintas piezas una vez terminadas. Los seis cuadros conservados, aunque tratan temas muy frecuentes en la iconografía cristiana, suponen una innovación absoluta. Las tres pinturas del piso inferior presentan una doble escena, la terrenal y la divina, situando naturalmente la segunda sobre la primera. En los tres casos la composición converge hacia el centro del plano del dibujo, mostrando una forma que recuerda la de un reloj de arena. Tanto en *La Anunciación* como en *El bautismo de Cristo*, esa zona de convergencia central está ocupada por el Espíritu Santo en forma de paloma, que juega, desde un punto de vista compositivo, el papel de nexo de unión entre lo divino y lo humano.

Posible disposición original de los cuadros del retablo del Colegio de María de Aragón, de El Greco.

Sobre el hexaedro y el teseracto

El hexaedro regular o cubo es quizás el poliedro más dibujado en las pizarras escolares. Su representación más habitual en la clase de matemáticas es la que corresponde a la figura 1 de la página siguiente, es decir, dos cuadrados desplazados uno con respecto al otro y unidos por cuatro líneas. Se trata de una visión «generativa» del cubo.

Si un cuadrado se genera moviendo un segmento a lo largo de una dimensión perpendicular al segmento una longitud igual al segmento, un cubo se puede generar moviendo un cuadrado en una dimensión perpendicular al plano que lo contiene una longitud igual al segmento que lo generó. Esta visión generativa se puede completar hacia abajo considerando el segmento como cuadrado de dimensión uno, generado por un punto que se desplaza una determinada longitud. Esta idea nos permitirá, generalizándola, poder hablar del teseracto o hipercubo de cuatro dimensiones, que se genera desplazando un cubo, en una dimensión perpendicular a las tres del espacio habitual, una longitud igual a su lado.

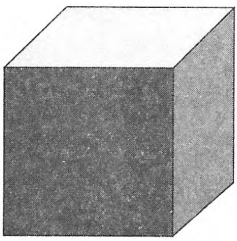


Figura 1

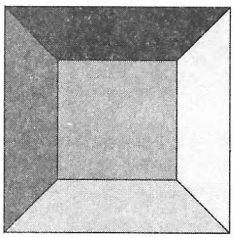


Figura 2

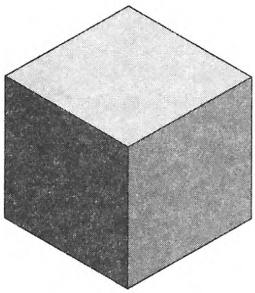


Figura 3 *(fuente: FMC)*

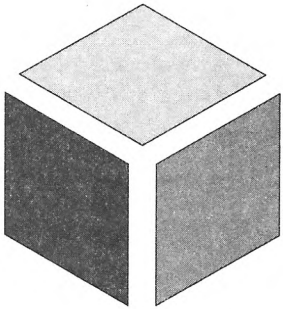


Figura 4

De cualquier modo, la representación en perspectiva caballera que solemos utilizar para visualizar el cubo (figura 1) no es ni mucho menos la única. En la figura 2 vemos la que corresponde a una perspectiva cónica central; es la forma en que veríamos un cubo si acercáramos lo suficiente el ojo a una de las caras, si ésta fuera transparente. En la figura 3 se dibuja el cubo en perspectiva isométrica. Las tres caras que convergen en un mismo vértice (figura 4) se «ven» con forma de rombo en esta representación plana del cubo.

Esto mismo podemos hacerlo con el teseracto o hipercubo. La figura 5 nos muestra la representación tridimensional en proyección cónica central del teseracto. La figura 6 es la proyección isométrica en tres dimensiones del mismo. Las caras resultan ser todas rómbicas, y en la parte externa sólo aparecen doce, ya que el resto de las caras se encuentran en el interior. Se forma así un «rombododecaedro». Es algo similar a lo que sucede en la figura 3, en la que sólo vemos tres de las seis caras del cubo, ya que las otras tres quedan al otro lado del plano del papel. Mientras que en el caso del cubo (figura 4) son tres las caras cuadradas que convergen en un mismo vértice, en el teseracto lo hacen cuatro cubos (figura 7). Por último, la figura 8 trata de presentar dos cubos perpendiculares entre sí que se tocan a lo largo de una cara, del mismo modo que dos caras adyacentes de un cubo son perpendiculares entre sí y se tocan a lo largo de una arista.

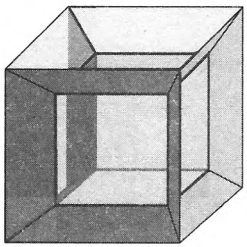


Figura 5

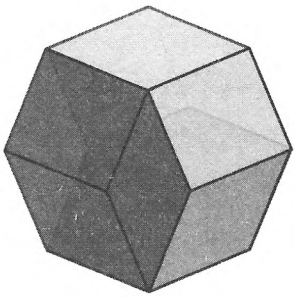


Figura 6

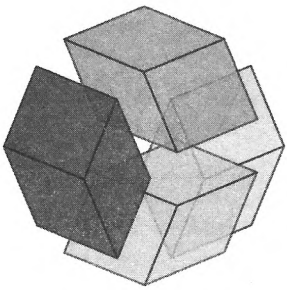


Figura 7 *(fuente: FMC)*

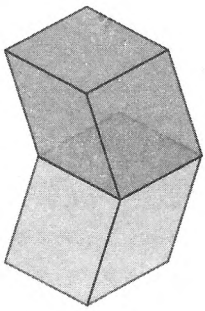
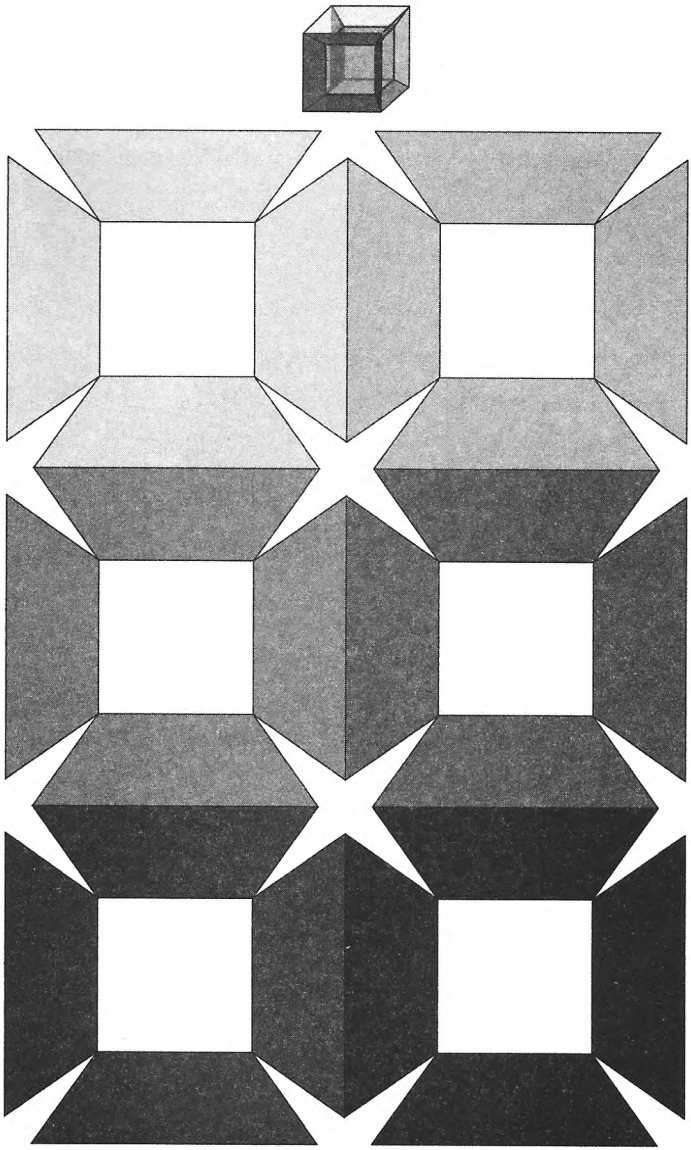


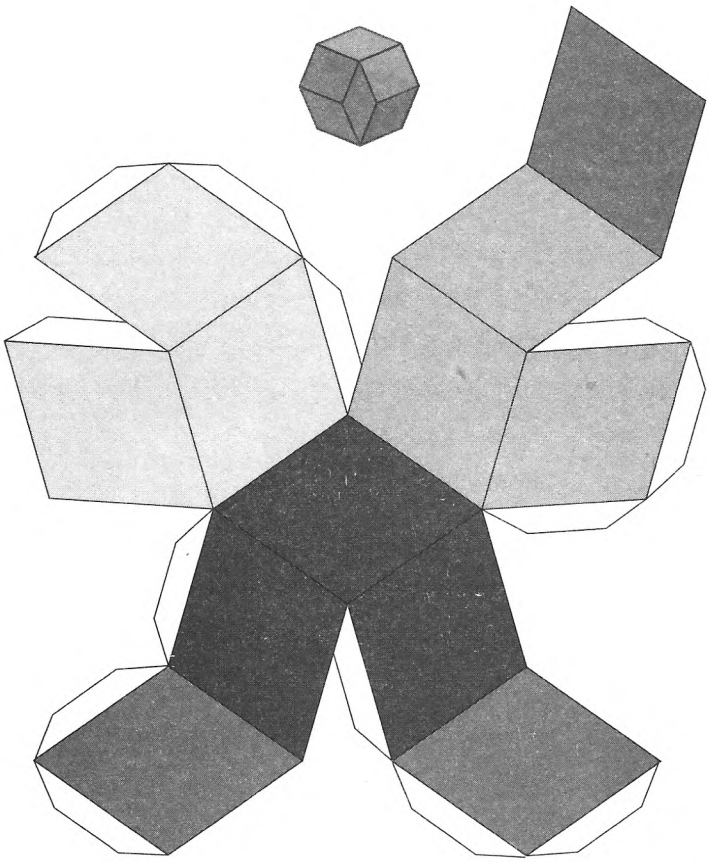
Figura 8

Como las páginas de este libro son planas, las figuras que vemos son proyecciones en 2D de las proyecciones en 3D del teseracto 4D. Pero esto no supone un problema: si el lector quiere ver estas proyecciones en 3D, sólo tendrá que fotocopiar los gráficos siguientes y, con un poco de paciencia, montar los recortables. Ello

le permitirá ver así las proyecciones en 3D del teseracto, que aquí sólo pueden verse reproducidas en 2D. También le servirá para hacerse una idea del proceso «generativo» del cambio de dimensión. La tarea, además de divertida, resulta perfecta para entender la idea de «generalización».



Recortable de la proyección cónica central en 3D de un teseracto de cuatro dimensiones (fuente: FMC).



Recortable de una proyección isométrica en 3D de un teseracto (fuente: FMC).

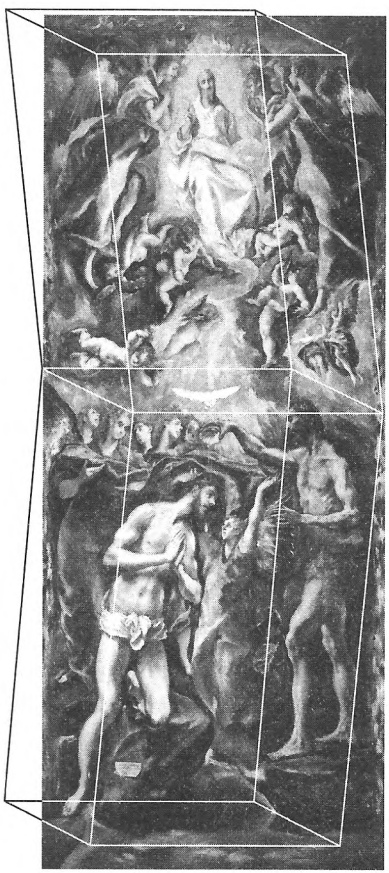
Llegados a este punto, el lector podría preguntarse qué tienen que ver cubos y teseractos con el cuadro *El bautismo de Cristo* de El Greco. La respuesta, un tanto metafórica pero no por ello menos matemática, la contaremos a continuación.

Parafraseando el cuento de Julio Cortázar *El manuscrito hallado en un bolsillo* —que a su vez parafraseaba el título de la novela de Jan Potocki *El manuscrito hallado en Zaragoza*—, la respuesta la hemos camuflado en el título de esta sección: «El Greco y la cuarta dimensión».

Si miramos con ojos matemáticos el cuadro, veremos que las escenas representadas en la parte superior e inferior no corresponden a un mismo punto de vista, ni en el dibujo, ni en la iconografía, ni desde el punto de vista de la teología. Son, de algún modo, como los dos cubos que se tocan en una misma cara, pero que entre sí son perpendiculares: los cielos y la tierra. El Greco nos presenta cada uno de ellos

como una realidad tridimensional separada de la otra, una arriba y la otra abajo, pero con una cara cuadrada en común que les hace permanecer en contacto. Y en esa cara común sitúa al Espíritu Santo.

La cosmogonía de El Greco sería, así concebida, un espacio de cuatro dimensiones —por lo menos—, en el que nuestro universo 3D sería una hipercara que se desarrolla en tres ejes perpendiculares, como las tres aristas de un cubo convergentes en un vértice. Los cielos serían otra realidad 3D diferente, otra hipercara transversal a la nuestra en el mismo universo tetradimensional. Ambos, el cielo y la tierra, serían hipercaras adyacentes de un mismo teseracto que comparten un plano en común, en el que habita la tercera persona de la deidad, que es sólo espíritu y, como tal, puede vivir perfectamente en el interior de un plano.



El Bautismo de Cristo, *de El Greco.*
Esquema de las dos proyecciones perspectivas.

Es obvio que no podemos creer que Doménikos Theotokópoulos estuviera pensando en cuatro dimensiones cuando concibió su cuadro. Al menos no conscientemente, pero intuitivamente, quizá basándose en las lecturas místicas del padre Orozco, esa imagen virtual que hoy definiríamos como 4D rondó por su cabeza.

Y puesto que la matemática, en el proceso de abstracción, no hace otra cosa que pasar de la realidad a una metáfora que la representa, nosotros podemos hacer esta lectura del cuadro, que ayuda a interpretarla, desde el punto de vista místico-religioso, pero también geométrico-plástico. Así, las figuras alargadas características de El Greco estarían justificadas por el proceso de proyección, de igual manera que las caras cuadradas de un cubo se transforman en esbeltos rombos al proyectarlos en isométrica.

Si la imaginación de El Greco llegó siquiera a intuir algo de todo esto, no cabe duda de que es porque como pintor, se mire con ojos matemáticos o no, hay que situarlo verdaderamente «en otra dimensión».

Anamorfosis en un cuadro de Zurbarán

Analizaremos ahora *La Defensa de Cádiz ante los ingleses*, de Francisco Zurbarán. Esta obra se encargó para decorar el Salón de Reinos del Palacio del Buen Retiro. En él se colgaron doce cuadros de batallas del reinado de Felipe IV, realizadas por los más insignes pintores españoles del momento, entre ellos *La rendición de Breda,* de Velázquez, más conocido como *Las lanzas*. Completaban la escenografía diez cuadros de los trabajos de Hércules, también de Zurbarán y los retratos ecuestres de Felipe III y su esposa, y Felipe IV y la suya, además del retrato del príncipe Baltasar Carlos, todos ellos de Velázquez.

Los reyes de las Españas vivían en el Real Alcázar de Madrid desde que la villa fuese designada como nueva capital en sustitución de Toledo. Se encontraba en el mismo solar que hoy ocupa el Palacio Real, hasta que la Nochebuena de 1734 fue destruido por un incendio. Levantado inicialmente como fortaleza musulmana por el emir cordobés Muhamad I en el siglo IX, el alcázar sufrió diversas reformas y ampliaciones con Enrique II de Castilla y, posteriormente, con Carlos V y Felipe II, especialmente a partir de 1561, cuando este último decidió fijar en Madrid su residencia y la de la Corte. Felipe III continuó los trabajos de modernización del palacio, pero, a su muerte, su sucesor, Felipe IV, quiso disponer de una segunda residencia, más cómoda y menos húmeda, en la que pasar ciertas temporadas de solaz y ocio. De este modo surgió la idea de hacerse construir un nuevo palacio a las afueras de Madrid, hacia levante, en la zona llamada El Prado,

cerca de las huertas que, desde el centro de la ciudad, en ligera pendiente, descendían hacia el río Manzanares.

De la obra se encargó Gaspar de Guzmán y Pimentel, Conde de Olivares y Duque de Sanlúcar la Mayor, más conocido como Conde-Duque de Olivares, quien probablemente eligió el sitio para la construcción, al lado del Cuarto del Rey que había mandado construir Felipe II como anexo al claustro de los Jerónimos. El palacio debía construirse a la mayor brevedad posible, y Olivares se comprometió a entregar la obra en 1634. El valido del rey eligió como maestro mayor de las obras a Alonso Carbonel.

El edificio se construyó mediante la suma de diversos elementos, que ampliaban el Cuarto del Rey hasta transformarse en un verdadero palacio, con dos grandes patios para recepciones —el primero se quedó enseguida pequeño—. Las prisas y la creciente falta de ingresos de Castilla hicieron que los materiales usados no fueran especialmente nobles. Para compensar se consideró que el interior debía estar magníficamente decorado, con los mejores muebles, los más bellos tapices y los cuadros de los más afamados pintores del momento de los reinos de la monarquía hispánica y de otros lugares.

Olivares entregó la obra en el plazo prometido, aunque para la decoración tuvo que recurrir a la adquisición urgente de obras, hizo encargos a pintores españoles e incluso expropió muebles y otros elementos suntuosos de los palacios de la nobleza, que los cedían con más o menos agrado.

El salón más emblemático del Palacio del Buen Retiro era el llamado *Salón de Reinos*, que recibía este nombre porque en él estaban pintados los escudos de los veinticuatro reinos que conformaban la monarquía de Felipe IV. Servía de salón del trono y el rey recibía en él a los embajadores y altos dignatarios. Para su decoración se concibió una escenografía completa, que subrayara las victorias en famosas batallas de los ejércitos reales, en los más remotos lugares del planeta. El Salón de Reinos

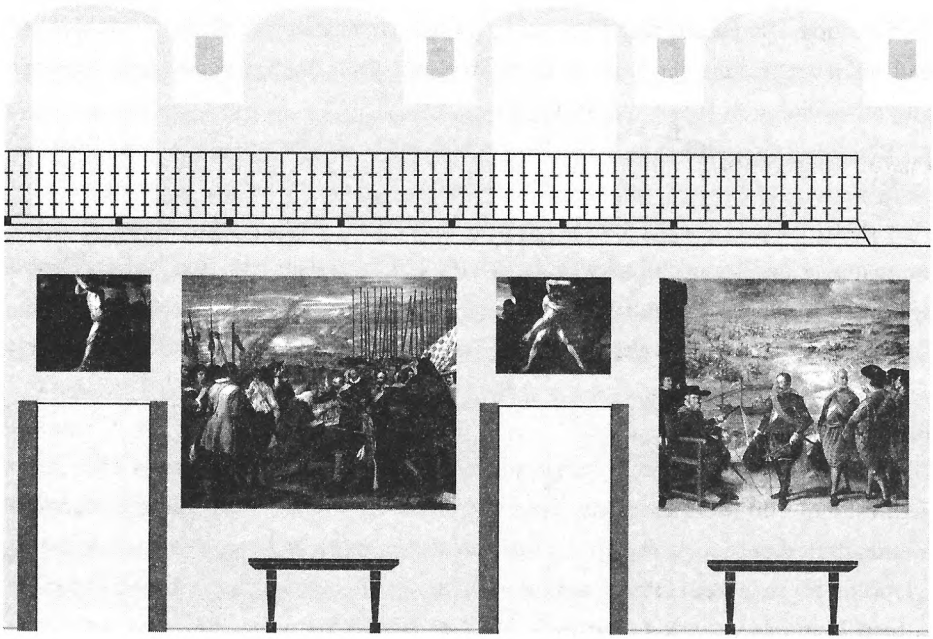
UN SALÓN PARA UN REY

Aparte del Casón del Buen Retiro, que ya forma parte del conjunto del Museo del Prado de Madrid, lo único que queda en la actualidad del antiguo Palacio del Buen Retiro es un ala del edifico de las que daban al gran patio, es decir, uno de los cuatro lados del cuadrado que lo rodeaba. Hasta hace poco albergaba el Museo del Ejército, y en el futuro también formará parte del conjunto de edificios del museo. En su interior se halla el Salón de Reinos.

era una gran sala de planta rectangular de aproximadamente 10 × 30 m y ocupaba una de las alas del palacio. Se encargaron doce cuadros de batallas a los mejores pintores del momento: Velázquez, Maíno, Zurbarán, Jusepe Leonardo y Cajés, entre otros, además de diversas obras para completar la decoración. La mayor parte de ellas se encuentra en la actualidad en el Museo de Prado.

Las batallas representadas tuvieron lugar en un plazo muy breve de tiempo y, aunque magnificadas por el régimen, con el paso del tiempo todas resultaron bastante irrelevantes desde el punto de vista político. La propaganda al servicio del rey Felipe IV, e indirectamente también de su valido el Conde-Duque de Olivares, se concibió y planificó en varios frentes. Además de estos magníficos cuadros, en muchos casos, las batallas fueron llevadas también al teatro de la mano de los mejores dramaturgos, aunque el orden de ejecución no fue siempre pintura-obra teatral.

Por ejemplo, el 2 de junio de 1625, las tropas asediadas de la ciudad de Breda, bajo el mando de Justino de Nassau, se rindieron al vencedor, Ambrosio de Spínola, marqués de los Balbases. Ese mismo año, Calderón de la Barca estrenó su obra teatral *El sitio de Breda*. La escena culminante es la entrega de las llaves:



Posible disposición de La rendición de Breda *y de* La defensa de Cádiz contra los ingleses *en el Salón de Reinos del Palacio del Buen Retiro (fuente: FMC).*

Justino:

Aquestas las llaves son
de la fuerza, y libremente
hago protesta en tus manos
que no hay temor que me fuerce
a entregarlas, pues tuviera
por menos dolor la muerte. [...]

Spínola:

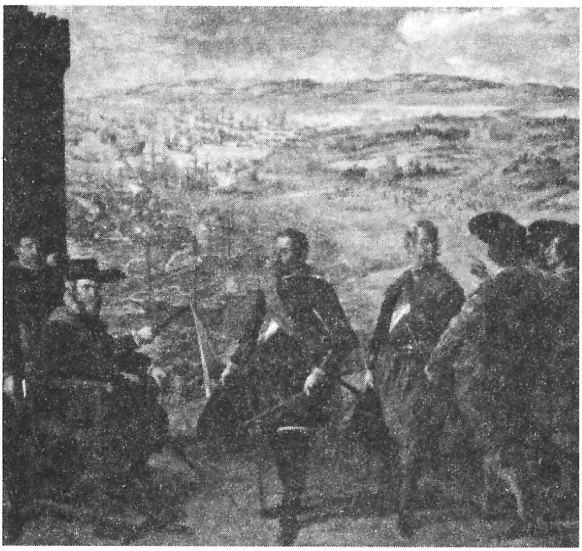
Justino, yo las recibo,
y conozco que valiente
sois, que el valor del vencido
hace famoso al que vence.
Y en el nombre de Filipo
Quarto, que por siglos reyne,
con más vitorias que nunca,
tan dichoso como siempre,
tomo aquesta posesión.

Sin duda, esta escena teatral inspiraría después a Velázquez en la composición de *La rendición de Breda*.

Pintar una batalla

Otra de las batallas encargadas para decorar el Salón de Reinos es *La defensa de Cádiz contra los ingleses*, un óleo sobre lienzo de 302 × 323 cm, pintado por Francisco de Zurbarán y que se conserva en el Museo del Prado.

El primero de noviembre de 1625, una escuadra inglesa compuesta por cien naves y diez mil hombres, al mando de sir Edward Cecil, vizconde de Wimbledon, atacó la ciudad de Cádiz. La defensa de la plaza estuvo a cargo de don Fernando Girón y Ponce de León, que había sido consejero de guerra y se había ofrecido a Felipe IV como gobernador de Cádiz a pesar de padecer gota y hallarse prácticamente impedido. Zurbarán lo representa por eso sentado, dando órdenes a don Diego de Ruiz, su teniente de maestre de campo. También tomó parte en la defensa Juan Manuel Pérez de Guzmán y Silva, duque de Medina Sidonia y capitán general de Andalucía, que probablemente es el caballero de negro, con la cruz de Santiago, de pie, detrás de la silla de Girón.



La defensa de Cádiz contra los ingleses,
de Francisco de Zurbarán, Museo del Prado, Madrid.

La mañana del 8 de noviembre el combate se inclinó del lado castellano y, desmoralizadas y fuertemente hostigadas, las tropas inglesas abandonaron el campo de batalla. Esta real hazaña, como en el caso de la de Breda, sería llevada al teatro por Rodrigo de Herrera bajo el título *La fe no ha menester de armas y venida del inglés a Cádiz*.

Llama la atención la calidad descriptiva de los retratos, seguramente debido al escaso margen de años pasados desde el hecho conmemorado y la realización de la pintura. El rey y el Conde-Duque de Olivares conocían sin duda a los protagonistas y, por tanto, el cuadro tenía que cumplir la función, entre otras, de retrato colectivo. Pero, a la vez, la composición resulta extraña: los dos planos, el primero con los personajes y el segundo con el paisaje, parecen no encajar bien. Se podría pensar que se representaba una escena teatral, es decir, los personajes sobre un escenario y el paisaje plano, como decorado sin profundidad, al fondo. Además, los personajes se ven con aspecto fusiforme.

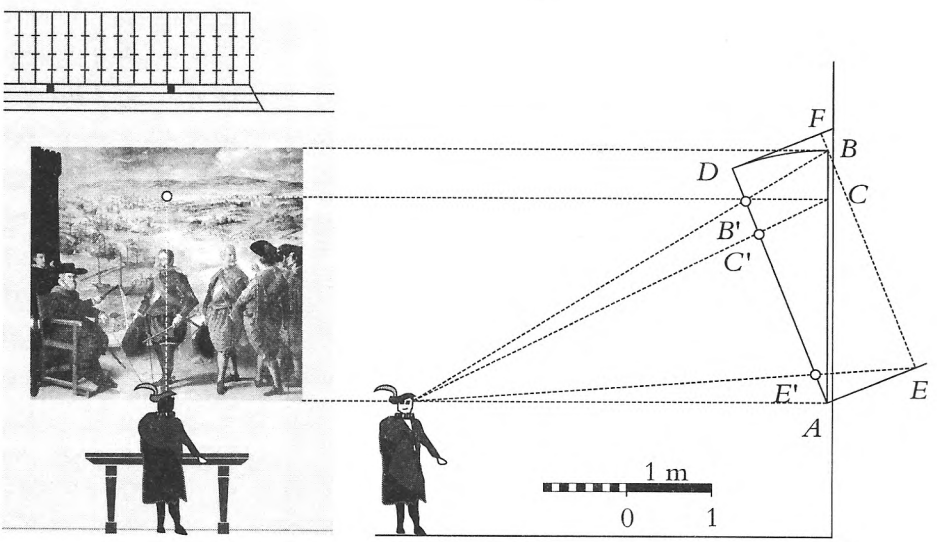
En su actual ubicación del Museo del Prado, el cuadro ocupa una pared entera de una sala pequeña, a menos de medio metro del suelo. Todo en el cuadro da la sensación de estar mal concebido, como si Zurbarán no dominara bien el dibujo en perspectiva; de hecho, eso es lo que afirman muchos críticos al contemplar la obra.

Mirando con ojos matemáticos veremos que la causa de esas discrepancias hay que buscarla en la ubicación concreta actual en el museo. Zurbarán no ejecutó esta

obra torpemente; por el contrario, el gran pintor ha deformado el dibujo en el cuadro a propósito, para que, una vez colocado en el sitio para el que había sido concebido, quedaran compensadas las deformaciones visuales del ojo del espectador, logrando así una imagen perfecta en su cerebro.

Una mirada matemática sobre *La defensa de Cádiz*

La primera hipótesis que manejamos fue que el cuadro había sido concebido para ser colgado más arriba y nos propusimos determinar cuánto. Si situamos un rectángulo en alto y lo observamos dirigiendo nuestra mirada al centro, se transformará en un trapecio isósceles. La deformación dependerá de la altura h a la que lo situemos y de la distancia d, medida en el suelo, entre el cuadro y el observador. El valor de d se estima situando las medidas del cuadro en unos 4,5 m. Sólo quedaba por determinar h, o mejor, cuánto se estrecha la base superior del trapecio y su altura en función de h. Con algunos cálculos trigonométricos no resulta difícil aproximar magnitudes en función de h. Los cálculos conducen a la conclusión de que lo más plausible era que el cuadro fuera colgado de modo que el lado inferior del marco quedara a la altura de los ojos del espectador. Pero, como veremos, con algunos cálculos geométricos el razonamiento resulta mucho más sencillo. Partiremos de esa hipótesis y trataremos, experimentalmente, de confirmarla.



Proyección de la mirada del espectador en La defensa de Cádiz *(fuente: FMC).*

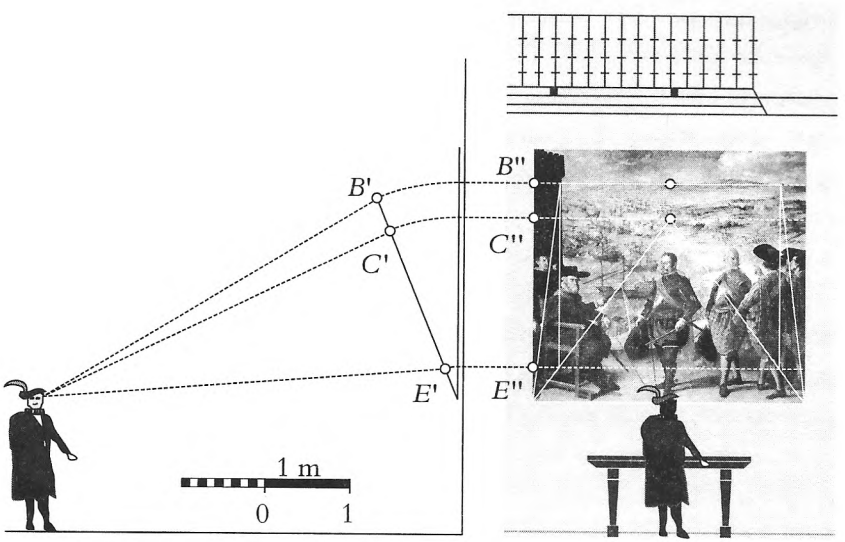
Situémonos en el Salón de Reinos, delante del cuadro de Zurbarán, más o menos a 4,5 m de distancia, y supongamos que está colgado a la altura de nuestros ojos, como muestra la figura anterior. El punto de fuga de nuestra imagen, al mirar el paisaje, lo situamos en la parte central de la línea del horizonte (señalado con un punto en la figura). Construiremos en el lado derecho el perfil de la escena. Para ello transportamos la medida del cuadro, AB, y el punto de fuga, C. El espectador dirige su mirada hacia C, y la imagen virtual de lo que ve se forma, por tanto, sobre un plano perpendicular a la línea que va de su ojo a C, el plano AD. El cuadro se ve aparentemente inclinado, es decir, la parte superior está más lejos del espectador que la inferior, lo que hace que la veamos más estrecha. Además, la inclinación aparente provoca que el cuadro se vea más estrecho en altura. Vamos a tratar de calcular cuánto.

El cuadro lo vemos como si estuviera inclinado dentro de una caja, la señalada por las líneas $AEFD$. Proyectamos el extremo superior del cuadro B en esa caja, obteniendo el punto E. Si el espectador lanza una visual al punto E y otra, al B, estas visuales incidirán en el plano de la imagen en los puntos E' y B' respectivamente. Por último, la visual lanzada al punto de fuga C incide en el plano de visión en el punto C'. Se trata ahora de recomponer sobre el plano de la imagen lo que el espectador ve.

Sobre el plano de la imagen habíamos determinado tres puntos, B', C' y E'. Transportaremos ahora las medidas que determinan estos puntos sobre el cuadro para calcular así las dimensiones del trapecio que ve el espectador.

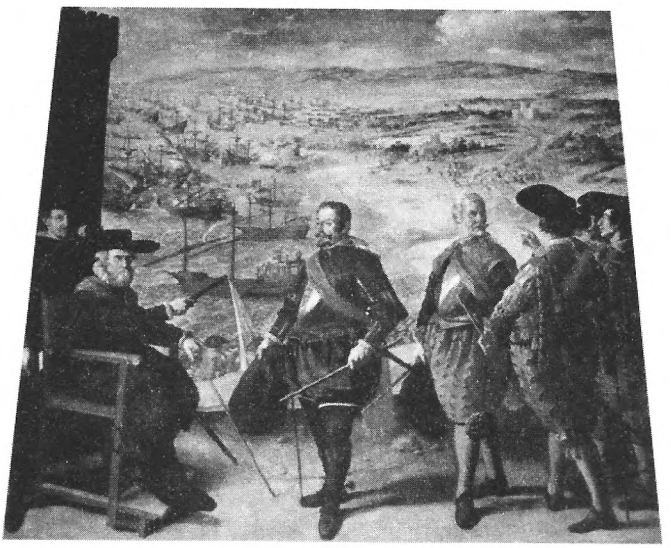
Situemos de nuevo al espectador a la derecha, ante el cuadro. Transportamos B' C' y E', que se convierten en B'', C'' y E'' respectivamente. El punto B'' determina la altura a la que el espectador ve la parte superior del marco. El punto C'' determina la de la línea del horizonte; en su punto central convergen las líneas de perspectiva del suelo de la escena. Por último, trazando una horizontal a la altura de E' obtenemos dos puntos de corte con las líneas convergentes hacia el punto de fuga. Elevando éstos verticalmente obtenemos sobre la línea horizontal por B'' otros dos puntos. Por último, uniendo esos dos puntos con la línea de la base del cuadro, determinamos el trapecio en el que se inscribe la imagen virtual que ve el espectador.

Si nos fijamos en dicho trapecio, marcado con una línea blanca en el gráfico, incluso podemos apreciar la sensación de inclinación aparente hacia atrás. La imagen del cuadro se verá deformada anafóricamente, hasta quedar encerrada en el trapecio.



Deformación de La Defensa de Cádiz *a ojos del espectador (fuente: FMC).*

Gracias a los programas de tratamiento de imágenes no resulta muy complicado realizar esta transformación; se trata de una «proyectividad». Aplicada sobre el cuadro usando alguno de estos programas, podremos, finalmente, hacernos una idea de qué es lo que vería un espectador que se paseara por el Salón de Reinos del Palacio del Buen Retiro y se detuviera ante el cuadro *La defensa de Cádiz contra los ingleses* de Zurbarán. La imagen que contemplaría sería más o menos la que se observa en la imagen:



Proyección anamórfica de La defensa de Cádiz contra los ingleses *simulando la visión de un observador en su ubicación original.*

Los personajes se han estilizado, resultan menos braquicéfalos y más delgados, pero, sobre todo, la vista de la bahía de Cádiz ha ganado profundidad y realismo: ahora parece un paisaje y no un decorado. Todo parece haber ocupado de nuevo su lugar y su proporción.

Imaginamos en la mente del lector un cierto grado de escepticismo. ¿Pensó Zurbarán realmente todo eso para hacer su cuadro? En este caso creemos poder afirmar que la respuesta es «sí». O él o algún otro, quizás el pintor responsable de la concepción global de toda la iconografía del Salón de Reinos, o tal vez Velázquez. Alguno de ellos concibió y calculó la deformación necesaria para que al ser vistos desde el centro del salón se vieran «bien». De hecho, el cuadro de Zurbarán no es el único que presenta este tipo de anamorfosis, pues el famosísimo cuadro de *Las lanzas*, de Velázquez, ofrece, de manera mucho menos aparente, el mismo tipo de deformación.

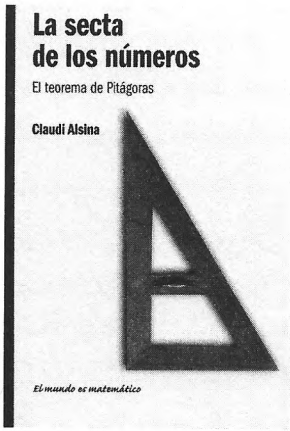
La defensa de Cádiz ocupaba el espacio del final de uno de los laterales largos del Salón de Reinos, y por este motivo es un poco más estrecho que *La rendición de Breda*. La inclinación hacia el centro de los lados del trapecio no depende de la anchura del cuadro sino sólo de su altura. Como ésta es similar en ambos, los lados se inclinan hacia dentro el mismo ángulo, de manera que, al ser *Las lanzas* más ancho, el efecto, en proporción, resulta menor, y es más difícil percibirlo a simple vista. Por último, Justino de Nassau y el mismo Ambrosio de Spínola, en el centro del cuadro de Velázquez, hacen una reverencia, contribuyendo así a disminuir el efecto fusiforme de los personajes del cuadro de Zurbarán. La acertada presencia de las lanzas en la composición contribuye a disimular la anamorfosis, aunque si aplicásemos la misma trasformación que en *La defensa de Cádiz*, veríamos que la proporción de las formas también mejoraría.

Como señalamos antes, del Palacio del Buen Retiro sólo se conserva el Casón del Buen Retiro, ahora exento, los jardines y el ala norte, en la que se encuentra el Salón de Reinos. Hasta hace poco tenía su sede allí el Museo del Ejército. Esperamos que en un futuro, restaurado e incorporado al Museo del Prado, el Salón de Reinos vuelva a lucir como en tiempos de Felipe IV, con las *batallas* en su ubicación original. Así se podrá ver en la realidad lo que hasta ahora sólo hemos podido ver con nuestra *mirada matemática*.

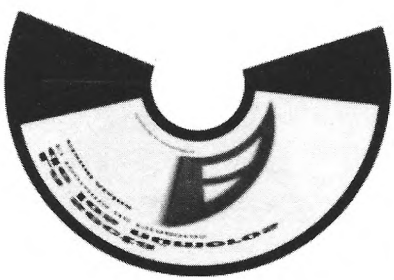
Anamorfosis y otras deformaciones

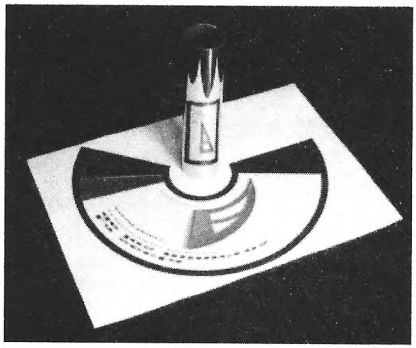
El diccionario de la Real Academia Española define la palabra anamorfosis como «Pintura o dibujo que ofrece a la vista una imagen deforme y confusa, o regular y

acabada, según desde donde se la mire». Una anamorfosis es, por tanto, una proyección o perspectiva que requiere que quien la vea use algún dispositivo especial, como un espejo cilíndrico o cónico, o que se sitúe en una posición específica para ver la imagen reconstruida. Con ayuda del ordenador podemos deformar una imagen para que, al verla reflejada en un espejo cilíndrico recupere su aspecto original. Partimos, por ejemplo, de la portada de un libro:



Transformamos la imagen para que sea vista usando un espejo cilíndrico de 35 mm de diámetro con un ángulo de visión de 45°. El resultado es el que se observa en la imagen inferior izquierda. Por último, situando adecuadamente el espejo veremos la imagen de la derecha:





Lo que ahora podemos hacer fácilmente con la ayuda del ordenador, en otros tiempos se hacía cuadriculando la imagen y deformando luego cada cuadrado en un sector de corona circular.

LA ANAMORFOSIS MÁS FAMOSA DE LA HISTORIA

La anamorfosis que más ha dado que hablar es sin duda la «mancha» que aparece centrada en la parte inferior del cuadro *Los embajadores*, pintado por Hans Holbein el Joven.

Los embajadores, *de Hans Holbein el Joven (1533), National Gallery, Londres.*

El cuadro está plagado de símbolos relacionados con la matemática. Los dos personajes retratados son, a la izquierda, Jean de Dinteville, a la sazón embajador de Francia en Inglaterra y quien encargó la pintura a Holbein; a la derecha se encuentra Georges de Selve, obispo de Lavaur y amigo de Dinteville, con el que compartía su afición a las matemáticas. Como Selve también fue embajador ante el emperador romano germánico, la república de Venecia y la Santa Sede, el cuadro es conocido como *Los embajadores*. En el mueble que ocupa el lugar central del cuadro hay una colección de objetos que representan las aficiones de los dos personajes: la aritmética, la geometría, la música y la astronomía, que constituían, junto con la gramática, la dialéctica y la retórica, las siete artes liberales, las cuatro primeras, el *quadrivium*, y las tres últimas, el *trivium*. Pero lo que más llama la atención es esa mancha que algunos han llamado «hueso de sepia». Suspendida en el aire, parece no formar parte del cuadro. Se trata de una anamorfosis; basta con agacharse y mirar casi de perfil el cuadro para observar que la mancha se transforma en una calavera humana, dibujada con esa extraña perspectiva anamórfica.

El «hueso de sepia», con la anamorfosis corregida, muestra la imagen de una calavera.

Velázquez y el espacio abstracto

Fijaremos ahora nuestra mirada matemática sobre el cuadro *Pablo de Valladolid*, que se encuentra también en el Museo del Prado y que Diego Velázquez pintó en 1633. El retratado (1587-1648) era un actor de la corte, y Velázquez lo representa en plena declamación.

Pablo de Valladolid, *de Diego Velázquez (1633), Museo del Prado, Madrid.*

El gran pintor francés Édouard Manet, al visitar España en 1865, quedó maravillado por la perfección del lienzo y de él dijo: «Quizás el trozo de pintura más asombroso que se haya realizado jamás es el cuadro que se titula *Retrato de un actor célebre en tiempo de Felipe IV (Pablillos de Valladolid)*. El fondo desaparece. Es aire lo que rodea al hombrecillo, completamente vestido de negro y lleno de vida».

La primera reacción de quien mira con ojos matemáticos este cuadro es como la que sintió Manet: asombro, perplejidad. ¿Dónde está este Pablo de Valladolid situado? ¿Sobre qué flota este personaje? ¿En qué espacio está contenido?

La idea de espacio

La idea de espacio es uno de los grandes conceptos de la cultura occidental y, como tal, surgió en la antigua Grecia. Individuar objetos por observación, abstraer a partir de ellos para concebir la «idea», en el sentido platónico del término, es un proceso complejo pero compresible en su desarrollo. Cuando un niño aprende una lengua va adquiriendo el conocimiento de las palabras. Capta, por ejemplo, el concepto de «mesa» a partir de las mesas que ha observado. Partiendo de una mesa concreta, pongamos una clásica mesa de cuatro patas, pronto prescinde del número de patas (las hay de una, de tres, de cuatro y de más patas, e incluso sin ellas, sujetas a la pared). Prescinde de la forma del sobre de la mesa, que no ha de ser necesariamente rectangular (los hay redondos, cuadrados, triangulares...). Prescinde incluso de la horizontalidad del plano del sobre de la mesa, ya que un pupitre no es sino una mesa con el sobre ligeramente inclinado para facilitar la tarea de escribir.

Definir es, matemáticamente hablando, hacer una partición en el conjunto de todos los objetos, dando un criterio, un conjunto de características que nos permita, ante un objeto cualquiera, saber si pertenece o no a la categoría de lo definido. Por eso es interesante enfrentarse a la tarea de definir, a su dificultad. Basta para ello que nos hagamos una pregunta sencilla: «¿Qué es una mesa?». El primer intento no nos resultará satisfactorio, no abarcará todas las mesas posibles. Si insistimos nos veremos implicados en el proceso de determinar qué características son esenciales a la idea de «mesa» y cuáles no y, por consiguiente, cuáles pertenecen a mesas concretas, pero no a todas las mesas. Es una forma directa de enfrentarnos a la abstracción, al pensamiento lógico-matemático; el ejercicio derivará al ámbito de lo matemático. Y es que, como decíamos, la idea misma de definición es, en esencia, matemática.

Pero si el proceso de abstracción para pasar de los objetos a los conceptos es relativamente asequible, concebir ideas como la de «espacio» forma parte de un proceso distinto. No nos estamos refiriendo a objetos, sino a algo que los contiene. En efecto, quizá la característica principal del concepto de espacio sea la de contener cosas. Por tanto, tiene sus orígenes vinculados a la idea de casa, de templo, del gran contenedor de todo lo tangible, lo aprehensible con los sentidos. La idea de espacio se convierte así en una de las categorías de mayor peso y relevancia del pensamiento occidental.

Sin embargo, mientras que los conceptos vinculados a lo tangible, a lo perceptible de manera directa, necesitan de la experiencia perceptora y de la inteligencia de

un modo pasivo, la idea de espacio requiere una actuación operativa, racional y, por tanto, de alguna manera matemática. Por eso no es de extrañar que su origen coincida con el de otros conceptos matemáticos, y que haya que buscarlo posiblemente en la escuela pitagórica, en el siglo VI a.C.

La idea de espacio se asocia de manera indisoluble al concepto de «continente», y también, dado el caldo de cultivo matemático en el que nace, a los de posición y distancia. Es el espacio en su origen y, por tanto, espacio geométrico. Zenón de Elea, un siglo más tarde que Pitágoras, volvería a hablarnos del espacio en sus famosas paradojas espacio-temporales.

El siguiente paso en este camino lo da Platón en el *Timeo,* en la segunda mitad del siglo IV a.C. Platón afirma:

> «Hay ser, espacio y devenir, tres realidades diferenciadas, y esto antes de que naciera el mundo».

Aborda en primer lugar el ser y el devenir y afirma de dichas realidades:

> «Mientras que la primera [el ser] va siempre acompañada del razonamiento verdadero, la segunda [el devenir] es irracional; la una no puede ser alterada por la persuasión, mientras que la otra está abierta a ella y hay que decir que aunque cualquier hombre participa de esta última, de la inteligencia sólo los dioses y un género muy pequeño de hombres. Si esto se da de esta manera, es necesario acordar que una es la especie inmutable, no generada e indestructible, y que ni admite en sí nada proveniente de otro lado ni ella misma marcha hacia otro lugar, invisible y, más precisamente, no perceptible por medio de los sentidos, aquello que observa el acto de pensamiento. Y lo segundo lleva su mismo nombre y es semejante a él, perceptible por los sentidos: generado, siempre cambiante y que surge en un lugar y desaparece nuevamente, captable por la opinión unida a la percepción sensible».

Así, el «ser» son las ideas, en el sentido platónico del término, inmutables, intangibles y sólo alcanzables a través del razonamiento verdadero y la inteligencia. El «devenir» es la realidad perceptible con los sentidos, cambiante, generada con un inicio y un final, perecedera, semejante al ser pero distinta como realidad de él. Entre ambas realidades está el espacio:

> «Además, hay un tercer género eterno, el del espacio, que no admite destrucción, que proporciona una sede a todo lo que posee un origen, captable por un razonamiento bastardo sin la ayuda de la percepción sensible, creíble con dificultad, y, al mirarlo, soñamos y decimos que necesariamente todo ser está en un lugar y ocupa un cierto espacio, y que lo que no está en algún lugar en la tierra o en el cielo no existe».

Todas las características importantes de nuestra idea intuitiva actual de espacio están contenidas en esta definición platónica.

Es el espacio, por tanto, algo a caballo entre el ser y el devenir. Y si al ser se llega sólo mediante el razonamiento verdadero, el uso estricto de la razón, a la idea de espacio llegamos sólo a través de un razonamiento bastardo. El espacio, aunque goza de alguna de las características del ser —es inmutable, indestructible y no se transforma—, es contenedor de lo tangible, de lo perceptible por los sentidos, y eso lo aleja de la esencia del ser. Es el espacio el que da naturaleza a lo que existe, porque sólo existe lo que ocupa un lugar y una posición.

Quizá sea en este ámbito, a mitad de camino entre el «ser» y el «devenir», donde se sitúa lo que se aprende mediante el «razonamiento bastardo», el que Platón reserva al pensamiento matemático, donde está lo que «es difícil de creer».

Si decíamos que la primera idea de espacio es la de contenedor de nosotros mismos, la casa, o de los dioses, el templo, no es de extrañar que, cuando la idea de espacio se convierte en una idea cultural y trasciende el lenguaje erudito para pasar al vocabulario común, sea la arquitectura —específicamente la arquitectura griega— la primera plasmación estética del espacio, el primer contacto entre la idea matemática de espacio y el mundo del arte.

Si el espacio es inmutable, la arquitectura es una manera de organizarlo, de trazar líneas de referencia que lo estructuren, de levantar paredes que lo acoten, que definan subespacios contenidos en él, pero a imagen y semejanza del espacio en sí. Las matemáticas actúan así, de algún modo y desde el principio, como mediadoras en el proceso de virtualización de lo que nos rodea, aportando la geometría, que en simbiosis con el arte es la base de la arquitectura.

No sucede lo mismo con la pintura, al menos no simultáneamente. En la pintura el proceso es mucho más lento y trabajoso. La virtualización de la realidad, de lo tangible, sobre la superficie de un cuadro entraña una dificultad sustancialmente distinta: mientras que concebimos el espacio en tres dimensiones, la superficie del soporte pictórico es plana. Se precisa de un proceso de conversión para que la ma-

nera en la que percibe el ojo, mirando el espacio, coincida con la que aprecia virtualmente al mirar el cuadro.

De este deseo de hacer verosímil lo que se ve en el cuadro nace la necesidad de encontrar formas de representación. Y, aunque los primeros intentos intuitivos se ven ya en algunos frescos de Pompeya, la técnica adecuada no se descubrió hasta el Renacimiento. Como hemos visto, el momento para la pintura, en relación con el concepto de espacio, llegó en el *quattrocento* con la invención de la perspectiva.

Con ella nació en pintura un nuevo concepto de lo que es el espacio: ya no es tan sólo el contenedor de los objetos reales —digamos los que pueden ser «retratados»—, sino también de los objetos imaginados que, pintados, se vuelven virtualmente reales.

El espacio de Descartes y de Newton

En el siglo XVII la idea matemática de espacio comenzó a evolucionar. Fueron varios los intentos de definir mejor qué es el espacio, a partir de la idea platónica. Descartes lo definió así:

> «...El objeto de los geómetras, que concebía yo como un cuerpo continuo o un espacio infinitamente extenso en longitud, anchura y altura o profundidad, divisible en varias partes que pueden tener varias figuras y magnitudes y ser movidas o trasladadas en todos los sentidos, pues los geómetras suponen todo eso en su objeto».
>
> (Descartes, 1637)

Newton, por su parte, formuló la idea de «espacio absoluto»:

> «El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil».
>
> (Newton, 1687)

Como vemos, ambas definiciones continúan reflejando el mismo paradigma de un espacio contenedor de lo que existe, aunque con un grado mayor de abstracción, definido de una manera más precisa. Pero continúa siendo un espacio ligado a la idea de la naturaleza, que sigue tratando de interpretar lo real en cuanto perceptible por los sentidos. Sin embargo, es ya un espacio abstracto, que tiene existencia más

allá de la propia existencia de los objetos que contiene, sometido a reglas, «analizable geométricamente».

Pablo de Valladolid

El cuadro de Velázquez que pretendemos mirar con ojos matemáticos y la idea de espacio enunciada por Descartes son simultáneos en el tiempo, y fundamentalmente, concordantes en la concepción. El fondo de este cuadro de Velázquez fascina porque no es real, en el sentido de representar algo concreto, salvo el espacio en sí, en toda su abstracción. Ortega y Gasset, reflexionando sobre el fondo de este cuadro, afirma:

> «Se trata de una serie de pigmentos que no pretenden representar objeto alguno ni real ni imaginario, ni preciso ni difuso. Lo que nos ponen delante no es cosa ninguna, ni es siquiera un elemento. Aquello no es tierra, no es agua, no es aire. En la intención con que el autor dio estas pinceladas nos es, desde luego, palmario que se propone desterrar de nuestra vista toda alusión

Tres cuadros inspirados en el Pablo de Valladolid *de Velázquez. De izquierda a derecha:* Philippe Rouvière en el papel de Hamlet, de *Édouard Manet (1865-1866), National Gallery of Art, Washington;* Francisco Cabarrús, de *Goya (1788), Banco de España, Madrid;* El pífano, de *Édouard Manet (1866), Musée d'Orsay, París.*

a figura o forma cualesquiera, vaciar nuestra atención de cuanto no sea el cuerpo del truhán. A este fin embadurna el lienzo con una materia homogénea e informe, en que nada atrae ni distrae, y, además, emplea para ello un color pardusco que no es color de nada, un color inventado ad hoc en el taller para servir exclusivamente a una finalidad de técnica pictórica: destacar la figura de Pablillos y de ella su volumen o corporeidad [...]».

Y añade:

«Reparemos ya aquí en lo poco que nos sirve calificar la pintura de Velázquez como realismo. Pues aun admitiendo por un momento que esta apelación valga para el modo de estar pintado el personaje, no vale para el cuadro, porque el cuadro no es sólo la figura, sino también el fondo, y este fondo no sólo no es realista, sino que ni siquiera es irrealista, sino franca y violentamente des-realista, ya que busca anular en torno toda remembranza de objeto».

Hasta aquí compartimos plenamente el comentario de Ortega que él expresa, además, de una manera magistral. Sin embargo, desde un punto de vista matemático, permítasenos discrepar humildemente cuando afirma para concluir su comentario:

«Velázquez ha querido aquí crear la nada en torno a Pablillos rodeándole de una invención arbitraria que es un mero experimento de taller».

La nada que rodea a Pablo de Valladolid no es una «invención arbitraria», es el espacio en sí, en la concepción matemática de la época, y como tal no es arbitrario. No está dictado por la voluntad o el capricho de Velázquez, está sometido a normas. Es el espacio de Descartes, de Newton, plasmado genialmente en su mínima expresión, apenas un poco de color, apenas una sombra, sin aristas, continuo, infinito, inmóvil, sin relación a nada externo, con la intención única de resaltar la figura de Pablo de Valladolid.

Miramos este cuadro con ojos matemáticos y vemos detrás, en segundo plano, lo que antes sólo era factible imaginar, algo aparentemente imposible de pintar: el retrato del espacio. Por eso, «al mirarlo soñamos y decimos que» Pablo de Valladolid «necesariamente tiene su lugar y ocupa su espacio» y que, justo por esta razón, «este hombrecillo completamente vestido de negro está lleno de vida».

Más allá de este cuadro de Velázquez

El paseo por la idea de espacio sugerido por este cuadro, que hemos iniciado en Pitágoras, no termina en Newton, naturalmente. La creación matemática y la artística han continuado evolucionando desde el siglo XVII hasta nuestros días, y el paralelismo en sus desarrollos ha permanecido en el tiempo.

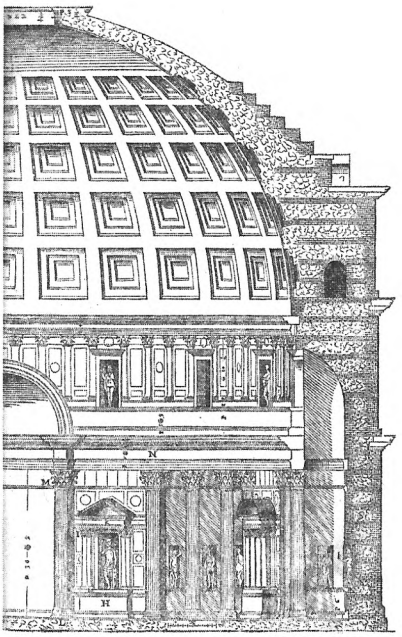
Si el *Pablo de Valladolid* de Velázquez representa el paradigma del espacio cartesiano, del modelo newtoniano, en el primer tercio del siglo XX las Vanguardias y las matemáticas contemporáneas volverían a encontrarse en torno a las nuevas ideas del espacio, concebido como un conjunto de puntos y sus relaciones, entendiendo por punto cualquier género de cosas y por relaciones, cualquier enlace que transforme en red esos puntos.

Capítulo 5

Arquitectura y geometría

Números y formas en el Panteón de Roma

«De entre todos los templos que se ven en Roma ninguno es más célebre que el Panteón, hoy llamado la Rotonda, ni ninguno se ha conservado tan entero, hasta el punto de que se puede ver casi como era cuando fue construido, pero expoliado de estatuas y de otros ornamentos. [...] Se llamó a este templo Panteón, puesto que, además de a Júpiter, estaba consagrado a todos los dioses, o quizás (como señalan otros) porque tiene la figura del Mundo, es decir, Rotonda, que tanto tiene de altura desde el suelo hasta la apertura por donde recibe la luz cuanto mide su diámetro en anchura de un muro al otro. Y del mismo modo que ahora se debe descender al suelo o pavimento, así antiguamente se debía subir a él por medio de algunos escalones.»



Sección del Panteón Romano que aparece en I quattro libri dell'architettura *de Andrea Palladio.*

Con estas palabras comienza su descripción del Panteón de Roma el arquitecto Andrea Palladio (1508-1580). Su geometría es verdaderamente única. Hubo un primer Panteón edificado en torno a los años 25-27 a.C. por Marco Vipsanio Agripa, yerno de Octavio Augusto, como parte de un plan para monumentalizar el Campo de Marte. Agripa, que en aquel entonces ejercía su tercer consulado, lo mandó construir a su cargo. Este primer templo era de planta rectangular, con la cella dispuesta de forma transversal, es decir, más ancha que profunda. Delante del edificio, que estaba

orientado en sentido contrario al actual, se encontraba una plaza circular rodeada por un muro. El edificio original y la plaza tenían en común con el actual el eje de simetría. La cella era de la misma anchura que el diámetro de la rotonda, y la profundidad del edificio original era equivalente a la del pórtico actual.

Un incendio en el año 80 destruyó por completo el edificio, que fue restaurado en época de Domiciano, emperador de 81 a 96. Este nuevo templo, a su vez, sufrió una nueva destrucción en época de Trajano, que imperó de 98 a 117. El actual edificio es, por tanto, el tercero, y fue levantado en época de Adriano (emperador entre 117 y 138), aunque quizá sobre la base de un proyecto encargado por Trajano, poco después de la destrucción del anterior. La obra se alargó en el tiempo, y la inauguración pudo tener lugar durante la estancia de Adriano en Roma, entre los años 125 y 128.

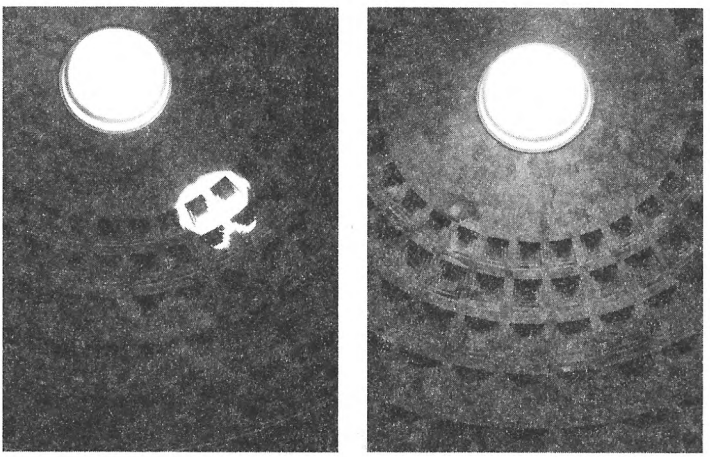
El nombre de Panteón, en opinión de algunos, se debía a la profusión de estatuas de dioses en su interior, aunque según otros, como señala el mismo Palladio, se debía a su forma esférica, que estaría en relación con la bóveda celeste y se asociaría con los siete dioses astros: la Luna, Marte, Mercurio, Júpiter, Venus, Saturno y el Sol, que a su vez corresponden con los siete días de la semana.

El exterior del templo está compuesto en la actualidad por un pronaos octóstilo, es decir, de ocho columnas, sobre el que se extiende un frontón con proporciones distintas de las tradicionales en los templos griegos. Mientras en éstos —por ejemplo, en el Partenón de Atenas— la altura del triángulo del frontón en relación con la altura total del templo tiene una relación de uno a cuatro, en el caso del Panteón romano esta relación es de uno a tres. Es decir, con respecto a los templos griegos, el frontón del templo de Adriano es más alto.

Exterior del Panteón de Roma (fuente: FMC).

El espacio del pronaos, de planta rectangular, se une mediante un prisma a la cella, que es de planta circular. El conjunto de los tres módulos desde el exterior aparece ante el espectador actual como una yuxtaposición de elementos sin una unidad formal que les dé armonía. El cuerpo cilíndrico, de tres pisos, con una cubierta rebajada, que el espectador actual identificaría desde el aire con una especie de platillo volador, parece enorme en proporción con el pronaos, a pesar del escalonamiento que se consigue mediante el cuerpo, de altura intermedia, que sirve de unión entre ambos. La división en tres pisos se marca en el exterior mediante tres cornisas. La segunda de éstas se corresponde con el ecuador de la cúpula interior. El tercer piso exterior, sin equivalente en el interior, aparece debido a la necesidad de sobreelevar el muro perimetral, añadiéndole altura y resistencia, para poder descargar en él las tensiones laterales del enorme peso de la cúpula.

La apariencia exterior del edificio en la época de Adriano era completamente distinta: el cuerpo cilíndrico quedaba oculto desde la gran plaza, mucho mayor que la actual, antepuesta a su fachada y que, porticada en tres de sus lados con una columnata similar a la del pronaos, aunque de menor altura, se cerraba con la fachada principal, formando un todo. El espectador, sumergido en la monumentalidad de la plaza, pasaba de un espacio abierto, rectangular, rodeado de columnas y muy iluminado por el sol romano, a un espacio interior, circular, más oscuro, en el que un chorro de luz intensa de forma troncocónica se colaba por el óculo, generando un ambiente de contrastes de luz y sombras marcadas. Del espacio descubierto se pasaba a otro recogido e interior que, no obstante, apabulla por sus inmensas dimensiones.



Interior del Panteón de Roma; las fotografías muestran la cúpula con su óculo abierto al cielo (fuente: FMC).

La concepción arquitectónica y matemática del conjunto se atribuye a Apolodoro de Damasco (ca. 70-130), que había trabajado para Trajano en otras obras y en especial en la concepción de la Columna Trajana y en el foro que construyó este emperador. También trabajó con Adriano en algunos edificios de la Villa Adriana en Tívoli. Un comentario de Apolodoro sobre las aptitudes arquitectónicas de Adriano, que ya antes de convertirse en emperador era aficionado a la arquitectura —comparó un dibujo de Adriano para una cúpula con una calabaza—, le hicieron caer en desgracia unos años más tarde y le condujeron al exilio y la muerte.

CICERÓN Y EL PALADAR DEL CIELO

Un texto de Cicerón (106 a.C.- 43 a.C.) de su *De la naturaleza de los dioses* (libro II, capítulo 18) subraya la importancia que en la cosmología romana tenía la esfera como forma perfecta y, por tanto, la única posible para el universo. Dice así:

> «Afirmáis que el cono, el cilindro y la pirámide os parecen más hermosos que la esfera [...]. Yo no lo comparto; no obstante, concedamos que esas formas sean más hermosas, por lo menos en su aspecto. Pero ¿qué puede haber que sea más bello que aquella figura que por sí sola inscribe a todas las demás, no presenta aspereza alguna ni tropiezo, no tiene rincones ni esquinas, ni tiene protuberancias ni oquedades? Son dos las formas más excelentes, entre las sólidas el globo, [así traducimos la palabra σφαιρα], y entre las planas, el círculo o el orbe, que los griegos llaman κυκλος. Sólo estas dos formas poseen la propiedad de que todas sus partes sean semejantes entre sí y que su centro equidiste de todos los puntos de su contorno, que es el signo de la perfección en todo. Y si vosotros no sois capaces de entender esto es porque nunca habéis pisado el polvo erudito de la geometría. [...] Aunque Epicuro hubiera aprendido que dos y dos son cuatro, nunca se hubiera dado cuenta de que el universo es esférico. Ocupado en juzgar qué cosa es mejor para el paladar, se olvida de alzar sus ojos a lo que Ennio llama "el paladar del cielo"».

Notemos además que la frase que les dirige a los epicúreos («si vosotros no sois capaces de entender esto, es porque nunca habéis pisado el polvo erudito de la geometría») hace referencia al polvo que usaban los geómetras, esparcido en el suelo o sobre un tablero, para dibujar sobre él las figuras.

YOURCENAR PONE VOZ A ADRIANO PARA DESCRIBIR EL PANTEÓN

La escritora belga Marguerite Yourcenar.

«Nunca la primavera en Roma había sido más suave, más violenta, más azul. Ese mismo día, con una solemnidad más pausada y como en sordina tuvo lugar en el interior del Panteón la ceremonia de su consagración. Había yo corregido personalmente los planes excesivamente tímidos del arquitecto Apolodoro. Utilizando el arte griego sólo para la decoración, como un lujo añadido, para la estructura del edificio me había inspirado en los tiempos primitivos y fabulosos de Roma, en los templos circulares de la antigua Etruria. Quise que el santuario de todos los dioses reprodujera la forma del globo terrestre y de la esfera celeste, el globo en el que se encierran las semilla del fuego eterno, la esfera hueca que todo lo contiene. Era también la forma de aquellas chozas ancestrales de donde el humo de los más arcaicos hogares humanos se escapaba por un orificio practicado en lo alto. La cúpula, construida con toba dura y liviana que parecía recién salida del movimiento ascendente de las llamas, se comunicaba con el cielo por un gran hueco alternativamente negro y azul. El templo, abierto y secreto, estaba concebido como un cuadrante solar. Las horas girarían en el centro del pavimento cuidadosamente pulido por los artesanos griegos; el disco del día reposaría allí como un escudo de oro; la lluvia depositaría un charco puro; la oración huiría como el humo hacia ese lugar vacío donde situamos a los dioses.»

Memorias de Adriano, Marguerite Yourcenar

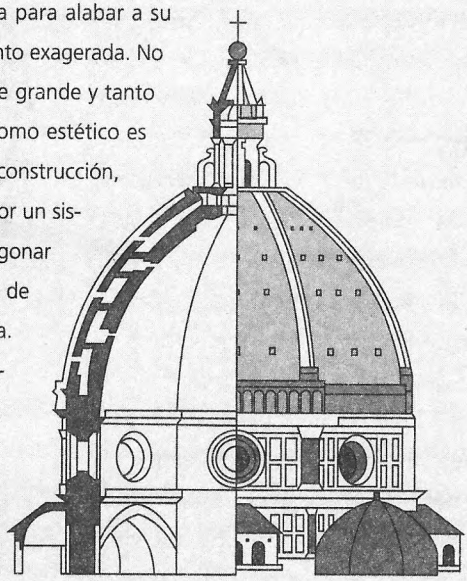
El interior está dominado por la presencia de la cúpula semiesférica que resulta grandiosa. En la parte superior se abre un óculo de 30 pies romanos de diámetro —equivalentes a 8,92 m—, única fuente de luz, sin cobertura. En los días lluviosos el agua penetra por el óculo y cae sobre los mosaicos de cuadrados y círculos que cubren el suelo. El charco proporciona reflejos de la cúpula en el pavimento, produciendo una visión en la que parcialmente podemos ver cómo el reflejo de la cúpula completa la esfera y la cierra en sí misma.

La estructura geométrica de este interior es, a la vez, simple y armoniosa. Se trata de una esfera tangente a un cilindro. El radio de la esfera es igual a la altura interior del tambor. Es decir, si nos situamos en el interior, vemos un cilindro cuya altura es la mitad del diámetro de la base. Dicho cilindro se encuentra dividido en dos pisos por cornisas circulares. La superior coincide con la línea de imposta de la cúpula, y su centro coincide con el de ésta, que resulta así perfectamente semiesférica si no fuera por un corte por un plano horizontal, muy cerca del polo, que determina el óculo, del que ya hemos hablado.

La anchura interior del edificio es de 43,44 m —equivalentes a unos 150 pies romanos—, y el radio de la esfera, de 21,72 m. En el piso inferior de la parte cilíndrica se abren siete capillas de planta alternadamente semicircular —tres de ellas— y trapezoidal —las otras cuatro—. Todas ellas son dístilas, es decir, el vano está partido por dos columnas, excepto la principal, que hace las veces de ábside y se sitúa frente a la puerta de entrada. Este ábside es también dístilo, pero las columnas en lugar de partir el vano, se sitúan a los lados. Además, se abre un octavo nicho en el muro de carga, que corresponde al acceso al templo.

«UNA CÚPULA CAPAZ DE CUBRIR A TODO EL PUEBLO TOSCANO»

La frase de Alberti en *De pictura,* escrita para alabar a su amigo Filippo Brunelleschi, es de todo punto exagerada. No obstante, el *Cupolone* es verdaderamente grande y tanto desde el punto de vista arquitectónico como estético es una maravilla digna de ser admirada. Su construcción, sin elevar andamios desde el suelo, sino por un sistema autosustentante, sólo se puede paragonar a la cúpula del Panteón de Roma, pero la de Brunelleschi es mucho más ligera y esbelta. Para los artistas y humanistas del *quattrocento,* esta cúpula es la demostración de que el mundo artístico y científico de la Antigüedad que tanto admiraban, así como la perfección de sus obras, era algo alcanzable y superable por ellos mismos, quince siglos más tarde.

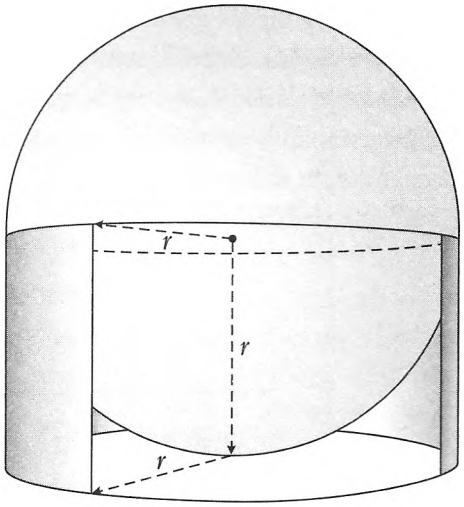


El Cupolone, *de Filippo Brunelleschi (fuente: FMC).*

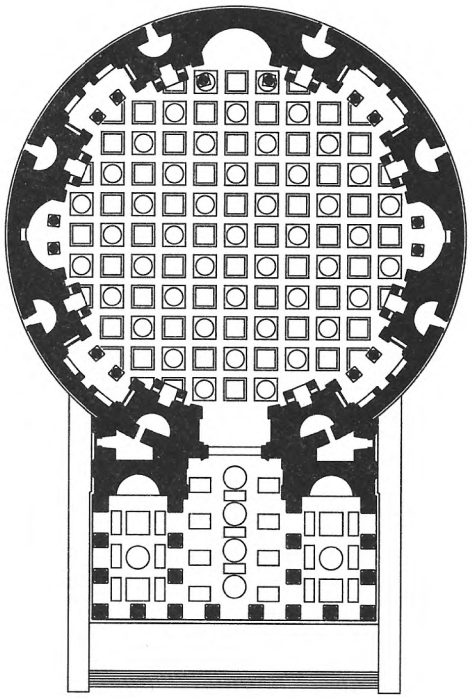
El pavimento, que es en esencia el original, es ligeramente convexo, para hacer que la lluvia, que cae en su interior a través del óculo, pueda salir por los canales de desagüe, que se encuentran bajo el suelo. El dibujo del pavimento es una especie de ajedrezado de cuadrados enmarcados que contienen, dispuestos de manera alternada, círculos y cuadrados concéntricos de menor tamaño. La alternancia comienza en el centro, en el que hay un cuadrado con un círculo en su interior y se extiende desde ese punto en las dos direcciones del plano.

La cúpula, que, para que resultara más ligera, fue realizada usando un hormigón de argamasa y piedra porosa, toba y lava, se levantó por el procedimiento del encofrado. La superficie interior está decorada con cinco órdenes de 28 casetones cada uno, que además de una finalidad decorativa sirven asimismo para aligerar el peso total de la estructura.

El ángulo central entre el ecuador de la cúpula y el paralelo superior del último orden de casetones es de 51°. Los paralelos intermedios dividen el arco que va del ecuador al paralelo superior en cinco trozos iguales. Es decir, todos los casetones son iguales en altura, y disminuyen en anchura a medida que van subiendo de un orden al siguiente.

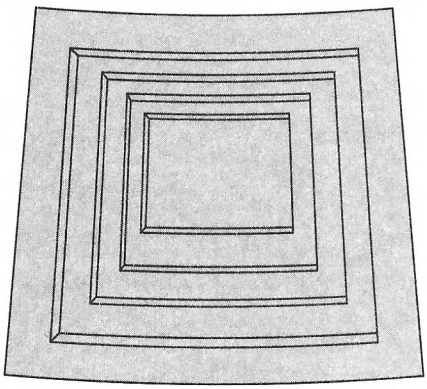


Esquema geométrico del interior del Panteón de Roma (fuente: FMC).

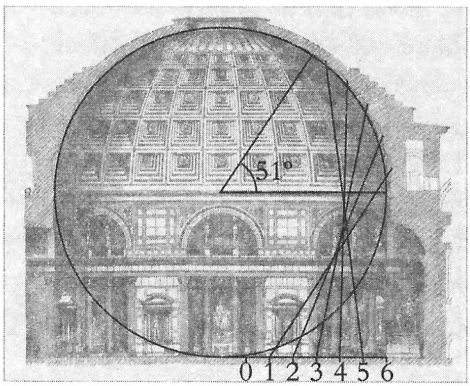


Planta del Panteón de Roma, siglo II d.C. (fuente: FMC).

Los biseles superiores de cada casetón están orientados hacia el centro de la esfera, mientras que los inferiores de cada nivel apuntan hacia un círculo imaginario trazado en el suelo. Si dividimos un radio del círculo de la planta en siete partes iguales y trazamos por ellas seis circunferencias, numerándolas desde el 0 para la más pequeña hasta el 5 para la mayor, los biseles inferiores de cada orden de casetones apuntan hacia la circunferencia correspondiente a su número de orden.



Casetón diseñado para ser visto en perspectiva desde el suelo (fuente: FMC).



Sección del Panteón de Roma, con indicación de los puntos de convergencia de los biseles inferiores de los casetones.

Si nos fijamos bien, podemos observar que el número siete y sus múltiplos aparecen profusamente en la concepción del Panteón. Hay siete capillas y veintiocho casetones en cada uno de los órdenes en la cúpula. Los anillos de casetones que cubren parcialmente la cúpula son, sin embargo, cinco. Sin entrar en misticismos, nada propios de la matemática, ya que casi siempre rayan en la especulación más o menos imaginativa, hemos de señalar que el probable motivo de estos números sea astronómico. Así, la correspondencia de los anillos de casetones, con circunferencias en el suelo, podrían asociar éstas con las órbitas de los cinco planetas. El Sol sería el disco de luz proyectado a través del óculo en el suelo, y la Luna, el propio astro, que algunos días al año se alcanza a ver mirando hacia el cielo. Los veintiocho casetones, cuatro por siete, representarían cada uno de los días de un ciclo o mes lunar que se divide en sus cuatro fases, cada una de una semana de duración. Pero estas observaciones hay que tomarlas como lo que son, meras hipótesis interpretativas.

El Panteón, en su conjunto, se presenta como una obra calculada, medida con precisión y no sólo para lograr el equilibro físico necesario para sustentar la cúpula más grande del mundo antiguo, sino también para producir en el que pasea por su interior un efecto de armonía y de unidad.

ESFERA Y CILINDRO. CICERÓN Y ARQUÍMEDES

Como ya hemos señalado, a Marco Tulio Cicerón le interesaba la geometría, pero también, por lo visto, los geómetras. Según cuenta él mismo, en el año 75 a.C. visitó Sicilia y descubrió allí la tumba de Arquímedes, que identificó al encontrar encima de ella una lápida, sobre la que aparecía grabada una esfera inscrita en un cilindro. La leyenda dice que el sabio siracusano consideraba que su mayor descubrimiento matemático había sido probar que la esfera tiene por volumen y por superficie las dos terceras partes del volumen y de la superficie del cilindro circunscrito.

Llamando r al radio de la esfera, el cilindro circunscrito tendrá r como radio de la base, y como altura, el diámetro del cilindro, es decir, $2r$. Si llamamos V_s al volumen de la esfera y V_c al del cilindro, se verifica:

$$V_c = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

$$V_s = \frac{2}{3}V_c = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Del mismo modo, llamando S_s a la superficie de la esfera y S_c a la superficie total del cilindro —la lateral más la de las dos bases—, se verifica:

$$S_c = 2\pi r \cdot 2r + 2 \cdot (\pi r^2) = 6\pi r^2.$$

$$S_s = \frac{2}{3}S_c = \frac{2}{3} \cdot 6\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

Aplicando estas fórmulas al Panteón, y puesto que el radio es de 21,72 m, obtenemos las siguientes medidas interiores:

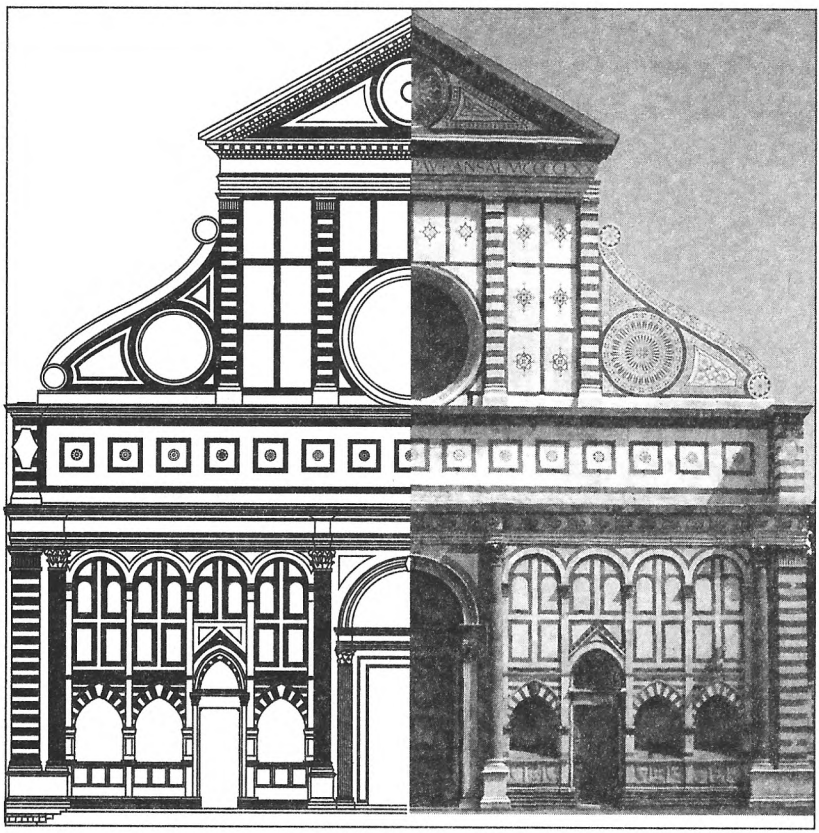
$$V_{Panteón} = \frac{1}{2}(V_c + V_s) = \frac{1}{2}(2\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{5}{3}\pi r^3 = 53.651 \text{ m}^3.$$

$$S_{Panteón} = \frac{1}{2}(S_c + S_s) = \frac{1}{2}(6\pi r^2 + 4\pi r^2) = 5\pi r^2 = 7.410 \text{ m}^2.$$

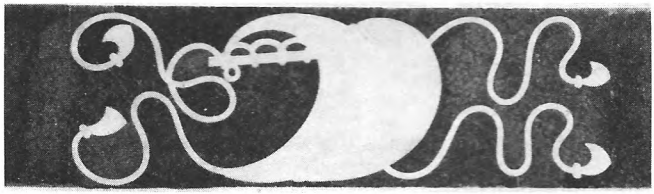
Sin contar los salientes y los entrantes, la superficie interior total del Panteón, incluyendo la del suelo, es cinco veces la de este último, que es de 1.482 m² aproximadamente.

Santa Maria Novella. Arquitectura humanista y grupos de Leonardo

Los trabajos de la fachada de la iglesia de Santa Maria Novella, en Florencia, se iniciaron en 1350, pero sólo se hizo parte de la mitad inferior. En 1439, durante el Concilio de Florencia, que tuvo lugar en esa iglesia, se consideró la necesidad de terminarla. Unos años más tarde se encargó el proyecto a Leon Battista Alberti. El autor de *De re ædificatoria* y primer tratadista de perspectiva, proyectó la mitad superior, con una mezcla en las dosis adecuadas de modularidad, proporción, equilibrio, ritmo, armonía y belleza. Proporción, ritmo, equilibrio, belleza... Alberti resumía todas estas cualidades de la obra de arte arquitectónica usando el término latino *concinnitas*.



Fachada de la Iglesia de Santa Maria Novella, Florencia (dibujo: AMA; foto: FMC).



Una vela de barco hinchada por el viento, anagrama de los Ruccelai en la fachada de Santa Maria Novella de Florencia (fuente: FMC).

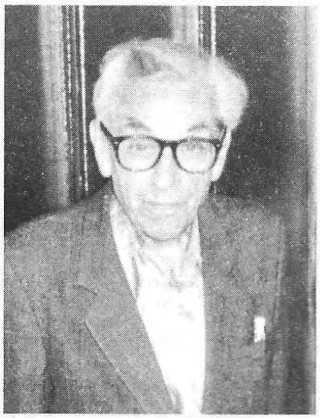
La primera piedra del actual edificio de Santa Maria Novella fue colocada el día de San Lucas del año 1246, para sustituir una iglesita más antigua y pequeña que les había sido concedida a los franciscanos para su uso, cuando llegaron a Florencia. Las obras de construcción se extendieron hasta mediados del siglo siguiente y no fue consagrada hasta 1420 por el papa Martín V, que residía en aquella ciudad.

En la primera fase de la fachada se construyeron los seis arcos tumbales inferiores, las dos puertas laterales de estilo gótico y los arquillos ciegos de medio punto, que imitan los del Baptisterio de San Giovanni, frente a la Catedral, elaborados en mármoles blancos y verdes. Las obras se detuvieron a la altura de la cornisa central, sin que se llegaran a ejecutar ésta ni el portal central.

LAS DEMOSTRACIONES DE *EL LIBRO*

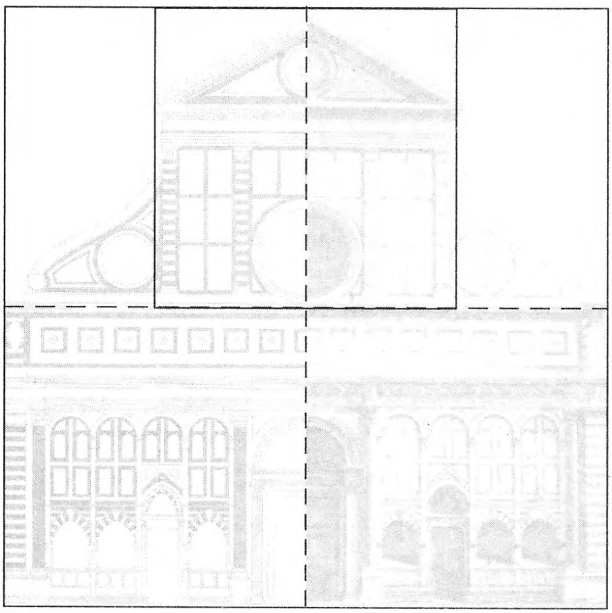
Paul Erdős (1913-1996) hablaba de *El libro,* en el que Dios había escrito todas las demostraciones perfectas de los teoremas matemáticos. Y añadía que para ser matemático no hay por qué creer en Dios, pero sí hay que creer en *El Libro*. Pues bien, las demostraciones de *El Libro* comparten esa *concinnitas* albertiana con los bellos edificios; son construcciones proporcionadas, equilibradas, bellas...

Contemplando la fachada de Santa Maria Novella con una mirada matemática, se puede captar fácilmente el significado de *concinnitas*, y más si en la cabeza tenemos alguna de las demostraciones que, personalmente, consideramos que forman parte de *El Libro.*



Paul Erdős fotografiado en 1992.

Giovanni Ruccelai, importante comerciante, encargó a su arquitecto y amigo, Leon Battista Alberti, el proyecto para terminarla. Alberti proyectó cubrirla totalmente con mármoles verdes y blancos, pero cambiando sustancialmente el estilo inferior, buscando, no obstante, dar armonía y proporción al conjunto. La parte inferior quedó casi intacta en su aspecto medieval, intercalando el portal central, que se inspira en el del Panteón romano, y que supone, con sus columnas laterales adosadas, una innovación total, ya plenamente renacentista. Proyectó también la parte superior, separada del resto por un ancho friso que la divide en dos mitades, del que nos ocuparemos más tarde. La ubicación del óculo le llevó a situar a su alrededor, descentrando en sentido vertical, un nuevo elemento cuadrado, subdividido en tres zonas por cuatro pilastras, la central de doble anchura que las laterales. La división reticular de este espacio, rellenándolo de rectángulos iguales, le sirve para fijar uno de los módulos de medida, que dan unidad a todo el proyecto, ligando lo ya realizado en la parte inferior con los nuevos elementos que se incorporan a través de un juego matemático de múltiplos y divisores.



Proporciones basadas en el cuadrado (fuente: FMC).

El conjunto se enmarca en un cuadrado, que está a su vez subdividido en cuatro por el eje de simetría y el borde superior del friso. El cuerpo del ático sobre el friso

LA IDEA DE GRUPO

Un grupo en matemáticas es la estructura algebraica de un conjunto G en el que hemos definido una operación $\circ$, que actúa sobre sus elementos. Se dice que $(G, \circ)$ tiene estructura de grupo si se verifican las siguientes propiedades:

1. La operación es «interna», es decir, al operar dos elementos cualesquiera el resultado es otro elemento del grupo.

$$\forall x, y \in G, \text{ se verifica que } x \circ y \in G.$$

2. La operación es «asociativa». Es decir, para cualquier trío de elementos del grupo, si operamos el primero con el segundo y este resultado con el tercero, obtenemos lo mismo que si operamos el primero con el resultado previo de haber operado el segundo con el tercero.

$$\forall x, y, z \in G, \text{ se verifica que } (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

3. Elemento neutro (identidad).

Existe un único elemento $Id \in G$ que verifica que $\forall x \in G$, $Id \circ x = x \circ Id = x$.

4. Elemento simétrico.

Para todo elemento x del grupo existe otro x' que verifica que
$x \circ x' = x' \circ x = Id$.

Una isometría es una transformación geométrica que deja invariante las distancias entre los elementos de un conjunto, es decir, un movimiento «rígido», que no «deforma». Las isometrías en el plano pueden ser giros alrededor de un punto, traslaciones en una dirección o reflexiones con respecto a un eje. También se consideran isometrías los deslizamientos, es decir, la composición de una traslación y una reflexión de eje paralelo a la dirección de la traslación.

se inscribe en un cuadrado que es la cuarta parte del total. Para completar el conjunto y salvar la distinta altura de la nave central con respecto a las laterales, dispone de dos volutas triangulares, de contornos redondeados, que enmarcan a su vez dos discos. El ático se corona con un frontón, que inscribe un círculo con un sol radiante: el sol victorioso que aparece en el escudo de este barrio florentino. El óculo central, con su marco, tiene un diámetro que mide el doble que el de los tres discos, el superior y los

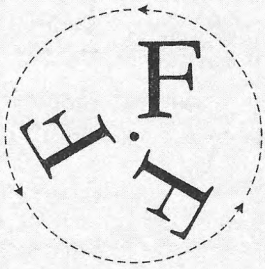
LOS GRUPOS DE LEONARDO

Los grupos de Leonardo son grupos de movimientos con un número finito de elementos y con un punto que permanece fijo al aplicarle cualquiera de esos movimientos. Están compuestos sólo por giros y reflexiones, y los hay de dos tipos.

El primer tipo corresponde a los grupos cíclicos, formados por un solo giro cuya amplitud es divisor entero de 360°, como por ejemplo C_3, que está generado por un giro g de 120°. Sus elementos son

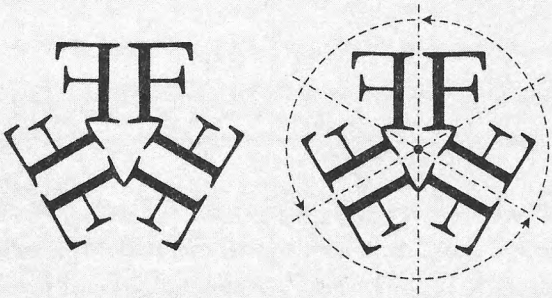
$$C_3=\{Id,\ g,\ g^2\},$$

donde *Id* representa la identidad.



Grupo C_3, señalando el punto fijo, que es el centro de giro.

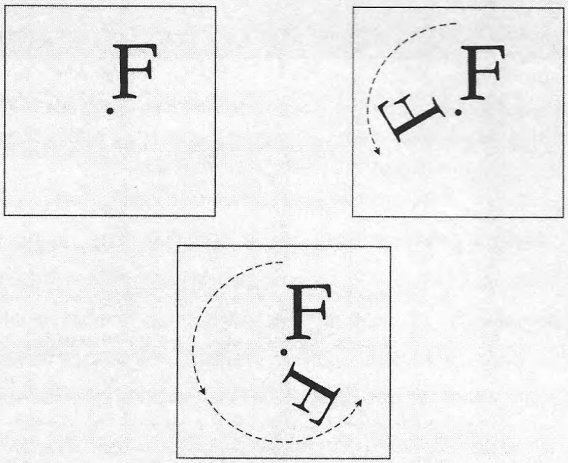
El segundo tipo son los grupos diédricos, generados por un giro y una simetría cuyo eje pasa por el centro de giro. Se representan como D_n.



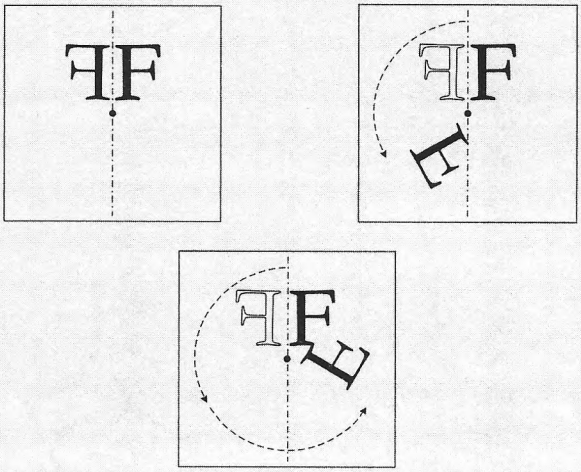
A la izquierda, figura invariante por D_3.
A la derecha se han marcado los ejes de simetría y los giros.

Por ejemplo, D_3 está generado por un giro *g*, de 120°, y por una simetría *s*. Sus elementos son:

$$D_3 = \{Id, g, g^2, s, s \circ g, s \circ g^2\}.$$

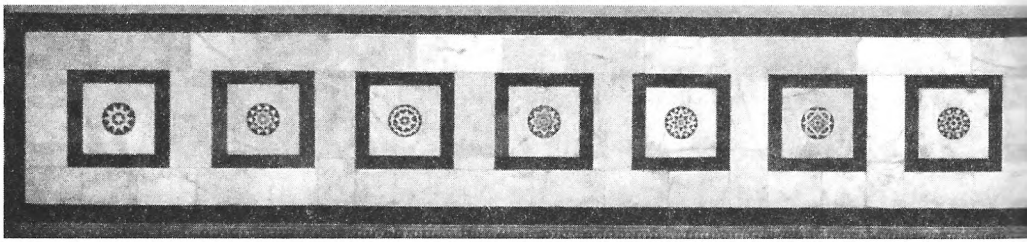


Resultado de aplicar a la F inicial los movimientos Id, g *y* g^2.



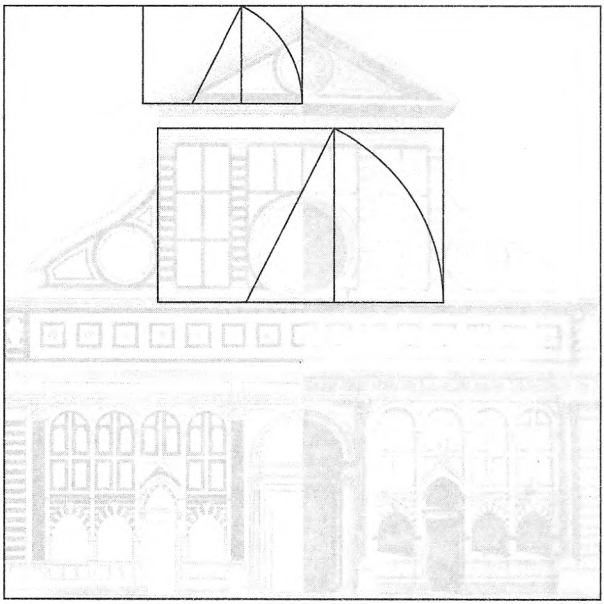
Resultado de aplicar a la F inicial los movimientos s, $g \circ s$ y $g^2 \circ s$.

El grupo D_1 está generado por una única simetría.



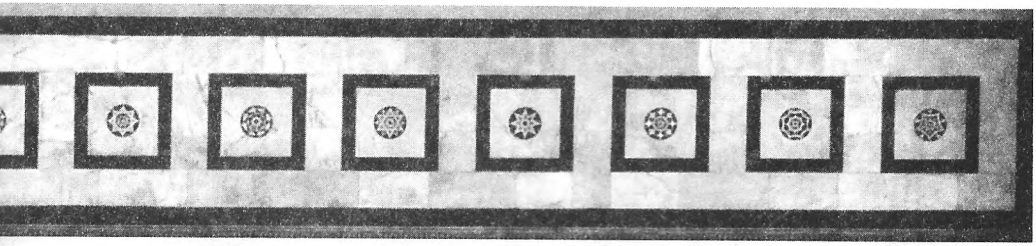
Friso con los quince rosetones que se encuentra en Santa Maria Novella, cada uno presenta un diseño geométrico diferente y está enmarcado en un cuadrado (fuente: AMA).

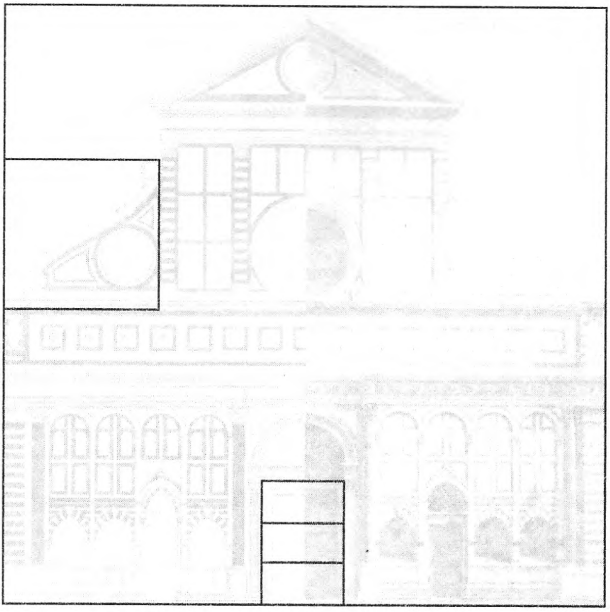
dos laterales. El módulo predominante en la composición, como por otra parte se aprecia a simple vista, es el cuadrado. Pero también se pueden intuir algunas proporciones áureas, aunque estas últimas de manera menos precisa, y otras proporciones, como por ejemplo la de dos a tres, entre la anchura y la altura del portal central.



Algunas probables proporciones áureas (fuente: FMC).

La proporción, y no necesariamente la mitificada proporción áurea, cumple una doble función: la de modularizar el diseño, facilitando su concepción y realización, y la puramente estética, buscando la armonía de las partes en el todo.





El cuadrado que encuadra la voluta es 1/16 del total.
La puerta tiene proporción 2 a 3 (fuente: FMC).

El resultado es patente: un conjunto equilibrado, rítmico, armónico en su concepción bicolor. Pero fijemos nuestra atención en el friso central. Se distinguen en él quince cuadrados de mármol verde. Cada uno de ellos enmarca un rosetón. En la mirada de conjunto pasan casi desapercibidos, pero, fotografiados con un teleobjetivo, podemos reconstruirlos y apreciar su diseño. Se han usado mármoles de tres colores: verde, blanco y rosado.

Estudiaremos, caso por caso, el grupo que corresponde a cada rosetón del friso. Para ello los numeraremos de acuerdo con el lugar que ocupan, de izquierda a derecha.

El primero y el segundo corresponden a un D_5, que está generado por un giro de 72° y una simetría vertical.

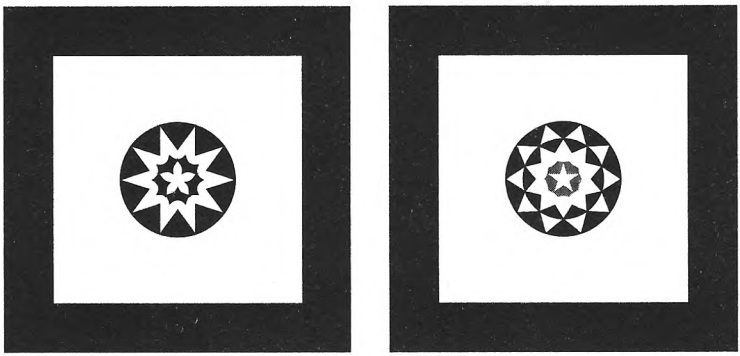
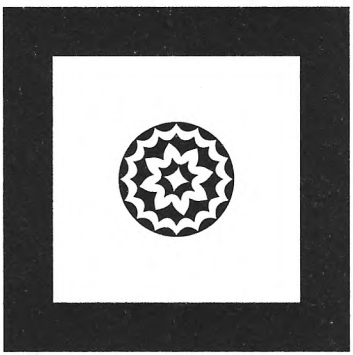


Ilustración que reproduce el primer y el segundo rosetón del friso central de Santa Maria Novella.

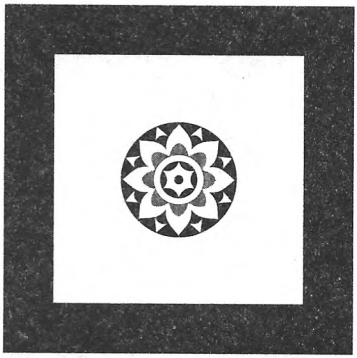
El tercero, en su anillo más externo, sería un D_{16}, y en la zona media, un D_8; pero como en el interior hay un cuadrilátero, en conjunto es un D_4.

Llama la atención asimismo el hecho de que el eje de simetría se encuentre girado con respecto a la vertical 11,5° (los otros, por tanto, están a 56,5°, 101,5° y 146,5°).



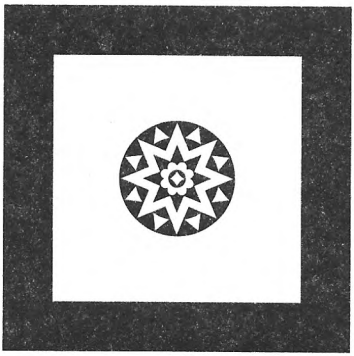
Tercer rosetón.

El cuarto rosetón sería un D_8, pero como en el interior del anillo central hay una estrella hexagonal, se convierte en un D_2.

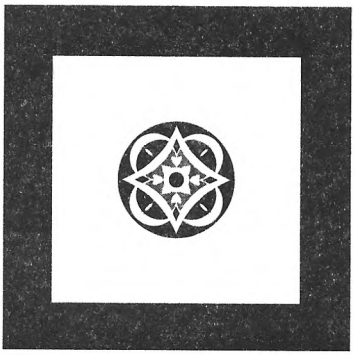


Cuarto rosetón.

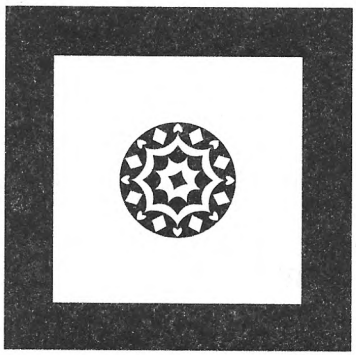
El quinto vuelve a ser un D_4, al igual que el sexto y el séptimo.



Quinto rosetón.

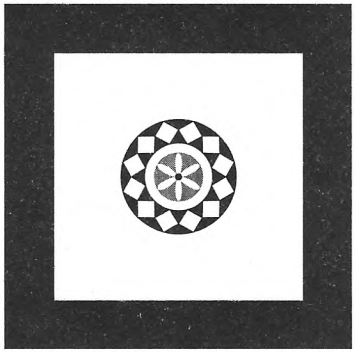


Sexto rosetón.



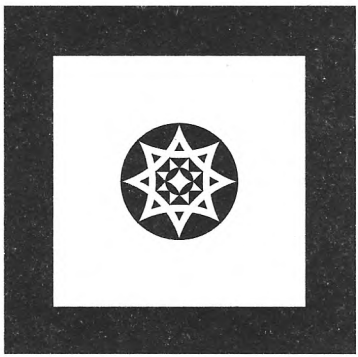
Séptimo rosetón.

El octavo, que ocupa el lugar central, es un claro D_6, como señala la estrella central de seis puntas.



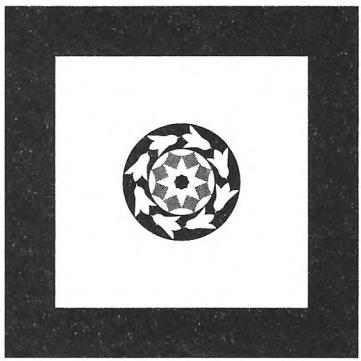
Octavo rosetón.

El noveno vuelve a ser un D_4.



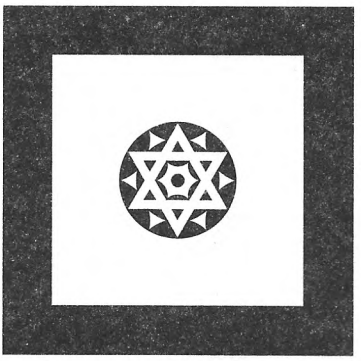
Noveno rosetón.

En el décimo es uno de los más interesantes; la simetría de los elementos centrales, que lo convertirían en un D_8, queda rota por los tulipanes que lo orlan, por lo que no tiene ejes de simetría y es realmente un C_8.

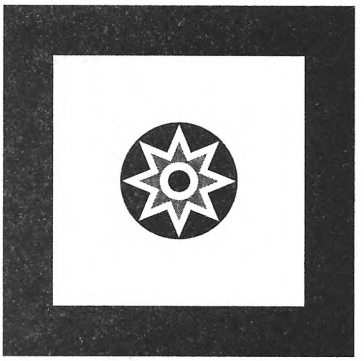


Décimo rosetón.

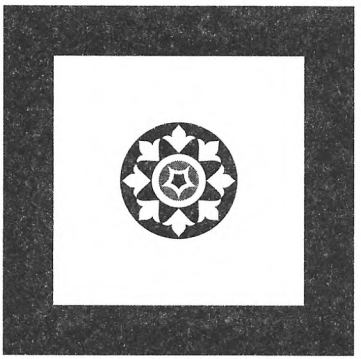
El undécimo se identifica claramente como D_6, y el siguiente, como un D_8.



Undécimo rosetón.



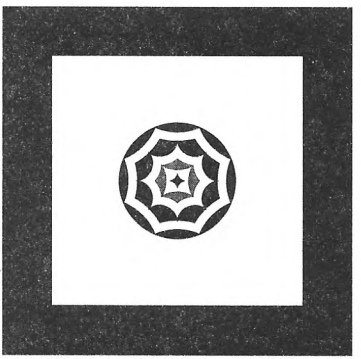
Duodécimo rosetón.



El decimotercero, sin considerar el anillo central, sería un D_8, pero, si nos fijamos, dentro de ese anillo hay una estrella de cinco puntas; como 5 y 8 son primos entre sí, el rosetón en su conjunto sólo tiene una simetría vertical. Es, por tanto, un D_1.

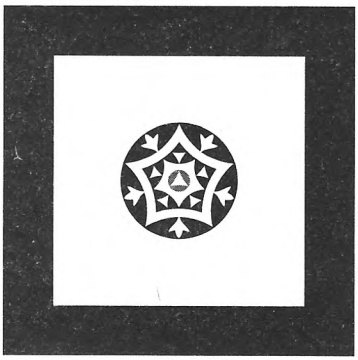
Decimotercer rosetón.

El decimocuarto es de nuevo un D_4, que es el grupo más frecuente en los quince rosetones.



Decimocuarto rosetón.

Por último, el decimoquinto juega con estructuras pentagonales, pero en el centro tiene un triángulo, por lo que nuevamente se trasforma en un D_1, con una única simetría, además de la identidad.



Decimoquinto rosetón.

En resumen, excepto el décimo rosetón, que es del grupo cíclico C_8, todos los demás son grupos diédricos y se pueden agrupar así: dos rosetones son D_1, uno es D_2, seis son D_4, dos son D_5, otros dos, D_6 y sólo uno, D_8.

Florencia es una ciudad llena de arte y llena de matemáticas; no es de extrañar que sea una de las ciudades más visitadas por el turismo. Si el lector vuelve a la ciudad del Arno, además de pasear por el Ponte Vecchio o de subir al Piazzale Michelangelo para poder divisar toda la ciudad en su conjunto, le proponemos que haga «turismo matemático». Sugerimos que se acerque a la recoleta plaza de Santa Maria Novella y, relajadamente, contemple esta estupenda fachada con una mirada matemática.

Bibliografía

ALBERTI, L.B., *On Painting*, New Haven and London:Yale University Press, 1966.

DURERO, A., *De la Medida*, Madrid, Akal Ediciones, 2000.

FIELD, J.V., *The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford, Oxford University Press, 1997.

FRANCESCA, P. D., *De prospectiva pingindi*, Florencia, Casa Editrice Le Lettere, 2005.

MAETZKE, A.M., *Piero della Francesca*, Milán, Silvana Editoriale, 1998.

MANETTI, A., *Vita di Filippo Brunelleschi*, Roma, Salerno Editrice, 1992.

MARTÍN CASALDERREY, F., *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*, Madrid, Nivola, 2000.

—: *Cardano y Tartaglia. La aventura de la ecuación cúbica,* Madrid, Nivola, 2009.

—: «Arte con ojos matemáticos. Ha vuelto para mirarnos», Valencia, *Suma*, 57, págs. 85-88, 2008.

—: «El Greco en otra dimensión», Valencia, *Suma*, 59, págs. 67-72, 2008.

—: «Un Zurbarán anamórfico», Valencia, *Suma*, 58, págs. 81-86, 2008.

—: «Piero della Francesca y el engaño de los ojos. I El espacio», Valencia, *Suma*, 61, págs. 63-70, 2009.

—: «Piero della Francesca y el engaño de los ojos. II La luz», Valencia, *Suma*, 62, págs. 63-68, 2009.

—: «Velázquez y el retrato del espacio», Valencia, *Suma*, 60, págs. 73-78, 2009.

—: «Masaccio y la perspectiva matemática», Valencia, *Suma*, 63, págs. 83-88, 2010.

—: «Santa Maria Novella. Armonia bicolor», Valencia, *Suma*, 64, 2010.

PANOFSKY, E., *La perspectiva como forma simbólica*, Barcelona, Tusquets Editores, 1999.

POGGETTO, P.D., *Piero e Urbino, Piero e le Corti rinascimentali*, Venecia, Marsilio Editori, 1992.

STIERLIN, H. *El Imperio Romano. Desde los etruscos a la caída del Imperio Romano.* Singapur, Taschen, 2002.

TOMAN, R., *El arte del Renacimiento en Italia. Arquitectura. Escultura. Pintura. Dibujo*, Colonia, Könemann, 1999.

VASARI, G., *Las vidas de los más excelentes arquitectos, pintores y escultores italianos desde Dimabue a nuestros tiempos*, Madrid, Cátedra, 2002.

Índice analítico

Adriano 134-137
Agripa, Marco V. 133
Alberti, Leon Battista 16, 19-26, 67-70, 142-143
Alcázar de Madrid, Real 105, 114
Amalfi 43
anamorfosis 114-124
Angelico, Fra 39-41
Apolodoro de Damasco 136
Arezzo 38, 88
Arquímedes 51, 55, 141
áurea, proporción 58-59, 145
áureo
  número 90 *véase también* número de oro
  rectángulo 58-59, 90, 91, 95

Baptisterio de San Giovanni 9-13, 62, 143
Barbari, Jacopo de' 61
batalla de San Romano, La 62-64
bautismo de Cristo, El 105, 106, 108, 112, 113
Berruguete, Pedro 86
Bini (familia) 82-83
  Lucrecia 78
Boccaccio, Giovanni 44, 77-78, 83
Bolonia 24
Bombelli, Rafael 48
Bosco ai frati 40
Botticelli, Sandro 78-83
bóveda
  de cañón 34, 87
  de rincón de claustro 52-56
  vaída 33
Bramante, Donato D'Angelo 29
Brunelleschi, Filippo 9-16, 19, 26, 32-33, 138
Bucarest 107

Cajés, Eugenio 116
Calderón de la Barca, Pedro 116
Capilla Brancacci 15, 24, 32, 38, 62
Cardano, Girolamo 48
Carlos V 30, 114
Cicerón 136, 141
cinquecento 46
Claustro Verde (Santa Maria Novella) 62-63
Colegio de María de Aragón 105-108
Colón, Cristobal 14, 44
concinnitas 25, 142, 144
Conde Duque de Olivares 115, 116, 118
Cuarto del Rey 115

Dante Alighieri 16
De divina proportione 51, 56-57, 60
De pictura 16, 19-21, 67, 68, 138
De prospectiva pingendi 25, 27,49,50, 91, 97
De re aedificatoria 25, 142
Decamerón 44, 77-78, 83
defensa de Cádiz, La 114, 116, 117-122
Della pittura 19, 20, 25, 39, 41 (véase también *De pictura)*
Descartes, René 36, 62, 129-132
Descriptio Urbis Romae 68-69
Diluvio, El 63
divinia porporción *véase* áurea, proporción
dodecaedro estrellado, gran 64
Domiciano 134
Donatello 9-16, 19, 32, 38, 62
Duomo de Florencia 11
Durero, Alberto 27-31, 46, 73-76

Elementos 51, 56, 61, 74
Erdős, Paul 143
escuela(s) de ábaco 14, 43-51, 88
Euclides 15, 16, 41, 51, 61, 88

Felipe II 105, 106, 114, 115
Felipe III 114
Felipe IV 114-117, 122, 125
Fibonacci 45, 46, 48
Florencia 9-11, 14, 25, 37, 44, 62, 142
Francesca, Piero della 25-27, 29, 48-57, 86, 88, 91-104

Garamond, Claude 46
Génova 24, 43
Ghiberti, Lorenzo 9, 15, 16, 19, 41, 62
Giorgio Martini, Francesco di 86
Giotto (di Bondone) 16-18, 32, 38, 79
Goya, Francisco de 130
Greco, El (Doménikos Theotokópoulos) 105-108, 112-114
grupo, estructura algebraica 145
grupos
  cíclicos 146, 154
  de Leonardo 146-147
  diédricos 146, 154
Gutenberg 45

Herrera, Rodrigo de 118
hexaedro 108-114
Holbein *El Joven*, Hans 124
Hospital de los inocentes, Florencia 14-15

Instrucciones para la medida véase *Underweysung der messung*

José I Bonaparte 107
Juegos matemáticos 67-73 (véase también *Ludi matematici)*
Julio II 88
Justo de Gante 86

Kepler 64

lanzas, Las véase *rendición de Breda, La*
Laurana, Luciano 86
Leonardo de Pisa *véase* Fibonacci
Leonardo Da Vinci 24, 41, 48, 56, 57, 65-67
Leonardo, Jusepe 116
Libellus de quinque corporibus regularibus 50-52, 56, 57
Liber abaci 45, 46
línea
  de tierra 20, 21
  del horizonte 20, 21, 26, 27, 120
Lippi, Filippino 14, 32, 33, 38
Los embajadores 124
Ludi matematici 67, 69, 70

Maíno, Juan Bautista 116
Manet, Édouard 125, 130
Masaccio 10, 12, 15, 32-38, 41, 62
Masolino, Tomaso da Pinacale 32, 38
Massaio, Pietro del 69
mazzocchio 60-67
Medici (familia) 10, 40, 78, 82-84
Monge, Gaspard 87
Montefeltro
  Federico 84-87
  Guidobaldo 48, 61

Nastaglio degli Onesti 77-83
Newton, Isaac 129, 131, 132
número de oro 59 (*véase también* áureo, número)
Nurenberg 30, 74

óptica 16
Orozco, Alonso de 105, 106, 114
Ortega y Gasset, José 130, 131

Pablo de Valladolid 125, 130-132
Pacioli, Luca 46-51, 56-58, 61, 87, 88
Pala
  de Brera 84-104
  Montefeltro véase *Pala de Brera*
Palacio
  del Buen Retiro 114-116, 121, 122

Pitti 15
Rucellai 25
Palladio, Andrea 133, 134
Panofsky, Erwin 18
Panteón (de Roma) 69, 133-141, 144
Pazzi (familia) 10
perspectiva
intuitiva 16-18, 40
matemática 7, 16, 56, 91
perspectiva
artificialis 16, 39 (*véase también* perspectiva matemática)
naturalis 16
pirámide visual 20, 23, 31
Pirckheimer, Willibald 30
Pisa 43
Pitágoras 55, 127, 132
plano
del cuadro 21, 23, 26, 31
geometral 21
Platón 56, 127-128
Pompeya 17, 129
Pucci (familia) 83
punto de vista 21, 29, 31, 91, 97-98, 112

quattrocento 38, 46, 56, 65, 129, 138
Quevedo, Francisco de 106

rendición de Breda, La 114, 116, 117, 122
Rímini 25
Robbia, Luca della 9, 16, 19, 41
Roma 38, 68, 69, 133-142
rombicuboctaedro 57, 61
rombododecaedro 110
Rucellai (familia) 10, 25

San Francisco, basílica de 17
San Giovanni de Florencia 9, 11 *véase también* Baptisterio de San Giovanni
San Marco, basílica de 62, 64
San Sebastiano, iglesia de 25
San Sepolcro, borgo 48, 49
Santa Maria
del Carmine 38
del Fiore 11, 13, 14-15, 62 (*véase también* Duomo de Florencia)
in Organo 57
Novella 25, 33, 38, 62, 142-154
Ser Giovanni, Tomasso de *véase* Masaccio
Sforza, Battista 85, 87
Spedale degli innocenti, Lo 32-33 (*véase también* Hospital de los inocentes)
Strozzi (familia) 10
Summa (*Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*) 48, 49, 56, 61

Tempio malatestiano 25
Terribilità 38
teseracto 109-113
Timeo 127
Toledo 43, 107, 114
Toscanelli, Paolo 14
Trajano 69, 134, 136
Trattato d'abaco 50, 56
Trinità, La 32-39
Tríptico de Cortona 39

Uccello, Paolo 60, 62-64, 67
Underweysung der messung 74
Urbino 56, 85, 87, 99-102

Vasari, Giorgio 14, 38, 56, 62, 88
Vega, Lope de 106
Velázquez, Diego de 114, 116, 117, 122, 125-132
Venecia 24, 30, 57, 62, 64, 124
ventana de Alberti 21, 23, 29
Verona, Giovanni Da 57, 60
Vite 14, 38, 62, 88

Yourcenar, Marguerite 137

Zenón de Elea 127
Zurbarán, Francisco de 105, 114-122