Al otro lado del espejo

La simetría en matemáticas

Joaquín Navarro

El mundo es matemático

Al otro lado del espejo

La simetría en matemáticas

El estudio de la simetría es un intento de acercarse a la belleza, una medida de ella basada en la proporcionalidad y el equilibrio. Pero también constituye un concepto fundamental en el estudio del mundo que nos rodea, como ocurre en la mecánica cuántica. De simetrías hay muchas, desde la que encuentra Alicia en su viaje a través del espejo a la descrita por la fascinante teoría de grupos, y su estudio constituye una de las hebras fundamentales del tapiz de las matemáticas contemporáneas.

Al otro lado del espejo

La simetría en matemáticas

Joaquín Navarro

El mundo es matemático

© 2010, Joaquín Navarro por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Créditos fotográficos: Age Fotostock, Getty Images, Corbis

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6966-9
Depósito legal: NA-1661-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 9

Capítulo 1. ¿Qué es la simetría? 13
El concepto de simetría 13
Otra dimensión más 16
Un intermedio abstracto 25
Ciclos y relojes 33
Isomorfismos y otros morfismos 39

Capítulo 2. ¿Qué es un grupo? 47
Subgrupos normales y grupos cocientes 47
El grupo simétrico 53
Grupos × Grupos = Más grupos 60
Grupos, grupos, grupos... 62

Capítulo 3. Simetría en más dimensiones 65
Espejo, espejito 66
Unos ejemplos espaciales 71
Poliedros no convexos y no regulares 75
Simetría helicoidal 79

Capítulo 4. Grupos y ecuaciones 83
Ecuaciones no elementales 84
La novela de Tartaglia y Cardano 85
Un interregno fructífero 91
La novela de Galois 96
La teoría de Galois 100

Capítulo 5. Simetría en las matemáticas 105
Álgebra para jugar 106
Domos, fullerenos y pelotas de golf 107
Redes 111
Empapelados o mosaicos, frisos y ornamentos 113

Cristales y más allá de los cristales 118
Átomos y grupos 123
Los grupos de Lie 127
El programa de Erlangen 129

Capítulo 6. Simetría en todas partes 133
Simetría, simetría, tienes nombre de mujer 133
La simetría en la teoría cuántica 136
La supersimetría 140
Una corta excursión por la biología y la química 144
Escher y otras obras de arte 146

Anexo 149

Bibliografía 156

Índice analítico 157

ἀγεωμὲτρητος
μηδεὶς
εἰσίτω

Ningún ignorante en geometría
traspase esta puerta.
Inscripción en el dintel de la entrada
de la Academia de Platón

Prefacio

Tigre, tigre, ardiente brillo
en las selvas nocturnas,
¿qué inmortal mano u ojo
podría abarcar tu terrible simetría?
William Blake (1757-1827)

En los países de habla inglesa, los versos anteriores forman parte de lo que se llama cultura general. La «terrible simetría» a la que se refiere el texto se hace evidente cuando se contempla el rostro de un tigre, aunque nadie que se enfrente a este animal de súbito y cara a cara reflexione en si es simétrico o no. Sí, un tigre posee una simetría fácil de describir. Pero ¿a qué llamamos «simétrico»? ¿Es más simétrico un símbolo religioso universal como el de la Santísima Trinidad (sin el ojo observador propio del Gran Hermano) o el místico *tetraktys* de los pitagóricos que un simple poliedro?

Ateniéndonos exclusivamente a los aspectos terrenales, el triángulo equilátero tiene un grupo de simetría de orden 6; es decir, tiene 6 elementos. Un simple poliedro estrellado puede tener un grupo de simetría con un orden de docenas o cientos; es decir, con docenas o cientos de elementos. Un sencillo y nada historiado círculo tiene todavía más simetrías: tiene infinitas. Pero confortemos nuestras almas: todavía hay objetos triangulares simétricos, menos simétricos que el símbolo de la Santísima Trinidad o el *tetraktys*. El escudo de la isla de Man (véase pág. 41), que data de 1266, ostenta en su centro un *triskelion* o figura de tres piernas y presenta un grupo de simetría de sólo tres elementos, menos elementos que el grupo de la Santísima Trinidad. El grupo del triángulo es un grupo finito, pero diedral, con rotaciones y simetrías axiales; en cambio, el grupo de la isla de Man es también finito, pero de los llamados «grupos cíclicos», sin simetrías axiales. Además, es un subgrupo isomorfo a un subgrupo del grupo de la Santísima Trinidad. Y, que no se nos olvide decirlo, el grupo de las piernas giratorias es también isomorfo a un subgrupo –y subgrupo normal además– del grupo formado por las horas de un reloj. Un grupo éste –cíclico y abeliano– de 12 elementos, como todo el mundo sabe.

¿De verdad que todo el mundo lo sabe? Casi todo lo anterior, a pesar de pertenecer a la esfera de lo elemental, en el sentido de que puede entenderse con unas pocas horas de esfuerzo, no está al alcance de todos. La simetría del mundo que nos rodea requiere, para acercarse a ella con provecho, algunas herramientas matemáticas básicas, como el concepto de grupo, que curiosamente no se inventó para comprender mejor las simetrías del mundo físico. El concepto de grupo es un arma algebraica, intuida ya por Lagrange y desarrollada magistralmente por Galois..., para afrontar la resolución de ecuaciones polinómicas, sin tener en cuenta los aspectos geométricos. La teoría de grupos, antesala moderna de la simetría, no es sencilla ni fácil, ni se aprende leyendo un solo libro de divulgación matemática, pero es una teoría muy bella, sobrecogedoramente bella.

Avancemos que Galois murió a los 21 años, en un duelo a pistola, promovido por una intriga político-amorosa. El febril Galois escribió sus teorías, poco antes de morir, para que éstas le sobrevivieran en manos de algún matemático célebre (lo que tuvo lugar más de 10 años después). Da para toda una novela más que para un texto de álgebra, al igual que la disputa entre Tartaglia y Cardano acerca de las ecuaciones polinómicas. ¿Y qué decir del teorema más largo jamás escrito, la clasificación de los llamados «grupos simples»? Es tan largo que nadie lo ha leído por completo.

Paradójicamente, no nos ocuparemos apenas de ese fenómeno al que se refieren las palabras «al otro lado del espejo» que figuran en la cubierta de las aventuras de Alicia y su País de las Maravillas, que tan famosas hizo Lewis Carroll, y que, de algún modo, marcan un límite de interés en lo que la mayoría de la gente, el «gran público» considera que es la simetría. Sí, la simetría son los pares de zapatos que son desiguales el uno del otro aunque forman parte del mismo par (enantiomorfos, que diría un experto), las frases capicúas (palindrómicas), las proteínas (levógiras) del ser humano y la reversibilidad de las leyes físicas, pero las simetrías derecha/izquierda –o axiales– son aspectos elementales de la auténtica simetría. Ya hay suficiente literatura disponible sobre ello, y no le daremos a leer un libro más sobre esta cuestión de la derecha y la izquierda, un tema sin duda muy agradecido, pero también muy tratado. Hay mucha simetría y muchos grupos esperando su oportunidad.

Hay grupos finitos y grupos infinitos, y todos desempeñan un papel fundamental en la descripción y comprensión del mundo macroscópico, y también en la del microscópico. No sólo los radiolarios, las diatomeas y los virus ostentan una simetría externa, sino que los cristales presentan una simetría interna, y el universo mismo es

una caja de simetrías cuánticas, como se apercibieron los físicos hace mucho tiempo. Y todavía no las conocen todas; quizá cuando lo consigan nos toparemos con la ansiada «teoría de todo» que la humanidad persigue desde hace siglos. Las simetrías (y sus violaciones o rupturas) no lo explican todo, pero están ahí y conviene entenderlas. Abrámosles, pues, la puerta.

Capítulo 1

¿Qué es la simetría?

Es que no lo entiendo; ¿por qué es tan importante eso de la simetría?
Mao Zedong

En matemáticas, el término «simetría» no designa exactamente lo mismo que en las demás ciencias o en la vida cotidiana. Los matemáticos son gente muy estricta, por no decir maniática o puntillosa, y entienden por simetría algo muy concreto y preciso, y, para ellos, lo que se sale de esa definición no es simétrico en sentido estricto. Hay un chiste anglosajón que retrata la intransigencia matemática casi al milímetro. En un vagón de tren viajan juntos por Escocia un astrónomo, un ingeniero y un matemático. Al mirar por la ventanilla, el astrónomo observa con gozo y sorpresa a una oveja negra que retoza por los campos dando saltitos junto al vagón. Quizá con algo de precipitación les dice a sus compañeros: «Qué curioso, en Escocia, todas las ovejas son negras». El ingeniero le corrige amistosamente: «No, no. Lo que ocurre es que algunas ovejas son negras». Y el matemático apostrofa con suficiencia: «En realidad, lo que ocurre es que en Escocia existe por lo menos un campo, que contiene al menos una oveja, uno de cuyos dos lados es negro». Con la simetría y las matemáticas sucede algo parecido. Una cosa que todo el mundo sabe lo que es, se convierte en difícil de tratar en cuanto se intenta definirla.

El concepto de simetría

Por el momento nos limitaremos al concepto de simetría más vago, más laxo y menos abstracto y exigente y nos conformaremos con movernos dentro de los límites del mundo que nos rodea, que supondremos dotado de todos los instrumentos y características propios de la geometría euclidea.

Empezaremos por los objetos: llamaremos simétrico a aquel que coincide consigo mismo al moverlo sin deformación de modo «normal»; es decir, nos limitaremos a un concepto de simetría que conserva inalteradas las distancias. Para el lector bien

informado, o ya versado en matemáticas más avanzadas, diremos que vamos a limitar de momento el concepto de simetría a lo que se denomina isometrías (del griego *isos* = igual, y *metros* = medida).

Ocupémonos primero de los objetos unidimensionales. Un segmento, por ejemplo, es simétrico de un modo casi trivial:

$$a \text{———} b \qquad b \text{———} a$$

pero sólo hay un modo de moverlo de manera que se quede como estaba. Si se intercambian los extremos, lo cual en nuestro espacio tridimensional equivale a girarlo 180° con el centro en su punto medio, el segmento permanece invariante. Se entiende, naturalmente, que invariante quiere decir que si el segmento no estuviera acompañado de las letras, el segmento resultante de girarlo sería indistinguible del segmento original. De hecho, el matemático exigente diría que hay dos movimientos que dejan el segmento invariable; el mencionado giro de 180° y el giro de 360° o giro trivial. Este último es idéntico, a todos los efectos, que no moverlo (0°) o girarlo 720° (darle 2 vueltas), 1.080° (tres vueltas), etc.

En álgebra se dice que un segmento es simétrico y que su grupo de movimientos está formado por la identidad (equivalente a $0° = 0$ radianes, $360° = 2\pi$ radianes, $720° = 4\pi$ radianes, etc.) y el giro de 180° ($180° = \pi$ radianes, $540° = 3\pi$, $900° = 5\pi$ radianes, etc.). Obsérvese que los grados tienen su equivalencia en radianes; ello es más importante de lo que parece, pues desde el advenimiento del cálculo infinitesimal, los ángulos se miden en radianes, y de ello hace ya más de 300 años.

Parece que la dimensión 1 no da para mucho. Pero pensándolo más, hay un objeto unidimensional que da para más simetría. La recta completa misma

$$A$$

---

da para más, aunque no lo parece; cualquier traslación a derecha o izquierda, y de cualquier longitud, deja la recta como estaba, invariante. Hay infinitas traslaciones que son simetrías de la recta, tal como hemos definido las simetrías. Es decir, que si le otorgamos un punto de origen a la recta (el punto cero) e identificamos los puntos de la recta con los números reales $\mathbb{R}$, la traslación t

$$x \to x + t$$

RADIANES VERSUS GRADOS

La equivalencia entre grados sexagesimales y radianes es la que resulta de la definición de radián: aquel ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia empleada para medirlo. Es decir,

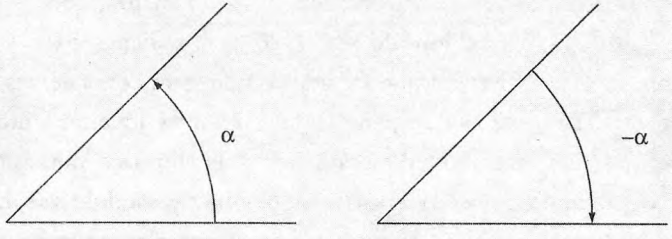
1 radián $\approx$ 57°17'45"

π radianes = 180°.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

En este texto se utilizará preferentemente la notación con radianes. El uso de los grados sexagesimales está muy extendido todavía (sobre todo en geometría elemental) por tradición, por comodidad (no se actúa con fracciones) y, todo hay que decirlo, por la inercia y la influencia de los fabricantes de instrumentos ópticos, pero debería seguirse el sistema internacional de medidas y, entre ellas, como medida auxiliar, figura el radián y no el grado.

Por último, establezcamos un simple convenio: si en algún momento nos vemos obligados a considerar importante la orientación del ángulo, consideraremos que el sentido antihorario –el contrario al de las agujas del reloj– es el sentido positivo. Un ángulo negativo será aquel que avanza en sentido horario.



Sentidos de medida de los ángulos.

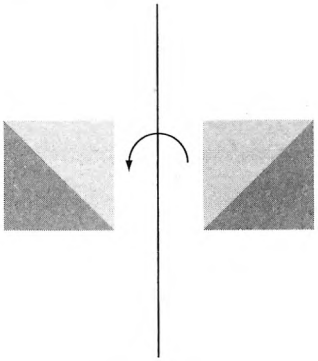
El radián, una medida de los ángulos mucho más natural que el grado, fue introducido en 1713 por Roger Cotes (1682-1716), un malogrado matemático inglés amigo de Newton.

que transforma cada punto x en el $x + t$ es una simetría de la recta A, pues la traslada sobre sí misma, moviendo todos sus puntos la cantidad t a un lado u otro (y digamos, aunque no debatiremos el tema, que aún hay más simetrías en $\mathbb{R}$).

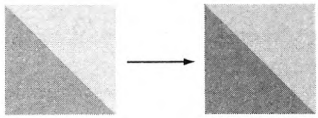
Más adelante, cuando el lector sepa más de simetría, reconocerá en esta traslación a un elemento del grupo de Lie llamado $GL(1, \mathbb{R})$..., pero no adelantemos acontecimientos.

Otra dimensión más

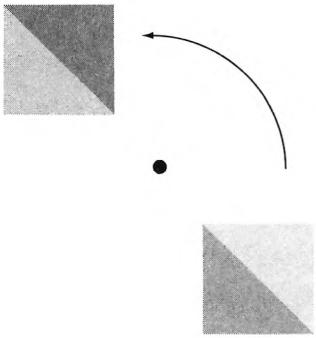
Demos un paso más: aumentemos la dimensión y pasemos a figuras bidimensionales. En el plano nos topamos con unos pocos ejemplos de movimientos simétricos que preserven las distancias, como puede observarse en las figuras adjuntas.



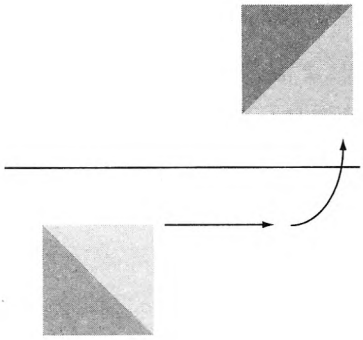
Reflexión



Traslación

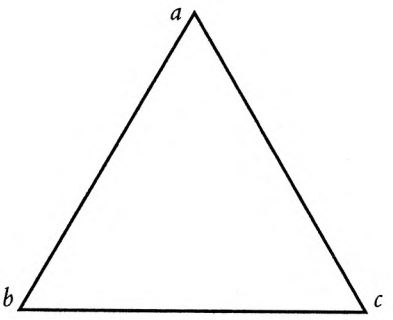


Rotación

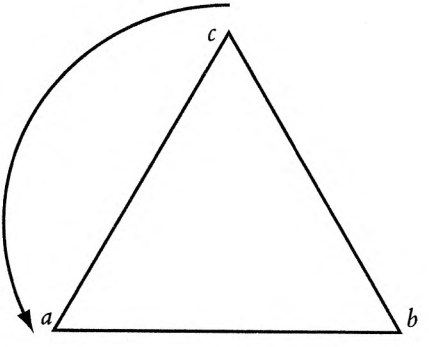


Reflexión con deslizamiento

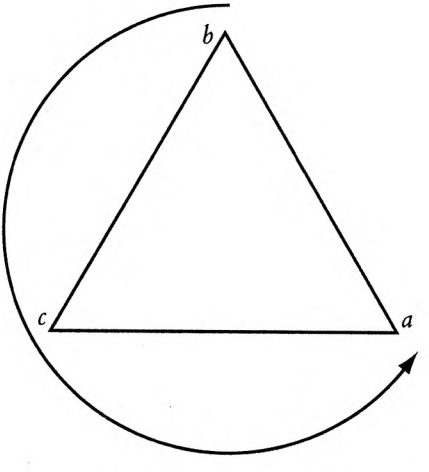
Apliquémoslo ahora a algo tan elemental como un triángulo de vértices *a*, *b* y *c*. Investiguemos la simetría de un triángulo equilátero, perfecto, de vértices *a*, *b* y *c* y con un punto central, que es, digámoslo para que todos recordemos los tiempos de la enseñanza secundaria, a la vez circuncentro, baricentro e incentro.



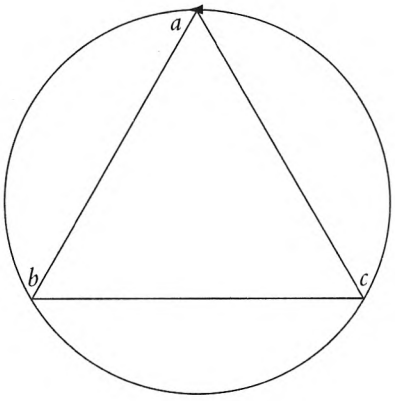
Si se gira $2\pi/3$ (o $1/3 \cdot 2\pi$) radianes (es decir, 120° o 1/3 de vuelta) alrededor del centro,



o se gira $4\pi/3$ (o $2/3 \cdot 2\pi$) radianes (240° o 2/3 de vuelta),

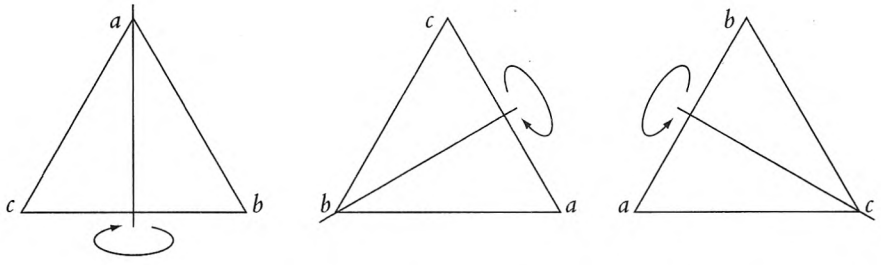


el triángulo permanece invariante. ¿Qué ocurre si lo giramos 2π radianes (360°; o sea, una vuelta completa)?



Pues que volvemos al punto de partida; el triángulo equilátero no sólo es un invariante cuando se somete a ese movimiento, sino que las letras de los vértices están igual que al principio. El giro o rotación de 2π radianes (o 4π, 6π, 8π, etc.) es un giro o rotación inane, asimilable a la identidad, a no moverlo. Tenemos así tres simetrías, que son tres giros o rotaciones de 0, $2\pi/3$ y $4\pi/3$ radianes; llamémoslas g_0, g_1 y g_2.

Si ahora en lugar de girar o rotar el triángulo, lo sometemos a una reflexión tomando como eje la recta que pasa por *a*, por *b* o por *c*,



obtenemos otras tres simetrías o movimientos que dejan invariante el triángulo. Aunque nadie nos lo haga notar, ya nos damos cuenta de que estas simetrías, aparte de no coincidir con los giros anteriores, presentan una característica especial (que los especialistas llaman torsión). Es como si los ejes fueran espejos en los que se reflejase el triángulo, con lo que se consigue que la figura original cambie de orientación. Estas simetrías, que dependen del eje de simetría elegido, las designaremos como e_1, e_2, e_3.

De esta manera, ya obtenemos seis simetrías distintas para un triángulo equilátero: g_0, g_1, g_2, e_1, e_2, e_3, tres rotaciones o giros y tres reflexiones axiales. Empleando la nomenclatura moderna de la teoría de conjuntos, puede decirse que

$$D_3 = \{g_0, g_1, g_2, e_1, e_2, e_3\}$$

es el conjunto de las simetrías D_3 del triángulo equilátero (más adelante justificaremos el porqué de tal nombre).

Cuando se realizan dos movimientos cualesquiera de los seis indicados, pongamos m_i y m_j, el resultado es otro movimiento, m_k, que también es un movimiento perteneciente a D_3.

En la expresión

$$m_j \bullet m_i = m_k$$

el signo • es un modo abreviado de indicar que primero movemos el triángulo como indica m_i, luego hacemos el movimiento m_j y se obtiene como resultado el movimiento m_k. Los profesionales lo escriben en este orden, que parece el inverso del que dictaría el sentido común, pero hacen bien, por razones de comodidad en fases más avanzadas. Así, por ejemplo, si hacemos primero e_3 y luego g_1, se expresará del siguiente modo:

$$g_1 \bullet e_3 = e_2.$$

Todo lo anterior lo resumen los matemáticos en unas pocas palabras, afirmando que • es una operación de D_3. A veces dicen que D_3 es un conjunto cerrado para la operación •, lo cual significa exactamente lo mismo pero expresado de modo más complicado.

Si disponemos los movimientos de D_3 en forma de tabla, con sus filas y columnas, de manera que en la casilla de la fila n y columna p esté $m_n \bullet m_p$, obtenemos el siguiente cuadro:

•	g_0	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_0	g_0	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	g_0	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	g_0	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	g_0	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	g_0	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	g_0

Hemos designado a las rotaciones empezando por el subíndice 0 porque g_0 es una rotación un tanto especial, un movimiento del triángulo diferente a todos. Veamos.

Para toda simetría o movimiento m del triángulo equilátero, sea cual sea, se verifica

$$m \bullet g_0 = g_0 \bullet m = m.$$

Es como si el movimiento g_0 se comportara como un movimiento neutro, vaporoso, que no altera nada, ni operando primero ni después, ni a derecha ni a izquierda. En definitiva, un movimiento neutro, tal como decíamos al principio. Lo podemos constatar mirando la tabla, pues las filas y columnas correspondientes a g_0 permanecen inalteradas. Un elemento tal, que se comporta de este modo respecto a una operación, se denomina elemento neutro.

En nuestra aritmética elemental ya tenemos algún ejemplo del reino numérico muy común del elemento neutro; si la operación es la suma, en dicho reino

$$m + 0 = 0 + m = m$$

cualquiera que sea el número m, y 0 resulta ser el elemento neutro para la operación $+$ en el mundo aritmético.

De modo análogo, y si consideramos la operación multiplicación,

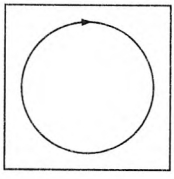
$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$$

y 1 resulta ser el elemento neutro de la operación $\cdot$ entre los números.

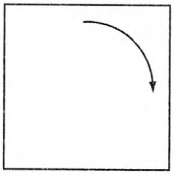
Regresando hacia atrás unas líneas, cambiemos la notación g_0 por n, ya que esa es la inicial de neutro. Por lo tanto, ahora escribiremos la tabla de la operación $\bullet$ así:

$\bullet$	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

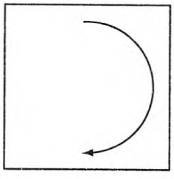
Ésa será la tabla del conjunto D_3 de las simetrías del triángulo equilátero. ¿Qué ocurriría con un cuadrado, que es claramente más simétrico que un triángulo? En efecto, en un cuadrado hay 8 simetrías elementales, como se puede apreciar en las figuras adjuntas,



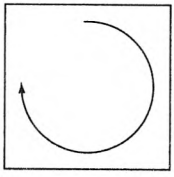
n



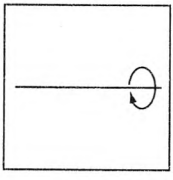
g_1



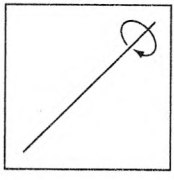
g_2



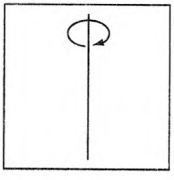
g_3



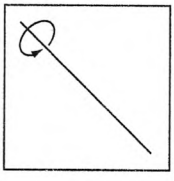
e_1



e_2



e_3



e_4

y cuatro de ellas cambian el sentido de lectura o presentan torsión.

Un sello de correos es una excelente imagen
para visualizar las simetrías elementales de un cuadrado.

Las simetrías también pueden someterse a la operación • y obtener así la siguiente tabla:

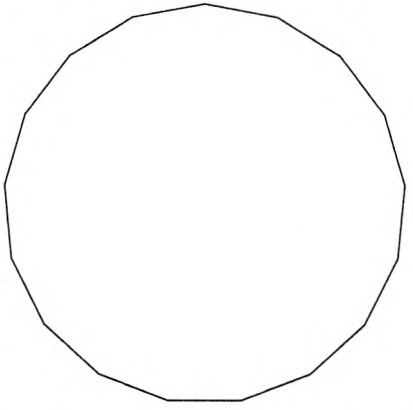
•	n	g_1	g_2	g_3	e_1	e_2	e_3	e_4
n	n	g_1	g_2	g_3	e_1	e_2	e_3	e_4
g_1	g_1	g_2	g_3	n	e_4	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	g_3	n	g_1	e_2	e_1	e_4	e_3
g_3	g_3	n	g_1	g_2	e_3	e_4	e_2	e_1
e_1	e_1	e_4	e_2	e_3	n	g_2	g_3	g_1
e_2	e_2	e_3	e_1	e_4	g_2	n	g_1	g_3
e_3	e_3	e_1	e_4	e_2	g_1	g_3	n	g_2
e_4	e_4	e_2	e_3	e_1	g_3	g_1	g_2	n

Al conjunto de simetrías del cuadrado lo llamaremos D_4.Un detalle que no pasaría inadvertido al ojo avizor de un especialista: no sólo las simetrías forman un conjunto de movimientos cerrado. Hay partes o subconjuntos de las tablas que también son cerrados; véanse si no los fragmentos resaltados en negrita.

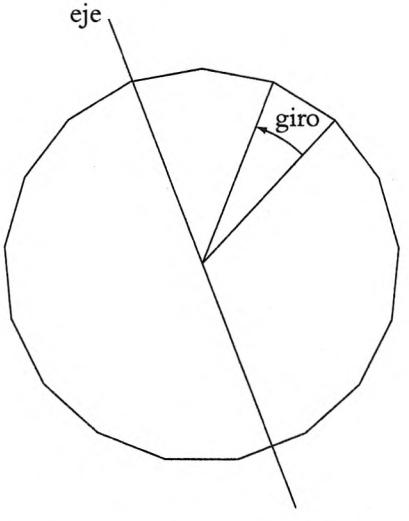
•	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

•	n	g_1	g_2	g_3	e_1	e_2	e_3	e_4
n	n	g_1	g_2	g_3	e_1	e_2	e_3	e_4
g_1	g_1	g_2	g_3	n	e_4	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	g_3	n	g_1	e_2	e_1	e_4	e_3
g_3	g_3	n	g_1	g_2	e_3	e_4	e_2	e_1
e_1	e_1	e_4	e_2	e_3	n	g_2	g_3	g_1
e_2	e_2	e_3	e_1	e_4	g_2	n	g_1	g_3
e_3	e_3	e_1	e_4	e_2	g_1	g_3	n	g_2
e_4	e_4	e_2	e_3	e_1	g_3	g_1	g_2	n

Demos ahora un salto hacia delante y ocupémonos de las simetrías de un polígono regular convexo de p lados. Echándole un poco de imaginación, supondremos que un polígono como el siguiente tiene p lados (en realidad tiene 17).



Su conjunto de simetrías se compone de p giros, cada uno $2\pi/p$ radianes ($\approx 360°/p$) y p simetrías axiales con ejes, de los que $p/2$ pasan por el centro y por cada uno de los vértices del polígono y las otras $p/2$ pasan por el centro y los puntos medios de los lados. Total, $2p$: p giros y p simetrías axiales.



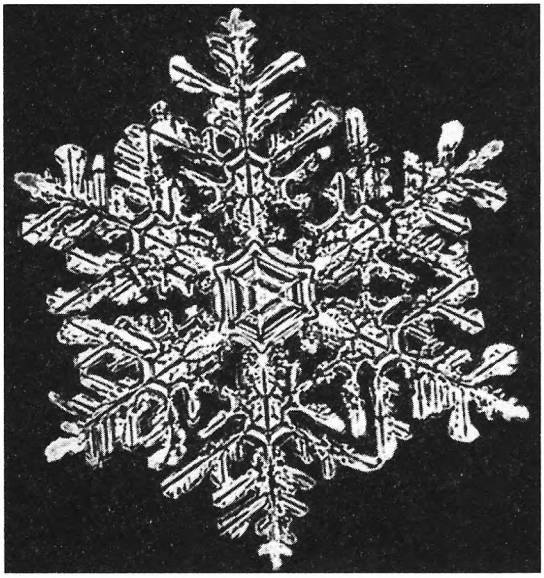
Llamando a los giros g_i (salvo el giro neutro, que seguiremos designando n) y a las simetrías axiales e_i, obtenemos un conjunto de $2p$ elementos, al que designaremos D_p.

$$D_p = \{n, g_1 \ldots, g_{p-1}, e_1 \ldots, e_p\}.$$

No escribiremos su tabla porque no se puede (p es un número inconcreto); no obstante, en ella puede marcarse por lo menos un subconjunto cerrado para la operación • (aunque hay muchos más):

•	n	g_1	...	g_{p-1}	e_1	...	e_p
n	n	g_1	...	g_{p-1}	e_1	...	e_p
g_1	g_1	g_2	...	n		...	
...	...	...	...	...	...	...	...
g_{p-1}	g_{p-1}	n	...	g_{p-2}		...	
e_1	e_1		...		n	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
e_p	e_p		...		...	...	n

En la naturaleza existen muchos elementos que se relacionan con los polígonos regulares y con los grupos diedrales. Uno de los más conocidos es el cristal de nieve, que presenta como grupo de simetrías el D_6.



Fotografía de un cristal de nieve tomada a principios del siglo xx por Wilson Bentley. Los cristales de hielo tienen una estructura hexagonal y pertenecen al grupo de simetrías D_6.

Un intermedio abstracto

Podríamos seguir –y, de hecho, seguiremos más adelante– analizando conjuntos de simetrías, pero ahora se impone detenerse y poner un poco de orden en todo este discurso. Un simple cambio de lenguaje, pasando de un escenario puramente descriptivo a un plano más abstracto, subiendo un peldaño y mirándolo todo desde más arriba, nos ayudará a interpretarlo todo, a unificarlo y dotarlo de sentido. Es lo que se acostumbra a hacer en términos científicos cuando los datos se vuelven poco manejables y los árboles no dejan ver el bosque. Aunque se pierde cierto tiempo en reenfocar las cosas y reconsiderarlas, lo que se gana en abstracción se gana asimismo en comprensión y termina por verse que el esfuerzo compensa.

Vamos, pues, con la abstracción. ¿Qué extraen los matemáticos de todo lo dicho hasta ahora? ¿Existe un lenguaje unificador que permita integrar la totalidad de lo anterior en un único discurso, más conciso?

Dado un conjunto G, se dice que $\bullet$ es una operación de G cuando dos elementos cualesquiera de G, a y b, siempre determinan un tercero c, lo cual se indica del siguiente modo:

$$a \bullet b = c.$$

Así, c pertenece a G; en teoría de conjuntos, ello se indica con la expresión $c \in G$. La operación $\bullet$ es una operación interna, o cerrada, si se prefiere; es una operación de G.

Se dice que G es un grupo cuando la operación $\bullet$ y G satisfacen tres condiciones:

1. Existe un elemento n en G (a n se le denomina elemento neutro de G) que verifica, para todo elemento $g \in G$

$$g \bullet n = n \bullet g = g.$$

2. Para todo $g \in G$ existe otro elemento, al que llamaremos inverso de g y designaremos por g^{-1}, tal que

$$g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = n.$$

3. Todos los elementos de G, por ejemplo $a, b, c \in G$, satisfacen la propiedad asociativa

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).$$

Todos los conjuntos de elementos de simetría enumerados hasta ahora cumplen esas tres condiciones. De esta manera, puede hablarse del grupo del segmento (que tiene 2 elementos), del grupo del triángulo equilátero (que tiene 6 elementos), del grupo del cuadrado (que tiene 8 elementos) y del grupo del polígono regular de n lados (que tiene $2n$ elementos). Al número de elementos de un grupo G, que se suele designar $|G|$, se le llama orden de G.

Los grupos con un número finito de elementos se conocen como grupos finitos, y aquellos que tienen infinitos elementos reciben la denominación de grupos infinitos. El conjunto de traslaciones de la recta A es un grupo infinito. El conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3. -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots\}$$

es también un grupo infinito con la operación $+$. El elemento neutro es el 0 y el elemento inverso de un entero cualquiera p es el entero $-p$. Cuando la operación es la suma, el elemento inverso se acostumbra a designar como opuesto

$$p + (-p) = (-p) + p = 0,$$

aunque acostumbramos a escribir, para abreviar,

$$p - p = -p + p = 0.$$

El conjunto $\mathbb{R}*$ de los números reales no nulos (es decir, $\mathbb{R}$ sin el cero) es también un grupo bajo la operación $\cdot$ o multiplicación. El inverso de cualquier número r es $1/r$ y el elemento neutro de la multiplicación $\cdot$ es el 1.

$$r \cdot 1/r = 1/r \cdot r = 1.$$

Un subconjunto o parte F de G, $F \subset G$, que también es un grupo con la operación $\bullet$ (aunque de orden menor), recibe el nombre de subgrupo. En algún ejemplo anterior hemos destacado en negrita algunos claros subgrupos, las rotaciones.

Un resultado fundamental, válido para los grupos finitos, es el llamado teorema de Lagrange. La demostración del teorema es algo complicada (y no se reproducirá aquí), pero el enunciado es simple y dice que si F es un subgrupo de G, el orden de F o número de elementos de F –que denominamos $|F|$– divide al orden de G, al

que antes hemos denominado $|G|$. Este resultado, que limita los posibles subgrupos a conjuntos con un número determinado $|F|$ de elementos que por fuerza ha de ser un divisor de $|G|$, lleva el nombre glorioso de Lagrange, pero no se debe por entero a Lagrange, que lo demostró sólo de modo parcial. El teorema lo demostró finalmente el italiano Pietro Abbati (1768-1842).

Tomemos por ejemplo a D_3, que verifica $|D_3| = 6$, puesto que posee 6 elementos. Entonces, sólo puede tener subgrupos de 6, 3, 2 o 1 elementos, pues el orden de un subgrupo ha de ser un divisor de 6. A continuación se detallan sus correspondientes tablas:

•	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

Orden 6

•	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

Orden 3

•	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

Orden 2

•	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

Orden 2

•	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

Orden 2

•	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

Orden 1

La primera y la última carecen de interés, pues son el propio G y el grupo trivial, $\{n\}$, que sólo consta del elemento neutro. Las otras son de orden 3 (las rotaciones)

$$\{n, g_1, g_2\}$$

y de orden 2

$$\{n, e_1\}, \{n, e_2\}, \{n, e_3\}.$$

No hay más subgrupos. No es necesario buscar posibles subgrupos de 4 o 5 elementos, pues el teorema de Lagrange indica que no los hay.

Las figuras que tienen un centro y cuentan con un grupo de simetría finito, formado por rotaciones solas (grupos cíclicos, según veremos más adelante) o por rotaciones y simetrías (grupos diedrales), forman un grupo puntual de simetría. Dichos grupos también se llaman grupos de Leonardo en honor a las muchas capillas que el artista Leonardo da Vinci diseñó explotando tales simetrías.

Cuando un grupo verifica la ley conmutativa, es decir, cuando para todo $a, b \in G$

$$a \bullet b = b \bullet a$$

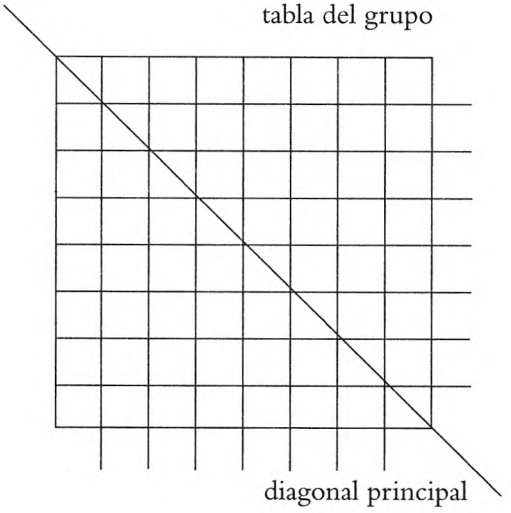
se dice que el grupo es conmutativo. Los grupos de simetría no acostumbran a ser conmutativos; un ejemplo claro es el grupo del triángulo, pues

$$e_1 \bullet g_2 = e_3$$
$$g_2 \bullet e_1 = e_2,$$

con lo cual no se cumple la conmutatividad.

Los grupos conmutativos también son denominados grupos abelianos, en memoria de Niels Abel (1802-1829), el matemático noruego de quien toman su nombre los premios Abel –el equivalente a un Nobel matemático–, que son otorgados por la Academia de Ciencias noruega desde 2003.

Si la tabla del grupo es simétrica respecto de la diagonal principal, tal como muestra la siguiente figura, el grupo es abeliano.



Siguiendo esa regla, D_n no es conmutativo o abeliano para $n > 2$. El lector atento habrá notado que no hemos definido D_2, que corresponde, en buena lógica, al grupo de simetrías del digono, o polígono degenerado de dos lados. Los algebristas, por razones vinculadas a su propia ciencia, denominan D_2 al grupo del doble de

JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE (1736-1813)

Lagrange, de familia militar, nació en Turín, y pronto adquirió un gran renombre científico gracias a su esfuerzo y las enseñanzas de Leonhard Euler, a quien siempre veneró como maestro, aunque no recibiera directamente lecciones de él. Cuando Euler dejó su puesto en la Academia de Berlín, Lagrange ocupó su lugar, quizá seducido por la fama de protector de las artes y las ciencias del rey Federico II, el rey ilustrado por excelencia. Lagrange pasó unos veinte años en Berlín, pero tras la muerte del monarca se trasladó a Francia, y fue nombrado por Luis XVI miembro de la parisina Academia de Ciencias. Siguió desempeñando una brillante carrera profesional, contrajo (segundas) nupcias con una mujer joven y devota de su marido y superó incluso una depresión; cuando todo parecía sonreírle, estalló la Revolución de 1792, y Lagrange temió por su vida y su futuro. No obstante, su fama y su actitud discreta preservaron su existencia y su desempeño. Se le nombró presidente del Comité de Pesos y Medidas y el matemático dedicó sus energías al establecimiento del sistema métrico decimal. Nunca fue molestado políticamente, e incluso su estatus mejoró, si cabe, con el advenimiento de Napoleón, quien le otorgó el título de conde. Considerado una gloria nacional, y cubierto de honores, tras su fallecimiento fue enterrado en el Panthéon.

Su aportación a la física y las matemáticas fue enorme y se le deben incontables resultados; hay que decir que Lagrange era un investigador prolífico y ordenado, y que sus artículos, que trabajaba en su mente antes de trasladarlos al papel, son de una envidiable claridad; se cuenta que incluso las páginas más abstrusas iban directamente a imprenta tal y como salían de su pluma, sin corrección alguna.

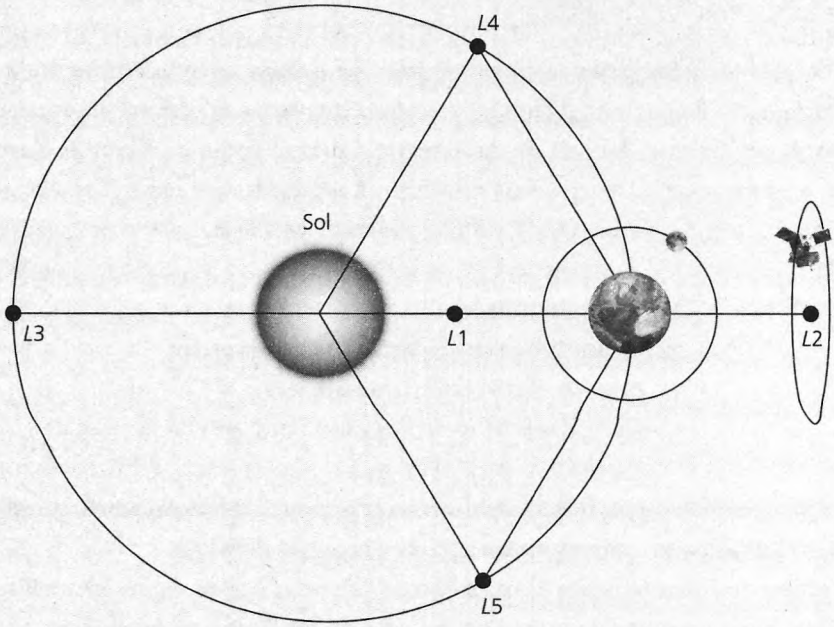
A Lagrange se le conoce como el creador de la mecánica clásica; ello se debe a que aplicó los principios del cálculo de variaciones a la mecánica y la redujo de modo inteligente a la consideración de ecuaciones diferenciales e integrales. Su contribución a la astronomía es también de primer orden, y es justamente famoso por encontrar lo que hoy denominamos puntos de Lagrange. En

elementos del subíndice ($2 \cdot 2 = 4$) que tiene por elementos unos eventuales giros y reflexiones

$$\{n, g_1, e_1, e_2\}$$

general, puede decirse que Lagrange, cual moderno rey Midas, convirtió todas las cuestiones complicadas e inabordables que tocó en el campo de la mecánica en cuestiones tratables propias del análisis matemático.

Sus aportaciones a la teoría de números y a la probabilidad son igualmente notables, pero donde Lagrange marcó una época, y por eso nos interesa particularmente, es en el desarrollo del álgebra y el nacimiento de la teoría de grupos. Se ocupó de tales conceptos en el marco de sus estudios sobre las ecuaciones polinómicas, y en muchos casos anticipó los puntos de vista de otro genio, Évariste Galois.



Los puntos de Lagrange (llamados también puntos de libración), señalados en el gráfico con una L, se sitúan respecto de dos astros (como la Tierra y la Luna) en posiciones tales que los cuerpos ubicados en dichos puntos están en equilibrio. Son, por lo tanto, los lugares ideales para los satélites artificiales geoestacionarios.

con la siguiente tabla de operaciones:

•	n	g_1	e_1	e_2
n	n	g_1	e_1	e_2
g_1	g_1	n	e_2	e_1
e_1	e_1	e_2	g_1	n
e_2	e_2	e_1	n	g_1

Los matemáticos denominan a D_2 grupo de Klein, el cual es idéntico a uno de los dos grupos posibles de 4 elementos; el otro es $\mathbb{Z}_4$, que tiene la siguiente tabla:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Esta tabla recuerda poderosamente el paso del tiempo cuando éste se mide en cuartos de hora. Trataremos el tema del tiempo y los relojes en el siguiente apartado.

Veamos ahora si se dispone de algún modelo para el grupo de Klein. Enfrentémonos a este escenario: tenemos ante nosotros 2 monedas, que pueden mostrarnos su cara o su cruz. Consideremos los 4 movimientos posibles:

n: no tocamos nada;
g_1: damos la vuelta a la vez a las dos monedas;
e_1: giramos sólo la de la izquierda;
e_2: giramos sólo la de la derecha.

Si ahora nos planteamos hallar la tabla de este conjunto de movimientos, veremos que es un grupo y que corresponde a la tabla del grupo de Klein.

El grupo de Klein también es un grupo de simetrías de una figura geométrica, concretamente de cualquier rectángulo de lados desiguales; las simetrías son:

1. Dos giros alrededor del centro: uno de $0 \pm 2\pi n$ radianes (la identidad) y otro de $\pi \pm 2\pi n$ radianes, $n \in \mathbb{Z}$.
2. Dos reflexiones axiales, de ejes que pasan por el centro y son paralelos a cada lado.

Si se elabora la tabla, resulta un grupo isomorfo a D_2 (más adelante veremos con detalle el concepto de isomorfismo).

En el curso de la transición de cuadrado a rectángulo se pierde simetría, pues un cuadrado es más simétrico que un rectángulo. El grupo del cuadrado es D_3, que tiene 6 elementos, y el grupo del rectángulo es D_2, que sólo tiene 4.

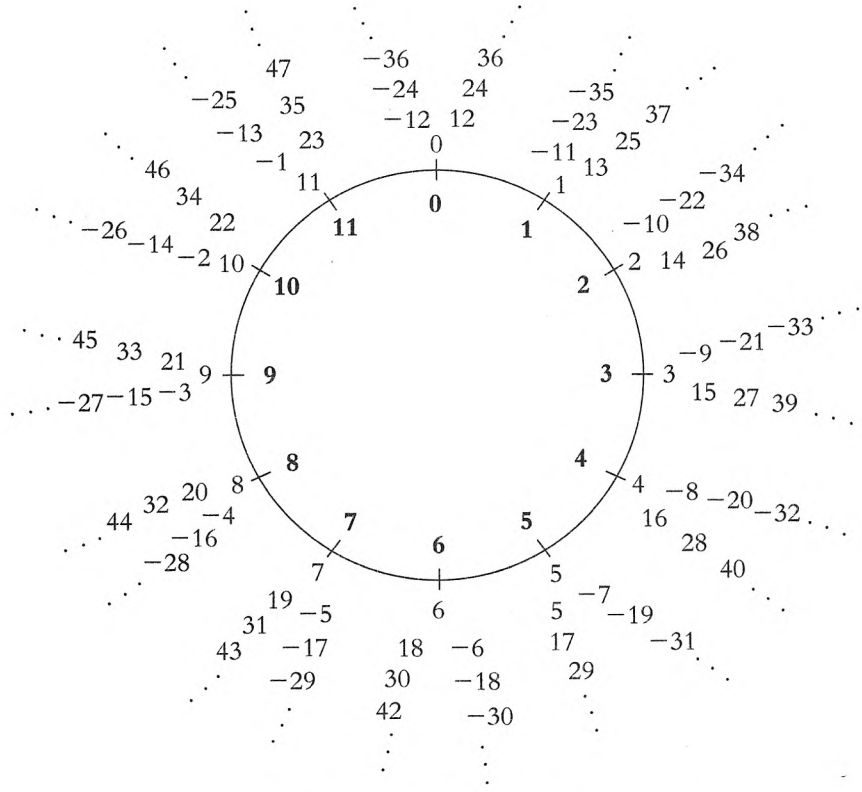
Ciclos y relojes

Una circunferencia de centro c posee infinitas simetrías. Es como un polígono de n lados, pero cuando $n \to \infty$. Su grupo de simetrías es un grupo infinito, compuesto por todos los giros o rotaciones posibles con centro en c. También figuran en tal grupo todas las simetrías o reflexiones alrededor de cualquier eje que pase por c. Es un grupo de simetrías enorme, del que ya hablaremos también más adelante. Ahora tan sólo consideraremos un subconjunto finito de ese grupo, el grupo horario o grupo de las 12 horas.

¿Se ha detenido a considerar alguna vez el intríngulis algebraico que hay bajo algo tan trivial como las horas de un simple reloj? Una constatación muy sencilla: cuando los altavoces del aeropuerto anuncian que son las 17 h, todos pensamos en las 5 h. ¿Y qué hora señalarán las implacables manecillas a las 29 h? ¿Y a las -7 h, es decir, si la manecilla pequeña retrocede 7 números desde las 12 h?

En general, cuando se menciona una hora, uno se está refiriendo a esa hora y a todas las que difieren de ella en un múltiplo de 12. Procedamos con algo más de precisión. Si $\mathbb{Z}$ designa al conjunto de los números enteros, las siguientes 12 partes de $\mathbb{Z}$, que designaremos con caracteres en negrita, se refieren a la misma hora:

$$\mathbf{0} = \{\ldots, -24, -12, 0, 12, 24, 36, \ldots\}$$
$$\mathbf{1} = \{\ldots, -35, -23, -11, 1, 13, 25, \ldots\}$$
$$\mathbf{2} = \{\ldots, -34, -22, -10, 2, 14, 26, \ldots\}$$
$$\mathbf{3} = \{\ldots, -33, -21, -9, 3, 15, 27, \ldots\}$$
$$\mathbf{4} = \{\ldots, -32, -20, -8, 4, 16, 28, \ldots\}$$
$$\mathbf{5} = \{\ldots, -31, -19, -7, 5, 17, 29, \ldots\}$$
$$\mathbf{6} = \{\ldots, -30, -18, -6, 6, 18, 30, \ldots\}$$
$$\mathbf{7} = \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\}$$
$$\mathbf{8} = \{\ldots, -28, -16, -4, 8, 20, 32, \ldots\}$$
$$\mathbf{9} = \{\ldots, -27, -15, -3, 9, 21, 33, \ldots\}$$
$$\mathbf{10} = \{\ldots, -26, -14, -2, 10, 22, 34, \ldots\}$$
$$\mathbf{11} = \{\ldots, -25, -13, -1, 11, 23, 35, \ldots\}$$



Esfera de reloj en la que se señalan las horas y las clases de enteros.

Obsérvese que en cada subconjunto de $\mathbb{Z}$ están las horas a y b que verifican

$$a - b = 12n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}.$$

De este modo, cada parte podía haberse llamado, sin dar lugar a confusiones, con cualquier nombre de los números que contiene. Por ejemplo, **9 = –3 = 21 = = –15 = 33 = ...**

Recapitulemos un poco antes de seguir adelante: hemos dividido el conjunto de todos los números enteros, $\mathbb{Z}$, en doce partes o subconjuntos, que hemos llamado **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **10** y **11**; todas ellas partes disjuntas, sin elementos en común. Cada número entero está en alguna de estas 12 partes y en una sola. Veamos un caso concreto. ¿Dónde está 79? Como $79 = 12 \cdot 6 + 7$, la hora 79 estará en la misma parte que la hora 7, ya que difieren en $12 \cdot 6$ horas, un múltiplo de 12. Dos horas estarán en la misma parte si difieren en un múltiplo de 12.

Cabe establecer una suma entre esos doce subconjuntos; la siguiente tabla lo ilustra:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

La tabla corresponde a una especie de suma, que hemos denominado **+** y que se define con la expresión $\boldsymbol{a + b = c}$, donde c es la parte donde está $c = a + b$.

Así, por ejemplo, $\mathbf{8 + 11 = 7}$, porque $8 + 11 = 19$ y 19 está en **7**, que es el mismo conjunto que **19**:

$$\mathbf{7} = \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\}$$
$$\mathbf{19} = \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\}$$

Ello equivale a contar 11 horas en sentido horario a partir de las 8, con lo que se llega a la posición 7. Cada 12 horas damos una vuelta a la esfera y volvemos a empezar.

Hemos construido la tabla de un grupo, el grupo de las horas de un reloj de 12 horas. Igual podríamos haber construido un grupo de 24 horas, pero apenas se pueden encontrar tales relojes hoy en día, a excepción de los digitales, que acostumbran a medir periodos de un día completo. Llamemos al grupo de las horas $\mathbb{Z}_{12}$, tal como hacen muchos algebristas. De modo parecido se construiría cualquier conjunto $\mathbb{Z}_n$, fuera cual fuese el número $n > 0$. Si se aplica el teorema de Lagrange para buscarle subgrupos, como $\mathbb{Z}_{12}$ tiene 12 elementos, sus eventuales subgrupos serán de orden 12, 6, 4, 3, 2 y 1; los subgrupos de 12 y 1 elementos son $\mathbb{Z}_{12}$ mismo y el subgrupo trivial, por lo que no hace falta detallarlos. A continuación se transcriben las tablas con otros subgrupos de orden 6, 4, 3 y 2, destacadas con recuadros.

Orden 6:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Orden 4:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Orden 3:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

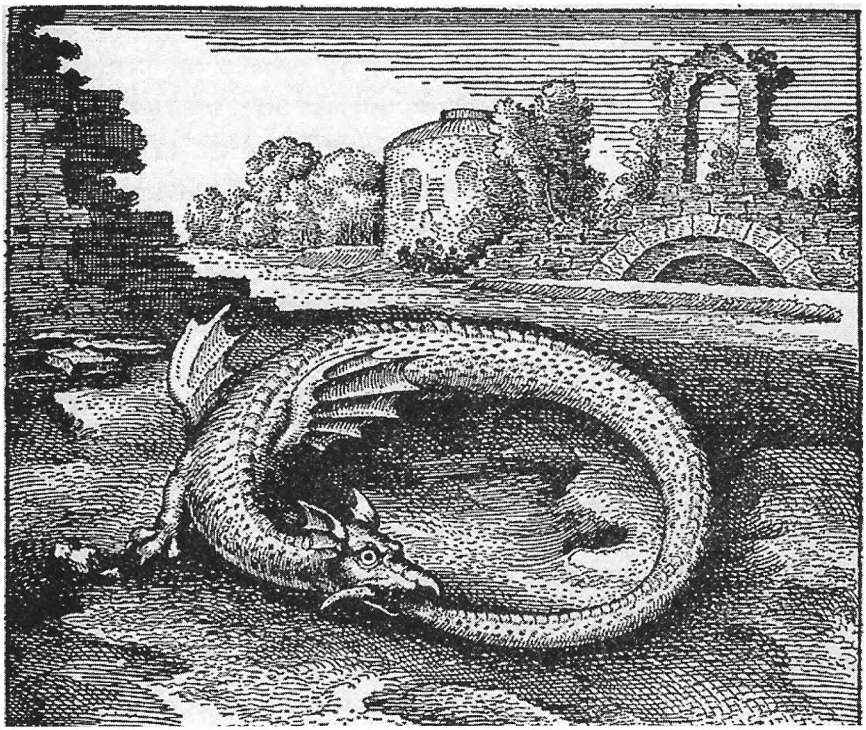
Orden 2:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

La segunda tabla corresponde al grupo de los cuartos de hora, entendido como aquel en el que las agujas grandes señalan esas horas, y los cuartos de hora, a las 3, las 6 y las 9. El de dos elementos es el grupo de las medias horas.

En realidad, el elemento **1** «genera» el grupo, en el sentido de que sumándolo una vez y otra se llega a cualquier otro elemento. Todos los grupos del estilo de $\mathbb{Z}_n$ derivan de un elemento, que origina a los demás operando infatigablemente sobre sí mismo. El grupo es como una columna que, cuando llega al máximo, vuelve a empezar desde abajo; no tiene principio ni fin, como la mítica serpiente Uróboros.

Tales grupos, del tipo $\mathbb{Z}_n$, se denominan cíclicos, y se les conoce también como grupos C_n. Se acostumbra a usar la primera notación si a la operación se la designa como $\bullet$ o $\cdot$, y se reserva la segunda cuando la operación se designa como $+$. Siempre son grupos de orden n.



La serpiente Uróboros, un antiguo mito transnacional, también se devoraba a sí misma y es una buena aproximación a la descripción de un grupo cíclico. La ilustración pertenece a La fuga de Atalanta, *libro de emblemas sobre alquimia de Michael Maier que fue publicado en 1617.*

Isomorfismos y otros morfismos

Tomemos ahora dos de los grupos anteriores. El primero serían las rotaciones del triángulo equilátero:

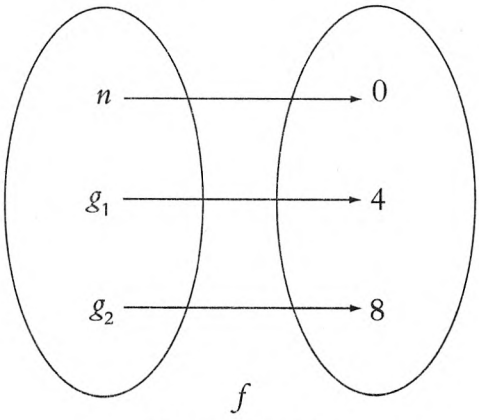
•	n	g_1	g_2
n	n	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2	n
g_2	g_2	n	g_1

Y el segundo, el grupo de orden 3 del que acabamos de hablar:

+	0	4	8
0	0	4	8
4	4	8	0
8	8	0	4

¿No encuentra un cierto parecido? Lo cierto es que parecen lo mismo, salvo que no se escriben con los mismos símbolos ni corresponden a situaciones iguales: el uno proviene de las simetrías de un triángulo y el otro, de la esfera de un reloj. Si establecemos entre el primer conjunto, al que llamaremos A, y el segundo, al que llamaremos B, una correspondencia uno-a-uno, a la que llamaremos f, se verifica en todos los casos que

$$f(a \bullet b) = f(a) + f(b).$$

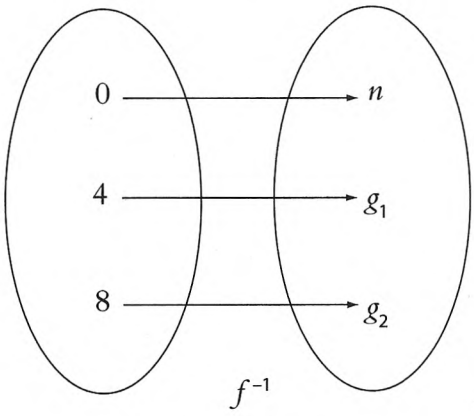


Correspondencia f.

Éste es un modo un tanto complicado pero matemáticamente claro e irreprochable de decir que la operación • se conserva al pasar de izquierda a derecha al convertirse en la operación +

O dicho de otro modo, que da igual dónde se verifique la operación: si la hacemos en la izquierda con • y luego pasamos mediante f el resultado a la derecha, da lo mismo que pasar cada elemento mediante f a la derecha y operar con + allí. Comoquiera que la correspondencia es uno-a-uno, f tiene una correspondencia inversa f^{-1} y también

$$f^{-1}(a + b) = f^{-1}(a) \bullet f^{-1}(b).$$



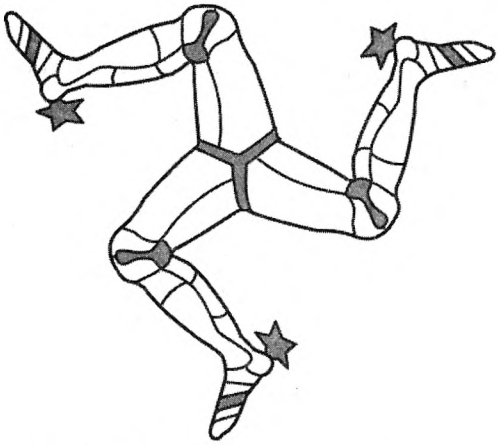
Correspondencia inversa.

A y B, cada uno con su operación, • y +, se comportan como grupos exactamente del mismo modo.

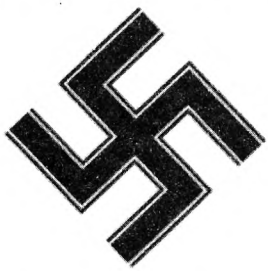
Cuando dos grupos, como A y B, pueden relacionarse de tal modo, cuando, en una palabra, se comportan igual, es que seguramente son iguales. De hecho, no lo son, porque están formados por elementos distintos procedentes de conjuntos distintos, pero su comportamiento los hace indistinguibles. Son como grupos hermanos gemelos univitelinos. En álgebra se dice que ambos grupos son isomorfos, denominación que procede del griego (*isos* = igual y *morfé* = forma). Se indica muchas veces como $A \cong B$.

A los grupos isomorfos se les acostumbra a denominar con el mismo nombre. Los dos grupos que hemos utilizado son grupos cíclicos, isomorfos a $\mathbb{Z}_3$, y muchas veces se les designa con ese nombre.

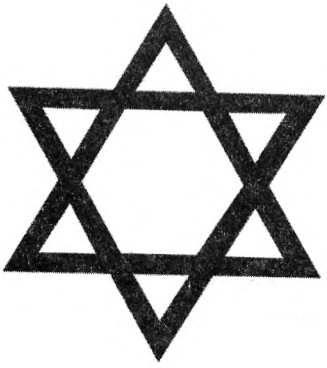
Pero no son los únicos; hay muchos más, como el grupo de simetría de las piernas del escudo de la isla de Man, cuyo grupo de simetrías es también isomorfo a $\mathbb{Z}_3$:



La siguiente imagen también es simétrica y cíclica, aunque en su momento era ominosa. Su grupo de simetría es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Sólo tiene 4 elementos:



Esta tercera imagen también es simétrica y su grupo de simetría tiene 12 elementos y es isomorfo a D_6:



Pero no hay sólo isomorfismos, aunque éstos sean muy importantes. Existen otras correspondencias entre conjuntos que también conservan la «forma»; es decir, conservan la operación •, aunque de un modo menos rotundo que los isomorfismos. Esas correspondencias son los «morfismos» a secas.

Existen otros dos tipos de «morfismos»; los isomorfismos están en medio de ambos y representan la conservación de la forma algebraica en toda su perfección: dos grupos isomorfos tienen exactamente la misma tabla y se comportan del mismo modo. Sólo se diferencian porque se escriben con distintos letras y signos, pero en el fondo son lo mismo.

Los morfismos, que también reciben el nombre de homomorfismos, son «casi» isomorfismos, pero por exceso o por defecto. Mostraremos a continuación sendos ejemplos.

Empezaremos por los morfismos denominados inyectivos o monomorfismos. Por ejemplo, pensemos en el conjunto de los múltiplos enteros de 12, que llamaremos $12\mathbb{Z}$:

$$12\mathbb{Z} = \{\ldots, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, \ldots\}.$$

En $12\mathbb{Z}$, es decir, entre los múltiplos de 12, reina la operación suma, pues se dan las siguientes condiciones:

1. Si $a = 12n$ y $b = 12m$ son múltiplos de 12, la suma $a + b = 12n + 12m = 12\ (n + m)$ también es un múltiplo de 12 y pertenece por tanto a $12\mathbb{Z}$. En $12\mathbb{Z}$ la operación + es cerrada.

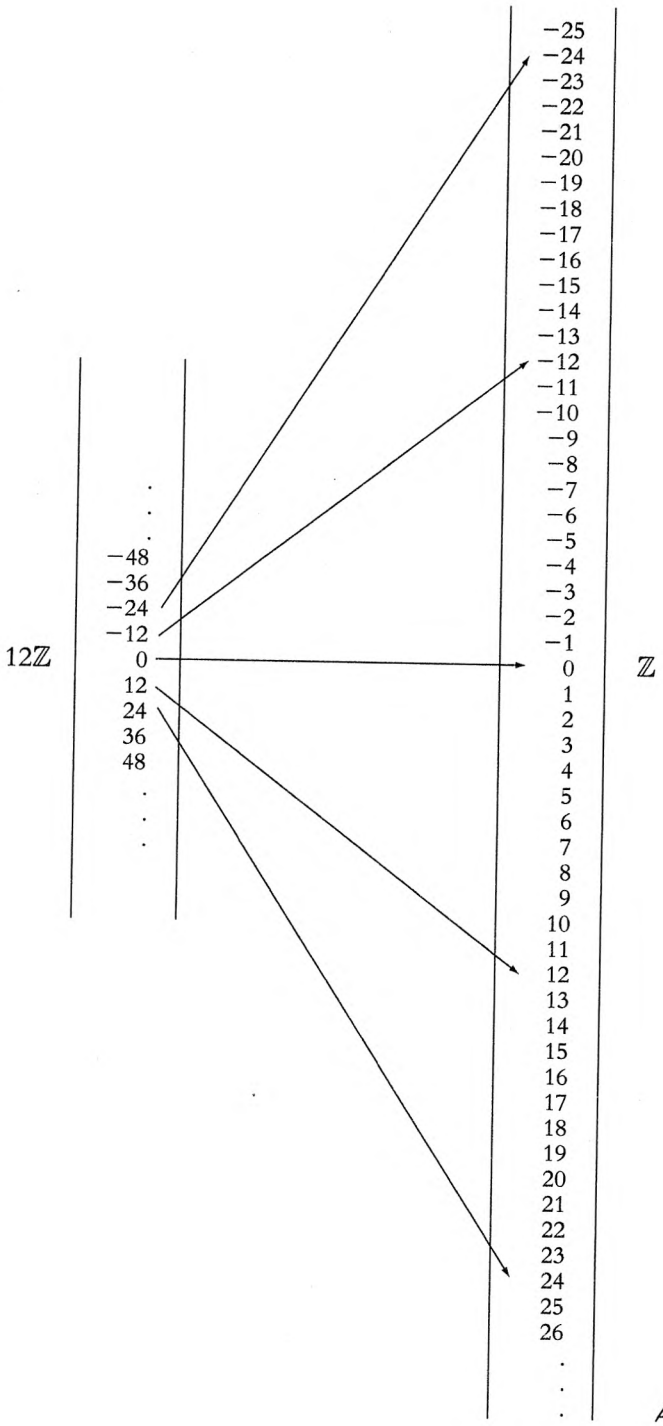
2. 0 es el elemento neutro. Y $0 \in 12\mathbb{Z}$, pues $0 = 12 \cdot 0$ y $0 \in \mathbb{Z}$.

3. El opuesto de un múltiplo de 12 como $a = 12n$ es $-a = 12\ (-n)$, que también es múltiplo de 12.

4. La ley asociativa se verifica trivialmente, pues si vale para todo $\mathbb{Z}$ con mayor razón valdrá para un subconjunto de $\mathbb{Z}$ como $12\mathbb{Z}$.

Es perfectamente posible «meter» a $12\mathbb{Z}$ dentro de $\mathbb{Z}$ del modo más natural:

$$f\,(a + b) = 12\,(a + b) = 12a + 12b = f(a) + f(b).$$



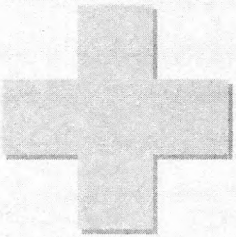
Aplicación de inclusión.

Ahora la correspondencia f no es uno-a-uno, aunque sí se cumple que cada elemento de $12\mathbb{Z}$ tiene su correspondiente imagen en $\mathbb{Z}$. La correspondencia f se denomina en álgebra monomorfismo. Como $12\mathbb{Z}$ es una parte o subconjunto de $\mathbb{Z}$, $12\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, los dos grupos no pueden ser isomorfos. Son grupos distintos, uno dentro

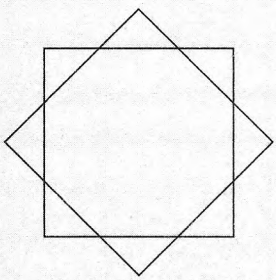
SÍMBOLOS SIMÉTRICOS

La mayoría de los signos y símbolos que utiliza el hombre son simétricos. Prescindiendo de las letras y las señales de circulación, nos quedan todavía las señales de identificación como campo de estudio. Ya hemos visto algunos, como la cruz gamada, la estrella de David o las piernas en círculo. Otros, también simétricos y muy comunes, son los que aparecen a continuación.

La novela *El código Da Vinci* puso de moda una variante del signo de la cruz, la cruz cuadrada, llamada también cruz griega, que tiene simetría D_4. Nótese que también puede teselar el plano si sus brazos tienen el grosor adecuado.



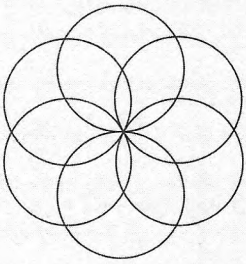
Cruz cuadrada



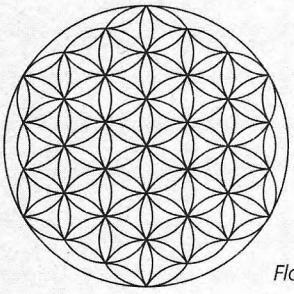
Estrella de Lakshmi

La estrella de David, símbolo hebreo, no debe confundirse con la estrella de Lakshmi del hinduismo; los aficionados al cine pueden rastrear su aparición en *La pantera rosa*. Su simetría es D_8.

Los antiguos egipcios crearon el ornamento conocido como «semillas de la vida», que también presenta simetría hexagonal.



Semillas de la vida



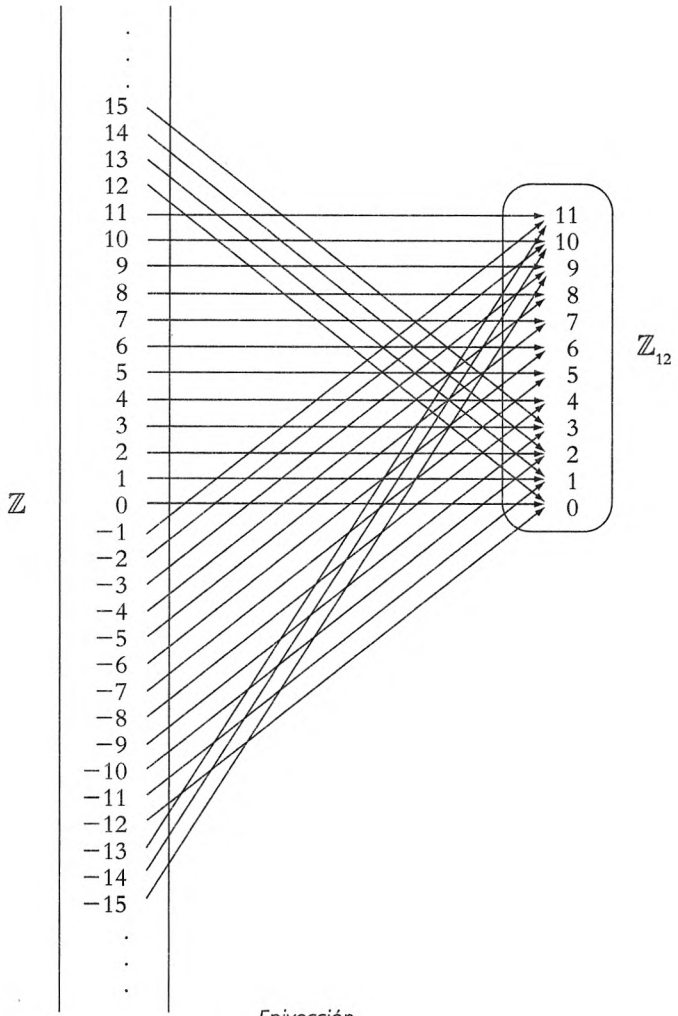
Flor de la vida

Este símbolo fue adoptado por los fenicios, que lo expandieron hasta convertirlo en la «flor de la vida». Aunque es un dibujo más historiado, la simetría es la misma.

de otro, pero están unidos por una correspondencia o monomorfismo *f* que conserva la operación de $12\mathbb{Z}$ cuando se efectúa dentro del grupo mayor. Un monomorfismo es una especie de isomorfismo, pero por defecto.

A continuación mostraremos un morfismo por exceso, lo que se llama en álgebra un epimorfismo. Empezaremos por dos grupos ya conocidos, el grupo de los números enteros $\mathbb{Z}$ equipado con la operación $+$, y el grupo del reloj $\mathbb{Z}_{12}$, equipado con su operación $+$. La correspondencia entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_{12}$ será ahora una correspondencia *f* definida por

$$f(a) = a.$$



Epiyección.

La correspondencia no es evidentemente uno-a-uno; de hecho, subconjuntos completos de $\mathbb{Z}$ se corresponden con el mismo elemento de $\mathbb{Z}_{12}$. El lector observador ya se habrá apercibido de que las partes de $\mathbb{Z}$ que van a un mismo elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ son precisamente nuestros viejos conocidos anteriores:

$$\{\ldots, -36, -24, -12, 0, 12, 24,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -35, -23, -11, 1, 13, 25,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -34, -22, -10, 2, 14, 26,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -33, -21, -9, 3, 15, 27,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -32, -20, -8, 4, 16, 28,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -31, -19, -7, 5, 17, 29,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -30, -18, -6, 6, 18, 30,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -28, -16, -4, 8, 20, 32,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -27, -15, -3, 9, 21, 33,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -26, -14, -2, 10, 22, 34,\ldots\}$$
$$\{\ldots, -25, -13, -1, 11, 23, 35,\ldots\}$$

Y f los envía sobre **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10** y **11**. La correspondencia f es un morfismo, pues, por definición

$$f(a + b) = \boldsymbol{a + b} = f(a) + f(b);$$

f envía $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}_{12}$, y es una correspondencia denominada epiyectiva. Del morfismo se dice que es un epimorfismo (del griego *epi* = sobre).

Todo este fárrago de morfismos puede parecer un poco inútil, visto sin la perspectiva algebraica necesaria. No obstante, las nociones explicadas hasta ahora son básicas en álgebra moderna. Forman parte del enfoque abstracto que se ha dado a conceptos que en otro tiempo deambulaban por el camino de las matemáticas de modo subterráneo; existían, pero faltaba un nuevo lenguaje que los pusiera de manifiesto. Neutros, inversos, morfismos y demás elementos de nombre extraño los ha habido siempre, pero han ido saliendo lentamente a la superficie, como los maderos de los restos de un naufragio. Que las simetrías forman grupos y que para estudiar las pautas simétricas a fondo hay que estudiar a fondo los grupos, es un punto de vista que choca al principio, pero que vale la pena. El camino de la abstracción es arduo, pero poderoso.

Capítulo 2

¿Qué es un grupo?

Como en una estación de esquí llena de chicas
al acecho de marido, y de maridos a la caza de chicas,
la situación no es tan simétrica como pudiera parecer.
Alan Lindsay Mackay

Los grupos empezaron siendo una herramienta práctica, que funcionaba muy bien en el campo de la resolución de ecuaciones; luego, fueron utilizados intensamente en estudios geométricos, y de ahí, de modo natural, ascendieron al cielo matemático. Pocas áreas de la matemática, por no decir ninguna, se libran de la presencia de los grupos, incluido el teorema que posiblemente fue en su día el más largo de la historia, la clasificación de los grupos simples.

Como es lógico, el estudio de los grupos va de los conceptos más fáciles a los más complejos; en el siglo XXI, dicha complejidad ha alcanzado extremos que para los no iniciados son intimidatorios. No esperamos que este capítulo sea incomprensible, pues no trata de los grupos a nivel estratosférico, pero sí que cuesta un cierto esfuerzo su asimilación.

Subgrupos normales y grupos cocientes

En un grupo G tomamos un elemento g y formamos $g \bullet G$, es decir, el conjunto de todos los resultados de operar g con todos los elementos de G. Obtendremos el propio grupo G, pero ¿sucederá lo mismo si tomamos un subgrupo F de G? Le invitamos a probarlo, pero verá como no.

Si F es abeliano, seguro que ambos conjuntos cumplen $g \bullet F = F \bullet g$, pero si F no es abeliano, quizá se verifique la igualdad y quizá no. Hagamos un simple ensayo con un grupo ya visto, como D_4. Si elegimos como subgrupo a las rotaciones

$$R = \{n, g_1, g_2, g_3\}$$

y acudimos a la tabla, entonces

$$g_i \bullet R = \{g_1, g_2, g_3, n\} = R \bullet g_i$$

para cualquier rotación g_i (incluyendo $g_0 = n$) y

$$e_j \bullet R = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = R \bullet e_j$$

para cualquier reflexión axial e_j. Resultan dos subconjuntos distintos. Además, que se obtenga el mismo conjunto operando a derecha e izquierda era de suponer, puesto que R es un subgrupo conmutativo. Pero, ojo, créanos si le decimos que no siempre es así, y los productos efectuados a la derecha no son iguales a los productos efectuados a la izquierda. En general,

$$g \bullet F \neq F \bullet g.$$

Un ejemplo extraído de un grupo de 120 elementos permitiría ver que no siempre $g \bullet F = F \bullet g$ para todo subgrupo F. Sin embargo, la comprobación sería bastante laboriosa, y ahorrará trabajo creyéndonos. Por cierto, a los subconjuntos $g \bullet F$ se les llama clases laterales de F.

Un subgrupo N de un grupo G que cumple la condición

$$g \bullet N = N \bullet g$$

para todos los $g \in G$, se dice que es un subgrupo normal; a veces se llaman también «distinguidos» a los subgrupos normales, pero sólo se lo advertimos por si se encuentra alguna vez esta denominación, que figura sobre todo en textos de origen francés.

Pongamos otro ejemplo, procedente de algo que ya hemos visto, como el grupo del reloj. Allí teníamos un grupo grande, $\mathbb{Z}$, y un subgrupo menor, $12\mathbb{Z}$, formado por los enteros múltiplos de 12

$$12\mathbb{Z} = \{\ldots, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, \ldots\}.$$

Este subgrupo es abeliano, o sea, normal. La operación que convierte a $12\mathbb{Z}$ en grupo es la operación $+$. Si $a = 12n$ y $b = 12m$ son múltiplos de 12, $a + b = 12n + 12m = 12(n + m) = c$; c también es un múltiplo de 12 y, por lo tanto, $c \in 12\mathbb{Z}$. El resto de condiciones de grupo ya las hemos comprobado antes. En lugar de G, N y $\bullet$, estamos hablando de $\mathbb{Z}$, $12\mathbb{Z}$ y $+$. Es como un diccionario de equivalencias.

Sigamos con las equivalencias: ¿cuáles son los subconjuntos de G que hemos denominado $g \bullet N$ o clases laterales de N? Siguiendo con el ejemplo y de acuerdo con el diccionario de equivalencias, nos estamos preguntando por los subconjuntos de números enteros, $\mathbb{Z}$, que hemos denominado $g + 12\mathbb{Z}$. Construyámoslos:

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
-11 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -35, -23, -11, 1, 13, 25, \ldots\}\\
-10 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -34, -22, -10, 2, 14, 26, \ldots\}\\
-9 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -33, -21, -9, 3, 15, 27, \ldots\}\\
-8 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -32, -20, -8, 4, 16, 28, \ldots\}\\
-7 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -31, -19, -7, 5, 17, 29, \ldots\}\\
-6 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -30, -18, -6, 6, 18, 30, \ldots\}\\
-5 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\}\\
-4 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -28, -16, -4, 8, 20, 32, \ldots\}\\
-3 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -27, -15, -3, 9, 21, 33, \ldots\}\\
-2 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -26, -14, -2, 10, 22, 34, \ldots\}\\
-1 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -25, -13, -1, 11, 23, 35, \ldots\}\\
0 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -36, -24, -12, 0, 12, 24, \ldots\}\\
1 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -35, -23, -11, 1, 13, 25, \ldots\}\\
2 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -34, -22, -10, 2, 14, 26, \ldots\}\\
3 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -33, -21, -9, 3, 15, 27, \ldots\}\\
4 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -32, -20, -8, 4, 16, 28, \ldots\}\\
5 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -31, -19, 27, 5, 17, 29, \ldots\}\\
6 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -30, -18, -6, 6, 18, 30, \ldots\}\\
7 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\}\\
8 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -28, -16, -4, 8, 20, 32, \ldots\}\\
9 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -27, -15, -3, 9, 21, 33, \ldots\}\\
10 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -26, -14, -2, 10, 22, 34, \ldots\}\\
11 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -25, -13, -1, 11, 23, 35, \ldots\}\\
12 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -36, -24, -12, 0, 12, 24, \ldots\}\\
13 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -35, -23, -11, 1, 13, 25, \ldots\}\\
14 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -34, -22, -10, 2, 14, 26, \ldots\}\\
15 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -33, -21, -9, 3, 15, 27, \ldots\}\\
16 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -32, -20, -8, 4, 16, 28, \ldots\}\\
17 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -31, -19, -7, 5, 17, 29, \ldots\}\\
18 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -30, -18, -6, 6, 18, 30, \ldots\}\\
19 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\}\\
20 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -28, -16, -4, 8, 20, 32, \ldots\}\\
21 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -27, -15, -3, 9, 21, 33, \ldots\}\\
22 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -26, -14, -2, 10, 22, 34, \ldots\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Podríamos seguir escribiendo indefinidamente, pero ya se puede ver que en realidad sólo hay 12 subconjuntos de $\mathbb{Z}$ o clases laterales de $12\mathbb{Z}$ distintas.

Dos clases laterales $a + 12\mathbb{Z}$ y $b + 12\mathbb{Z}$ coinciden cuando $a - b \in 12\mathbb{Z}$. En términos generales, esto se escribiría (léase en el diccionario de equivalencias, donde $+$ se cambia por $\bullet$ y $12\mathbb{Z}$ por N) del siguiente modo: dos elementos a y b del grupo G están en la misma clase si y sólo si $a \bullet b^{-1} \in N$.

Las clases laterales distintas en nuestro ejemplo podrían ser:

$$\begin{aligned}
0 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -36, -24, -12, 0, 12, 24, \ldots\} \\
1 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -35, -23, -11, 1, 13, 25, \ldots\} \\
2 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -34, -22, -10, 2, 14, 26, \ldots\} \\
3 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -33, -21, -9, 3, 15, 27, \ldots\} \\
4 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -32, -20, -8, 4, 16, 28, \ldots\} \\
5 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -31, -19, -7, 5, 17, 29, \ldots\} \\
6 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -30, -18, -6, 6, 18, 30, \ldots\} \\
7 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\} \\
8 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -28, -16, -4, 8, 20, 32, \ldots\} \\
9 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -27, -15, -3, 9, 21, 33, \ldots\} \\
10 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -26, -14, -2, 10, 22, 34, \ldots\} \\
11 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -25, -13, -1, 11, 23, 35, \ldots\}
\end{aligned}$$

Ahora que ya hemos definido a los subgrupos normales, se puede pasar al siguiente concepto, el de grupo cociente. Si partimos de un grupo G y de un subgrupo normal N, para cualquier $g \in G$ se pueden considerar los subconjuntos o partes de G, llamadas clases laterales de N, definidas por $g \bullet N$, que casualmente cumplen $g \bullet N = N \bullet g$. Llamemos G/N a este nuevo conjunto

$$G/N = \{g \bullet N, g \in G\}.$$

Para simplificar, denominemos $\boldsymbol{g}$ a las clases laterales

$$\boldsymbol{g} = g \bullet N.$$

A este nuevo conjunto es muy sencillo, natural incluso, dotarlo de una operación $\bullet$ y de la estructura de grupo. Basta poner

$$\boldsymbol{g}_1 \bullet \boldsymbol{g}_2 = (g_1 \bullet g_2) \bullet N.$$

El ejemplo de los relojes facilitará la comprensión de esta cuestión. Estudiemos el grupo cociente $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; las clases laterales de $12\mathbb{Z}$ son:

$$
\begin{aligned}
0 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -36, -24, -12, 0, 12, 24, \ldots\} = \mathbf{0} \\
1 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -35, -23, -11, 1, 13, 25, \ldots\} = \mathbf{1} \\
2 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -34, -22, -10, 2, 14, 26, \ldots\} = \mathbf{2} \\
3 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -33, -21, -9, 3, 15, 27, \ldots\} = \mathbf{3} \\
4 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -32, -20, -8, 4, 16, 28, \ldots\} = \mathbf{4} \\
5 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -31, -19, -7, 5, 17, 29, \ldots\} = \mathbf{5} \\
6 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -30, -18, -6, 6, 18, 30, \ldots\} = \mathbf{6} \\
7 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -29, -17, -5, 7, 19, 31, \ldots\} = \mathbf{7} \\
8 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -28, -16, -4, 8, 20, 32, \ldots\} = \mathbf{8} \\
9 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -27, -15, -3, 9, 21, 33, \ldots\} = \mathbf{9} \\
10 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -26, -14, -2, 10, 22, 34, \ldots\} = \mathbf{10} \\
11 + 12\mathbb{Z} &= \{\ldots, -25, -13, -1, 11, 23, 35, \ldots\} = \mathbf{11}
\end{aligned}
$$

y pueden ser denominadas como se escribe a la derecha en negrita. Si definimos la suma de clases tal como se indica más arriba,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a + b) + 12\mathbb{Z}$$

y el grupo tiene por tabla

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

no es otro (o es isomorfo) que nuestro viejo conocido $\mathbb{Z}_{12}$. Podemos escribir, pues

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{12}.$$

Si consideramos, por ejemplo, el grupo del cuadrado, D_4, un subgrupo normal es R, el subgrupo de las rotaciones, las clases laterales son dos, pues:

$$\begin{aligned}
n \bullet R &= \{g_1, g_2, g_3, n\} = R \bullet n \\
g_1 \bullet R &= \{g_1, g_2, g_3, n\} = R \bullet g_1 \\
g_2 \bullet R &= \{g_1, g_2, g_3, n\} = R \bullet g_2 \\
g_3 \bullet R &= \{g_1, g_2, g_3, n\} = R \bullet g_3 \\
e_1 \bullet R &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = R \bullet e_1 \\
e_2 \bullet R &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = R \bullet e_2 \\
e_3 \bullet R &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = R \bullet e_3 \\
e_4 \bullet R &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = R \bullet e_4
\end{aligned}$$

y dos clases son iguales cuando $a \bullet b^{-1} \in R$.

Si llamamos $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{e}$ a las dos clases laterales

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \{g_1, g_2, g_3, n\} \\
\boldsymbol{e} &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}
\end{aligned}$$

aplicando a esas clases la estructura de grupo cociente, resulta la tabla

•	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{n}$

que resulta ser un grupo de dos elementos, ya conocido, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$$D_4/R \cong \mathbb{Z}_2.$$

Además, este ejemplo puede contribuir a comprender el porqué de ese curioso nombre de grupo cociente. Resulta que, entre grupos finitos

$$|G/N| \cdot |N| = |G|$$

o, lo que es lo mismo,

$$|G/N| = |G|/|N|.$$

El orden del grupo cociente es el cociente de los órdenes de los grupos.

Si un grupo G admite una cadena de inclusiones de subgrupos, del subgrupo trivial hasta G

$$\{n\} = G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

donde

1. todos los G_i (salvo el último, G) son normales y
2. los sucesivos grupos cocientes G_{i+1}/G_i son abelianos,

decimos que G es soluble. Aquí, «soluble» debe entenderse como sinónimo de «resoluble» y debe privarse al adjetivo de toda connotación química o humorística posible.

Ya hemos llegado al fin del camino, la definición de grupo soluble, y no ha sido sencillo; así que calcule lo que debió de costarles a los algebristas contemporáneos de Évariste Galois, el genio que originó toda esta cuestión aún no hace 200 años. Y lo más curioso es que todo ello surgió en la mente de Galois al trabajar, no con simetrías, sino con ecuaciones.

El grupo simétrico

Tratándose de grupos finitos, el que podríamos denominar «padre de todos los grupos» es el grupo simétrico: un grupo que se define sucesivamente para cualquier número n, que se escribe S_n y que tiene $n!$ elementos, o sea, una barbaridad a medida que n crece.

De momento, empecemos por construir los más sencillos. Hablando en términos generales, S_n es el conjunto de las permutaciones de n objetos. Supondremos que son simples letras de nuestro alfabeto, aunque da igual que permutemos letras, números, bolas de colores, etc. Todos los grupos de permutaciones son isomorfos. Escribamos,

por ejemplo, dos permutaciones p_1 y p_2 de cuatro objetos; para hacer las operaciones cómodamente, escribiremos

$$p_1 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{bmatrix}.$$

La operación del grupo se definirá del modo más natural posible tratándose de permutaciones. ¿Dónde va a parar *a*? Pues, según se indica en p_2, *a* va parar a *b*. ¿Y dónde va a parar *b*? Pues p_1 la permuta otra vez por *a*. Es decir, que finalmente *a* va a parar a *a*. Siguiendo el proceso nos resulta al final la permutación

$$p_3 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{bmatrix}.$$

Y escribimos $p_1 \bullet p_2 = p_3$ de la manera más natural. La operación entre permutaciones consiste en hacer una (la de la derecha, recordémoslo) y después la otra. El resultado es otra permutación, que puede ser una de las dos anteriores o no serlo.

La estructura de grupo se hace evidente en cuanto que las permutaciones son asociativas (por definición de lo que es una permutación física) y existe una permutación privilegiada:

$$n = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{bmatrix},$$

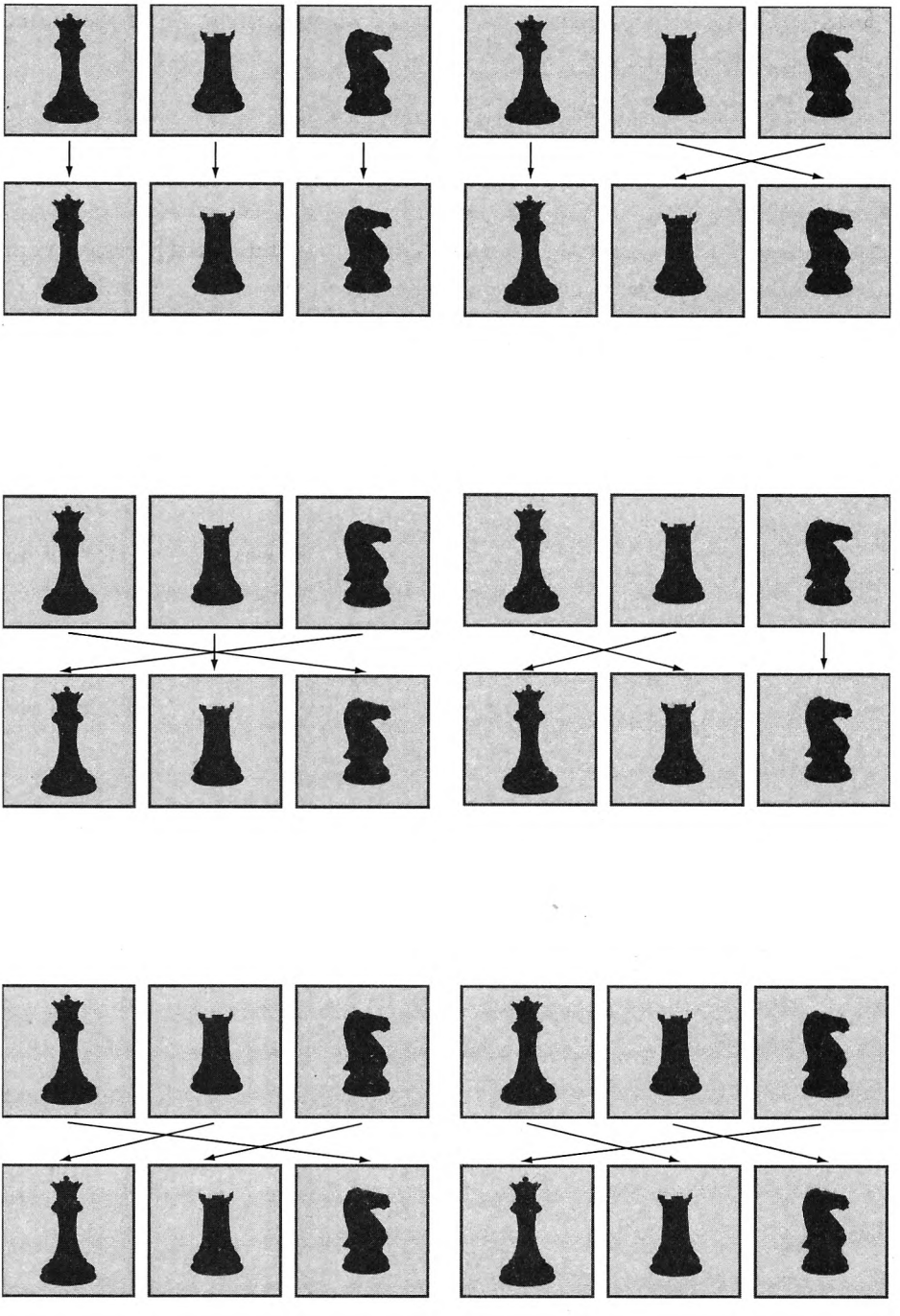
que consiste en dejarlo todo tal como estaba, y que actúa de elemento neutro. También hay elemento inverso, pues si

$$p = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{bmatrix}$$

basta con tomar por inverso a la permutación que lo devuelve todo a su lugar:

$$p^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{bmatrix},$$

pues entonces $p \bullet p^{-1} = p^{-1} \bullet p = n$.



Grupo de permutaciones de 3 objetos.

n!

Este curioso título esconde una conocida notación aritmética. Si n es un número entero positivo, $n!$ designa al producto

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

y se le denomina n factorial o factorial de n. Por razones de cálculo que no importan aquí, se toma el valor convencional

$$0! = 1.$$

Este concepto fue introducido por un matemático francés poco conocido, Christian Kramp (1760-1826), quien lo acuñó en fecha ya tan lejana como1808. El número $n!$ tiene un crecimiento muy rápido, sorprendente, tal como se demuestra en la siguiente tabla que puede encontrarse en Internet:

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5.040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600
13	6.227.020.800
14	87.178.291.200
15	1.307.674.368.000
... 20 ...	2.432.902.008.176.640.000
25	15.511.210.043.330.985.984.000.000

De hecho, la llamada fórmula de aproximación de Stirling proporciona una muy buena idea del tamaño de $n!$, al tiempo que constituye por sí sola un canto a la belleza:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

La definición de $n!$ puede extenderse a cualquier valor de n, aunque no sea entero positivo, pero eso requiere las armas del análisis superior y la definición de la función Γ. Por otra parte, uno de los usos más conocidos de $n!$ está en la serie

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

que permite definir de modo elegante al número e.

Un divertido problema, ya resuelto por Jakob Bernoulli (1654-1705), dice así: al llegar a una fiesta, n invitados entregan sus sombreros a la entrada; ¿cuál es la probabilidad de que, a la salida, a nadie le devuelvan su cubrecabezas? Bernoulli calculó que la solución al «problema de los sombreros» era

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

¡Y sin conocer el concepto de factorial!

Volvamos a S_n, puesto que la definición siguiente funciona para cualquier grupo simétrico; cada permutación p de S_n tiene un signo, positivo o negativo, aunque no se aprecie a primera vista. Una transposición es aquella permutación que sólo intercambia dos elementos, el uno por el otro; es un hecho sencillo, si bien no resulta fácil de demostrar, que toda permutación es fruto de llevar a cabo varias transposiciones, una tras otra. Cuando el número de transposiciones es par, el signo de p es positivo; cuando el número de transposiciones es impar, el signo de p es negativo.

El número de permutaciones de n elementos es, tal como se aprende en la escuela, $n!$

$$|S_n| = n!$$

El conjunto formado por todas las transposiciones positivas se designa por A_n y se denomina grupo alternado de orden n. Como es natural, $A_n \subset S_n$.

El grupo alternado no es abeliano cuando n $>$ 3. Como el número de transposiciones positivas es igual que el de negativas, $|A_n| = |S_n|/2$,

S_1 estará formado por todas las permutaciones posibles de una sola letra, por ejemplo, la *a*. No hay problema, pues sólo existe una permutación que transforma la expresión «*a*» en «*a*», o sea, en sí misma. El grupo S_1 tiene un solo elemento, y es por tanto el grupo trivial que tiene al elemento neutro como único.

S_2 es el conjunto de permutaciones de dos elementos, que consta sólo de dos permutaciones:

$$n = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

y es un grupo cíclico, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Naturalmente, es un grupo abeliano.

S_3 es isomorfo al grupo de las simetrías de un triángulo equilátero. Tiene seis elementos, que intercambian tres letras, *a*, *b*, *c*, unas por otras. $S_3 \cong D_3$. S_3 no es, pues, abeliano, como no lo son los grupos simétricos S_n sucesivos.

S_4 coincide con el grupo de simetrías del tetraedro, el poliedro regular de 4 vértices. Tiene 24 elementos distribuidos en 12 rotaciones y 12 simetrías con torsión. S_4 es isomorfo a las rotaciones propias del cubo, con lo que un grupo completo de simetrías de un poliedro resulta ser subgrupo de las simetrías del siguiente.

S_5 es harina de otro costal, pues aparte de constar de 120 permutaciones, que ya es una cifra respetable, S_5 es, como veremos, el primer grupo simétrico no soluble, y todos los posteriores no son solubles, de ahí el célebre resultado de Galois: no hay una fórmula aritmética simple que resuelva todas las ecuaciones de grado superior o igual al quinto.

Naturalmente, volveremos más adelante a tratar S_5 y el hecho de que no sea un grupo soluble. Pero recordemos que eso significa que no existe una cadena de subgrupos normales que acabe en S_5:

$$\{n\} = G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots \subset G_n = S_5$$

y cuyos grupos cocientes intermedios sean abelianos. Eso nos obliga a investigar los subgrupos normales de S_5 como primer paso para ver si son o no solubles.

Otro resultado importante entre los relacionados con el grupo simétrico, se debe a Cayley, y afirma que todo grupo finito es isomorfo a algún subgrupo de un grupo simétrico.

ARTHUR CAYLEY (1821-1895)

Uno de los más relevantes matemáticos de la historia pasó trece años de su vida ejerciendo la abogacía, y todo ello para ganarse la vida, en una época y una sociedad bastante desarrollada, como era la Inglaterra imperial victoriana. Cayley nació en Gran Bretaña, pero pasó su primera infancia en Rusia, donde trabajaba su padre. En Cambridge demostró su valía: fue el número uno en matemáticas y mostró tener un singular talento para las lenguas: dominaba el italiano, el alemán, el francés, el griego y, naturalmente, el inglés.

Cayley terminó sus estudios y ejerció la abogacía con un éxito halagüeño. Pasaron los años y se produjo un cierto incremento de fondos en la gloriosa cátedra lucasiana, ya regida en su día por Newton; el sueldo de la universidad, muy modesto, mejoró y Cayley abandonó por fin su lucrativa carrera de abogado y dedicó su tiempo a su verdadera vocación, mucho menos remunerada. Su terreno fue el análisis, los cuaternios, las matrices y los determinantes y la geometría *n*-dimensional, aunque hoy lo veneramos, sobre todo, por su trabajo en teoría de grupos. Él fue quien los estudió de modo abstracto y quien los sacó de su reducto en el mundo de las ecuaciones para dotarlos de existencia independiente y definirlos de un modo universal. Con su colega y amigo James Joseph Sylvester (1814-1897), formó un equipo científico de gran valor.

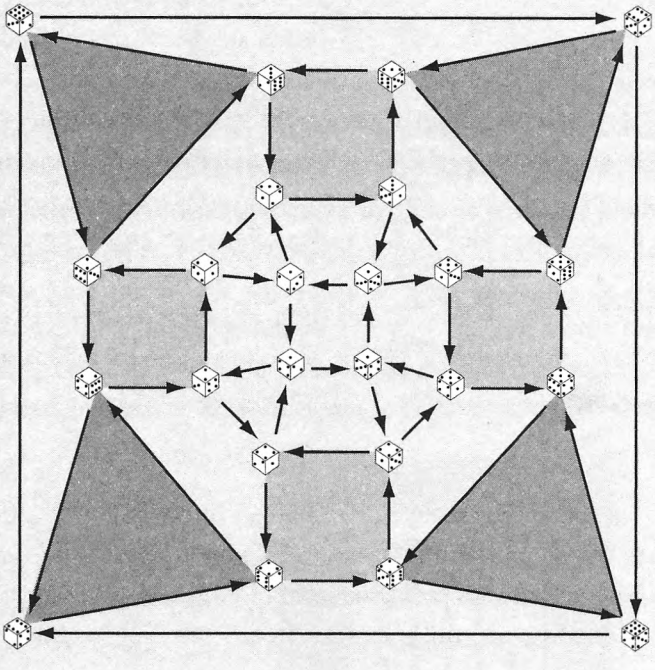


Gráfico llamado de Cayley del grupo de rotaciones de un dado. El uso de colores y de elementos generadores visualiza y convierte en más intuitiva y manejable la en ocasiones intrincada estructura de un grupo. El grupo resulta ser isomorfo a S_4 que no es conmutativo, lo cual indica que, contrariamente a lo que sucede en el plano, las rotaciones espaciales no tienen por qué conmutar si no poseen el mismo eje.

Grupos × Grupos = Más grupos

Los grupos se comportan como las piezas de lego; con dos o más piezas pueden fabricarse más piezas, un objeto incluso. Un procedimiento estándar permite pasar de dos grupos a un grupo compuesto mayor del siguiente modo: si A y B son grupos con operaciones respectivas $\bullet$ y $\circ$, el llamado producto cartesiano de conjuntos, denominado $A \times B$,

$$A \times B = \{(a,b), \text{ con } a \in A, b \in B\},$$

formado por pares de miembros de A y B, puede convertirse en un grupo de manera nada complicada definiendo una nueva operación $\star$ entre pares a partir de las anteriores operaciones:

$$(a_1,b_1) \star (a_2,b_2) = (a_1 \bullet a_2, b_1 \circ b_2).$$

Es decir que, con la ayuda de $\star$ se puede definir en $A \times B$ un grupo mayor. Cuidado, no obstante, con las notaciones, pues entre el grupo resultante y los grupos originales a veces no se conserva vínculo alguno. Aunque, eso sí, se verifica que para grupos finitos

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Por este procedimiento se puede construir, por ejemplo, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ que ya sabemos de antemano que tendrá 4 elementos. Si ahora construimos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tabla en mano, y para no hacerla demasiado grande e irreconocible utilizamos abreviaturas como éstas:

$$(0,0) = a$$
$$(1,0) = b$$
$$(0,1) = c$$
$$(1,1) = d$$

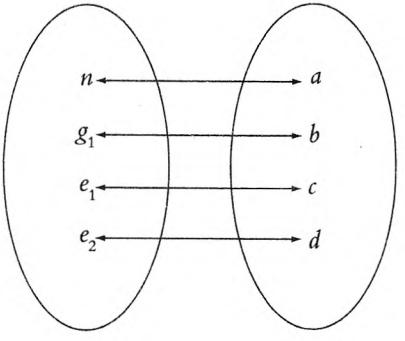
resulta la tabla:

•	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Si alguien se pregunta qué grupo es ése, tómese nuestro viejo conocido D_2, o grupo de Klein:

•	n	g_1	e_1	e_2
n	n	g_1	e_1	e_2
g_1	g_1	n	e_2	e_1
e_1	e_1	e_2	g_1	n
e_2	e_2	e_1	n	g_1

y establézcase el siguiente isomorfismo:



Así que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong D_2$. En cambio, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ tiene $2 \cdot 3 = 6$ elementos, como D_3, pero ¡oh, desengaño! no son isomorfos. El primero es abeliano y el segundo, no. Los grupos se comportan como los niños: tan pequeñosy, en ocasiones, tan fastidiosos. Antes de abandonar el producto de grupos, podemos intentar ver qué pasa con el grupo cociente, y si ese vocabulario de grupos-producto versus grupos-cociente tiene algo que ver con algún tipo de multiplicación y de división. Empecemos con un caso fácil para hacer una prueba: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Pondremos 0 en lugar de a, 1 en lugar de b, 2 en lugar de c y 3 en lugar de d para visualizarlo todo mejor; entonces, el grupo de Klein (o $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, como se prefiera) se representará con la tabla siguiente:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	1	0
3	3	2	0	1

que es el «numerador» o grupo producto, y $\mathbb{Z}_2$ vemos que es efectivamente un subgrupo normal suyo:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Las clases laterales son:

$$0 + \mathbb{Z}_2 = \{0,1\} \text{ (que llamaremos, por ejemplo, } \mathbf{0}),$$
$$1 + \mathbb{Z}_2 = \{0,1\} \text{ (que es } \mathbf{0}),$$
$$2 + \mathbb{Z}_2 = \{2,3\} \text{ (que llamaremos, por ejemplo, } \mathbf{1}),$$
$$3 + \mathbb{Z}_2 = \{2,3\} \text{ (que es } \mathbf{1}),$$

con la tabla

+	0	1
0	0	1
1	1	0

que es evidentemente isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, de modo que

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$$

y parece que el paralelo grupos-números funciona. Y, en efecto, no es demasiado complicado –pero sí algo laborioso– ver que, en general,

$$A \times B / A \cong B$$

Grupos, grupos, grupos...

Ya se intuye que hay un gran número de grupos. Hay grupos que son finitos y grupos, como el de las simetrías de la esfera, que son infinitos. Existen grupos que pueden suponerse y que poseen un centro fijo, como el de un polígono regular o el de un cubo, que se llaman grupos puntuales; y también los hay con varios y aun infinitos centros, que aparecen en los frisos decorados o en los cristales. Hay grupos

que son isomorfos a productos de otros grupos más sencillos y grupos que no lo son; y hay grupos que poseen subgrupos y grupos que no, llamados grupos simples.

Son los verdaderos ladrillos de los grupos, aquellos que permiten construir todos los demás. En el siglo XXI ya somos capaces de identificarlos a todos, pero lo cierto es que esta afirmación encapsula un acto de fe, porque la demostración completa de la estructura de los grupos simples se denomina también –y con toda justicia– «el teorema monstruoso»: en su primera redacción ocupaba unas 10.000 páginas (según otras fuentes, 15.000, y según unas terceras, que excluyen algunos artículos, «sólo» 5.000). Simplificaciones posteriores –por el momento ya ha habido tres– nos han llevado a las 6.000 páginas, pero todavía andamos entre cifras colosales. Definamos, pues, lo que se entiende por grupo simple: un grupo con más de un elemento es simple cuando no tiene más subgrupos normales que él mismo y la identidad.

Si buscamos los grupos simples más sencillos nos toparemos con los grupos abelianos, que son fáciles de abordar; los no abelianos son bastante más difíciles, con A_5, nuestro conocido grupo alternado en el primer lugar. Es de orden 60 y es el menor de todos los grupos no abelianos simples; el siguiente responde al sonoro nombre de grupo especial lineal proyectivo, y es de orden 168. Pero, como veremos, eso no es nada. Hay un grupo simple no abeliano (llamado «el monstruo») de orden 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754. 368.000.000.000.

Capítulo 3

Simetría en más dimensiones

Picture yourself in a boat on a river,
With tangerine trees and marmalade skies
Somebody calls you, you answer quite slowly,
A girl with kaleidoscope eyes.
Lucy in the Sky with Diamonds (The Beatles)

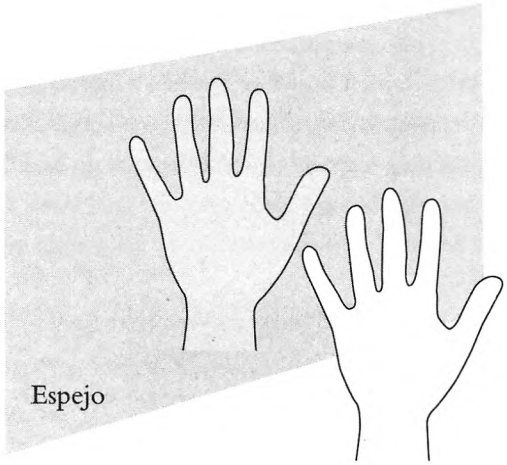
Through the Looking Glass (A través del espejo) es una obra literaria conocida, sobre todo, como la segunda parte de *Alice in Wonderland (Alicia en el País de las Maravillas)*. Su autor, el sacerdote anglicano y fotógrafo aficionado Lewis Carroll, era, además, un matemático especialista en lógica, y eso se nota en sus obras literarias, que no sólo reflejan la infancia y los cuentos, leyendas, canciones y poemas propios de la inimitable Inglaterra victoriana. Lo que se lee está cargado de dobles sentidos, de paradojas lógicas y de situaciones tan absurdas como maravillosamente imaginativas, y ambos libros siguen permaneciendo en los anaqueles de las librerías y en el corazón de los lectores a pesar del tiempo transcurrido. En *A través del espejo,* Alicia pasa simbólicamente a otra realidad con el concurso de un simple espejo.

Ilustración realizada por John Tenniel para la obra de Lewis Carroll A través del espejo.

Espejo, espejito

El espejo está en el origen de una simetría espacial, la simetría especular, que transforma todo punto en su imagen reflejada en el espejo.

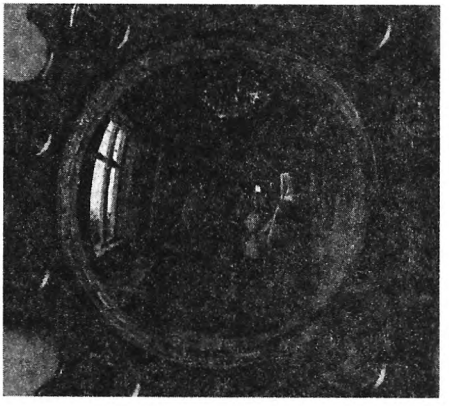
La simetría especular implica un concepto más o menos nuevo, la quiralidad, que los geómetras denominan a veces torsión, cuyo ejemplo más evidente es el representado por un simple par de guantes: el uno es la imagen especular del otro, y ambos guantes, el derecho y el izquierdo, no son congruentes. No es posible ponerse un guante derecho en la mano izquierda (y lo mismo sucede con la otra mano), pues los guantes –o las manos– son objetos quirales, que no coinciden con sus imágenes especulares, y aunque son de la misma forma no son de la misma orientación: en uno es levógira (orientado hacia la izquierda) y en el otro dextrógira (orientado hacia la derecha). Cada guante es, de algún modo, el «antiguante» del guante opuesto.



Esquema de simetría especular que muestra la quiralidad.

Las propias proteínas son moléculas quirales, y el cuerpo humano, por ejemplo, sólo consta de proteínas levógiras (y de grasas y de hidratos de carbono levógiros). El porqué de tal situación es una cuestión que no entra en el campo de la teoría de grupos, así que dejaremos a los biólogos investigar sobre ello.

Situémonos en una circunstancia cotidiana: cuando los varones van al barbero, acostumbran a cortarse el pelo frente a una pared provista de espejos, y es cortesía

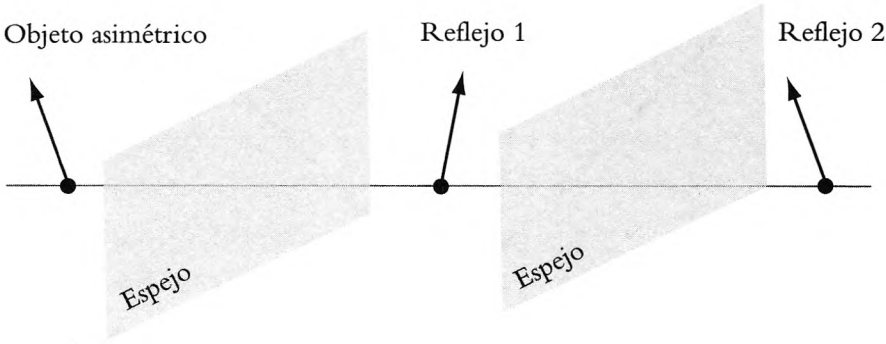


La célebre pintura de Jan Van Eyck El matrimonio Arnolfini, *de 1434. En el minúsculo espejo situado al fondo, que mide poco más de 5 cm, se refleja toda la sala, una vista a través de la ventana, la pareja de espaldas y otras dos personas, situadas en la realidad en el lugar del espectador.*

que se recabe su aprobación cuando el peluquero termina su tarea: para ver cómo ha quedado el corte de pelo por la nuca, el barbero sostiene un espejo de mano y lo coloca junto a la cabeza y por detrás del cliente. Éste mira la imagen en el espejo que tiene delante (pues no tiene ojos en el cogote) y lo ve todo, incluso la imagen de su cabeza reflejada en el segundo espejito.

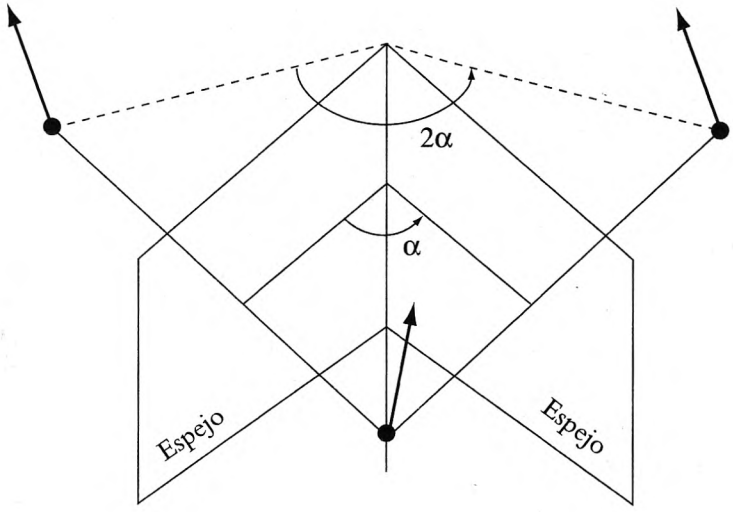
Un geómetra se haría una pregunta inesperada: ¿ve el cliente del barbero su cogote por su «anticogote»? Si se examina el cogote del cliente a través del espejo del barbero, la derecha y la izquierda se intercambian; pero como la escena se examina a través de otro espejo, la imagen del espejo sostenido por el barbero –que es la imagen quiral de la realidad– se convierte en el espejo grande en una imagen real, pues la imagen quiral de una imagen quiral es, como indica el sentido común, una imagen normal. Así que ya lo saben los clientes de una barbería, suponiendo que se lo preguntaran alguna vez: cuando les dicen si les parece bien el corte, están mostrándoles el cogote real, el que se ve. No *Through the Looking Glass*, sino el real, el que estará a la vista de todos.

¿Y cuál es la consecuencia matemática? Pues que dos simetrías especulares, que presentan una torsión, se tranforman, realizadas una tras otra, en una simple simetría sin torsión, en una traslación cuyo alcance es la suma de las distancias a cada eje.

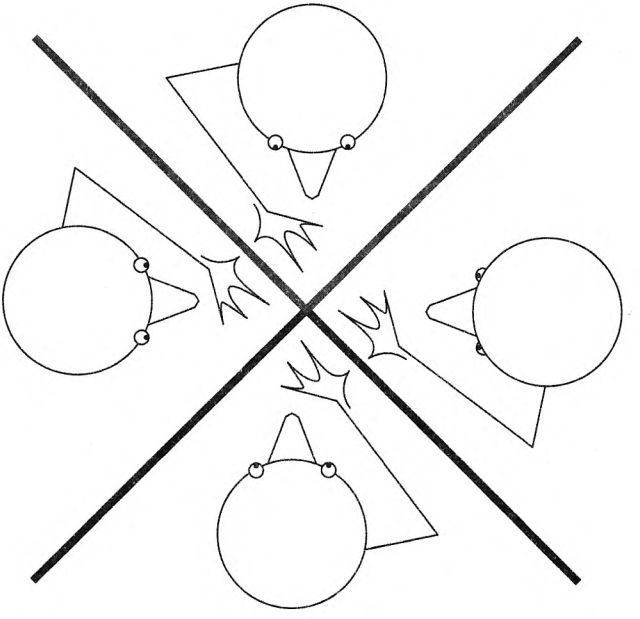


Cuando se componen, una tras otra, dos simetrías especulares paralelas, se obtienen traslaciones en el sentido del movimiento.

Cuando las simetrías especulares no son paralelas, entonces los planos de simetría se cortan en rectas R, con ángulo α, y el resultado son giros respecto de R, con amplitud 2α.



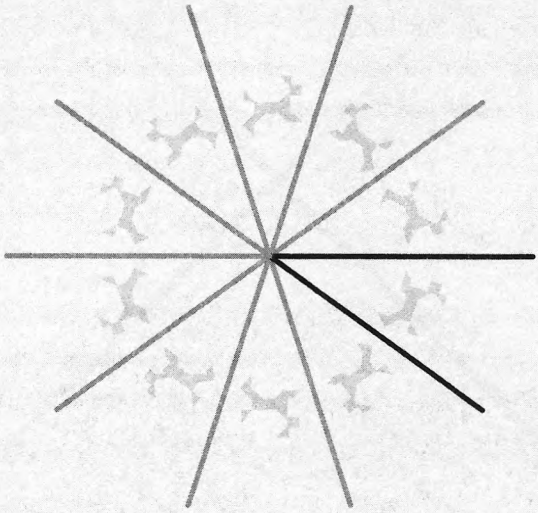
Una característica curiosa de la simetría especular tiene que ver con los espejos –de hecho, combinaciones de dos espejos– que no invierten la imagen, como se demuestra al mirar al frente en espejos dispuestos de la manera que muestra el dibujo de la página siguiente:



Los «juegos» con las simetrías especulares han ocasionado escenas tan magistrales como las filmadas por Orson Welles en *The Lady from Shanghai (La dama de Shanghai)*.

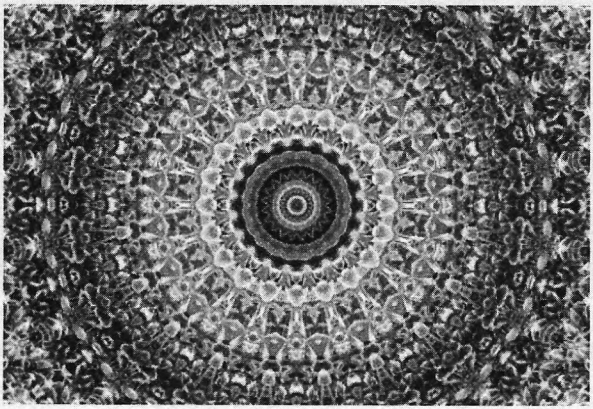
EL CALIDOSCOPIO

El calidoscopio es un juguete o instrumento óptico que explota los planos de simetría.



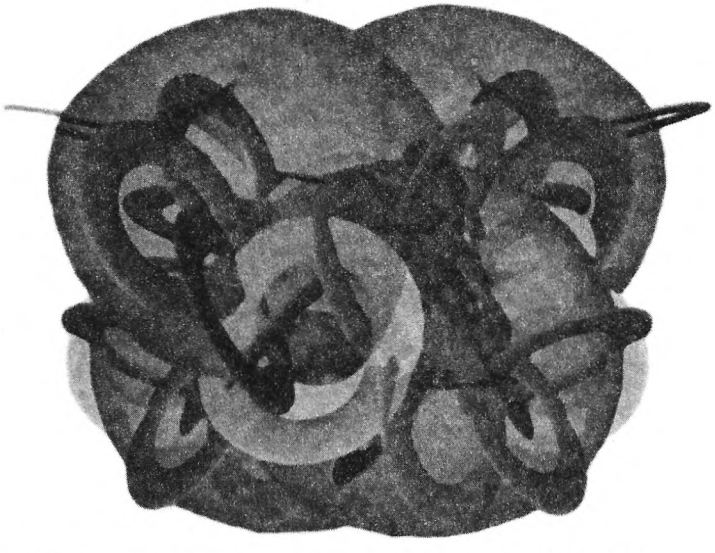
Esquema explicativo de los planos de simetría que posibilitan un calidoscopio.

Cuando se colocan dos planos de simetría formando ángulo de apertura $\pi/3$ o $\pi/4$ se obtienen imágenes de un objeto colocado entre ellos en número de 6 u 8 (pues también se refleja la imagen en los dos espejos). Como es natural, la idea también funciona con amplitud π/n, que da $2n$ imágenes. Y hay que reconocer que para ser un instrumento tan simple, ofrece resultados sorprendentes y barrocos, pues gracias a la simetría especular y a la naturaleza de los objetos reflejados puede crear imágenes extraordinariamente complicadas y siempre distintas.



Por raro que parezca, a veces la simetría especular se hace difícil de detectar y se necesitan para encontrarla los delicados instrumentos del análisis matemático, pues la presunta simetría especular en ocasiones no es visible, ni siquiera para los cultivadores de la sofisticada teoría de cuerdas, que se ocupan de objetos tan esotéricos como las variedades de Calabi-Yau. Éstas no representan una superficie sino una proyección, pues una variedad de Calabi-Yau es multidimensional y goza de dimensión superior a tres, aunque no nos es accesible sino como una empobrecida proyección bidimensional.

Las variedades de Calabi-Yau se presentan por parejas, las llamadas parejas-espejo, cada una de ellas enantiomorfa de la otra.

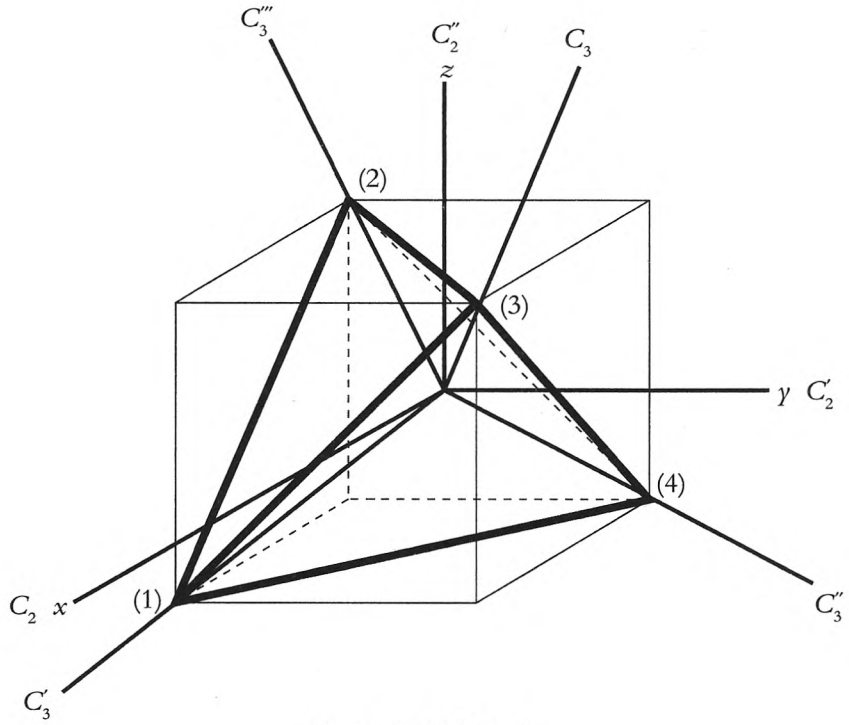


Ejemplo de una proyección bidimensional de una variedad de Calabi-Yau.

Unos ejemplos espaciales

Ya hemos visto las simetrías elementales de un polígono regular; veamos ahora las de algún poliedro regular. En principio no deberíamos enfrentarnos a ninguna tarea propia de titanes, dado que mientras que los polígonos regulares eran infinitos, sólo hay cinco poliedros regulares, los llamados cuerpos platónicos: el tetraedro, el hexaedro (o cubo), el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Desgraciadamente, las simetrías de un poliedro no son cosa fácil y pronto nos apercibimos de que tratamos con grupos muy grandes y complicados.

Empecemos por el tetraedro, el más sencillo de los poliedros, pues tiene 4 vértices, 6 aristas y 4 caras. Su grupo de simetrías será tan numeroso como las permutaciones entre sus vértices. El tetraedro presenta nada menos que 24 simetrías. Tiene varios ejes alrededor de los cuales girar, aunque algunos son difíciles de encontrar.



Ejes de giro del tetraedro.

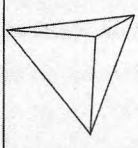
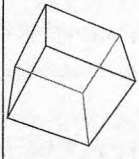
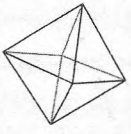
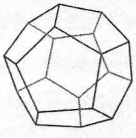
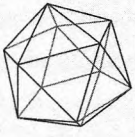
Las rotaciones alrededor de los ejes (hay 4) que pasan por los vértices del tetraedro son de amplitud $2\pi/3$, y las que tienen por ejes a los que pasan por los puntos medios de cada arista (hay 3) son de amplitud π. En total resulta un grupo de 12 rotaciones propias, que es la denominación que reciben en geometría los giros alrededor de un eje.

Para hallar todas las simetrías, que suman 24, hay que contar con lo que se llama movimientos impropios: 6 reflexiones sobre un plano (isometrías resultantes de reflejarse en un espejo) y 6 rotorreflexiones (isometrías que corresponden a reflejarse en un espejo y simultáneamente girar alrededor de un eje perpendicular al plano).

LOS CUERPOS PLATÓNICOS

Los cuerpos platónicos son los poliedros convexos regulares en dimensión 3. Deben su nombre a su aparición en el diálogo platónico *Timeo*, en el que se les dota además de propiedades mágicas: el fuego, por ejemplo, estaría constituido por tetraedros; el aire, por octaedros; el agua, por icosaedros; la tierra, por hexaedros, y la bóveda celeste, por dodecaedros.

En todo vértice coincide el mismo número de aristas, todas de la misma longitud, y con caras formando polígonos regulares. Sus características geométricas se resumen en la tabla siguiente:

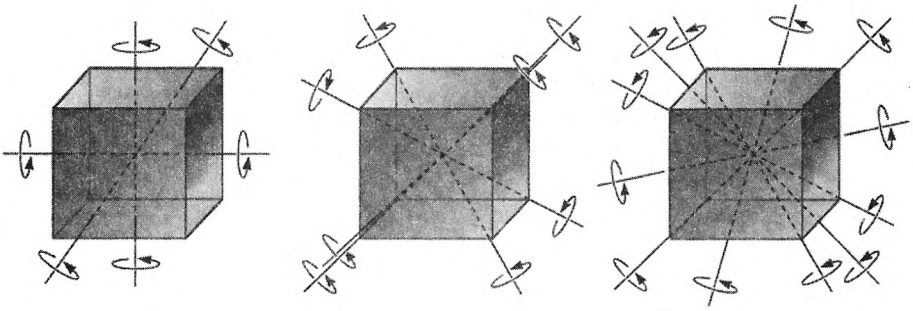
Sólidos platónicos	Tetraedro 	Hexaedro 	Octaedro 	Dodecaedro 	Icosaedro 
Número de caras	4	6	8	12	20
Número de aristas	6	12	12	30	30
Número de vértices	4	8	6	20	12

En total resultan dos grupos $T \subset T_d$, el uno (T) formado por las 12 rotaciones propias y el mayor (T_d), por todas las simetrías: 24.

En lo que respecta al cubo, hay que reconocer que ya se parte con algo de temor cuando se contempla lo difícil que ha sido enfrentarse al tetraedro. Pero es un temor infundado, porque se trata de un poliedro más «visualizable», más fácil de ver intuitivamente.

Su estructura geométrica coincide con el concepto matemático de las tres direcciones espaciales, con los familiares tres ejes de coordenadas a los que estamos acostumbrados.

Las isometrías del cubo son rotaciones propias y su complemento, impropio; las rotaciones propias son giros de amplitud $2\pi/3$ alrededor de los ejes (4) que pasan por los vértices, giros de amplitud $\pi/2$ alrededor de los ejes (3) que pasan por los centros de las caras y, por último, giros de amplitud π alrededor de ejes (6) que pasan por los puntos medios de cada arista.

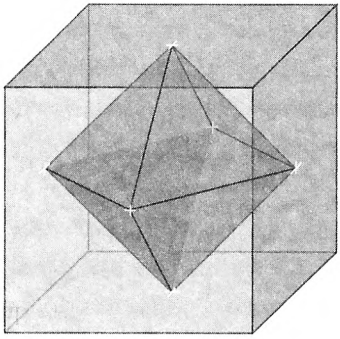


De izquierda a derecha, las rotaciones propias del cubo: tres giros alrededor de los ejes que pasan por los centros de las caras, cuatro giros alrededor de los ejes que pasan por los vértices, y seis giros alrededor de los ejes que pasan por los puntos medios de cada arista.

Eso da un total de 24 rotaciones propias y un grupo llamado O. Acudiendo a las reflexiones y las rotorreflexiones se llega a las 48 simetrías posibles y a un grupo, considerable, denominado O_h, que verifica

$$O \subset O_h.$$

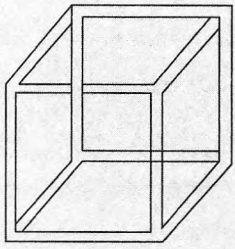
Parecería que la cosa se complica al pasar al poliedro que viene a continuación, pues el octaedro parece aún mayor y es de esperar que tenga más simetrías que el cubo. Pero no. En el reino tridimensional, las cosas funcionan a su modo, y resulta que el cubo y el octaedro son duales; eso significa, simplificando, que cubo y octaedro están unidos por un hecho geométrico sorprendente, y es que al unir los puntos medios de las caras de un cubo resulta un octaedro, y viceversa. Una consecuencia de la dualidad es que ambas figuras poseen exactamente el mismo grupo de simetría.



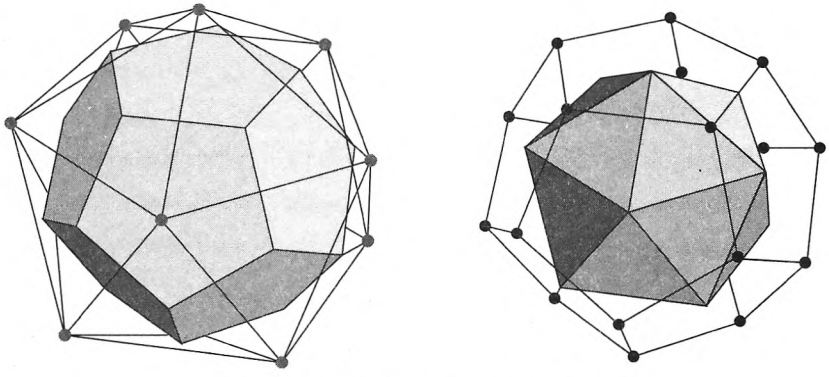
Octaedro y cubo son duales.

UN CUBO SIN SIMETRÍAS

Existe una variedad asimétrica del hexaedro: es el denominado cubo de Escher, aunque se trata de un objeto imposible en nuestro mundo euclideo tridimensional. En una de las obras de este artista, la titulada *Belvedere*, aparece este cubo rodeado de otras imposibles perspectivas.



La situación es algo agridulce con los pequeños monstruos que vienen a continuación, pues si bien se da la circunstancia afortunada de que dodecaedro e icosaedro son duales, eso no nos exime de buscar el grupo de simetría de uno de ellos. Pero no tema, no vamos a ceder a la provocación y calcular las simetrías. Nos conformaremos con saber que el grupo tiene 60 rotaciones propias y 120 elementos. Por si desea emprender la investigación por su cuenta, le daremos una pista: el número de ejes de giro del icosaedro, por ejemplo, es 10 de amplitud $2\pi/3$, 6 de amplitud $2\pi/5$ y 15 de amplitud π.



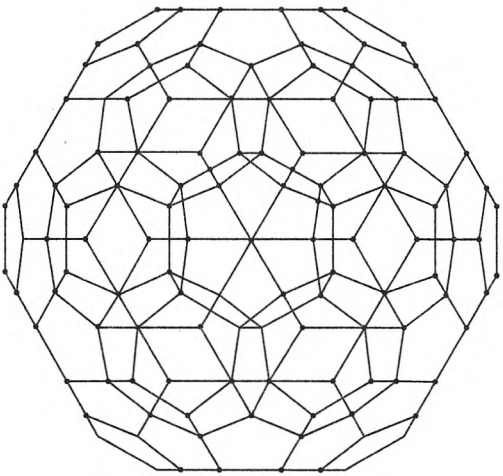
Dodecaedro e icosaedro son duales.

Poliedros no convexos y no regulares

Puede que sólo haya cinco cuerpos platónicos, pero sería un error pensar que ello agota el estudio de los grupos de simetría espaciales. Hay muchas más variedades de poliedros además de los regulares, aunque es cierto que al perder lados y ángulos iguales se pierde simetría y, por tanto, el estudio de otros poliedros empobrece de algún modo la búsqueda.

Los cuerpos platónicos son poliedros regulares. Pero sólo son una pequeña parte de los cuerpos que los geómetras califican de poliedrales; hay poliedros semirregulares, de Kepler-Poinsot, truncados, estrellados, de Catalan, acópticos, de Johnson, rígidos, convexos o flexibles, con nombres tan exóticos como rombicosidodecaedro, cuboctaedro, rombicocuboctaedro o tetradecaedro. Todos presentan simetrías, algunos en número fenomenal, y sus grupos de simetría pueden llegar a ser colosales. Ha habido mentes privilegiadas, como la de H.S.M. Coxeter (1907-2003), que se han movido en este universo con facilidad, una facilidad que nos parece exasperante al resto de los mortales con una capacidad geométrica más limitada.

Tan ilimitada era la capacidad de «ver» de Coxeter que se ocupó incluso de poliedros en dimensiones superiores a 3, los llamados politopos. Por ejemplo, se ocupó de las simetrías de la 120-celda, un poliedro regular tetradimensional que responde al nombre de hiperdodecaedro, que cuenta con 600 vértices, 1.200 aristas, 720 caras pentagonales y 120 células dodecaédricas. Un poliedro tetradimensional, además de vértices, aristas y caras, tiene elementos constitutivos de dimensión 3, en este caso, «células» dodecaédricas. Su aspecto, proyectado en el papel bidimensional, se asemeja a la siguiente figura, que es una proyección cenital en dimensión 2 (un artilugio parecido, pero construido en metal, se exhibe en el Fields Institute de Toronto).

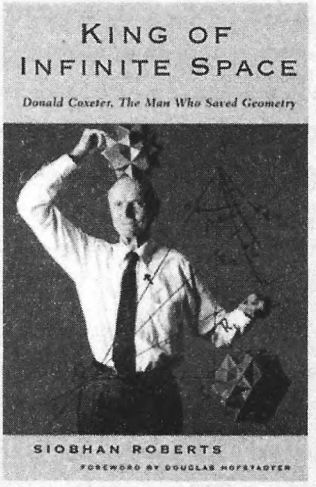


Una de las dificultades principales con la que topan los especialistas es la definición de poliedro; no se tiene una idea clara de lo que es un poliedro, no existe un consenso universal y lo único en que todos están de acuerdo (hablando en dimensión 3) es en que dos caras delimitan una misma arista.

HAROLD SCOTT MACDONALD COXETER (1907-2003)

Personajes como el anglocanadiense H.S.M. Coxeter es difícil que se conviertan en universalmente conocidos. No obstante, en el ámbito científico son seres casi míticos, iconos de una manera de ser, actuar y concebir el mundo. Coxeter escribió su primer artículo a los dieciséis años, y el último ya no pudo enviarlo él, por lo que fue una aportación póstuma; una dedicación a los grupos que duró casi ochenta años es casi una historia de amor con ellos.

Su dilatada vida le dio oportunidad de encontrarse con Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein o M.C. Escher. Para hacernos una idea de cómo era la existencia de Coxeter, digamos que cuando la matemática Asia Ivic le comunicó que iba a ausentarse una corta temporada debido a su inminente parto, Coxeter le entregó un manuscrito de respetable grosor, manifestándole que era para que lo fuera leyendo en sus ratos libres y mitigar su aburrimiento cuando no tuviese nada que hacer.



Portada de King of Infinite Space, *la biografía de H.S.M. Coxeter escrita por Siobhan Roberts y publicada en 2006.*

Coxeter podía haber recibido el sobrenombre de Mister Grupo, pues toda su vida la dedicó al estudio de la simetría y sus grupos en el espacio euclideo; eso sí, en varias dimensiones, pues las tres que percibimos no le bastaban, y por ello se dedicó intensamente a los politopos o poliedros multidimensionales. Su aproximación a este universo era más geométrica que algebraica, lo que le convierte en un *rara avis*.

Los grupos que admiten una presentación (para entendernos, que pueden definirse «a base de») en simetrías especulares se denominan, en su honor, grupos de Coxeter, y a ellos y a su clasificación les dedicó décadas, hasta culminar la clasificación de los finitos en 1935. Además de en los politopos, aparecen en teoría de grafos, en cristalografía, trabajando con grupos de Lie, en teoría de *buildings* (que no tiene nada que ver con edificio alguno), etc.

Coxeter escribió 13 libros, uno de los cuales, recopilatorio, lleva por título *Kaleidoscopes (Calidoscopios)*, un tema que siempre le fascinó y al cual dedicó muy serias reflexiones. Era un magnífico músico, y en el prólogo de su *Regular Simple Polytopes* escribió: «he intentado construirlo como una sinfonía de Bruckner, con crescendos y climaxs, pequeñas probaturas anticipadas de los placeres aún por venir, con abundantes referencias cruzadas». Concibió la simetría como una obra de arte.

Limitándonos a los poliedros tratados tradicionalmente, y atendiendo a las propiedades relevantes en simetría, los poliedros pueden ser isogonales, isotoxales, isoedrales, regulares, cuasi-regulares, semi-regulares, uniformes y nobles. Sus grupos de simetría pueden ser enormes, aunque Coxeter y otros los han clasificado en familias. Piénsese nada mas en las simetrías de un simple prisma de sección regular, que admite tantas rotaciones como caras. Baste saber que se distinguen no menos de 10 familias en el estudio de los grupos de simetría de un poliedro.

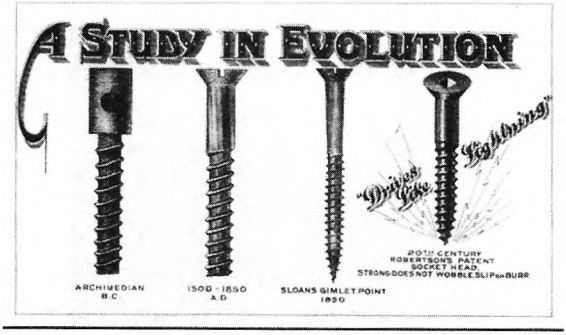
JACQUES TITS (n. 1930)

Jacques Tits, matemático belga nacionalizado francés, es un superespecialista en teoría de grupos y un algebrista excepcional, amigo íntimo de Coxeter y propagador de sus ideas e investigaciones. Su contribución al conocimiento de los grupos es muy vasta, y su apellido está asociado al denominado grupo de Tits, un grupo simple finito de orden 17.971.200. Es el creador del concepto de *buildings*, entes combinatorios ligados a los grupos, y de otras muchas ideas matemáticas. Posee el raro honor de ser miembro del grupo Bourbaki, el legendario matemático que nunca existió.

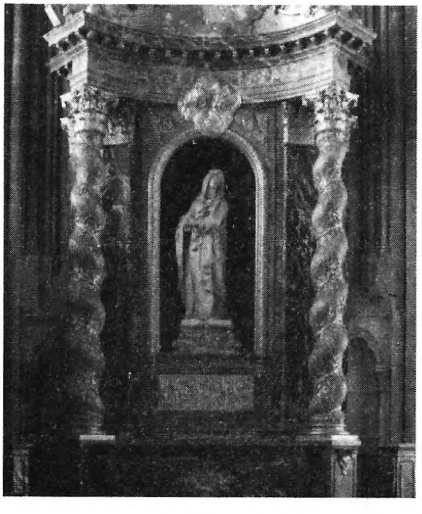
Jacques Tits (a la izquierda) y el también matemático John Griggs Thompson (al fondo) en el momento de recibir el Premio Abel de 2008 de manos del rey Harald V. .

Simetría helicoidal

Una hélice es una curva matemática tridimensional que se caracteriza por una propiedad elemental: el ángulo que forma su tangente con una determinada recta (denominada eje de la hélice) es siempre el mismo. Cuando se tiene en cuenta la superficie que une la hélice a su eje hablamos de dicha superficie denominándola helicoide. Si la hélice se enrolla alrededor de un cilindro, el objeto resultante es simétrico y harto conocido, porque se encuentra en columnas, berbiquíes, tornillos y multitud de objetos y lugares.

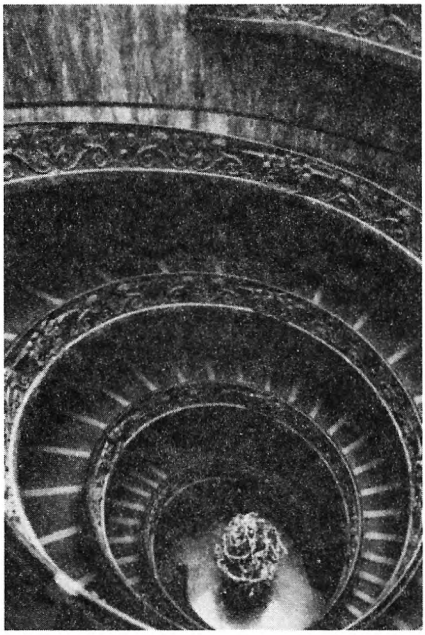


La rosca de un tornillo cilíndrico es una buena aproximación a la simetría helicoidal. En la ilustración, un anuncio de 1909 que promocionaba los productos de la casa Robertson.

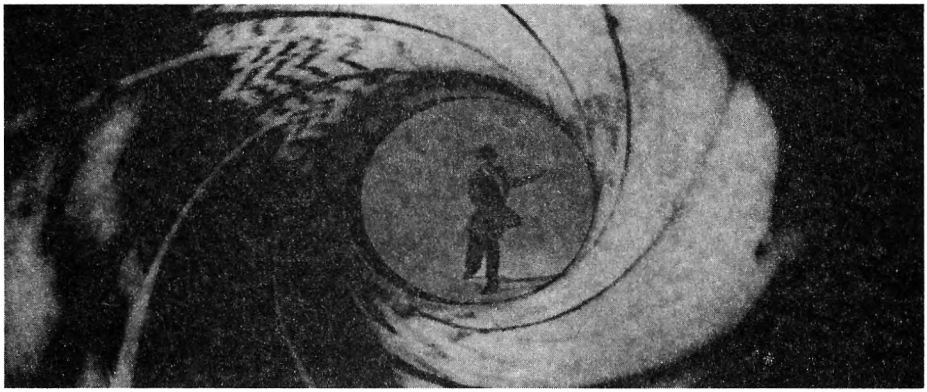


Columnas salomónicas, es decir, decoradas en forma de hélice, en el altar de la Virgen de la Piedad de la catedral de Notre-Dame de Amiens, en Francia.

Las hélices son quirales, es decir, que pueden ser hélices arrolladas a la derecha y hélices arrolladas a la izquierda, y por tanto, sus imágenes enantiomorfas no coinciden. En ocasiones se consigue que se arrollen alrededor del mismo eje dos hélices enantiomorfas, obteniéndose entonces curiosas estructuras.



Doble escalera en el Vaticano, Roma. Una escalera sirve para subir y otra, arrollada en hélice con la primera, sirve para bajar. Otro ejemplo destacado de doble escalera puede encontrarse en el Château de Chambord, en Francia.



Un icono universal: fotograma de presentación de una película de la serie James Bond. En él se ve al héroe enmarcado por las estrías helicoidales del cañón de un supuesto enemigo.

En ocasiones, como en el caso de un tornillo y su tuerca, las dos variedades enantiomorfas están presentes de un modo natural. Un elemento importante de la hélice es su paso de rosca, el cual determina el alcance de su simetría. En el fondo, la simetría helicoidal es una combinación tridimensional de traslaciones según un eje y rotaciones de un cierto ángulo. En balística, las hélices encuentran un uso inesperado, pues «rayan» el ánima de pistolas, fusiles y demás armas de fuego, con lo que los proyectiles salen del cañón girando sobre sí mismos y es más difícil que el viento altere su trayectoria.

Capítulo 4

Grupos y ecuaciones

Uno va al cielo por el clima, pero al infierno por la compañía.
Mark Twain

Las malas compañías –malísimas, pues le costaron la vida– son las que llevaron a Évariste Galois a la perdición, en la frontera de cumplir los 21 años. Pero no adelantemos acontecimientos, porque en este mismo capítulo se explicará su historia completa y con detalle. Galois era matemático y un entusiasta de las ecuaciones. Y, aunque no resulte evidente a primera vista, las ecuaciones están en el origen algebraico de los grupos de simetría. Una ecuación de primer grado consiste en igualar a cero un polinomio de primer grado. La solución de la ecuación es aquel valor de x, que por cierto se denomina incógnita, que convierte la ecuación en verdadera.

Si la ecuación es

$$ax + b = 0,$$

la única solución es

$$x = -b/a.$$

Cuando la ecuación es de segundo grado, el polinomio también lo es, y adopta la forma

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Las dos soluciones se han ido conociendo desde tiempo casi inmemorial, y entre griegos (que las entendían como magnitudes de tipo geométrico), árabes y europeos medievales llegaron a la conocida fórmula que se estudia en nuestras escuelas,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

siendo x_1 y x_2 las soluciones buscadas. De hecho, estamos enunciando con mucha antelación el teorema fundamental del álgebra, demostrado por Jean-Robert Argand (1768-1822) en 1806 y en su forma actual por Carl Friedrich Gauss (1777–1855) en 1849, y que afirma que un polinomio de coeficientes reales de grado n tiene n raíces, reales o complejas. Dicho en términos matemáticos, todo polinomio $P(x)$ de grado n, $P(x) \in \mathbb{R}|x|$, tiene n raíces en $\mathbb{C}$.

Ecuaciones no elementales

Si el polinomio es de tercer grado, el italiano Scipione del Ferro (1465-1526) encontró una receta aritmética, que adecuadamente completada por Tartaglia y elaborada por algebristas posteriores, nos lleva a la «sencilla» expresión

$$x_1 = -\frac{b}{3a} - \\ -\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}} \\ -\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \\ +\frac{1+i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}} \\ +\frac{1-i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a} + \\ +\frac{1-i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}} \\ +\frac{1+i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}}$$

para las tres raíces de $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, lo que demuestra un ingenio fuera de lo común. Como es natural, Del Ferro no escribió tal cosa (hay incluso componentes con el símbolo i, que se refieren a la unidad imaginaria de los números complejos, algo muy fuera del universo intelectual de Del Ferro), sino algo más elemental, y limitado a unas ecuaciones de tercer grado de una forma especial, pero es fácil ponerlo todo en lenguaje general y moderno. Pensemos que en su tiempo todavía no se contaba con las ventajas de la notación actual, que no empezaría propiamente hablando hasta Viète y Descartes; entonces todavía se procedía con recetas escritas en lenguaje literario convencional, con algunas abreviaturas para simplificar las repeticiones.

La hazaña de Del Ferro palidece ante la fórmula para la resolución de la ecuación de cuarto grado

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

que halló el también italiano Lodovico Ferrari (1522-1565) en 1540, ¡a los 18 años! La receta aritmética para hallar las cuatro eventuales soluciones es realmente temible, por no decir monstruosa, por mucho lenguaje moderno que se utilice; lo que hizo Ferrari, en lenguaje moderno, fue un cambio de incógnitas, introduciendo $X = x + b/4a$ y con ello eliminó el término de tercer grado. A continuación procedió a efectuar unas sutiles operaciones que derivaron en la resolución equivalente de una ecuación cúbica o de tercer grado. Así redujo un problema muy difícil a uno simplemente difícil, técnica que parece la más efectiva para resolver problemas. Digamos, no obstante, que la precocidad e ingenio de Ferrari no le sirvieron para evitar morir a los poco más de cuarenta años, envenenado con arsénico por su hermana.

¿Y la ecuación de quinto grado? Halladas las soluciones de las anteriores, nada permitía suponer que con el paso del tiempo no se iba a encontrar una solución; es decir, una fórmula en sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces. Una fórmula-milagro, complicada sin duda, pero eminentemente calculable. Pero la fórmula no llegaba nunca. Repasemos esta primera novela de las ecuaciones con algo más de detenimiento.

La novela de Tartaglia y Cardano

Niccolò Fontana, llamado Tartaglia (1500-1557), es el primero de nuestros personajes. Llegó a la mayoría de edad casi por casualidad, pues cuando todavía era un niño de doce años, un soldado francés le rebanó el pescuezo durante el sitio de Brescia –en el que murió su padre– y sólo salvó la vida de milagro. Su expresión oral debió

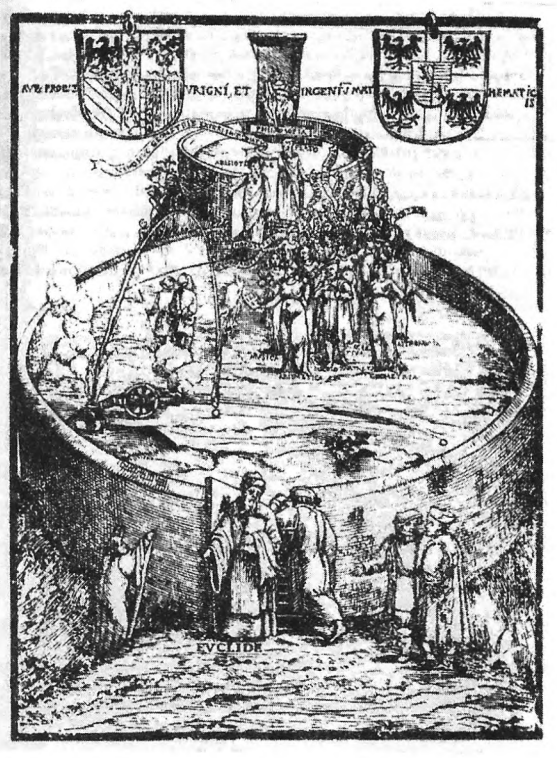
de sufrir bastante, pues su apodo lo traduciríamos en castellano como «Nicolás el Tartamudo». Tuvo una infancia muy difícil, sumergido siempre en la pobreza, y es famoso que aprendió a leer y escribir de modo casi autodidacta. Se ganó la vida como matemático, aunque siempre anduvo buscando una ocupación mejor remunerada.

Tartaglia, tal como aparece reproducido en uno de sus libros, editado en 1546.

En esa época estaban a la orden del día los desafíos públicos; se intercambiaban cartas de batalla y se promovían auténticas contiendas sin sangre, a las que acudían a veces verdaderas multitudes, nobleza incluida, y en las que el premio final podía ir desde una promoción en el empleo hasta un banquete con los principales de la ciudad. Se cuenta que Tartaglia ganó hasta una treintena de comilonas en fechas sucesivas. Un desafío famoso fue el que lo enfrentó a Antonio Maria Fior. Éste era la mano derecha de Del Ferro, quien, ya en su lecho de muerte, le había confiado los secretos de su procedimiento resolutivo de una variedad importante de ecuaciones de tercer grado, aquellas de la forma $x^3 + mx = n$. Tiempo después, Fior desafió a Tartaglia a un combate matemático con ecuaciones de tercer grado de por medio, convencido de que su fórmula le daría el triunfo. Pero Tartaglia, un algebrista muy hábil, había estudiado

ya las ecuaciones de tercer grado y, arrastrado por la presión de los acontecimientos, desentrañó por su cuenta el acertijo de dichas ecuaciones –en especial aquellas que no seguían la pauta de las de Del Ferro– y venció a Fior con facilidad en la contienda.

Tartaglia también hizo notables contribuciones a la balística, disciplina que se podría clasificar entre la matemática aplicada. Aunque hoy tildaríamos las aportaciones de Tartaglia como un tanto primarias, fue el primero en especificar que los proyectiles no describen trayectorias rectas sino curvas en su integridad (más tarde, Galileo demostró que tales curvas eran en realidad parábolas) y que si las balas se lanzaban a mayor velocidad, menos curvo resultaba el recorrido. También mostró que el máximo alcance se obtenía con un ángulo de lanzamiento de $\pi/4$ radianes (45°, pues Tartaglia no contaba en radianes).



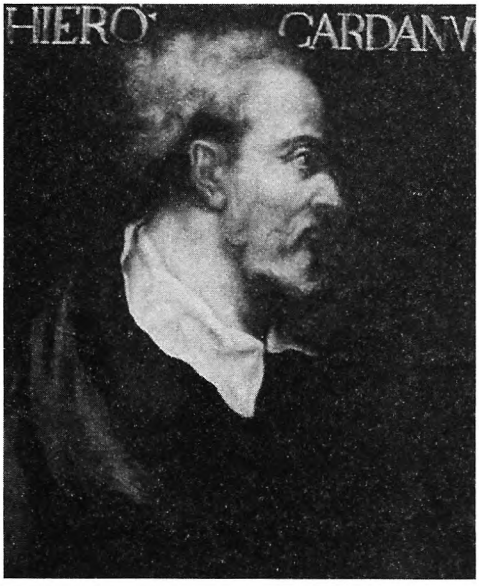
Página de Nova Scientia *de Niccolò Tartaglia, el libro en el que plasmó sus descubrimientos en balística.*

Finalmente, cabe destacar también que lleva su nombre el llamado triángulo de Tartaglia, tal como se conoce en muchas partes el triángulo de Pascal o triángulo

binomial, una expresión algebraica de origen posiblemente chino que ha encontrado en tiempos modernos frecuentes aplicaciones en combinatoria.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

El que había de ser enemigo acérrimo de Tartaglia se llamaba Gerolamo Cardano (1501-1576) y estudió medicina en la universidad y matemáticas en la intimidad. Cardano era bastardo, y en su tiempo los hijos «irregulares» no recibían,



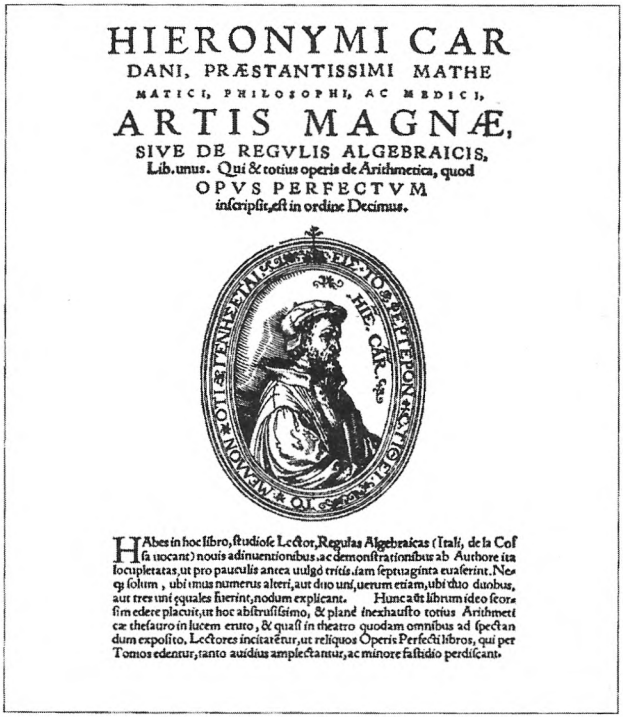
Retrato de Gerolamo Cardano, matemático que mantuvo una agria polémica con Tartaglia.

salvo excepciones, el mismo trato privilegiado que los hijos legítimos. Traducido a un lenguaje descarnadamente económico, eso quiere decir que Cardano tenía que buscarse la vida por su cuenta; mientras fue estudiante se defendía bastante bien, pues era sin duda un chico listo y sus conocimientos y habilidades aritméticas le convertían en un adversario temible frente a dados o naipes o jugando una partida de ajedrez.

Cardano estudiaba medicina, pero no consiguió un puesto en el ansiado colegio de médicos milanés y con el transcurrir del tiempo el juego no le proporcionó los ingresos suficientes, así que tuvo que dedicar sus esfuerzos a otro terreno en el que destacaba, el de la matemática. También trató cuestiones prácticas de criptografía, la ciencia del cifrado y descifrado de mensajes. Siempre tuvo bastante mal carácter y dio abundantes muestras de ser un apostador compulsivo. Digamos, de pasada, que Cardano tomó a su cargo como ayudante a un adolescente de catorce años, Lodovico Ferrari, que resultó poseer un talento algebraico fuera de lo común.

Cardano, que no nadaba precisamente en la abundancia, anhelaba los conocimientos de Tartaglia para mejorar su situación, plasmándolos en un libro que le diera fama. Recurrió a todas las formas de la adulación y logró al fin, con el señuelo de ofrecer a Tartaglia una promoción en su empleo, que éste le contara su secreto, acompañado con la promesa, eso sí, de no divulgarlo. Parece que Cardano cumplió el compromiso en público, aunque no en privado, pues discurrió sobre la fórmula de Tartaglia y la discutió con su inteligente ayudante, Ferrari. Y tanto pensaron sobre ella, que Ferrari ideó incluso un modo de abordar la fórmula de una eventual ecuación de cuarto grado. Un problema propuesto por Zuanne de Tonini da Coi, derivó en la ecuación $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, que el propio Ferrari consiguió resolver.

En este punto, Annibale Della Nave, que era yerno de Del Ferro y había heredado un manuscrito con sus logros matemáticos, contó los resultados obtenidos por su suegro a Cardano, y éste, que no deseaba sino un pretexto, vio cómo se le abría el cielo: ¡ya no necesitaba a Tartaglia, dado que la supuesta fórmula de Del Ferro le había llegado por otro conducto! Se consideró liberado de todo juramento y publicó todos sus descubrimientos –incluyendo el de Ferrari sobre la ecuación de cuarto grado– en un libro que se hizo famoso, *Ars Magna* (de título original *Artis Magnae sive de regulis algebraicis,* 1545). Las soluciones publicadas por Cardano no eran más útiles que, por ejemplo, las soluciones por algoritmos de aproximación de Jamshīd al-Kāshī (c. 1380-1429), pero se trataba de auténticas soluciones, no de aproximaciones.



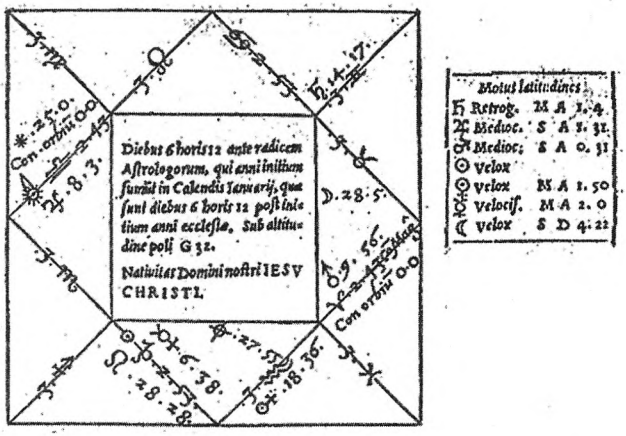
HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgo tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi impus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plané inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum expolito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Portada de Ars Magna *de Gerolamo Cardano, su famoso tratado de álgebra publicado en 1545.*

Tartaglia se sintió mortalmente ofendido y, sediento de sangre, creyendo a pies juntillas que Cardano le había engañado y desvelado de manera inmoral un secreto inviolable, consideró que merecía ser desafiado en público frente al mundo. Cardano, obrando seguramente de manera inteligente, eludió el enfrentamiento callando, y fue su ayudante Ferrari, que era joven, listo y ambicioso, quien dio la cara en sucesivas cartas de desafío, en las que ponía en duda incluso las dotes algebraicas de Tartaglia. Al fin éste se vio obligado a responder y en 1548 se concertó un debate público en Milán. Al cabo de sólo 24 horas ya constató Tartaglia su inevitable derrota ante el empuje de Ferrari, por lo que abandonó la ciudad y la justa.

De todo este turbio asunto sólo resultó ganadora la matemática. Tartaglia murió nueve años después, sin haber logrado mejorar su economía. Cardano, aunque convertido ya en un médico prestigioso, cayó en desgracia debido sobre todo a sus hijos, que le causaron múltiples problemas –el mayor fue ejecutado y el menor, desterrado–, y él mismo cayó en las manos de la Inquisición por hereje y por elaborar un horóscopo nada menos que de Jesucristo.



Reproducción del horóscopo de Jesucristo llevado a cabo por Cardano.

Hacia el final de su vida se repuso algo, e incluso llegó a gozar de una pensión papal. Según la leyenda, culminó sus horóscopos haciendo uno de sí mismo, en el que fijó la fecha de su óbito; como cumplida ésta no había fallecido, se creyó probablemente en la obligación de honrar la palabra escrita y se quitó la vida.

Ferrari no tuvo mejor suerte; aunque el enfrentamiento con Tartaglia le proporcionó un empleo de asesor de impuestos –y cómo no, se hizo rico–, a los 42 años falleció envenenado por arsénico, se cree que por su ambiciosa hermana, que procedió a heredarle y cedió de inmediato todos sus derechos a su amante esposo. Éste, acto seguido, la abandonó.

Un interregno fructífero

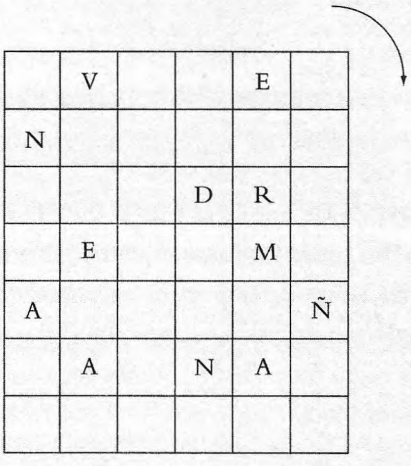
La ecuación de cuarto grado es relativamente fácil de resolver. No se trata de que la fórmula bastante monstruosa actual –elaborada a partir de la de Ferrari– sea sencilla de calcular, sino de que, por complicado que sea su cálculo efectivo, al fin y al cabo no se trata sino de sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces. Poco más que aplicar con diligencia las cuatro reglas aritméticas.

La ecuación de cuarto grado se resuelve aplicando una fórmula. Otras ecuaciones, auténticamente colosales, de grado muy superior al cuarto, fueron ya resueltas en el sigo XVI. De hecho, ya Viète resolvió la ecuación planteada por Adriaan van Roomen (1561-1615) en 1594:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \ldots - 3.975x^3 + 45x = 0.$$

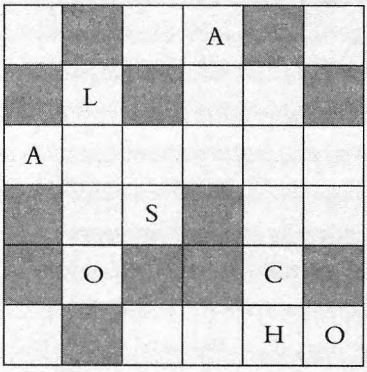
CRIPTÓGRAFOS DEL SIGLO XVI

Para los criptógrafos, un siglo como el XVI, en el que vivieron Viète y Cardano, puede ser considerado un siglo feliz. La sagacidad de François Viète (1540-1603) provocó que Felipe II creyera que su adversario, el rey de Francia Enrique IV, tenía un pacto con el diablo, pues los franceses parecían leer sus más íntimos pensamientos y órdenes. En realidad, Viète estaba al servicio de Enrique IV y se limitaba a descifrar los mensajes de Felipe II, lo que escapaba a la comprensión del monarca español. El caso de Gerolamo Cardano (1501-1576) es menos espectacular que el de Viète, aunque el matemático italiano también se dedicó a la criptografía. Cardano inventó una rejilla de cartón, en forma de cuadrado o rectángulo y agujereada en algunos puntos estratégicos, en los que se escribían las letras de un mensaje. Por ejemplo,



	V			E	
N					
			D	R	
	E			M	
A					Ñ
	A		N	A	

Si el mensaje era más largo, se giraba la rejilla hasta tres veces (había que diseñar bien la base de cartón para evitar superposiciones de letras) y se obtenían disposiciones como las siguientes:



			A		
	L				
A					
		S			
	O			C	
				H	O

que daban al final un cuadrado o rectángulo semilleno:

	A		A	N	
A	L	E			V
A					
N		S	D		
A	O	M	R	C	E
	Ñ		H	O	

que se completaba con letras al azar.

B	A	E	A	N	Z
A	L	E	N	T	V
A	I	T	O	E	O
N	L	S	D	M	F
A	O	M	R	C	E
P	Ñ		U	H	O

¿Quién podía extraer de ahí el mensaje si no se tenía la clave, es decir, la rejilla? Hoy día se tardaría poco en descifrar esta sopa de letras, pero en tiempos de Cardano ello no era tan fácil. Su método, práctico, transportable, reproducible y sencillo, sobrevivió, adecuadamente modificado para complicarlo, hasta principios del siglo xx.

Pero Viète no empleó ninguna fórmula, y lo cierto es que nadie pudo encontrar fórmula alguna, sencilla o no, que permitiera resolver toda –repetimos, toda– ecuación de grado superior o igual al quinto usando sólo las reglas aritméticas elementales. La constatación de que, a pesar del transcurso de los años y al esfuerzo de tantas mentes, no se encontraran fórmulas sencillas válidas para cualquier ecuación ya desconcertó a matemáticos de prestigio, y el propio Lagrange llegó a pensar que quizá dicha maravillosa fórmula, por alguna ignorada razón, sencillamente, no existía.

El paso del tiempo llevó finalmente al convencimiento y luego a la seguridad de que, en efecto, no existía ninguna receta milagrosa para resolver las ecuaciones quíntica y superiores. Los responsables de transmitirnos tal imposibilidad fueron Paolo Ruffini y Niels Abel. Este último dio por fin con una prueba inatacable, pero que, aunque muy ingeniosa y matemáticamente impecable, no abría camino alguno ante sí; la demostración de Abel es una excelente muestra de razonamiento, pero no abriga más pretensión que la de su enunciado. Es más, existen ecuaciones de quinto grado que sí pueden resolverse por medio de fórmulas que sólo involucran operaciones aritméticas elementales incluyendo la radicación, aunque eso no quiere decir que

PAOLO RUFFINI (1765-1822)

Los escolares le recuerdan por un algoritmo elemental que utilizan al estudiar los polinomios, la regla de Ruffini, y seguramente por nada más. Ahora bien, este médico y algebrista italiano fue un pensador prolijo y de mente afilada. Fue el primero en tratar de probar seriamente que no existía una fórmula general para las quínticas, y el primero también en emplear alguno de los recursos de la teoría de grupos para demostrarlo; por desgracia, sus escritos eran de difícil digestión y, a pesar de sembrar con sus memorias las mesas de importantes matemáticos y sociedades, nunca consiguió el reconocimiento que esperaba. En realidad, en su demostración se ha encontrado algún agujero, pero tal vez lo habría podido corregir él mismo si alguien hubiera leído con cuidado –y comprendido– sus explicaciones. En cualquier caso, su contribución al álgebra no se reduce al estudio de la quíntica y se le deben muchos resultados y conceptos interesantes. Durante una epidemia de tifus, tuvo el coraje de cuidar a todos sus enfermos, contagiarse, escribir sobre su propia sintomatología... y morir en menos de un año.

exista una fórmula simple que valga para todas. Gracias a Abel ya sabíamos que hay ecuaciones no resolubles, ni hoy ni nunca, pero no sabíamos por qué unas ecuaciones sí que podían resolverse con fórmula y otras no. La explicación última la dio Galois, y en sus escritos reside nuestro interés. No reproduciremos aquí la demostración de Abel porque es irrelevante para nuestros propósitos; quien está en el punto de mira es Galois y la simetría.

NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)

Uno de los más notables matemáticos de la historia vivió en la pobreza toda su vida. Vástago de una familia noruega, con el padre teólogo y el abuelo sacerdote protestante, no es extraño que encaminaran sus pasos hacia los estudios religiosos; no obstante, Abel desarrolló en la escuela unas sorprendentes habilidades matemáticas, y su maestro, amigo y benefactor, Holmboë, prestó todo su apoyo a su vocación científica. Becado modestamente por el gobierno noruego, partió de viaje para recorrer Europa y conocer personalmente a matemáticos e instituciones; quizá lo más destacable que le sucedió fueron los vínculos que desarrolló con August-Leopold Crelle y su publicación, el *Journal de Crelle*, la primera revista matemática de la historia. En 1824 demostró que no existía una fórmula general para la ecuación de quinto grado; es aleccionador señalar el hecho de que unos años antes, el propio Abel creyó haber probado lo contrario, pero vio que su razonamiento era incorrecto. No parece que el resultado, obra de un oscuro y joven noruego, tuviera mucha difusión, y los méritos de Abel no fueron reconocidos hasta 1830, tras su muerte, cuando la Academia de París les concedió a él y a Jacobi el Grand Prix. Mientras tanto, Abel había hecho sustanciales aportaciones a las series y las integrales elípticas y, en lo que respecta a su salud, contrajo una tuberculosis, enfermedad que había de llevarle a la tumba. Consiguió ver a su prometida y superar las fechas navideñas, pero empeoró en seguida, justo cuando su amigo Crelle le conseguía, por fin, un puesto en Berlín.

La novela de Galois

Évariste Galois (1811-1832), posee todos los ingredientes del héroe romántico y en ello reside seguramente una de las claves de su popularidad y de los varios libros que se han publicado, de los serios a los exagerados, sobre su vida y su obra.

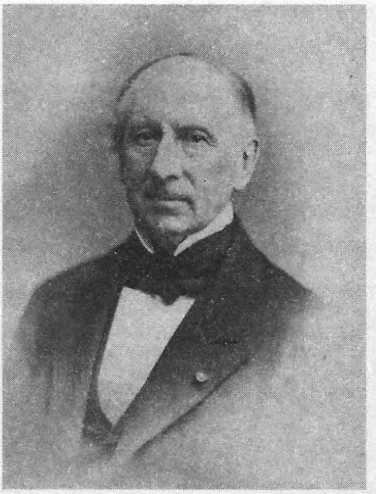
Nació en el seno de una familia que hoy calificaríamos de progresista, y tuvo que sufrir cuando aún era niño el suicidio paterno, debido sobre todo a la maledicencia de un sacerdote, que llevó su inquina hacia el padre de Galois hasta a dedicarle unas coplillas malintencionadas sobre la honestidad de su esposa, en un episodio más bien odioso que recuerda el argumento de *La Dolores*.

Galois creció en un ambiente inconformista, y en sus estudios demostró tanta inconstancia en ciertas materias como genialidad en matemáticas. Su trato, sin embargo, no era fácil, y la matemática Sophie Germain (1776-1831), que llegó a conocerlo, no habló precisamente muy bien en sus escritos del carácter, despótico e insultante, de Galois. El joven Galois ejercía de revolucionario activo y era furibundo enemigo de la Iglesia y adversario de la monarquía borbónica y de Luis Felipe de Orleans.

Uno de los dos únicos retratos contemporáneos de Galois que se conocen.

Las facultades matemáticas de Galois le reportaron la admiración y la protección de su profesor Louis-Paul Émile Richard, el mismo que muchos años después sería asimismo maestro de Charles Hermite (1822-1901), aunque con éxito muy dispar en su magisterio, pues con Hermite triunfó y con Galois fracasó. A lo largo de su vida escolar, Galois manifestó unas aptitudes que a sus profesores debieron de parecerles casi insultantes, sobre todo por su actitud entre desafiante y soberbia. Desoyendo los consejos de muchos, presentó su candidatura a la École Polytechnique con un año de anticipación, a los 17 años; no fue admitido. No obstante, se sobrepuso escribiendo una memoria sobre las ecuaciones algebraicas, que entregó al gran Cauchy, quien dijo que se la comentaría; nunca sucedió, pues Cauchy la extravió entre sus muchos papeles. O quizá pidió a Galois que la desarrollara y ampliase, difiriendo su presentación a la Academia de París. No se sabe con certeza la verdad sobre este episodio.

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857)



Matemático francés, uno de los más grandes que ha conocido esta ciencia, Cauchy tenía una fuerte personalidad que le granjeó muchas antipatías; y es que, quizá por influencia familiar, era un hombre extraordinariamente religioso, admirador y partidario de los jesuitas, realista, absolutista y armado de convicciones tan férreas como sus creencias. Durante muchos años prefirió el exilio en Italia o Suiza a transigir con sus ideas y prestar juramento de fidelidad a Luis Felipe de Orleans o a Napoleón III. Cuando cayó Napoleón y el retorno absolutista represalió a figuras tan insignes como Monge y Carnot, Cauchy ocupó sin pestañear sus sillones. Perdió, uno tras otro, casi todos los puestos académicos para los que se postuló, pues sus propios colegas votaron a sus adversarios, y logró pelearse hasta con alguien tan generoso como Liouville. Fue preceptor del tercer hijo del exiliado Carlos X, puesto que desempeñó con tanta dedicación como escaso éxito. Y, no obstante, fue un gran matemático y su prestigio profesional no sufrió ni un ápice, aceptando todos su envergadura intelectual, personificada por sus numerosos logros. Con decir que sus obras completas, consideradas de interés nacional y subvencionadas por ello, ocupan... ¡veintisiete volúmenes!

Galois volvió a sus estudios y a sus queridas matemáticas, y se presentó por segunda vez al examen de la Polytechnique. Esta vez, las cosas aún fueron peor: uno de sus examinadores era particularmente inepto y sus preguntas, que no venían a cuento, exasperaron a Galois. Todo terminó cuando el examinando le arrojó un borrador de la pizarra al examinador. Como es de suponer, el joven fue rechazado en segunda instancia. Quizá la coincidencia de la época del examen con el suicidio paterno contribuyó al lamentable desarrollo del incidente.

Cerradas las puertas de la Polytechnique, Galois presentó sus credenciales a la École Normale, donde fue admitido por sus espléndidas notas en matemáticas. Resumió sus estudios sobre las ecuaciones –donde ya se incluían los grupos– en una memoria destinada a competir en el Grand Prix de la Academia de París y, con toda probabilidad, ganarlo. El secretario de esta institución era el eminente matemático Joseph Fourier (1768-1830), que se llevó la memoria para estudiarla en su casa... y falleció, frustrando las esperanzas de Galois. No olvidemos que estamos hablando de una época sin fotocopias, ni mecanografía, ni programas de escritura, ni almacenamiento electrónico en memoria.

Y ya que mencionamos la época y sus costumbres, refirámonos a dos hábitos de comportamiento que hoy nos parecen rechazables: la bebida y los duelos. Se consideraba, y se considera todavía, una falta de hombría rechazar unirse a un brindis; se consideraba –y por fortuna ya no es así– una falta de hombría rechazar un duelo, que se podía plantear incluso entre íntimos amigos por razones bastante triviales. La banalización de esos comportamientos llegó incluso hasta inventar confrontaciones que tenían más que ver con la ruleta rusa que con la custodia del honor puesto en entredicho. La muerte inesperada de Fourier y el consiguiente extravío de su memoria los atribuyó Galois, en quien muchos detectan una paranoia creciente, a una conspiración del estamento científico, causada por la resistencia a aceptar resultados innovadores ideados por jóvenes desconocidos como él, portadores de la antorcha del conocimiento. Visto desde fuera, todo parece menos dramático, pero desde la óptica de Galois tiene su lógica.

Sus posiciones políticas se endurecieron, y llegó a pasar un mes en la cárcel por un brindis en el que amenazó veladamente a Luis Felipe de Orleans. En el aspecto matemático, la reclusión forzada de Galois no debió de perjudicarle demasiado, ya que su prodigiosa mente no necesitaba siquiera papel para pensar. Más adelante, por vestir ilegalmente el uniforme del cuerpo de artillería, pasó ocho meses más recluido. Galois se había convertido ya en un exaltado revolucionario y activista.

En paralelo, otro escrito mucho más elaborado fue presentado a Siméon-Denis Poisson (1781-1840), aunque los novedosos conceptos y los errores y agujeros de

razonamiento detectados llevaron al propio Poisson a recomendar su rechazo a la Academia y a pedirle a Galois que lo reescribiera dando más explicaciones.

En esta misma época, Galois se enamoró, y se ha especulado mucho sobre la personalidad de su amada, a quien estudios posteriores han identificado como Stéphanie Poterin du Motel, hija de un médico. Évariste ya se había visto involucrado en alguna trifulca alcohólica, pero entonces tuvo que aceptar batirse en duelo, por cuestiones amorosas de índole desconocida. Su adversario pudo haber sido Pescheux d'Herbinville, un colega de Galois; algunos autores han pretendido que tras este duelo se ocultaba el largo brazo de la policía secreta de Luis Felipe, pero tal eventualidad no parece hoy verosímil. Se sospecha que la confrontación era particularmente absurda, pues las reglas del duelo –sólo un arma, elegida al azar, estaría cargada–, desde nuestra perspectiva actual, eran también absurdas.

En las horas anteriores al duelo, Galois se dedicó febrilmente a escribir a sus amigos –y en particular a Auguste Chevalier– una larga carta, trufada de anotaciones

JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882)

Como matemático, Liouville fue excelente, pero ha pasado a la historia como el hombre que, por fin, descubrió a Galois. Quizá por eso no se le ha hecho justicia por completo y se ha prestado una atención un tanto displicente a sus logros.

Su vida académica fue bastante afortunada, pues obtuvo y retuvo sendas cátedras en sacrosantas instituciones como el Collège de France y la Facultad de Ciencias de París. Su actividad al margen de la cátedra abarcó la política y, sobre todo, la fundación y el desarrollo del *Journal des mathématiques pures et appliquées (Diario de las matemáticas puras y aplicadas)*, una revista matemática destinada a convertirse en publicación de prestigio y en la que se dieron a conocer, en 1846, los escritos de Évariste Galois. Liouville tuvo el valor de editarlos, dándoles además una bienvenida entusiasta, desinteresada y sincera. En lo personal, Liouville trabajó mucho y bien en física mecánica y diversas teorías –como la de Sturm-Liouville o el teorema de Liouville-Arnold– llevan su apellido. Sus aportaciones a las fracciones continuas y a la teoría de números son importantes y tienen la ventaja de ser muy comprensibles. En particular, construyó el primer número trascendente, expresado por

$$N=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}=0,110001000000000000000001\ldots,$$

perteneciente a los denominados «números de Liouville», de los que creó una familia infinita.

del tipo «Je n'ai pas le temps» («No tengo tiempo»). En este texto realizó un resumen de sus teorías matemáticas y dio instrucciones de hacer llegar sus ideas a Gauss o a Jacobi, dos hombres que podrían juzgarlas. Quizá Galois pensaba que realmente iba a morir, pero lo cierto es que sorprende y conmueve tal comportamiento.

El 30 de mayo de 1832, Évariste recibió un balazo en el estómago y permaneció desangrándose en el campo del honor hasta que un labriego se apercibió y lo trasladó en su carreta al hospital. Allí falleció en brazos de sus allegados, que nos han transmitido algunos comentarios conmovedores; cuando Galois vio el desconsuelo de los suyos, murmuró a su hermano: «No llores, necesito todo mi valor para dejar la vida a los 21 años». Aún no los había cumplido.

Chevalier llevó a cabo lo que pedía la carta de Évariste y las ideas de Galois llegaron al mundo, pero éste las ignoró durante años. Fue mucho más tarde, en 1846, cuando Joseph Liouville las resucitó de entre los papeles de la Academia y, rendido de admiración, las hizo publicar por fin con el respeto que merecían en el *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Para esa época, el mundo estaba preparado para acogerlas; la lástima es que Galois ya no estaba en el mundo.

La teoría de Galois

Sigamos, simplificando mucho, los pasos de Galois tras la esquiva fórmula de la ecuación quíntica. Esta línea de razonamiento figura hoy en muchos libros y webs, pero nunca deja de maravillar que la siguiera un joven de menos de 21 años. Como sucede con frecuencia, lo más claro es exponer un ejemplo; pensemos en la ecuación de coeficientes racionales (es muy importante que por el momento nos limitemos a tales coeficientes):

$$x^4 - 46x^2 + 289 = 0,$$

que es de cuarto grado y tiene cuatro soluciones calculables por radicales (es lo que en bachillerato se llama una ecuación bicuadrada), que son:

$$\alpha = -\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$
$$\beta = -\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$$
$$\chi = \sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$
$$\delta = \sqrt{3} - 2\sqrt{5}.$$

Si tenemos en cuenta las permutaciones posibles entre ellas, constataremos que hay 24 posibilidades. Hoy sabemos que forman un grupo llamado S_4 de orden 24, pero este concepto era desconocido en la época de Galois. Las cuatro soluciones, desde luego, anulan el polinomio

$$P(x) = x^4 - 46x^2 + 289,$$

pero si se analizan las permutaciones de dichas raíces vemos que existen sutiles diferencias de simetría entre ellas. Parafraseando a George Orwell, unas permutaciones son menos iguales que otras. Por ejemplo, al considerar las expresiones, también de coeficientes racionales,

$$\alpha + \delta = 0$$
$$\beta + \chi = 0$$

constatamos que son ciertas. Se observa que, desde el punto de vista de *P(x),* nada cambia si se procede a realizar la permutación de S_4

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \delta & \chi & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

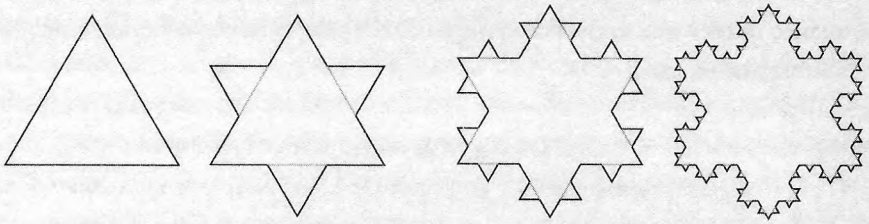
pues lo que resulta son las igualdades

$$\delta + \alpha = 0$$
$$\chi + \beta = 0$$

y nada ha cambiado. Si se intercambian las raíces, todo permanece inalterable. Pero es que cualquier otra ecuación algebraica que sea satisfecha por las soluciones implicadas, de coeficientes racionales, también permanecería inalterable. Insistamos: cualquier expresión algebraica verdadera de coeficientes racionales también permanecería inalterable por una permutación semejante de las raíces, lo que hace indistinguibles a las raíces afectadas. Si el polinomio *P(x)* tuviera alma, viviría en la ignorancia de la permutación, pues no habría expresión de coeficientes racionales que lo denotara. Este enunciado, que no es evidente a poco que se reflexione con detenimiento, es algo que probó consistentemente Galois.

CAMILLE JORDAN (1838-1922)

Al ingeniero Camille Jordan –pues tal fue su titulación y ocupación durante gran parte de su vida– se le conoce en matemáticas, sobre todo, por el teorema de la curva que lleva su nombre. Éste afirma que toda curva plana que no se corta a sí misma (es decir, que no se entrelaza) divide al plano en dos regiones, «dentro» y «fuera» de la curva, de manera que si se unen dos puntos de cada región, el camino que los une corta a la curva. Parece elemental, pero si se intenta demostrar a salvo de curvas no diferenciables, como por ejemplo la curva de Koch, se comprobará su dificultad.



La curva de Helge von Koch (1870-1924), introducida por éste en 1904, es imposible de dibujar, aunque se puede definir e imaginar, dado que, entre otras cosas, es un objeto fractal de dimensión d = ln 4 /ln 3 = 1,26186.... El dibujo reproduce los cuatro primeros pasos del hipotético aspecto de una tal curva. Al cabo de infinitas repeticiones, cada vez más llenas de pinchos, se obtiene la curva, que es continua pero no diferenciable. Es más conocida como «curva copo de nieve».

Hasta tal punto es difícil probar de modo satisfactorio algo aparentemente tan sencillo, que hace pocos años aún se creía que la demostración original de Jordan no era por entero correcta y contenía algún error de razonamiento. De hecho, no les parecía evidente ni siquiera a los contemporáneos de Jordan.

Aunque Jordan hizo notables contribuciones a la teoría de números y al cálculo matricial, se le conoce también por el empujón que dio en su día a la teoría de Galois –tan pronto la dio a conocer Liouville– y a la naciente teoría de grupos. Jordan no consideraba los grupos como entidades abstractas, tal como se ven modernamente, sino como grupos de permutaciones. Ello no le impidió, no obstante, considerar las cadenas de subgrupos normales del estilo

$$\{n\} = G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots \subset G_n = G$$

y probar, conjuntamente con Otto Hölder (1859-1937), el teorema de Jordan-Hölder, que establece, a reserva de ciertas isomorfías y satisfechas ciertas condiciones iniciales bastante elementales, la equivalencia de tales cadenas.

Hay otras expresiones algebraicas que sí que cambian al intercambiar δ con α y χ con β:

$$\alpha-\delta=-2\sqrt{3}+4\sqrt{5}$$
$$\delta-\alpha=2\sqrt{3}-4\sqrt{5}$$
$$\beta-\chi=-2\sqrt{3}-4\sqrt{5}$$
$$\chi-\beta=2\sqrt{3}+4\sqrt{5},$$

pero notemos que los coeficientes de la expresión no son racionales, de manera que no forman parte de las expresiones permitidas. Las permutaciones «buenas», las que no cambian las expresiones algebraicas de coeficientes racionales, forman un grupo, que hoy en día llamamos grupo de Galois. Ésta es otra conclusión –el que formen grupo– también difícil de demostrar, y debida asimismo a Galois.

De este modo, hay simetrías en S_4, o grupo simétrico de las permutaciones de cuatro elementos, que forman parte del grupo de Galois, y otras que no. La permutación

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \chi & \beta & \alpha & \delta \end{pmatrix}$$

intercambia α y χ y no lleva a una expresión verdadera, pues $\alpha + \delta = 0$ pasa a ser $\chi + \delta = 2\sqrt{3} \neq 0$. Por tanto, no pertenece al grupo.

Si se procede a buscar, más o menos laboriosamente, todas las permutaciones «buenas», comprobaremos que sólo hay 4 entre las 24 posibles de S_4, que el grupo de Galois de dichas 4 permutaciones resulta al final ser isomorfo al grupo de Klein, isomorfo, a su vez, a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

En términos generales, prescindiendo del grado, toda ecuación resulta tener su grupo, y dicho grupo depende de las raíces y de la estructura de las mismas. Pero Galois dio un paso más, calzando al parecer botas de siete leguas, tan largo era el paso. El resultado fundamental de Galois dice:

> Una ecuación es soluble si, y sólo si, su grupo de Galois es soluble, entendiendo por ecuación soluble aquella que puede resolverse por operaciones elementales con radicales.

Lo que se entendemos por grupo soluble ya lo hemos explicado en el capítulo anterior.

La demostración de ese bello enunciado no es elemental y requiere unas cien páginas para ser recorrida con calma y sin fatiga; al menos es lo que le costó a Emil Artin (1898-1962), gran matemático y divulgador, autor de un libro, *Galois Theory*, que marcó toda una época.

Hay ecuaciones que tienen por grupo de Galois al quinto de los grupos simétricos, a S_5; para ver si es soluble hay que buscar primero los subgrupos normales de S_5, de nada menos que 120 permutaciones. Ahora bien, tras indagar mucho, vemos que sólo se puede construir una cadena de subgrupos normales, tal como requiere la presunta solubilidad (o mejor, resolubilidad) de S_5:

$$\{n\} \subset A_5 \subset S_5$$

y al formar los grupos cociente requeridos, $S_5 / A_5 \cong Z_2$ y

$$A_5 / \{n\} \cong A_5,$$

resulta que se da la circunstancia perversa de que no es abeliano. Por lo tanto, no existe ninguna cadena como las requeridas por el teorema fundamental, de manera que S_5 no es soluble, ni esa quíntica, en consecuencia, tampoco. Y lo dicho para $n = 5$ vale para cualquier valor sucesivo de n.

Aunque el texto de Artin es un clásico, la denominada teoría de Galois se enfoca hoy de un modo más abstracto y general, pues es aplicable a muchos otros campos, más vastos que la simple consideración de las ecuaciones. Hoy no se postulan coeficientes racionales, sino que se trabaja en un cuerpo cualquiera K, finito o no. Ya no se habla de expresiones inalterables por una permutación, sino de automorfismos α de K'/K, siendo K' una extensión de $K \subset K'$:

$$K' \xrightarrow{\alpha} K', \text{ con } \alpha(x) = x, \text{ para todo } x \in K.$$

El grupo de Galois se define, en la versión moderna, como el conjunto de tales automorfismos. La asimilación de todo ello se hace menos natural, menos intuitiva, y se aleja mucho más del mundo al que estamos acostumbrados, pero hay que reconocer que se gana en generalidad.

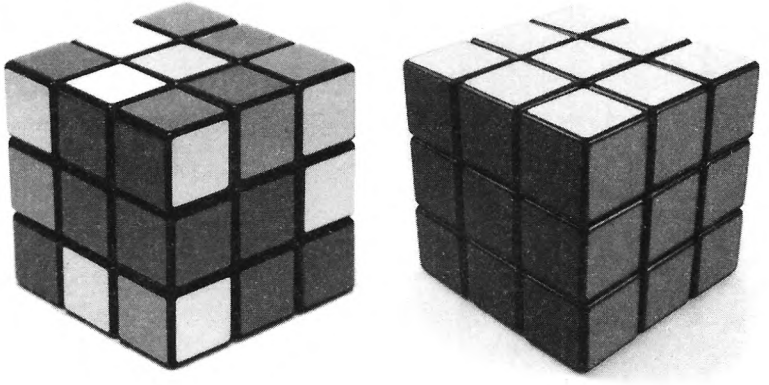
El mejor elogio que se le puede hacer a la presentación moderna es que seguramente le encantaría a Galois, quien nos murmuraría por lo bajo: «Y que conste que es lo mismo que dije yo».

Capítulo 5

Simetría en las matemáticas

La teoría de grupos es una rama bellísima de las matemáticas puras, usada para mostrar de cuántas maneras pueden ser pintados unos bloques de madera.
Robert Ansley

Si se es aficionado a las recreaciones y los juegos matemáticos, uno se tropieza con los grupos a cada paso, tanto si baraja cartas como si se interesa por montar, desmontar o colorear bloques de madera. No es extraño, pues, que los grupos tengan mucho que ver con el célebre cubo de Rubik. La irreverente definición de la cita es cierta, aunque parcial; la llamada teoría de grupos, uno de los florones de las matemáticas, algo tan bello que sume en el éxtasis a alguno de los recién llegados a su reino, sirve desde luego para mostrar el modo de pintar bloques de madera. Pero la sublime teoría de grupos sirve también para resolver cualquier posición del cubo de Rubik hasta dejarlo con las caras uniformemente coloreadas.

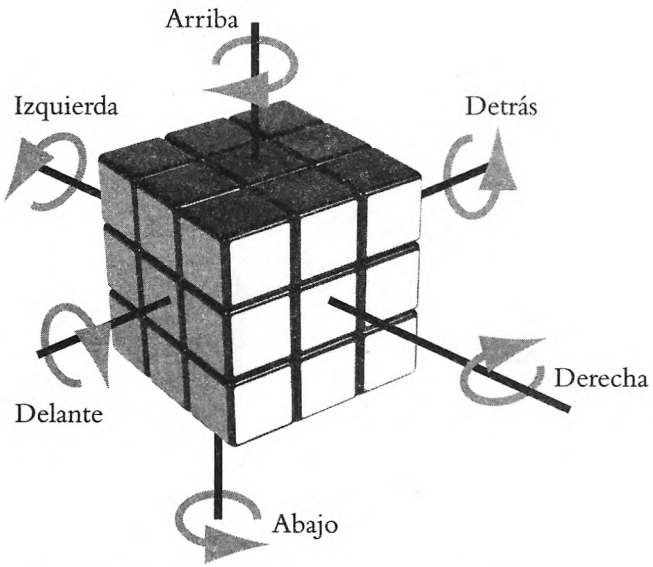


Lo cual no parece un empleo muy digno para toda una teoría matemática. ¡Resolver rompecabezas y acertijos! Pero pruebe usted a resolver por su cuenta una posición cualquiera del cubo de Rubik... Sin embargo, el juego cambia si se sabe que desde cualquier posición del cubo se puede pasar a la posición inicial si se aplican adecuadamente las rotaciones que marca la teoría de grupos.

Álgebra para jugar

El juguete matemático más vendido de la historia ha tenido una exitosa carrera desde que fue creado en 1974 por el arquitecto húngaro Erno Rubik. Desde entonces ha llovido mucho, hasta el punto de dar tiempo a los estudiosos para encontrar soluciones rápidas –pero no fáciles– a cualquier posición de los pequeños cubos; éstos son 27, que se distribuyen en grupos de 3 y que, gracias a un ingenioso mecanismo de rotación, pueden girar por capas y variar el colorido de las caras mostradas al jugador. El juego consiste, en su versión primigenia, en partir de cualquier posición y volver a colorear de un modo uniforme cada cara del cubo grande. En segunda instancia pueden inventarse otros resultados finales –como colocar otro color en medio de cada cara– pero el juego y las maniobras no varían de modo sustancial.

El cubo de Rubik admite muchos movimientos y en varias direcciones formando un grupo de permutaciones de bordes y ejes, incrementado por los colores.



En realidad, todas las rotaciones de un cubo de Rubik pueden reducirse a las señaladas, aplicadas a 1, 2 o 3 capas de cubitos.

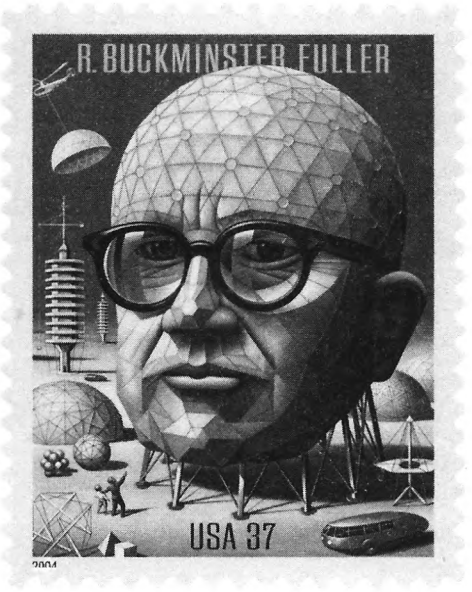
No es fácil hacer las cuentas de todas las permutaciones y, de hecho, es un buen ejercicio aritmético combinatorio. En total resultan 43.252.003.274.489.856.000 permutaciones que, por fortuna para el jugador, forman grupo. Así que todo se reduce (!) a encontrar un algoritmo que nos lleve, a través de una cadena de movimientos, hasta

la configuración buscada. Para hacernos una idea del tamaño de la cifra de configuraciones, se puede hacer alusión al hecho de que, con el volumen actual de los cubos (unos 6 cm de arista), el total de las mismas cubriría la superficie terrestre casi 300 veces.

La búsqueda de algoritmos con resultados parciales ha progresado mucho y hay miles de folletos, libros y webs explicativos, la mayoría de pago; dominar los mejores algoritmos no es tarea fácil, pero una vez se consigue el tiempo de acceso a una solución desciende de modo dramático, y las marcas logradas son ya menores de un minuto, e incluso en algún caso se ha conseguido resolver el juego en menos de 10". Existen todo tipo de competiciones y campeonatos, aunque éstos son más interesantes para el Libro Guinnes de los Récords que para los algebristas. Cabe mencionar las competiciones para invidentes, aquellas en las que hay que hallar la solución en lo que dura una sola inhalación de aire, las realizadas con los pies, etc.

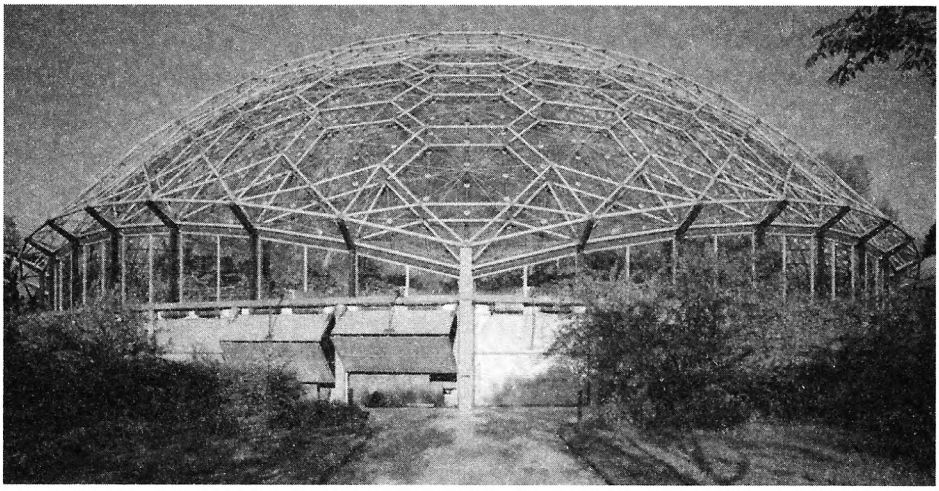
Domos, fullerenos y pelotas de golf

Un estudioso popular de los poliedros fue el arquitecto Buckminster Fuller (1895-1983), protagonista incluso de una portada de la revista *Time* y a quien se atribuye la introducción a gran escala en de los domos geodésicos.



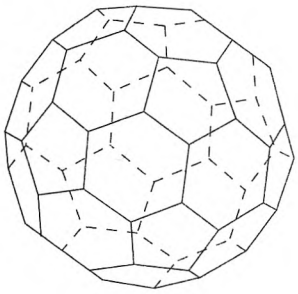
Sello conmemorativo de Richard Buckminster Fuller, que aunque no inventó los domos geodésicos, sí desarrolló sus principios matemáticos y los patentó en 1951.

Un domo geodésico es una estructura esférica o casi esférica que sigue una red de poliedros que aproximan la superficie de sus caras (por lo general triangulares) a una esfera. De hecho, la red de poliedros se aproxima a las líneas geodésicas de la esfera, que son los círculos máximos de la misma. Ello confiere a estas estructuras estabilidad y resistencia.



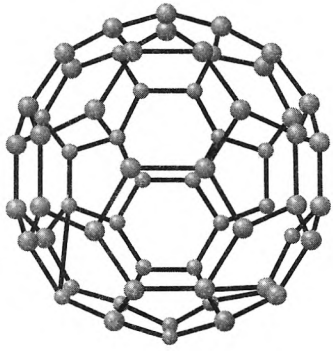
Una vista exterior y otra interior de uno de los numerosos domos geodésicos diseñados por Buckminster Fuller: el Climatron, un invernadero construido en 1960 para el Jardín Botánico de la ciudad estadounidense de Saint Louis.

Los domos no sólo se aplican a las construcciones arquitectónicas; de hecho, el icosaedro truncado, un poliedro de los llamados arquimedianos, que está en la base teórica de los domos, se utiliza en materias más lúdicas, como el diseño de las pelotas de fútbol.

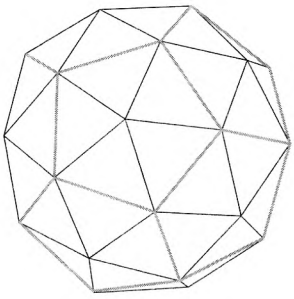


El icosaedro truncado es un poliedro de grupo de simetría I_h (o *532, depende de la notación utilizada) que reproduce la molécula de C_{60}, una forma alotrópica del carbono que consta de 60 átomos del elemento. Esta variedad fue denominada buckminsterfullereno (aunque, para simplificar, muchos la llaman simplemente fullereno) por sus descubridores, los químicos –y Premios Nobel– Robert Curl, Harold Kroto y Richard Smalley.

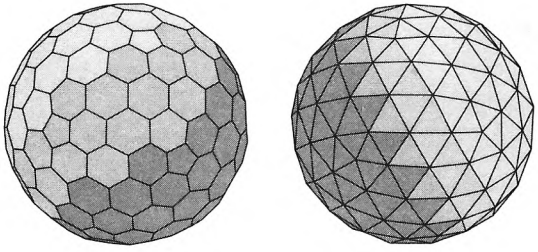
En 1985, los descubridores de esta variedad, los citados tres químicos y Premios Nobel, la denominaron buckminsterfullereno en honor al inventor de los domos geodésicos, aunque, como se ha dicho, hoy, para abreviar, casi todo el mundo la llama simplemente fullereno.



El poliedro dual que nos ocupa es el pentaquisdodecaedro, que tiene el aspecto de un dodecaedro al que le ha crecido una pirámide pentagonal en cada cara, pero formada por triángulos, que «erizan» al poliedro y lo asemejan más al domo geodésico, como puede observarse en la figura siguiente.



La dualidad es algo habitual en los poliedros y, por ende, en los domos construidos a partir de ellos. Uniendo los puntos medios de un domo se obtiene su dual, aunque los triángulos no son equiláteros (sólo hay un poliedro regular, el icosaedro) sino isósceles.



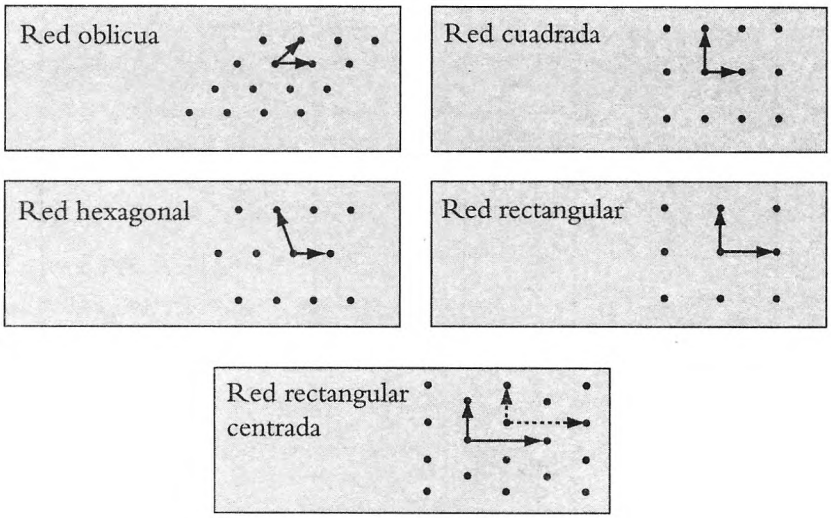
Las pelotas de golf, por su parte, no son globos esféricos, sino esferas con hoyuelos y están sujetas al diseño geométrico y las reglas del tipo de los domos.

Las pelotas de golf deben obedecer, además, a las reglas de los proyectiles y cumplir con las exigencias deportivas que se espera de ellas: no desviarse –lo que implica una deseable simetría– y no defraudar las expectativas sobre su alcance. A estas exigencias hay que añadir las provenientes de su fabricación, pues las pelotas se construyen a partir de piezas hemisféricas y esas partes no deben cortar los hoyuelos. Hay abundante literatura acerca de una cuestión tan poco relevante –para los no aficionados– y una respuesta para quien se preocupe por los grupos de simetría de una pelota de golf: tiene entre 48 –grupo del octaedro– y 120 elementos.

Redes

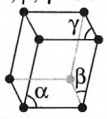
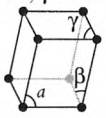
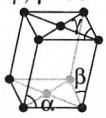
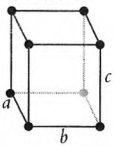
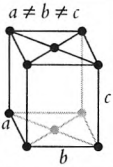
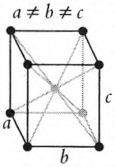
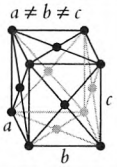
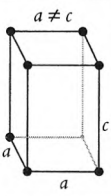
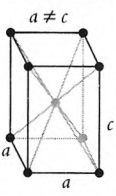
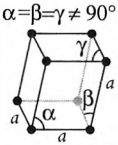
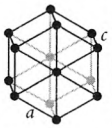
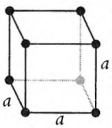
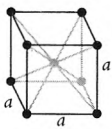
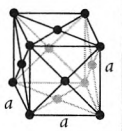
Los grupos puntuales son aquellos cuyos movimientos dejan inmóvil por lo menos un punto del plano. Gobiernan la simetría de cuerpos centrados que, como los poliedros o los polígonos, tienen un punto privilegiado, normalmente el centro de la figura. Una red de Bravais, llamada así en honor del cristalógrafo Auguste Bravais (1811-1863), nos permite pasar del mundo de los grupos puntuales al de los grupos no puntuales, grupos que no afectan a una sola figura, sino a todo el plano o a todo el espacio.

Este tipo de red consiste en una colección infinita de puntos discretos invariantes a través de traslaciones. Viene a ser como si contemplando el paisaje desde el interior de la red, el horizonte se repitiera en todas direcciones, mirando hacia cualquier parte. En geometría bidimensional eso, lleva a cinco configuraciones, descriptibles por vectores y ángulos.



No hay más redes, pues no hay más modos de cubrir todo el plano. No entraremos ahora en la discusión detallada de ello, que no es difícil pero sí laboriosa y que depende sólo de la suma de los ángulos concurrentes en un vértice. Hay, pues, cinco redes planas, a partir de las cuales pueden edificarse los grupos que afectan a todo el plano.

En dimensión 3 las cosas se complican, pues hay que atender a otro tipo de restricciones y a casos que dan configuraciones idénticas. En total quedan las siguientes redes de Bravais, las cuales reciben los nombres, familiares a los estudiosos de la geología, que se relacionan en la columna de la izquierda.

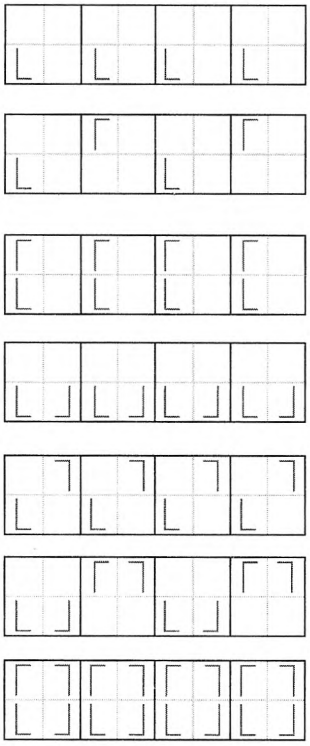
Sistema cristalino	Redes de Bravais			
Triclínico	P $\alpha, \beta, \gamma \neq 90°$ 			
Monoclínico	P $\alpha, \neq 90°$ $\alpha, \gamma = 90°$ 	C $\alpha, \neq 90°$ $\beta, \gamma = 90°$ 		
Ortorrómbico	P $a \neq b \neq c$ 	C $a \neq b \neq c$ 	I $a \neq b \neq c$ 	F $a \neq b \neq c$ 
Tetragonal	P $a \neq c$ 	I $a \neq c$ 		
Romboédrico (trigonal)	P $\alpha=\beta=\gamma \neq 90°$ 			
Hexagonal	P 			
Cúbico	P 	I 	F 	

Los subtipos P, F, I y C de la tabla corresponden a diferentes modalidades del centrado de las caras y del reticulado (pertenencia o no a la red) del centro o de los vértices. El reticulado pueden imaginárselo poniendo las celdas anteriores una al lado de la otra, compartiendo vértices.

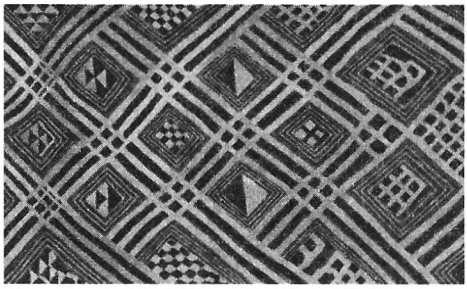
Empapelados o mosaicos, frisos y ornamentos

En realidad, hablar de empapelados o mosaicos, frisos y ornamentos es hablar casi de lo mismo: de simetrías ilimitadas planas. Los empapelados o mosaicos se supone que cubren el plano, mientras que los frisos están limitados por sus bordes. Los ornamentos pueden interpretarse como frisos *interruptus* aplicados a objetos finitos, de uso común: cintas de sombrero, collares, vasijas, etc. Son como caras de la misma moneda. En cuanto a la simetría, la damos por supuesta, aunque prescindiremos de los casos en los que no exista, como sucede en muchos ornamentos.

Los frisos mosaicos limitados por dos paralelas, son asimilables a cintas. Existen 7 posibles grupos de simetría de frisos, que se muestran en la tabla adjunta.



Una cultura de Zaire, la del pueblo bakuba, tiene gran aprecio por los frisos y ornamentos, especialmente por los complicados y simétricos.



Un geométrico diseño ideado por el pueblo bakuba.

Los frisos, por su parte, pueden complicarse deliberadamente y adoptar la forma de columnas; entonces hay exactamente 24 grupos, aunque se prescindirá aquí de su descripción.

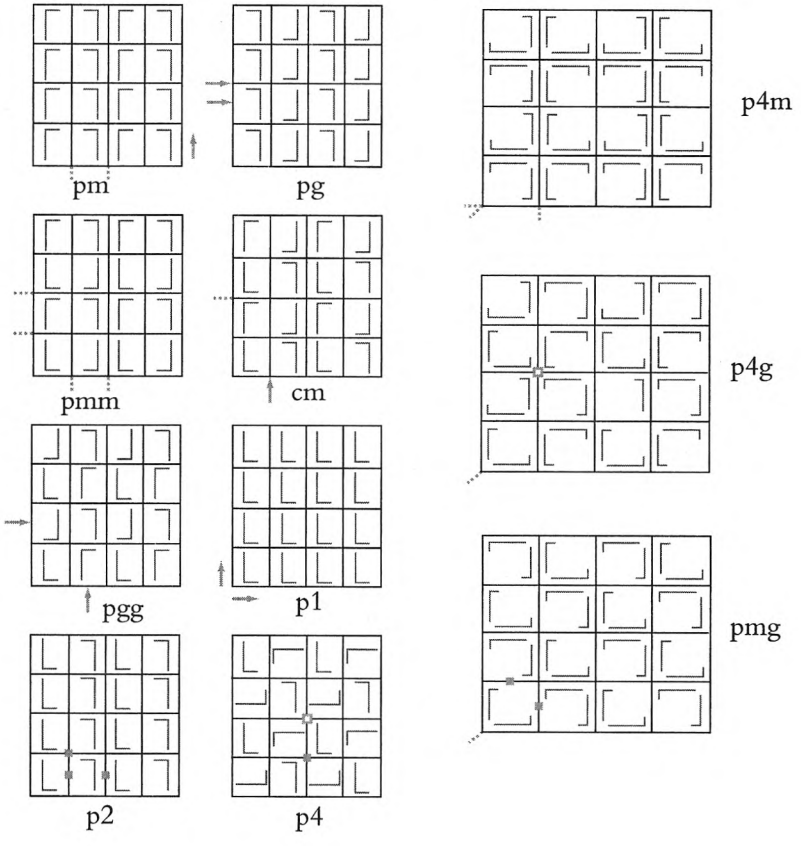
En dimensión 2, los grupos de empapelado o de mosaico, aquellos que afectan a todo el plano, pueden ser de 17 tipos, al combinar las 5 redes de dimensión 2 con los grupos puntuales. La enumeración de tales grupos se debe al cristalógrafo Evgraf Stepanov Fedorov (1853-1919) y también a los trabajos que de forma independiente realizó muchos años más tarde George Polya (1887-1985). Fedorov, matemático ruso, era un hombre de sólidas creencias, considerado un revolucionario en sus agitados tiempos, que falleció de hambre y consunción en 1919.

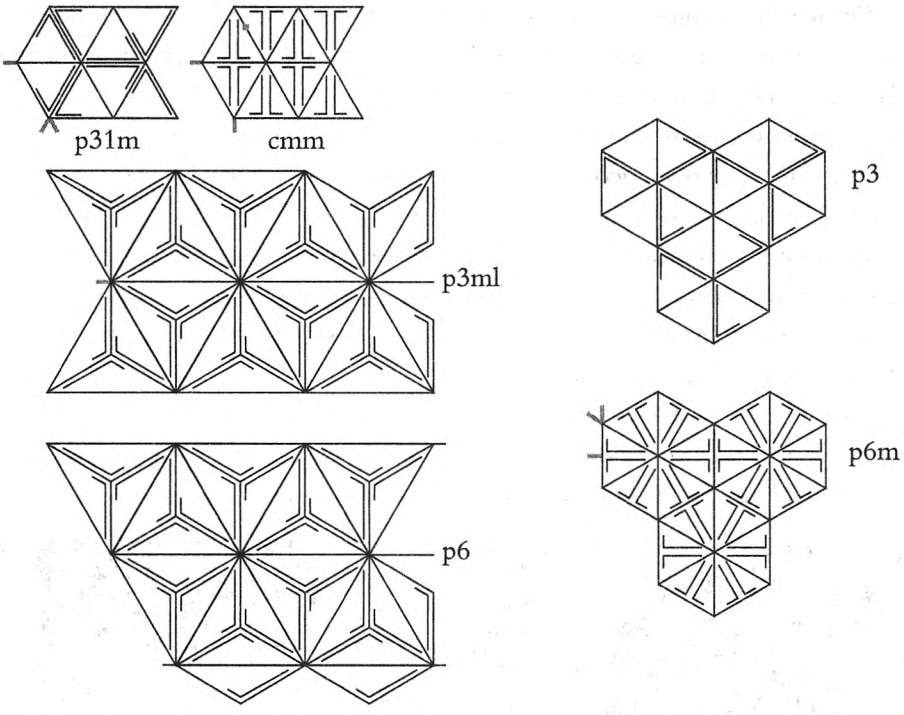
La notación empleada para distinguir unos grupos de otros se conoce como símbolos de Hermann-Mauguin y es un poco complicada. No se preocupe si no la entiende bien en primera instancia, pues no es un elemento básico esencial para la comprensión de lo que sigue:

- *p*1: dos traslaciones;
- *p*2: tres simetrías centrales (o giros de $\pi/2$);
- *p*3: dos giros de $2\pi/3$;
- *p*4: una simetría central (o giro de $\pi/2$) y un giro de $\pi/4$;
- *p*6: una simetría central y un giro de $2\pi/3$;
- *pm*: dos simetrías axiales y una traslación;
- *pmm*: cuatro simetrías axiales en los lados de un rectángulo (vgr. 2 horizontales y 2 verticales);
- *pmg*: una simetría axial y dos simetrías centrales;
- *cmm*: dos simetrías axiales perpendiculares y una simetría central;

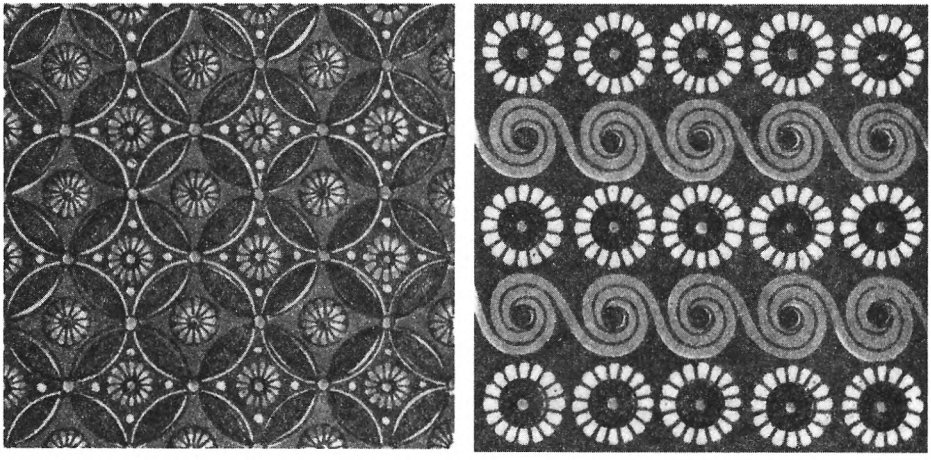
- *p31m*: una simetría axial y un giro de $2\pi/3$;
- *p3m1*: tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero (amplitudes de $\pi/3$);
- *p4g*: una simetría axial y un giro de $\pi/4$;
- *p4m*: tres simetrías axiales en los lados de un triángulo, de amplitudes $\pi/4, \pi/4, \pi/2$);
- *p6m*: tres simetrías axiales en los lados de un triángulo, de amplitudes $\pi/6, \pi/3, \pi/2$;
- *cm*: una simetría axial y una simetría con deslizamiento perpendicular;
- *pg*: dos simetrías con deslizamiento, paralelas;
- *pgg*: dos simetrías con deslizamiento, perpendiculares.

En cuanto a su descripción por medio de dibujos, la de Jesús M. Landart es muy clara. Los puntos denotan los centros de rotación, y las flechas y rayas punteadas, traslaciones.



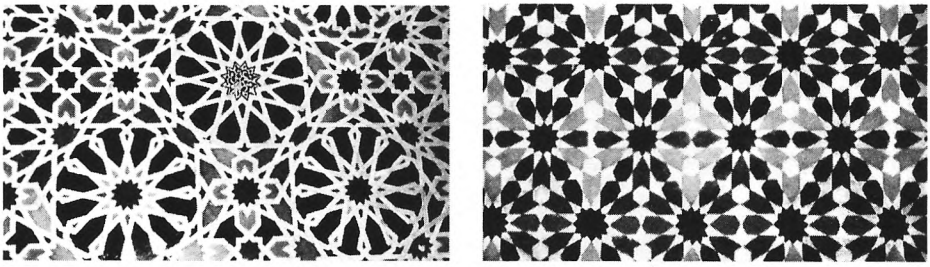


A continuación aplicaremos los modelos anteriores a un ejercicio. ¿A qué grupo pertenecerían los dibujos siguientes si los viera en una pared delante de sus ojos?

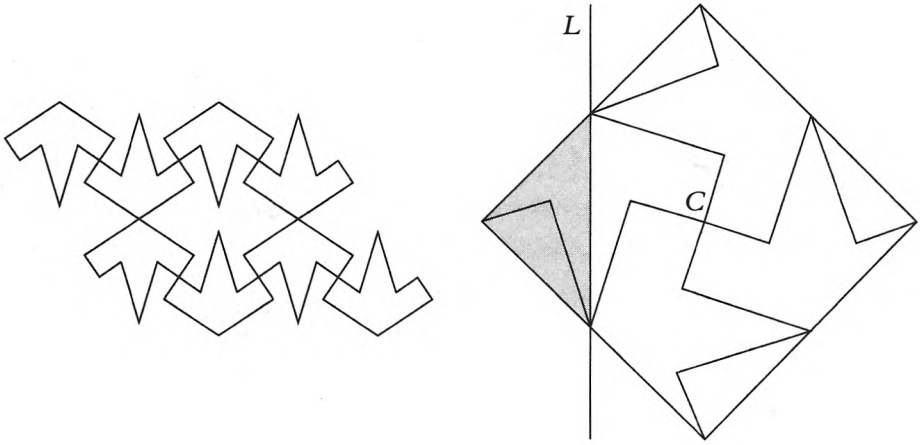


Según una información de internet, ambos diseños proceden del techo de una tumba egipcia, y se ubican dentro de los grupos *p*2 (el de la derecha) y *p*4*m* (el de la izquierda).

Otros ejemplos pueden observarse en la Alhambra de Granada, que se ha convertido en un lugar de peregrinación para los algebristas, pues es sabido que la religión islámica prohíbe toda representación de la figura humana y, en consecuencia, los ornamentos diseñados para los frisos, paredes, suelos, techos, etc. están basados exclusivamente en motivos geométricos. Esto quiere decir que se repiten tales motivos de un modo simétrico, de acuerdo con algunos de los 17 grupos de simetría planos. Encontrar entre los ornamentos a los grupos e identificarlos se ha convertido en un deporte, y son varios los que pretenden haberlos hallado todos; ahora bien, la controversia sigue, pues hay matemáticos para los que las evidencias encontradas hasta ahora son todavía dudosas. En el fondo, saber si los artesanos de la Alhambra pusieron en práctica o no los famosos 17 grupos es una cuestión un tanto académica, dado que seguramente no lo hacían llevados de reflexión deliberada y geométrica alguna. Lo que sin duda sí sería una gran noticia es que hubieran usado 18...



Dos ejemplos de mosaicos de la Alhambra.

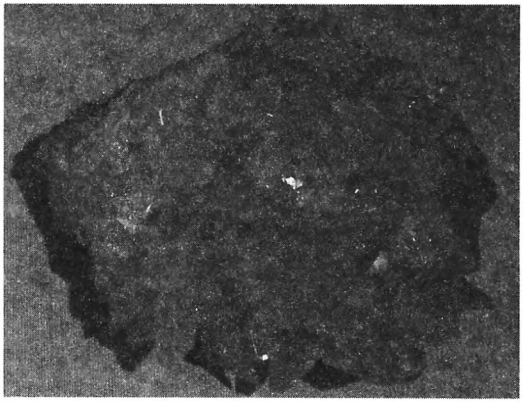


Reproducción del patrón seguido por una de las teselas de la Alhambra.
En la figura de la derecha, la L marca el eje de reflexión y la C, el centro de giro.

En el siglo XXI no es preciso recurrir a grandes esfuerzos artesanales para recubrir con mosaicos una superficie plana, o imaginar un diseño determinado y los 17 grupos de simetría posibles. Hoy en día hay paquetes de software que lo hacen; basta con alimentarlos con un dibujo previo y decirles qué grupo queremos.

Cristales y más allá de los cristales

En dimensión 3, los posibles grupos puntuales son 32, pero cuando se toman en consideración sus posibles traslaciones a lo largo de las redes se disparan hasta la cifra de 230 grupos. Son grupos cristalográficos tridimensionales, tan reales como la materia misma, que también fueron descubiertos por Fedorov. Si la cifra parece muy elevada, piénsese en la dimensión 4, ámbito en el que hay 4.783 cristales; en dimensión 5 se entra en los millones, y en dimensión 6 ya son 28.934.974...



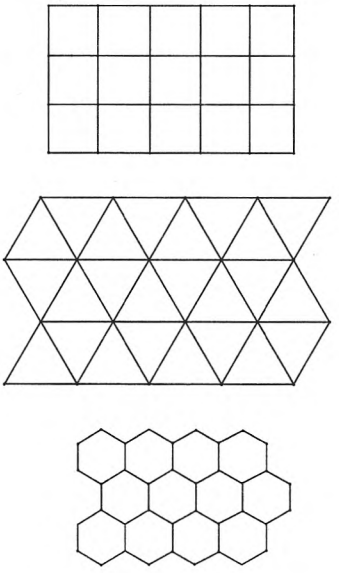
Cristales de azufre (sistema ortorrómbico).

Como puede muy bien imaginarse el sufrido lector, no le vamos a dar la relación, acompañada de dibujos y fotografías, de los 230 grupos cristalográficos. Tampoco le daremos su nombre matemático, uno por uno; de hecho, se usan tres notaciones distintas, lo que daría... 690 nombres y fácilmente produciría en el no aficionado a la mineralogía una reacción de rechazo.

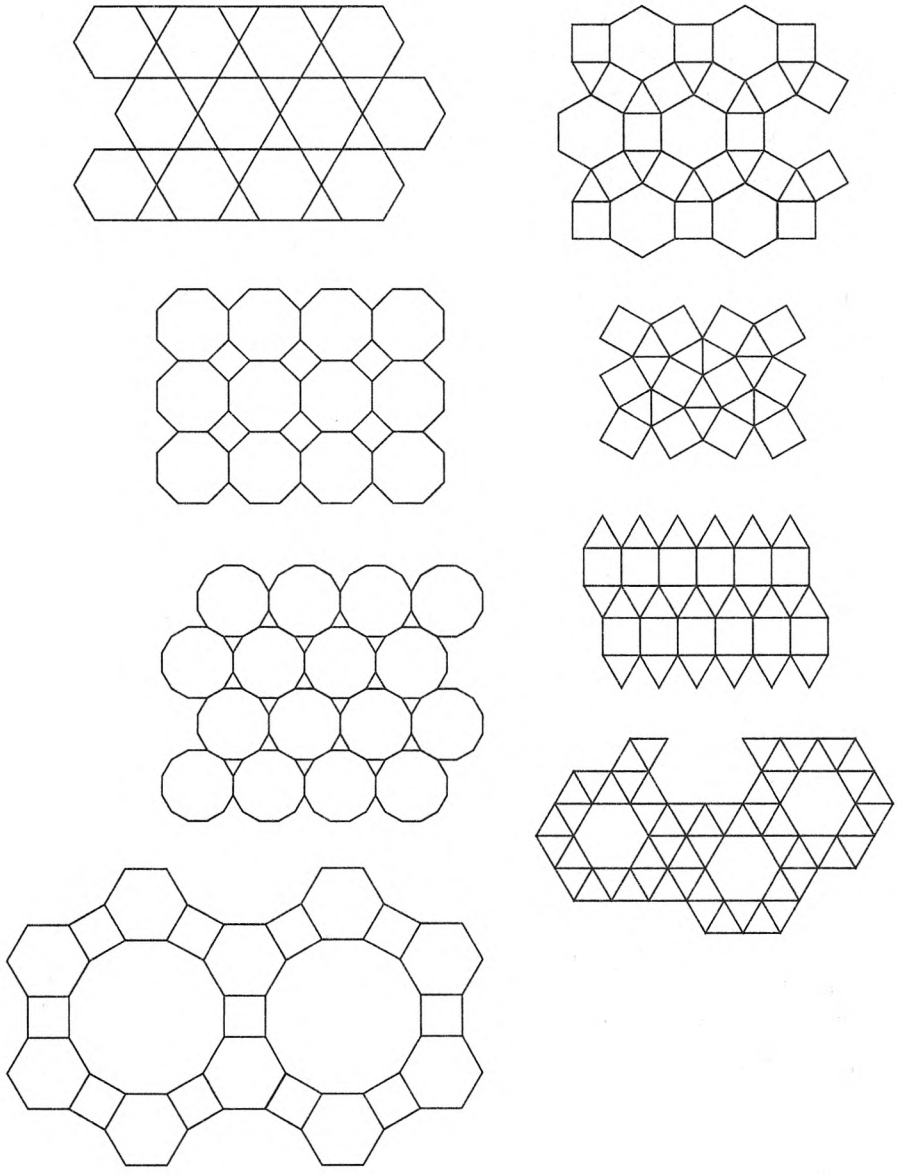
Un rechazo parecido fue el que encontraron los cuasicristales cuando hicieron su aparición. Fue una sorpresa, pues los físicos se habían esforzado mucho con los 230 de Fedorov y ya parecía que todo estaba hecho: cada cristal obedecía a la simetría de un grupo y éste pertenecía a alguna de las redes de Bravais. Un simple razonamiento matemático, un tanto laborioso pero elemental (denominado precisamente restricción

cristalográfica), aseguraba que no podían existir más redes. Pero lo que ocurre es que el álgebra propone y la realidad dispone. Olvidémonos por un momento del espacio tridimensional y, para hacer más comprensible lo que vamos a decir, pensemos en el plano. Una red abarca todo el espacio infinito del plano, aunque, como ya se ha apuntado antes, sólo existen unos tipos determinados de redes. Las simetrías de orden 5, pentagonales o decagonales, no pueden dar lugar a redes y, por tanto, no hay cristales posibles; pero eso sólo es cierto porque un objeto simétrico pentagonal no se adapta a ninguna red posible. Sin embargo, recordemos que una red vale para todo el espacio; ¿y si eliminamos tal restricción espacial? ¿Y si nos conformamos con espacios más reducidos? Desde luego, no habrá redes y tampoco cristales, pero quizás haya algo parecido a los cristales.

Para tratar este tema con más claridad, abordémoslo desde otro ángulo. Hablaremos de otro concepto que parece lejanamente emparentado con las redes y los cristales, la teselación. Digamos primero qué es una teselación: es un recubrimiento del plano, sin agujeros ni solapamientos, con piezas denominadas teselas o losetas. Cuando las teselas son de un solo polígono regular congruente, se dice que la teselación es regular; cuando las teselas están formadas por varias piezas distintas, pero todas polígonos regulares, la teselación se llama semirregular. Hay, como es natural, muchos otros tipos de teselación que no pertenecen a estos dos tipos, ambos por cierto muy simétricos.



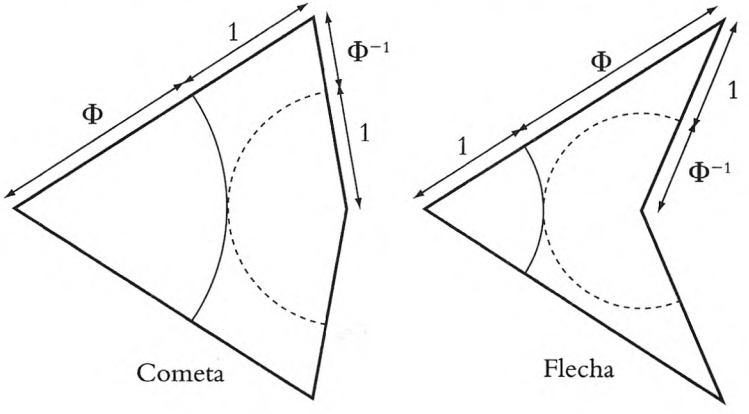
Las tres posibles teselaciones regulares.



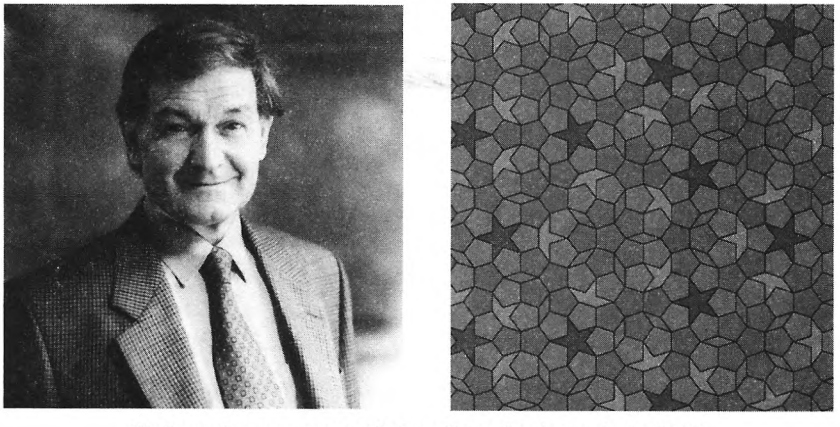
Las ocho posibles teselaciones semirregulares.

Ambos tipos de teselaciones, regulares o semirregulares, son las más accesibles, proporcionan recubrimientos periódicos y están sujetas a las simetrías que marcan los 17 grupos de simetría planos. En general, unas teselaciones serán simétricas y otras no, pero las teselaciones periódicas, desde luego son simétricas.

Centrémonos en las teselaciones no periódicas. Una cuestión geométricamente interesante es saber el número mínimo de teselas necesarias para obtener un recubrimiento no periódico. Se empezó con un primer resultado del matemático americano Robert Berger, que publicó en 1966 un recubrimiento aperiódico de 20.426 teselas distintas. Luego, como es de suponer, fue disminuyendo la cifra. El filósofo, físico y matemático sir Roger Penrose (n. 1931) sorprendió al mundo matemático en 1974, no por escribir algo nuevo con su colega Stephen Hawking –que ya lo ha hecho, y más de una vez–, sino por desvelar la existencia de un recubrimiento o mosaico del plano –de sólo dos piezas muy sencillas, una cóncava y la otra convexa (en inglés se les llama *dart* = flecha y *kite* = cometa)– que no era periódico.



Componentes de las dos piezas de una teselación de Penrose. Φ es el número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Los arcos interiores delimitan las medidas.*

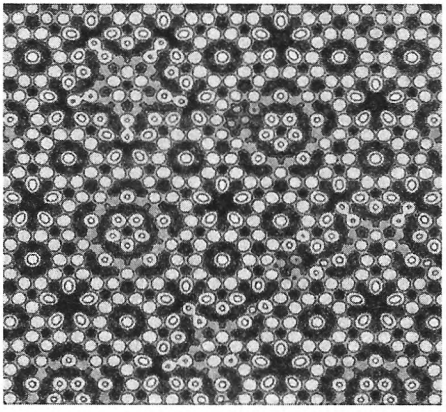


Sir Roger Penrose, en una fotografía realizada en el año 2007, y un ejemplo del tipo de recubrimientos ideados por él.

Es decir, con sólo dos piezas podía recubrirse el plano, aunque tal mosaico no era periódico, o sea que no se repetía infinitamente, y no era simétrico en todo el plano. Basándose en ello, Dov Levine y su jefe, el cosmólogo Paul Steinhardt (n. 1955), encontraron un recubrimiento ya no plano sino espacial, también no periódico y formado por celdas romboidales. No tenía cabida en red alguna y, por lo tanto, tal recubrimiento no era periódico, no cubría simétricamente *todo* el espacio como cada uno de los 230 grupos de Fedorov.

Los recubrimientos del tipo Penrose no son periódicos y no reproducen *en todas partes* el mismo paisaje. No gozan de una simetría predecible en cualquier punto, pero son simétricos en ámbitos muy extensos; de hecho, en cualquier ámbito, por grande que sea. Eso sí, no son periódicos, no gozan de la virtud de la infinitud y no recubren periódicamente el todo. Son simétricos, pero de forma limitada, en el sentido de que si se copian idealmente en un papel, se trasladan a otro punto y se copia la pauta de construcción allí, no coincide lo construido con la pauta de papel con el recubrimiento primitivo. No son simétricos por traslación.

Por su parte, los cuasicristales poseen existencia real desde que en 1982 se encontró el primero, una aleación de aluminio y manganeso. Luego se han multiplicado por todas partes. Para hacernos una idea de cómo son, pensemos en algo que está a medio camino entre el vidrio, que es totalmente amorfo, y el cuarzo, que es cristalino en el sentido tradicional. Los cuasicristales forman un nuevo estadio de la materia, no descrito hasta ahora. Así es como avanza la ciencia; no es que la teoría de grupos pueda con todos los secretos de la simetría. Será necesario ir más allá de los grupos para hacer frente a nuevos desafíos y quizá la física cuántica pueda realizar grandes aportaciones en el futuro. Cómo serán de importantes los grupos y la simetría, que hasta su violación (su denominada ruptura) nos plantea nuevos retos.



Modelo atómico del cuasicristal formado por una aleación de plata y aluminio.

Átomos y grupos

Hay grupos finitos, como casi todos los que hemos investigado en los primeros capítulos: los grupo diedrales de los polígonos, los grupos de los poliedros, etc., pero también hay grupos infinitos, como el plano mismo bidimensional, que posee infinitas isometrías que lo dejan invariante.

De hecho, no es preciso ir tan lejos; pensemos en un círculo, una figura geométrica insignificante que tiene infinitas simetrías. Son tantas simetrías, incluso las simples rotaciones, que no nos basta con decir que son infinitas; necesitamos decir, para hacernos una idea aproximada, que el grupo de rotaciones del círculo posee dimensión 1, pues 1 es el número de parámetros necesario para definir cualquier movimiento. Si hubiéramos elegido una bola esférica, la dimensión sería 3 (¡cuidado, no 2!), pues se precisa dar tres parámetros para definir un movimiento giratorio (longitud y latitud del punto por el que pasa el eje de giro central y ángulo de rotación).

Estos conceptos, como el de la dimensión, aunque claros y necesarios, no bastan para resolver una tarea fundamental:¿cómo se clasifican los grupos? ¿Hay algún criterio razonable para hacerlo? En el capítulo anterior se ha definido qué se entiende por grupo simple. Es aquel que sólo tiene por subgrupos normales al propio grupo y a la identidad. Dicho de manera algo inexacta, pero muy comprensible, la definición responde al criterio de que un grupo es tanto más sencillo cuanto menos subgrupos tiene; la sencillez extrema viene a ser el grupo que no presenta subgrupos. Los grupos simples son los grupos más sencillos posibles, los únicos indescomponibles, los que están en la base.

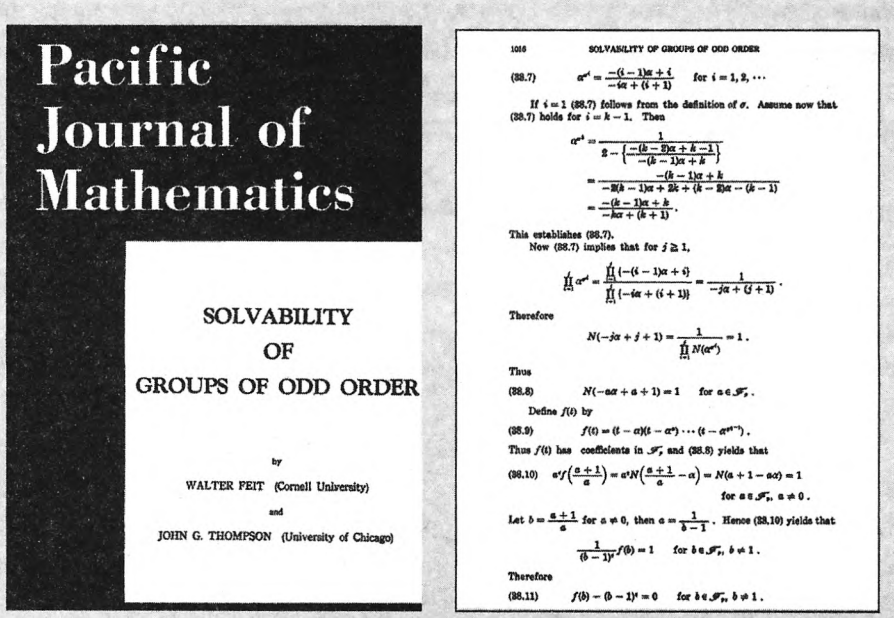
Los grupos simples son como los átomos del universo de los grupos. Son indivisibles. Un grupo simple G no tiene subgrupos normales N que hagan posible «dividir» a G: no existe ningún grupo cociente G/N. Dentro de un grupo simple G no hay cociente posible.

Ocupémonos de momento de los grupos finitos, que teóricamente es la tarea más fácil. Cuando un grupo es finito y cíclico, si es simple, es de orden primo. Si el grupo simple es finito pero no cíclico, entonces su orden es par. Esta última afirmación es un bello resultado conocido como teorema de Feit y Thompson, que fue probado en 1963. Lo anecdótico es que el enunciado es muy breve pero su primera demostración ocupaba nada menos que 254 páginas, y era tan extensa que invadió todo el número de la revista en la que se publicó, el *Pacific Journal of Mathematics*. Era un aviso de las terribles demostraciones posteriores.

JOHN GRIGGS THOMPSON (n. 1932)

Este matemático norteamericano siempre se ha movido en el terreno del álgebra y, en especial, el de la teoría de grupos. Su labor en este ámbito es tan destacada que ha recibido la Medalla Fields (en 1970) y, como vimos en el capítulo 3, el Premio Abel (en 2008). Él y Jean-Pierre Serre (n. 1926) son por el momento los únicos matemáticos que poseen ambos galardones (recordemos que la Medalla Fields se otorga al mejor investigador menor de cuarenta años, y que el Premio Abel rinde homenaje a los mejores matemáticos del mundo en función de toda su trayectoria).

Su resultado más conocido es el teorema que lleva su nombre junto con el de su colega Walter Feit (1930-2004), que constituyó el primer paso significativo en pos de la clasificación de los grupos simples. Thompson también encontró el grupo esporádico que lleva su nombre, el llamado grupo *Th* (o F_{313} o F_3) de orden $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 =$ $= 90.745.943.887.872.000 \approx 9 \cdot 10^{16}$. Un resultado suyo, que los especialistas apreciarán en toda su extensión, afirma que este grupo esporádico –de tamaño casi inimaginable– es un grupo de Galois de alguna ecuación entera. No nos dice cuál, pero tal ecuación tiene que ser colosal.



Pacific Journal of Mathematics

SOLVABILITY OF GROUPS OF ODD ORDER

by

WALTER FEIT (Cornell University)

and

JOHN G. THOMPSON (University of Chicago)

1016 SOLVABILITY OF GROUPS OF ODD ORDER

(38.7) $\alpha^{\sigma^i} = \dfrac{-(i-1)\alpha + i}{-i\alpha + (i+1)}$ for $i = 1, 2, \cdots$

If $i = 1$ (38.7) follows from the definition of σ. Assume now that (38.7) holds for $i = k - 1$. Then

$$\alpha^{\sigma^k} = \frac{1}{2 - \left\{\dfrac{-(k-2)\alpha + k - 1}{-(k-1)\alpha + k}\right\}} = \frac{-(k-1)\alpha + k}{-2(k-1)\alpha + 2k + (k-2)\alpha - (k-1)} = \frac{-(k-1)\alpha + k}{-k\alpha + (k+1)}.$$

This establishes (38.7).

Now (38.7) implies that for $j \geq 1$,

$$\prod_{i=1}^{j} \alpha^{\sigma^i} = \frac{\prod_{i=1}^{j}\{-(i-1)\alpha + i\}}{\prod_{i=1}^{j}\{-i\alpha + (i+1)\}} = \frac{1}{-j\alpha + (j+1)}.$$

Therefore

$$N(-j\alpha + j + 1) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{j} N(\alpha^{\sigma^i})} = 1.$$

Thus

(38.8) $N(-a\alpha + a + 1) = 1$ for $a \in \mathscr{F}_q$.

Define $f(t)$ by

(38.9) $f(t) = (t - \alpha)(t - \alpha^\sigma) \cdots (t - \alpha^{\sigma^{a-1}})$.

Thus $f(t)$ has coefficients in $\mathscr{F}_q$ and (38.8) yields that

(38.10) $\alpha^q f\left(\dfrac{a+1}{a}\right) = \alpha^q N\left(\dfrac{a+1}{a} - \alpha\right) = N(a + 1 - a\alpha) = 1$ for $a \in \mathscr{F}_q$, $a \neq 0$.

Let $b = \dfrac{a+1}{a}$ for $a \neq 0$, then $a = \dfrac{1}{b-1}$. Hence (38.10) yields that

$$\frac{1}{(b-1)^q} f(b) = 1 \quad \text{for } b \in \mathscr{F}_q,\ b \neq 1.$$

Therefore

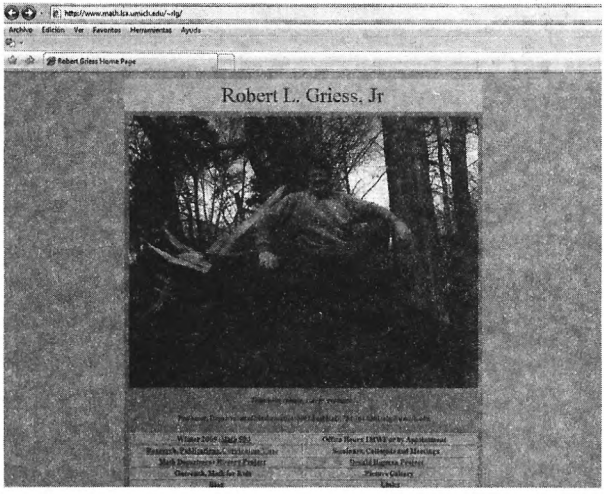
(38.11) $f(b) - (b-1)^q = 0$ for $b \in \mathscr{F}_q$, $b \neq 1$.

Portada y una de las páginas del extenso artículo publicado por Feit y Thompson en 1963 en el Pacific Journal of Mathematics.

Años sucesivos han ido contemplando el desarrollo de la clasificación de los grupos simples, finitos o no, aunque aquí –como ya se ha dicho– nos limitaremos a los finitos. Clasificar los grupos infinitos no es que sea una tarea imposible, ni mucho menos, pero requiere largas y enrevesadas explicaciones sobre los grupos de Lie, lo cual puede ser demasiado especializado. Los grupos simples finitos, por su parte, pueden ser:

- Grupos cíclicos, tipo $\mathbb{Z}_p$ con p primo.
- Grupos alternados para $n \geq 5$, ya tratados en capítulos anteriores y denominados como A_n.
- Grupos de Lie simples, de los que hablaremos en la sección correspondiente.
- Grupos esporádicos, de los que hay 26; no responden a ningún esquema, y si al principio fueron calificados de extravagancias, ahora se miran con mucho respeto, pues de sus entrañas van emergiendo cosas cada vez más interesantes.

Los grupos esporádicos van del grupo de Mathieu, el de orden menor, pues «sólo» tiene $7.920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ elementos, al grupo conocido como *The Monster (El monstruo)* que tiene $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot \cdot 71 = 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000$ elementos, más que átomos hay en el universo. Fue construido por Robert Griess (n. 1945) en 1980, y su propio autor lo llama «el gigante amistoso», una denominación que se ha extendido entre los especialistas. Acostumbra a decirse, como si eso simplificara las cosas, que corresponde al grupo de ciertas rotaciones en el espacio de dimensión 196.883.



La página de inicio de la web del matemático Robert Griess, en la que puede encontrarse abundante información sobre «el monstruo».

En 1990 se probó la unicidad del *monstruo*, es decir, que *monstruo* sólo hay uno, menos mal. Este enorme grupo es designado en la literatura especializada como *M*. De los 26 grupos esporádicos, 20 son subgrupos (¡atención, no normales!) de *M*; a los 6 restantes, que quedan fuera de *M*, los especialistas los denominan «grupos parias». El grupo esporádico consecutivo, el que es en tamaño el siguiente a *M*, es el denominado *Baby Monster (B)*, de «sólo» 4.154.781.481.226.426.191.177.580.544.000.000 elementos, algo insignificante comparado con *M*.

Los grupos esporádicos están llenos de sorpresas y son terreno minado que hay que pisar con cuidado. Considérese si no al apacible *monstruo*.

Cierto día, Conway y Norton plantearon una conjetura, fruto de la contemplación de las dimensiones de las representaciones irreducibles de *M* y de los coeficientes de un desarrollo de Fourier de la función llamada $j(\tau)$. Se entiende la perplejidad de ambos matemáticos ante una coincidencia, no evidente a primera vista, entre dos cosas que parecían no tener nada que ver la una con la otra, unos coeficientes de una serie y la dimensión de ciertas representaciones de *M*. Ellos notaron que

$$j(\tau)=\frac{1}{q}+744+196884q+21493760q^2+864299970q^3+\ldots$$

(donde se ha puesto $q = e^{2\pi i\tau}$ para abreviar) y que, por otro lado, las dimensiones cumplían

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 196884 &= 196883 + 1 \\ 21493760 &= 21296876 + 196883 + 1 \\ 864299970 &= 842609326 + 21296876 + 2 \cdot 196883 + 2 \cdot 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

siendo los números de la derecha combinaciones lineales de las dimensiones que hemos mencionado.

Hay que ser Conway para deducir que eso es demasiado hermoso para ser casual, y emitir en consecuencia una conjetura. No es este el lugar para reproducirla, pero baste decir que implica incluso a la teoría de cuerdas. La conjetura, llamada humorísticamente *The Monstruous Moonshine* (una mala traducción aproximada sería *La luz de luna monstruosa*, aunque así se pierde otro de los significados de la palabra *moonshine, «pamplinas»*), fue probada en 1992 por Richard Ewen Borcherds (n. 1959)

JOHN HORTON CONWAY (n. 1937)

Se trata de uno de los matemáticos contemporáneos más polivalentes, populares, inteligentes y fuera de lo común. Conway es un fértil autor de libros y vídeos que van desde los sesudos textos de álgebra y las especulaciones filosóficas hasta las matemáticas recreativas, terreno en el que es un primer espada. Nació en Inglaterra y en la actualidad es titular en Princeton nada menos que de la cátedra John von Neumann.

Es difícil decir qué creaciones de Conway formarán en el futuro parte de la historia, pero serán bastantes y pertenecientes a muchos campos. Es responsable de hallar 4 grupos simples actuando solo y 3 más trabajando en colaboración; ha publicado también un atlas de los grupos finitos. Ha trabajado en física cuántica y en el algoritmo Doomsday («Fin del mundo»), una especie de calendario universal. En teoría de autómatas ha inventado el popularísimo *Game of Life* («Juego de la vida»); en teoría de números, los números surreales, y en teoría cuántica es corresponsable del sorprendente «teorema del libre albedrío», destinado a explorar la extrañeza del mundo cuántico. Ha realizado aportaciones importantes a los cuaternios, a la teoría de nudos y la combinatoria de los poliedros; ha demostrado que todo entero es suma de a lo más 37 potencias quintas enteras... En fin, se trata de un científico que escapa a toda clasificación.

El honorable profesor John «Horned» Conway, luciendo en la cabeza una esfera «cornuda» de Alexander, una superficie geométricamente patológica, pero simplemente conexa y homeomorfa a una esfera. Conway es quien inventó el mote «monstruo» para referirse al grupo M.

y le valió una Medalla Fields. Un último apunte: los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59 y 71 son los quince llamados superprimos de la teoría de números; ¿ven alguna relación con el orden de *M*?

Los grupos de Lie

El noruego Sophus Lie (1842-1899) no pasó por las privaciones de su compatriota Abel, ya que ejerció de catedrático en Alemania. En sus trabajos sobre las ecuacio-

nes diferenciales desarrolló unos grupos especiales, de carácter geométrico, que hoy llevan su nombre y que no parecían destinados a la universalidad de la que gozan en nuestros tiempos. Inteligencias posteriores, como Wilhelm Killing (1847-1923) y Élie Cartan (1869-1951) prosiguieron sus trabajos, y los grupos de Lie son hoy un instrumento fundamental no sólo en álgebra, sino en física, y muy en especial en física cuántica. Incluso un moderno Premio Abel como Jacques Tits (n. 1930) es un especialista en la materia.

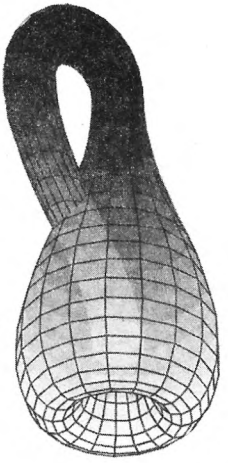
El matemático noruego Sophus Lie, quien realizó importantísimas aportaciones al estudio de la simetría.

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable (para imaginarlo, piensen ustedes en una superficie lisa, sin pliegues, o en una superficie como la de una esfera, una hélice o un donut) cuyos elementos forman un grupo, cuyas operaciones son también diferenciables. En realidad, no es nada extraño a primera vista, lo que ocurre es que bajo este paraguas tan inocente se esconden variedades diferenciales impensadas, muy poco comunes, incluso finitas, que, dada su complejidad, no serán tratadas aquí. Los grupos de Lie son materia propia del álgebra superior y no castigaremos al lector con su descripción y con su estudio; quien lo desee puede profundizar en ellos en el anexo de este volumen.

El programa de Erlangen

Felix Klein (1849-1925) no sólo era reconocido en su tiempo como el número uno de los matemáticos, sino que era lo que hoy denominaríamos un *workhoolic*, un fanático de su trabajo, que robaba horas al sueño e incluso tomaba drogas para sobrellevar la fatiga y rendir más. Hasta tal punto llegaba su afición que su cuerpo dijo basta y en 1882 cayó víctima de una depresión. Cuando se recuperó, ya no fue nunca el mismo.

A Felix Klein le debemos muchas aportaciones matemáticas, como la incorporación de derivadas e integrales a la enseñanza secundaria, no universitaria, y en lo estrictamente matemático, muchos conceptos e ideas importantes. También ideó una estructura topológica, casi un juguete recreativo, denominado botella de Klein.

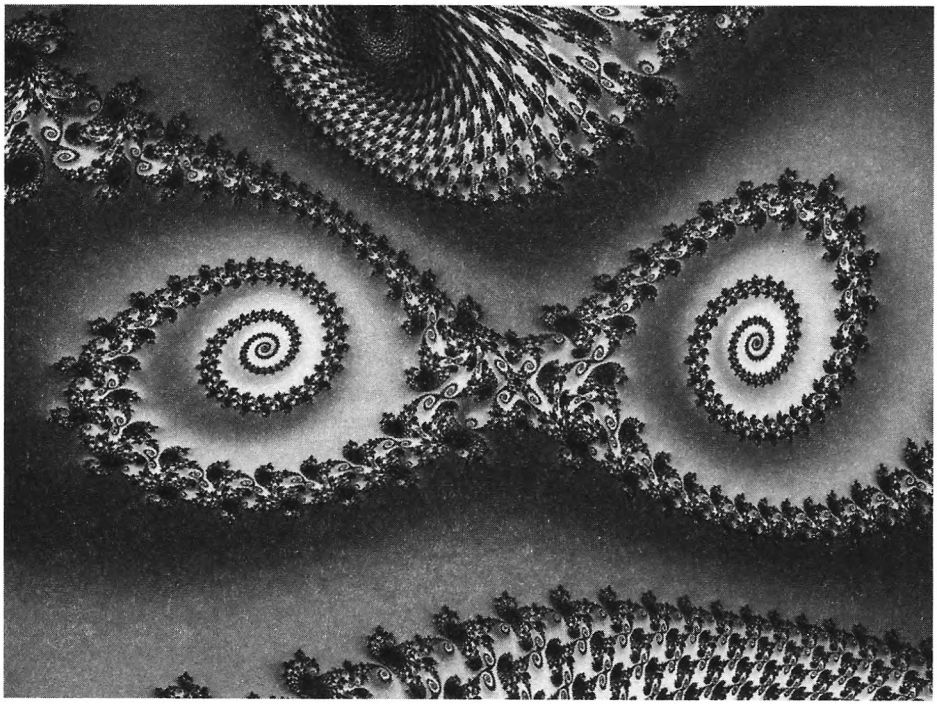


Una botella de Klein es un recipiente que no encierra volumen alguno, pues en nuestro mundo tridimensional carece de interior y exterior. En dimensión 4 no se penetra a sí mismo. El término botella, inadecuado, proviene del alemán Kleinsche Fläche, *superficie de Klein, que es una variedad no-orientable.*

Los matemáticos, cuando se habla de él, piensan de inmediato en el programa de Erlangen, un enfoque nuevo de la geometría que Klein dio a conocer en una de sus conferencias en la Universidad de Erlangen, ciudad en la que por primera vez fue catedrático. El punto de vista de Klein, tan aceptado hoy en día que todo el mundo científico lo da por sabido, era muy novedoso. Lo que perseguía –y consiguió– fue

sintetizar en una sola idea todo el significado disperso de la palabra «geometría»; en la época de Klein existían geometrías euclideas y no euclideas, geometrías métricas y proyectivas o afines, geometrías de muchos tipos. La idea central del programa de Erlangen consiste en fijarnos en un grupo G y en todas sus simetrías, en todas las transformaciones de G que dejan invariantes unas propiedades básicas: ese es el contenido de la geometría determinada por el grupo.

Si el grupo elegido es el de las isometrías euclidianas, obtendremos la geometría euclidea. Si escogiéramos la métrica de Lorentz-Einstein y el grupo elegido fuera el grupo de transformaciones de Lorentz en dimensión 4 (espacio de Minkowski), obtendríamos la geometría de la teoría de la relatividad. Si elegimos como grupo el de las transformaciones afines (que hacen de un vector $\boldsymbol{v}$ otro vector $\boldsymbol{av} + \boldsymbol{b}$), nos resultaría una geometría afín, una geometría en la que las semejanzas, además de los giros y las reflexiones, serían un invariante y en la que los objetos espirales, como el nautilo y su concha, serían considerados simétricos, si bien no son simétricos de acuerdo son las isometrías convencionales del grupo de Lie $SO_2(\mathbb{R})$.



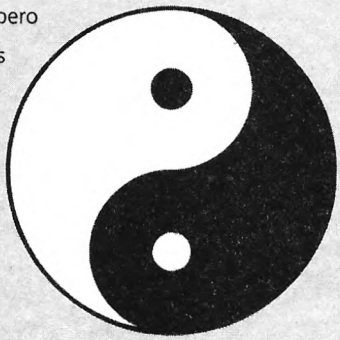
El mundo de los fractales, que reúne objetos autosimilares, pasa a ser un mundo ideal para estudiarlo bajo la lupa del grupo afín.

UNA SIMETRÍA ANTISIMÉTRICA

El símbolo universal del yin y el yang no es simétrico, pero tiene «algo» que sugiere poderosamente la simetría. Es tan asimétrico que merece ser simétrico. De hecho, el yin pasa a ser el yang (y viceversa) con un giro, seguido de un cambio de color. En matemáticas, una función f que verifica que

$$f(x,y) = -f(y,x) \text{ para todo } x \neq y$$

se denomina antisimétrica.



Desde el punto de vista práctico, dos geometrías de grupos isomorfos, por oculta que sea tal isomorfía, son en el fondo la misma geometría. Por ejemplo, la geometría de la línea proyectiva compleja es la misma que la del plano hiperbólico real, pues sus grupos son indistinguibles salvo isomorfía. Basta, pues, con estudiar una geometría y no las dos.

Las espirales, que no poseen simetría con el grupo de las isometrías euclideas, sí que la poseen cuando se las considera grupos de Lie y se hace intervenir como parámetro al tiempo.

Capítulo 6

Simetría en todas partes

Los teoremas han de ser nobles, sorprendentes,
elegantes, intrigantes, rigurosos, creativos...
y, sobre todo, comprensibles.
H. Zeeman

El mundo físico es donde la simetría brilla con todo su esplendor. Y no sólo lo hace de modo visible, en fenómenos tan cotidianos como los ópticos o en instrumentos tan evidentes como el berbiquí o el calidoscopio, sino en zonas más ocultas, en teorías más historiadas, sobre todo en el ámbito cuántico, ese mundo de lo infinitamente pequeño –pero real–, tan apartado de nuestra experiencia diaria y, por desgracia, de nuestra intuición, lo que en muchas ocasiones dificulta enormemente su comprensión. De hecho, algunos conceptos físicos alcanzan tan enrarecidas alturas en el pensamiento científico que van a resistírsenos en primera instancia y necesitaremos pasar varias veces por el mismo tema hasta conseguir asimilarlo.

En física, la simetría ocupa un lugar especial, de privilegio. Cualquier situación –fruto de una observación o consecuencia de un principio– en la que una entidad matemática es invariante frente a un cambio denota una simetría.

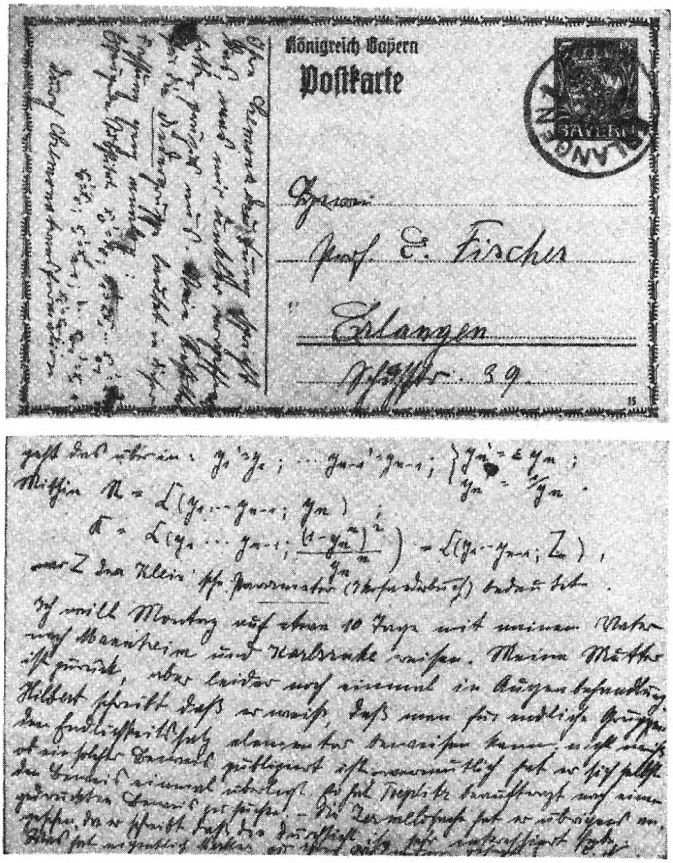
Simetría, simetría, tienes nombre de mujer

Amalie Emmy Noether (1882-1935) tuvo que luchar toda su vida contra el prejuicio, dominante en su época, de que una mujer, por inteligente que fuera, no podía tener cabida en la profesión científica, y que su puesto estaba en casa, cuidando de los niños. David Hilbert (1862-1943), el líder indiscutible de los matemáticos del momento, empleó mucho tiempo y empeñó todo su prestigio en conseguir que esta mujer, hija por otra parte de un distinguido colega, Max Noether, ocupara un puesto profesoral en la Universidad de Gotinga. Se trasladó allí en 1915 y hasta 1923 no consiguió un nombramiento no oficial de profesora asociada, y no digamos lo que le costó cobrar por su trabajo, porque pertenece al reino de lo inverosímil. Nunca le hicieron caso y nunca Noether, a pesar de su lugar indiscutido como la primera

figura femenina de la matemática mundial, pudo acceder a una plaza adecuada entre sus contemporáneos. En 1930 se dio la situación paradójica, más bien ridícula, de que su alumno Hermann Weyl fuera nombrado catedrático mientras ella era una simple profesora. Los prejuicios pasaron impertérritos por delante de lo grotesco de la situación.

Retrato de A. Emmy Noether. Albert Einstein y muchos otros científicos la consideraban la mujer más importante en la historia de las matemáticas. Probó el fundamental teorema de invariancia y creó la moderna teoría de ideales, profundizando cada vez más en los misterios del álgebra moderna.

Cuando la estupidez nazi empezó a centrifugar científicos al extranjero por el terrible delito de ser de ascendencia judía, Noether pudo emigrar a Estados Unidos. Sin embargo, allí tuvo que conformarse con un puesto en el Bryn Mawr College, un centro educativo femenino, a pesar de que por su valía debería haber sido acogida en Princeton, como Einstein, Gödel o Von Neumann. Emmy dio clases junto a ellos, pero fue siempre como visitante invitada, no como miembro del Institute for Advanced Study. Eran, desde luego, otros tiempos.



Emmy Noether aprovechaba incluso las postales para anotar sus reflexiones matemáticas, como muestra este mensaje enviado en 1915 a su amigo, el profesor Ernst Fischer.

La aportación de Noether a la simetría es su importante teorema de invariancia, un resultado sorprendente. El teorema de Noether dice que, en física, toda fórmula matemática simétrica equivale a la existencia de una entidad física invariante. Y viceversa.

La demostración algebraica de este teorema es difícil, larga y compleja. Pero es asombrosa, lo mismo como razonamiento que como resultado. Ha sido calificado como «uno de los teoremas más importantes jamás probados» y merece todos los elogios que quieran dedicársele. He aquí, a modo de ejemplo, una corta relación formada por la pareja simetría-invariante/conservación que resulta del teorema de Noether:

Invariante	Entidad física conservada
Traslación temporal	Energía
Traslación espacial	Momento lineal
Rotación espacial	Momento angular
CTP	Producto de paridades
$U(1)$	Carga eléctrica
$U(2)$	Fuerza electrodébil
$SU(2)$	Isospin
$SU(3)$	Color del quark
$U(1) \times SU(2) \times SU(3)$	Modelo estándar de la física cuántica

La simetría designada por las siglas *CPT* se refiere, con una cierta aproximación, a la estructura del universo en el que nos movemos; la carga de las partículas materiales que lo forman puede ser positiva o negativa, y eso configura la conjugación de carga *C*; el espacio puede ser el actual o su imagen inversa en un espejo imaginario, y eso define la inversión de coordenadas o transformación de paridad *P*; y el tiempo puede avanzar o retroceder, y a eso se refiere la inversión temporal *T*. Cada término puede valer $+1$ o -1, según sea la paridad, y lo que especifica el teorema es que se conserva el producto de las paridades.

La simetría en la teoría cuántica

Los grupos de Lie que aparecen al final de la breve tabla anterior son simetrías *gauge*, término habitual en los textos universitarios pero que requiere moverse con soltura en el mundo de la física superior. Hermann Weyl emprendió en 1918 el estudio de una simetría física que denominó simetría *gauge* o simetría de medida, y que ligaba, con la ayuda de la teoría de grupos, al electromagnetismo y la gravedad; no obstante, su intento de considerar los dos campos como propiedades geométricas del espacio-tiempo no pasó de un voluntarioso intento, pero el concepto ya había nacido.

La forma más precisa para definir una simetría *gauge* es la puramente matemática; imaginen una teoría física que se sustenta en la utilización de campos, como el electromagnético o el gravitatorio, y supongamos que existe una serie de transformaciones que forman un grupo *G*, el grupo que llamaremos *gauge*. La teoría es una teoría *gauge* con grupo *gauge* *G* cuando el lagrangiano del campo es un invariante de *G*.

Ahora bien, eso es muy preciso pero también puede ser incomprensible para el no iniciado. Para facilitar su asimilación es necesario un paso previo: definir ciertas partículas elementales, componentes de la materia, que los físicos denominan fermiones; deben su nombre al Premio Nobel Enrico Fermi (1901-1954) y se caracterizan por tener *spin* fraccionario.

Tras esta escueta definición se esconden entidades como los quarks (que son doce si se cuentan sus antipartículas y seis si no se cuentan, y que responden a los divertidos nombres de quark arriba, quark abajo, quark encantado, quark extraño, quark cima y quark fondo) y los leptones (que son seis, además de sus seis antipar-

HERMANN WEYL (1885-1955)

Hermann Weyl fue una de las grandes mentes del siglo XX, y su legado no se limitó a las matemáticas o a la física, pues también fue un escritor magnífico, en una vertiente más filosófica que divulgadora. Ejerció una gran influencia, al idear un buen número de conceptos nuevos y abrir incansablemente nuevas vías de investigación.

Nacido en Hamburgo, estudió en la Universidad de Gotinga junto a luminarias físico-matemáticas como Hilbert y Minkowski (1864-1909). Dominaba con autoridad casi todos los campos de la matemática, y sus intereses lo califican como «sabio universal». Tuvo la oportunidad de conocer y trabajar con Einstein y Schrödinger y no lo desaprovechó, convirtiéndose en una autoridad en la teoría de la relatividad; luego, como les sucedería a otros muchos científicos, la absurda presión nazi le hizo emigrar a Estados Unidos, donde se integró en una institución tan prestigiosa como el Institute of Advanced Study de Princeton.

Estudió las variedades de Riemann, inventó las simetrías *gauge* –aunque su aplicación resultó fallida–, armonizó las bases de la teoría cuántica con la física clásica, siempre teniendo presentes los grupos, y escribió y meditó abundantemente sobre los fundamentos de las matemáticas. También realizó incursiones importantes en otros terrenos matemáticos, como el análisis armónico. Sus reflexiones filosóficas, centradas sobre todo en la física y la naturaleza de las matemáticas, están recogidas en varios libros.

tículas, y aunque los nombres no sean enteramente correctos, se cuentan entre ellos el electrón, el positrón, el muón, el tauón y el neutrino). Pues bien, imaginemos una teoría cuántica de fermiones que explica las interacciones entre ellos como transformaciones locales de un grupo G. Al grupo se le llama *gauge,* y la teoría es una teoría *gauge*. Resumiendo mucho y en pocas palabras, cuando se habla de una teoría *gauge* es que hay un grupo de simetría entre partículas. Las matemáticas que hay tras todo ello son, sobre todo, las de la geometría diferencial.

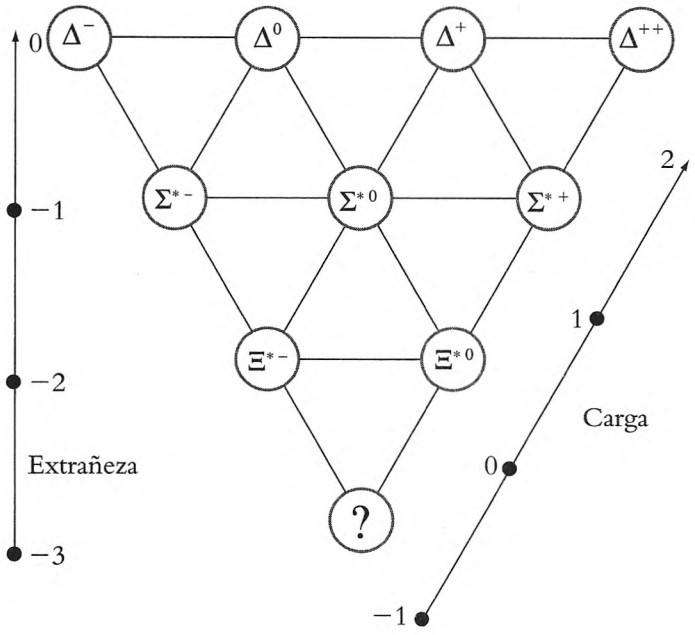
Otro modo, quizá menos agresivo de acercarse al concepto *gauge*, es volver a los orígenes: una teoría de un campo es de simetría *gauge* cuando distintas configuraciones del mismo campo –inducidas por la acción sobre las matemáticas del campo por un grupo de simetría (al que llamaremos *gauge*)– dan medidas observables idénticas. Así, se pone de relieve tanto la palabra «invariancia» como la palabra «medida».

La simetría *gauge* posee una gran complejidad, puesto que en ella intervienen los números complejos (pues en física cuántica son los dueños y señores), las derivadas parciales y de integrales curvilíneas, unos objetos algebraicos llamados álgebras de Lie (ligadas a los grupos de Lie), el cálculo matricial, las matrices infinitas y unos entes denominados conmutadores que llevan a desigualdades del tipo

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

para una partícula de posición media x y momento medio p, donde h tiene un valor constante numérico universal, llamado cuanto de acción de Planck. Esta fórmula ostenta el reverenciado nombre de «principio de indeterminación de Heisenberg», por el cual es *imposible* conocer *a la vez* cómo se mueve y dónde está una partícula.

La comprensión de las teorías *gauge* en física cuántica no es fácil, pero si no demuestra nadie de modo sorpresivo que son falsas, han predicho ya demasiadas cosas acertadamente para sustituirlas por otras. Esto se puso dramáticamente de manifiesto con la historia, ya célebre, del Premio Nobel Murray Gell-Mann (n. 1929) y de la partícula Ω^-. En la década de 1960 Gell-Mann y el político, militar y ministro israelí Yuval Ne'eman (1925-2006), en el curso de sus investigaciones sobre los hadrones (un tipo de partícula subatómica), observaron que muchas partículas se ordenaban en grupos muy elegantes si se atendía a varios «números» o cantidades cuánticas, como la extrañeza, la carga y el *spin,* de manera que se obtenían bellas estructuras, como la que muestra la figura siguiente:

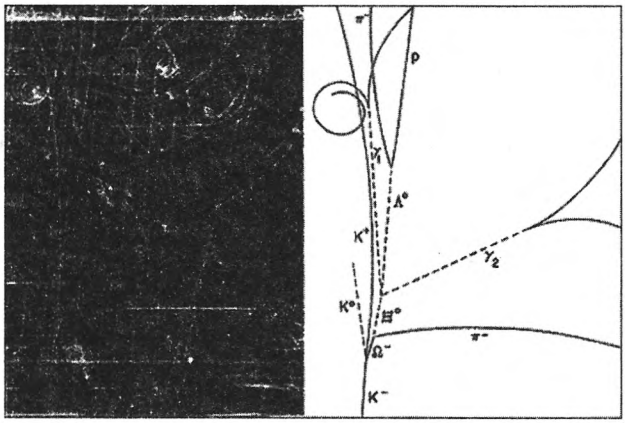


Si se ponen las partículas en un par de ejes de coordenadas (ordenadas y abscisas indican las magnitudes consideradas en el dibujo), Gell-Mann pensó que abajo había un hueco, que faltaba algo; y sí, faltaba Ω^-. *La buscaron, y Brookhaven la halló.*

Está claro (está claro ahora, no entonces) que aquí hay un hueco; Gell-Mann y Nee'man postularon la existencia de una partícula que llenara el hueco, un poco a la manera de lo que hizo Mendeleiev un siglo antes con su tabla periódica. El grupo de Lie que sustentaba esta teoría *gauge* era *SU*(3) y en 1964 se descubrió, en efecto, la partícula Ω^-. Se coronaba así *SU*(3) y todo encajaba.

SPIN

En los tiempos heroicos de la física, las partículas elementales fueron dotadas de núcleo y órbitas, convirtiendo los átomos en sistemas solares en miniatura. En dicho contexto se creó el concepto alegórico de *spin* para describir el movimiento de rotación –o mejor, el momento angular– de algunas partículas al girar sobre sí mismas. La mecánica cuántica actual considera el *spin* como un número cuántico más. Aquellas partículas elementales que presentan *spin* entero se denominan bosones. Las que tienen *spin* fraccionario se llaman fermiones.



A la izquierda, la primera muestra, realizada por una cámara de burbujas en 1964 en Brookhaven (Rochester, Estados Unidos), de la existencia de la elusiva partícula Ω^-. A la derecha, un esquema identifica las trayectorias y los rastros de partículas dejados por los sucesivos impactos y desintegraciones espontáneas que se producen.

Sólo que, ¿por qué precisamente aparecía *SU*(3)? Una década después, en los años setenta, se daba por solucionado el enigma al admitir que cada hadrón está formado por tres partículas más pequeñas, tres de entre los quarks. La aparición de *SU*(3) no era, pues, un capricho del guionista.

La supersimetría

Las fuerzas que gobiernan la naturaleza son cuatro, y todas ellas están hoy en día irreprochablemente matematizadas en forma vectorial como teorías de campos. Simplificando mucho, podemos reducir a cuatro los campos descriptivos de lo que nos rodea: el campo gravitatorio, el electromagnético, la interacción débil y la fuerte.

Las dos primeras fuerzas no necesitan explicación, pues son harto conocidas. Las otras están siempre presentes en lo más íntimo de nosotros, pues son fuerzas que actúan en nuestros átomos.

La llamada fuerza débil se debe al intercambio de los bosones (partículas elementales sin *spin*) W y Z y tiene magnitud del orden 10^{-11}. Como la otra fuerza, la que mantiene unidos a protones y neutrones, es unas 10^5 veces más potente, se la denomina fuerza fuerte. Es realmente fuerte, pues equivale a unas 100 veces la electromagnética y unas 10^{39} veces la de gravitación. Realmente, nuestros átomos están bien seguros y cuesta bastante separar a sus componentes. Esta energía también hace posible el tremendo poder destructor de las bombas H, pero esa ya es otra historia.

Lo que se denomina como modelo estándar da una explicación matemática conjunta bastante satisfactoria de los tres últimos campos, unificándolos en una sola teoría. En su formulación final intervinieron Sheldon Glashow (n. 1932), Steven Weinberg (n. 1933) y Abdus Salam (1926-1996), Premios Nobel de Física en 1979.

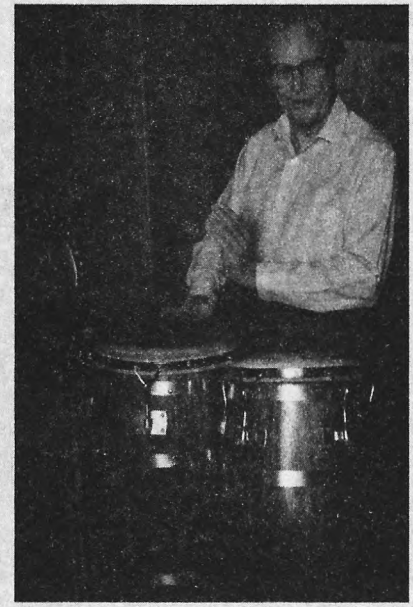
MURRAY GELL-MANN (n. 1929)

Físico norteamericano –y además, niño prodigio–, la aportación más conocida de Murray Gell-Mann es la introducción en el mundo de las partículas del modelo de los quark. En 1969, su trabajo en este campo le hizo merecedor de un Premio Nobel. Hombre de vasta e indefinible cultura, extrajo la palabra *quark* de un fragmento de la novela de James Joyce *Finnegans Wake.* Pero ésta no sería su única experiencia bautizando cosas, pues ya un poco antes se apercibió de que las partículas subatómicas podían organizarse en grupos de ocho (y de diez) y designó tal mecanismo como *Eigthfold Way (octava vía),* trazando una analogía con la denominada «noble octava vía» del budismo. Una interpretación posterior nos dice que en el trasfondo de tal juego místico-físico estaban *SU*(3), la simetría y la teoría de grupos.

Aunque todo lo anterior ya hubiera bastado para consagrar su figura, Gell-Mann realizó muchas más aportaciones; una de sus primeras incursiones en el universo de las partículas elementales fue el descubrimiento de un nuevo «número» cuántico, la extrañeza. En 1972 dio a conocer –en colaboración con Harald Fritzsch (n. 1943) y Heinrich Leutwyler (n. 1938)– la formulación, todavía vigente, de la cromodinámica cuántica. También trabajó conjuntamente con otra *prima donna* de la física cuántica, Richard Feynman, en la estructura vectorial de la interacción débil. Una de sus obras es *The Quark and the Jaguar*, un libro de divulgación sobre la complejidad.

Murray Gell-Mann (a la derecha) en el momento de recibir el Premio Nobel de manos del monarca Gustavo VI el 10 de diciembre de 1969.

RICHARD FEYNMAN (1918-1988)



Feynman fue un sabio inhabitual, diferente. Pocos físicos, y menos los muy importantes, tienen oportunidad de aparecer como estrellas de la televisión, y menos aún de ser mencionados en las enciclopedias por su afición a tocar los bongos, pero Feynman consiguió ambas cosas. Su vida es como una novela, y ha sido publicitada en diversos libros de su propia autoría. Feynman fue un gran comunicador, un maestro de la enseñanza y un científico del tipo inconformista, de los que se hacen y hacen toda clase de preguntas, en ocasiones muy incómodas y muchas veces originales.

Su carrera científica se inició en un lugar tan legendario como la estación nuclear y laboratorio de Los Álamos, sede del proyecto Manhattan para construir la bomba atómica, donde ingresó muy joven y en el curso de cuya estancia perdió a su primera esposa. Daremos una idea de su carácter explicando que distraía sus ocios reventando códigos de cajas de caudales y dejando notas en su interior.

Se implicó con dedicación en la física cuántica, en la que invirtió buena parte de su vida y de su intelecto. Se le concedió el Premio Nobel en 1965 por sus estudios sobre la renormalización y la cromodinámica cuántica. Es célebre en las facultades por su invención de los diagramas de Feynman, artilugios gráficos auxiliares de inestimable ayuda en las investigaciones de la física de partículas. Estudió también la superconductividad, la interacción débil –con Murray Gell-Mann–, los computadores cuánticos y la nanotecnología. Su mayor momento de gloria pública lo obtuvo como miembro de la comisión examinadora de la catástrofe del vehículo espacial *Challenger*, que se desintegró en la atmósfera en 1986 tras el despegue. Ante las cámaras y usando sólo un recipiente de agua fría y materiales de construcción, Feynman puso en evidencia que el fallo del transbordador *Challenger* era atribuible a la fatiga de ciertos materiales sometidos a baja temperatura, tesis que finalmente se mantuvo.

Nunca le importó compartir sus investigaciones, aunque es conocido que su listón era muy alto. Cuando se le informó de que padecía una enfermedad incurable, eligió morir con dignidad y renunció a ser tratado.

La teoría que consiguió unificar las tres fuerzas se ganó el derecho a denominarse teoría GUT, siglas de Grand Unified Theory (o «gran teoría unificada») que también designan la palabra «intestino», la forma edulcorada de referirse a órganos internos íntimos y relacionados popularmente con el atrevimiento y la voluntad.

Steven Weinberg, uno de los tres pensadores que idearon la «gran teoría unificada».

El grupo *gauge*, alrededor del cual se intercambian simétricamente las partículas elementales del modelo estándar, es $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Fue elaborado sobre todo en la década de 1970 y describe las interacciones entre las diferentes partículas que forman la materia. Pero no hay nada sencillo en el universo, y el modelo estándar no es una excepción. A muchos físicos no les parece del todo satisfactorio, y algunas lagunas –por ejemplo, y sin pretender ser exhaustivos, ¿por qué hay mucha materia a mano y poca antimateria?– de dicho modelo han dado pie a suponer que quizás hay alguna simetría mayor que engloba a la del modelo estándar y que podría dar respuesta a algunas incorrecciones. Y de este modo nació la supersimetría.

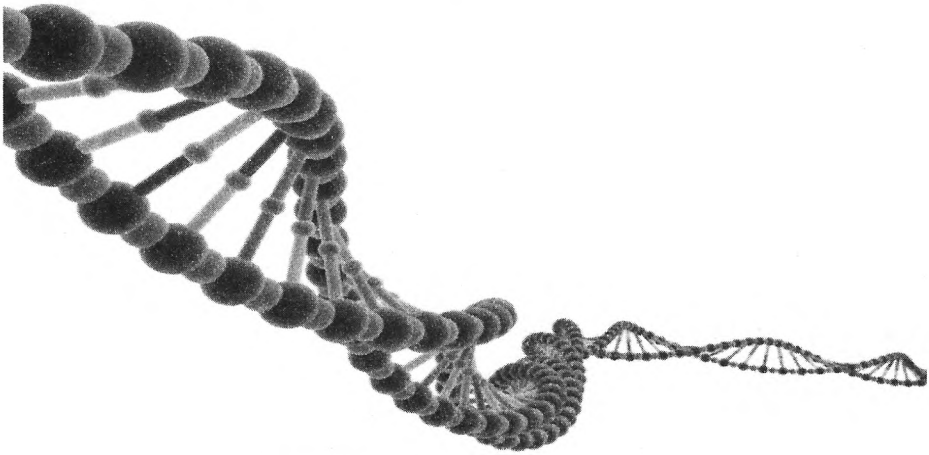
Es probable que para quitarle hierro a la magnitud de la teoría es por lo que ha terminado siendo denominada por el acrónimo SUSY (SUperSYmmetry), que parece reconvertirla en algo más frágil y cercano. La base sobre la que reposa es la incompletitud que respira la simetría, o lo que es lo mismo, el modelo estándar. De acuerdo con que dicho modelo une tres fuerzas, pero lo hace de un modo que no se considera que lo haga a gusto de todos. La supersimetría postula para cada partícula dotada de *spin* una partícula simétrica, la llamada *spartícula*. Cuando los cada día más potentes aceleradores de partículas logren reproducir condiciones más próximas cada vez al Big Bang, se supone que las spartículas irán haciendo su aparición.

A lo más que se ha llegado, de momento, es a armonizar en una sola teoría tres fuerzas básicas; cuando se ha intentado unir la gravedad a las tres anteriores, se ha fracasado. En expresión afortunada de ciertos expertos, el campo gravitatorio y los campos del modelo estándar son como niños que juegan juntos pero no terminan de hacerse amigos; se intenta una y otra vez, pero no hay manera. Perseguimos, pues, una *Theory of Everything* («teoría de todo») que incluya también el campo gravitatorio, llámese teoría de cuerdas (hay varias de ellas) o la de Antony Garrett Lisi (que recurre al grupo E_8 como estrella). Quizá la supersimetría forme parte de este gigantesco edificio. Se necesitarán abundantes GUTs y numerosas neuronas para levantarlo.

Una corta excursión por la biología y la química

La excursión a través de este mundo puede ser tan larga como se quiera, pues hay muchos pretextos para detenerse y recrearse con las manifestaciones naturales de la simetría, tantos como publicaciones y webs dedicadas al tema.

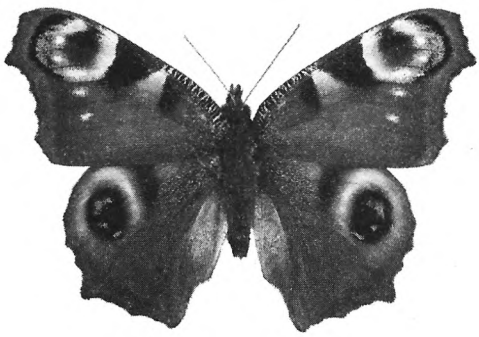
Quizá la aparición más espectacular de la simetría en los últimos tiempos haya sido la doble hélice del ADN, una estructura introducida en nuestra cultura general por James Watson (n. 1928) y Francis Crick (1916-2004), y que se ha convertido en un icono del progreso de la humanidad.



Representación de la doble hélice del ADN.

Ahora bien, en el campo biológico hay cientos de ejemplos de procesos, pautas y formas en los que la simetría deja su huella, muchas veces de modo subrepticio. Aquí daremos tan sólo unos poco ejemplos. Así, el narval acostumbra a tener un solo diente

(no un cuerno) que muestra un característico arrollamiento en espiral; no obstante, algún ejemplar presenta dos. Pero, eso sí, cuando hay dos, ambos son hélices de simetría izquierda. Por su parte, la superficie del adenovirus, un virus corriente, es icosaedral y admite una simetría básica. Los cuernos del muflón del Pamir siguen una simetría helicoidal y son enantiomorfos uno del otro. Se podría pensar que las abejas son ilustres geómetras, y hoy en día se sigue buscando el mecanismo que las impulsa a construir tan geométricamente sus panales, formados por perfectas celdas hexagonales.



Una mariposa, ejemplo perfecto de simetría bilateral... ¿o de etología en acción?

MÚSICA SIMÉTRICA

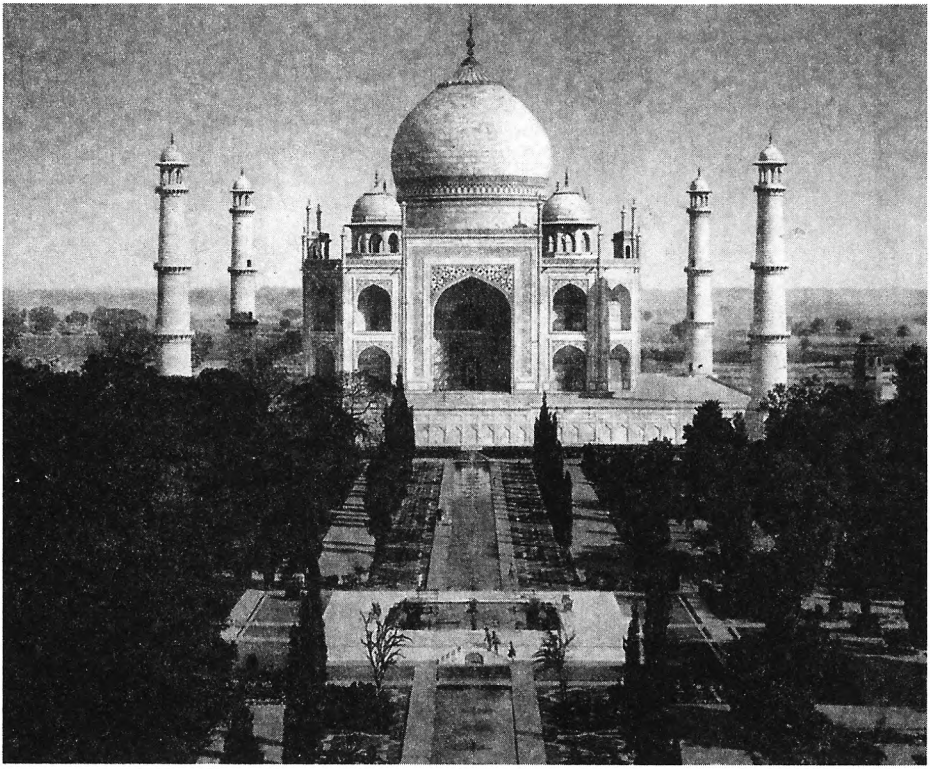
Puede hablarse largo y tendido acerca de la mucha o escasa influencia de la simetría en la música, pero aquí mencionaremos sólo alguna curiosidad músico-simétrica; por ejemplo, compositores como Bach, en *El arte de la fuga*, y Mozart dieron a luz piezas con simetría evidente. Un ejemplo accesible a todos es el caso de esta partitura mozartiana, que es interpretada al unísono por dos violines, el uno leyendo al derecho y el otro del revés.

Partitura de la composición de Mozart titulada Der Spiegel (El espejo).

En el campo de la química, la quiralidad es la reina. Las moléculas tienen una simetría en función de la ubicación de sus átomos, y en función de esa quiralidad tienen específicas propiedades ópticas y de otros tipos. Como es sabido, sólo las moléculas de quiralidad zurda forman el cuerpo humano, y sería temerario (la ingesta de talidomida es un ejemplo bien conocido) ignorar tal circunstancia.

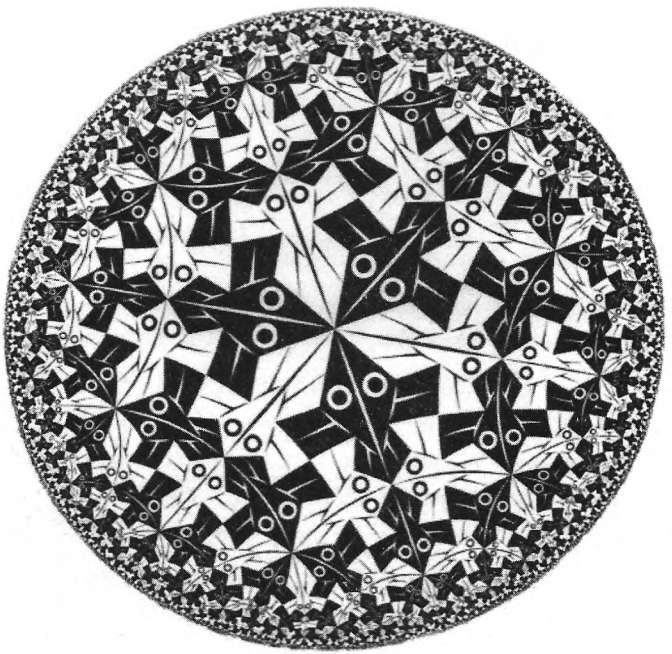
Escher y otras obras de arte

En lo que se acostumbra a llamar arte, y concretamente en el terreno de las artes plásticas, el papel y la importancia de la simetría, en especial en tiempos pasados, ofrece numerosos ejemplos. Desde los rosetones y las nervaduras de los techos de las catedrales góticas hasta el Atomium de Bruselas, una gigantesca estructura de algo más de 100 metros de altura, construida para la Exposición de 1958 que muestra la estructura molecular cúbica centrada de un cristal de hierro.



El Taj Mahal, prototipo de la simetría arquitectónica, según un fotocromo realizado a fines del siglo XIX.

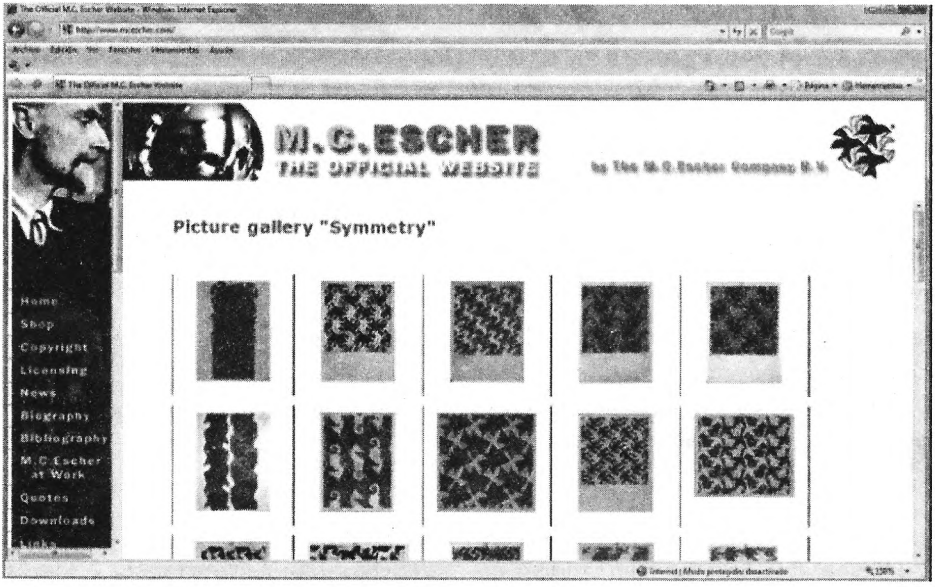
No nos detendremos en este ámbito, que es objeto de numerosos estudios específicos. Pero sí haremos una breve mención a un autor cuyas obras reflejan de un modo a veces inquietante, sorprendente siempre, una visión de la simetría que no deja indiferente. Se trata de Maurits Cornelius Escher (1898-1972), dibujante y grabador holandés, que dedicó sus habilidades artísticas al estudio de la simetría, las teselaciones, los poliedros, las construcciones imposibles y otros temas de inconfundible sello matemático. De hecho, Escher se sentía más próximo a los matemáticos que a sus colegas artistas. Conocedor desde la década de 1920 de los esquemas ornamentales de la Alhambra y otros lugares, en sus diseños Escher incluyó ejemplos de los 17 grupos de simetría planos y estudió con posterioridad cómo combinar geométricamente el color, la forma y la simetría para unificar de algún modo matemáticas y arte. Tan famoso llegó a hacerse Escher, que incluso un asteroide se bautizó con su apellido.



Una de las imposibles simetrías ideadas por Maurits Cornelius Escher.

Junto a la aquí reproducida, otras obras famosas de Escher son *Drawing Hands (Manos dibujantes)*, que corresponde a una imagen simétrica y autorreferencial, con la mano del artista dibujándose a sí misma; *Möbius strip II*, con sus hormigas recorriendo

incansablemente una cinta de Möbius, de una sola cara; *Hand with Reflecting Sphere (Mano con esfera reflectante)*, que reproduce la reflexión en un espejo esférico; o la serie de grabados *Circle Limit*, dedicada a las misteriosas simetrías hiperbólicas. Según su amigo H.S.M. Coxeter, el dibujante alcanzó aquí la perfección en su arte: «Escher –manifestó el matemático– lo hizo por instinto; yo lo hice por trigonometría».



En la página http://www.mcescher.com, dedicada a Maurits Cornelius Escher, se puede encontrar abundante información sobre la obra de este artista.

Escher dedicó muchos trabajos a estudiar lo que aparentan ser teselaciones muy simples hasta que se aprecia que teselar con entrantes y salientes, como los que aparecen en algunas de sus obras, no es tan fácil como parece. Al menos no se lo pareció a Conway, que encontró un criterio para definir cuándo una pieza teselaba y cuándo no. Conway nos ha enseñado una condición necesaria y suficiente para que el plano se nos llene sin huecos entre las figuras, pero no nos ha enseñado cómo se le ocurre a uno. A Escher sí que se le ocurrió, y eso que no conocía los trabajos de Conway.

Anexo

Los grupos de Lie

Recordemos que un grupo de Lie es una variedad diferenciable (en su forma de presentación más asequible, piense el lector en una superficie diferenciable, lisa, sin pliegues o patologías extrañas, como la superficie de una esfera, una hélice o un donut) cuyos elementos, además, forman un grupo cuyas operaciones son también diferenciables.

Las matemáticas proporcionan muchos ejemplos llamémosles «normales» de grupos de Lie. Uno muy sencillo es la circunferencia, que caracterizaremos como de radio 1 porque todo otro grupo de radio r es isomorfo a éste. Pensemos en el subconjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ formado por aquellos de módulo 1, es decir, de longitud 1, que cumplen $|z| = 1$ (recordemos que si $z = x + iy$, el módulo de z, que se acostumbra a indicar con la grafía $|z|$, es el número $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Llamemos S^1 a tal conjunto de puntos, que no es otro que la circunferencia de radio unitario,

$$S^1 = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Resulta que S^1 es también un grupo con la operación multiplicación. En efecto, la operación es interna, pues, para cualesquiera números complejos, $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$ y, por tanto, si los dos complejos z_1 y z_2 son de módulo o longitud 1, también lo es su producto.

Probemos que $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$, y escribamos para ello $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$.

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} =$$

$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + 2abcd} =$$

$$= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = |(ac - bd) + (ad + bc)i| = |(a + ib)(c + id)| = |z_1 \cdot z_2|.$$

Si $z = x + iy$, se tiene, haciendo unos pocos cálculos aritméticos, que

$$1/z = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

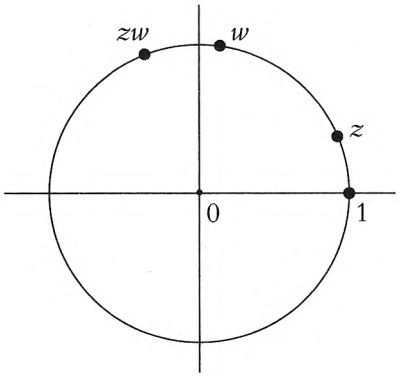
y poco cuesta comprobar que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \in S^1.$$

Si acudimos a la aritmética elemental, comprobamos que

$$\left|z^{-1}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i\right| = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

Las otras condiciones de grupo son fáciles de ver. El elemento neutro es el número 1 ($1 = 1 + i0$). De manera que si se multiplican dos números complejos, z y w, de módulo 1, el resultado es otro número complejo, zw, también de módulo 1.



Cuando dos puntos de la circunferencia se multiplican, dan otro punto de la circunferencia. Ya tenemos un ejemplo de grupo de Lie sencillo, al que añadiremos unos cuantos más.

Para hablar con comodidad de grupos de Lie, hay que recurrir al álgebra de matrices; una matriz es, para entendernos, una simple tabla rectangular, muchas veces cuadrada, cuyos números pueden sumarse o multiplicarse.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ y

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

con $d_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{n1}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Hay conjuntos de matrices que forman grupo –a veces abeliano, otras no– con la opción + o con la operación ·. En el primer caso –operación aditiva– es fácil probar que el elemento neutro es la matriz «cero».

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz opuesta a la A es la llamada $-A$.

$$A+(-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = -A + A = 0.$$

Para el cálculo de las inversas basta con saber que la matriz identidad para la operación · es la matriz que tiene 1 en la diagonal y 0 en el resto de posiciones.

EL CLAN DE LOS CARTAN

Los Cartan, padre e hijo, fueron notables matemáticos franceses, y ambos dedicaron muchos esfuerzos a la teoría de grupos. Élie Cartan (1869-1951) era de origen muy humilde, y es la perfecta imagen del hombre hecho a sí mismo. Surgió casi de la miseria y falleció como profesor emérito, respetado por todos, doctor *honoris causa* de muchas universidades y con una reputación y prestigio crecientes en su profesión. Toda su vida la dedicó al estudio de la geometría diferencial, en particular a los grupos y álgebras de Lie. Empezó su labor basándose en los primeros balbuceos de los trabajos de Wilhelm Killing (1847-1923), y convirtió los grupos de Lie en materia de interés de primerísima clase. En 1913 ideó los espinores (en inglés, *spinors*), un concepto matemático de generalización de los vectores, destinado a hacer una gran carrera en física.

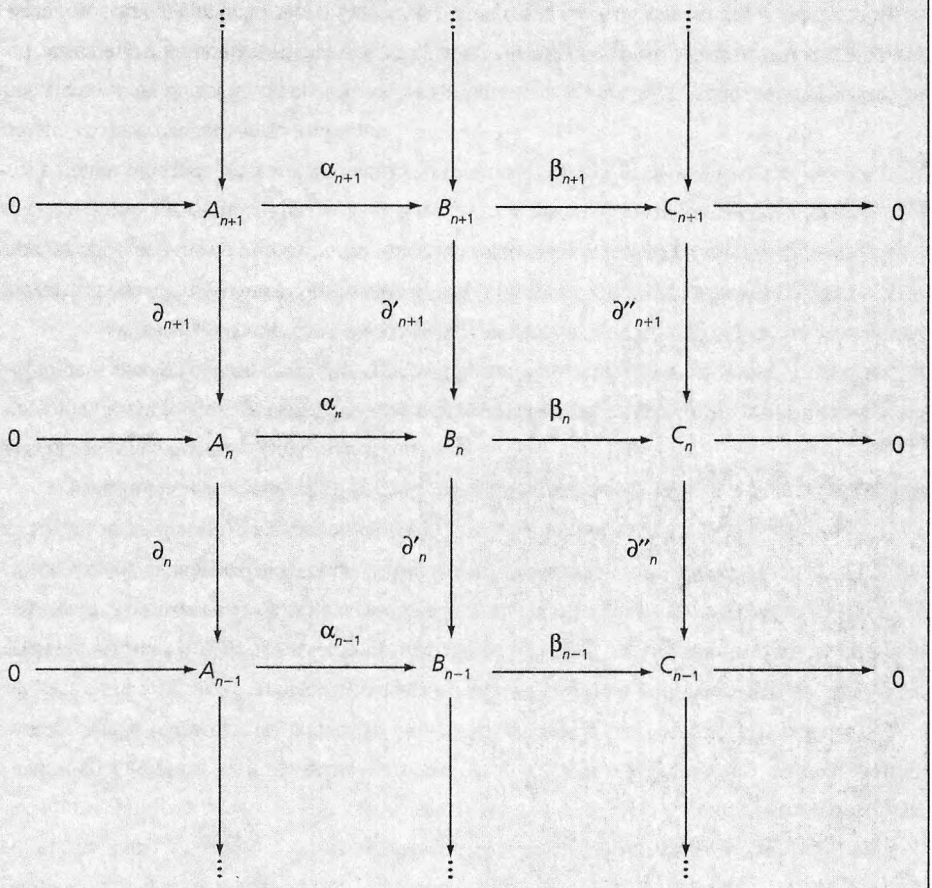
En el curso de la Segunda Guerra mundial, los nazis decapitaron a uno de sus hijos, acusado de pertenecer a la Resistencia, lo que unido a la muerte prematura de otro le sumió en la tristeza y el desánimo. Por fortuna, su hijo varón restante, Henri, le daría todo tipo de alegrías.

Henri Cartan (1904-2008) heredó las dotes intelectuales paternas. Se dedicó a las matemáticas por voluntad propia, no por imposición de su padre, e incluso escribió algún artículo con él. Su nivel científico era muy alto, por lo que se convirtió en un especialista inigualable en funciones complejas, las cuales le llevaron a la consideración de las variedades y al terreno del álgebra homológica, una abstracta rama algebraica de desarrollo muy pujante. A pesar de la tragedia personal de ver a los nazis asesinar a un hermano, Cartan actuó en la posguerra como puente entre los matemáticos franceses y alemanes. Esta actitud humanitaria no le abandonaría jamás, y sus luchas contra los regímenes totalitarios emprendidas para liberar a compañeros de profesión como Plyusch o Massera, son casi una leyenda.

Élie Cartan en una fotografía realizada en 1903.

A finales de la década de 1950 inició sus viajes a Estados Unidos, donde se encontró con Samuel Eilenberg (1913-1998); fruto de su amistad fue la creación conjunta y la publicación del libro *Homological Algebra,* que marcó

una época. Pocas veces algo tan difícil ha dejado una huella tan profunda y originado tantas investigaciones y trabajos nuevos.



Un típico esquema de álgebra homológica. El texto de Cartan y Eilenberg es tan abstruso, denso e intimidatorio –pero bello– que los entendidos denominaron «el diplodocus».

La lista de honores y doctorados *honoris causa* recibidos por Henri en su edad madura superan incluso en número a los que recibió su padre. Como curiosidad también debe mencionarse que Henri Cartan tuvo asimismo un papel destacado en la gestación y desarrollo de la obra de Nicolas Bourbaki, el matemático que nunca existió.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

En cuanto a los componentes de filas y columnas de la matriz inversa, A^{-1}, hay que resolver un sistema de n^2 ecuaciones lineales cuyas soluciones, b_{ij}, dependen de las condiciones iniciales:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \text{ con } c_{ij} = 1 \text{ si } i = j, c_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

A veces se puede resolver el sistema, y a veces, no.

Las matrices fueron introducidas por Cayley, tras varias tentativas previas de otros científicos, y son un auxiliar de escritura inapreciable para los algebristas.

La virtud de las matrices es que nos permitirán hablar de varios grupos de Lie con comodidad. Por ejemplo, las matrices de números reales:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $ad\text{-}bc \neq 0$, es decir, con determinante no nulo, es un grupo de Lie. Se le llama $GL_2(\mathbb{R})$, en atención al tamaño de las matrices. Con n filas y columnas se convierte en el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$. Un subgrupo de éste es $SL_n(\mathbb{R})$, el grupo especial lineal, que se distingue por tener matrices de determinante 1.

Un grupo importante es $O_n(\mathbb{R})$, el grupo de matrices de números reales ortogonales (tienen determinante igual a $\pm$ 1); un subgrupo de éste es el $SO_n(\mathbb{R})$, que tienen determinante 1 y comprenden las rotaciones.

Con $SO_2(\mathbb{R})$ se obtienen las matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R}$$

descriptivas de los giros en el plano.

Un grupo de Lie de gran importancia en física es el denominado grupo unitario *U(n)*, formado por las matrices unitarias de n filas y n columnas en el campo de los números complejos. Para explicarlo de un modo comprensible, imaginen el espacio construido con complejos en lugar de números reales, y dotado de una métrica,

establecida a través de un producto escalar; las matrices unitarias son aquellas que describen isometrías, es decir, transformaciones que conservan la distancia. Las matrices de determinante 1 forman un subgrupo, *SU(n)*, el subgrupo especial unitario.

No es difícil comprobar, por ejemplo, que

$$S^1 \cong U(1) \cong SO_2(\mathbb{R}).$$

Precisamente, el grupo producto $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ es utilizado en física de partículas como grupo de simetrías *gauge* (llamadas a veces simetrías de recalibración o de medida) del modelo estándar.

Ligado a este grupo se encuentra el de Lie llamado E_8, un grupo de Lie infinito y esporádico de dimensión 278. A pesar de su enorme tamaño –cada elemento es una matriz cuadrada de 453.060 filas y columnas–, es en la actualidad objeto de investigación, ya que es un buen candidato para edificar una *teoría de todo*.

El grupo de Lorentz, un grupo de Lie muy utilizado en física superior, es un subgrupo del grupo de Poincaré. El grupo mayor es el grupo de todas las isometrías del espacio-tiempo relativista; el menor, que es hexadimensional, es el de aquellas isometrías que dejan fijo el origen.

Y hay otros muchos grupos de Lie, cada uno con su nombre y sus características; lo mejor será que lo dejemos aquí y que expliquemos cada grupo a medida que lo necesitemos.

Bibliografía

ARTIN, E., *La teoría de Galois*, Barcelona, Vicens-Vives, 1970.

CONWAY, J., BURGIEL, H., GOODMAN-STRAUSS, C., *The symmetry of things*, Natick, A.K. Peters Ltd., 2008.

CROMWELL, P., *Polyhedra*, Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

GARDNER, M., *El nuevo universo ambidiestro*, Barcelona, RBA, 1994.

HOORN, W.J. Van, WIERDA, T. (comp.), *Escher on Escher. Exploring the infinite.* Nueva York, Harry N. Abrams, 1989.

LEDERMAN, L.M., HILL, C.T., *La simetría y la belleza del universo*, Barcelona, Tusquets, 2006.

LIVIO, M., *La ecuación jamás resuelta*, Barcelona, Ariel, 2005.

PLA I CARRERA, J., *Damunt les espatlles de gegants*, Facultat de Matemàtiques i Estadística, Universitat Politécnica de Catalunya, 2007.

SAUTOY, M. DE, *Simetría: un viaje por los patrones de la naturaleza*, Barcelona, Acantilado, 2009.

SLAVIK, J., *Theory of symmmetry and ornament*, Belgrado, Mathematical Institute, 1995.

STEWART, I., *Galois theory*, Londres, Chapman and Hall, 2003.

WEYL, H., *Symmetry*, Princeton, Princeton University Press, 1993.

Índice analítico

Abel, N. 29, 94-95, 128
algoritmo 89, 94, 106, 107, 127
Alhambra de Granada 117
antisimetría 131
aplicación 43, 62

Baby Monster 126
Bernoulli, J. 57
Borcherds, R. 126
botella de Klein 129
Bourbaki, grupo 79
Bravais, A. 111

Calabi-Yau, variedad de 71
calidoscopio 70, 78, 133
Cardano, G 10, 85-93
Cartan, É. 128, 152
Cartan, H. 152, 153
Cayley, A. 58, 59, 74, 154
clase lateral 48-52, 62, 63
combinatoria 88
conjunto 19-27, 32-35, 39-42, 104, 149, 151
convexo 23, 73, 77
Conway, J.H. 126-127, 148
Coxeter, H.S.M. 77-79, 148
cristalografía 78
cuadrado 21-22, 26, 33, 53, 92-93
cuanto de acción 138
cubo 58, 63, 73-76, 105-107

Del Ferro, S. 84-89
deslizamiento 16, 115
determinante 59, 154, 155
dextrógiro 66
dimensión 14, 16-24, 65-82, 102
dodecaedro 71, 73, 76, 109
domo geodésico 108, 109

ecuación 10, 47, 54, 83-104, 124
electromagnetismo 136
elemento
  inverso 26, 55
  neutro 20, 26, 55, 58, 150, 151
  opuesto 26, 42
enantiomorfo 10, 71, 81, 82, 145
epimorfismo 45-46
epiyección 45
Escher, M. 76, 78, 146-148
espiral 130, 145

factorial 56-57
Fedorov, E.S. 114, 118, 122
Feit, W. 123, 124
fermiones 137-139
Ferrari, L. 85, 90-91
Feynman, R. 141, 142
Fior, A.M. 86-87
Fourier, J. 98, 126
fractal 102, 130
friso 63, 113-118
Fuller, B. 107, 108
fullereno 107-110

Galois, É. 10, 83, 54, 96-104, 124
Gell-Mann, M. 138, 139, 141, 142

giro 14, 18, 23, 72, 73, 114-115
grado 14, 15, 83-91, 94, 103
gravedad 136, 144
Griess, R. 125
grupo 10, 25
  abeliano 9, 29-30, 47, 48, 58
  alternado 58, 64, 125
  cíclico 9, 29, 38, 40, 123, 125
  de Klein 32, 61, 103
  de Lie 15, 125, 127, 128, 130, 131, 149, 150, 152, 154, 155
  de Lorentz 130, 155
  de Poincaré 155
  diedral 9, 24, 29, 122
  especial lineal 64, 154
  esporádico 124-126, 154
  finito 9, 10, 26, 53, 54, 58, 60, 78
  general lineal 154
  horario 33
  infinito 10, 26, 33, 122, 125, 155
  puntual 29, 63, 111, 114, 118
  simétrico 54-59, 103, 104
  simple 64, 79, 123
  soluble 54, 58, 103
GUT 143, 144

hexaedro 71, 73, 76
Hölder, O. 102
homomorfismo 42

icosaedro 71, 73, 76, 109, 110
interacción
  débil 140-142
  fuerte 140
invariante 14, 18, 111, 122, 130, 133, 135, 136
isometría 14, 72, 73, 130, 131, 155
isomorfo 40-44, 52, 54, 58, 131, 149

Jordan, C. 102

Klein, F. 129, 130

Lagrange, J.-L. de 10, 27, 30-31
levógiro 66
Lewis Carroll 10, 65
Lie, S. 128
Liouville, J. 97, 99, 100, 102

matriz 150, 151, 154
modelo estándar 136, 141, 143, 144, 155
monomorfismo 42, 44, 45
Monstruo, el 64, 125, 126
Monstruous Moonshine, the 126
morfismo 39-46, 62, 63
mosaico 113-118, 121, 122
movimiento 14, 18-22, 32, 72, 106

Noether, A.E. 133-135
número
  complejo 85, 138, 149, 150, 154
  entero 26, 33, 34, 45, 48, 127
  racional 100, 101-104
  real 14, 26, 154

octaedro 71, 73, 75, 110
operación 19-21, 25-26, 32, 54
orden 9, 26-28, 35, 64, 79

palindrómico 10
Penrose, R. 121

permutación 54-58, 72, 101-104, 106
poliedro 9, 58, 71-79, 107-111
polígono 23, 24, 26, 63, 73, 119
polinomio 83, 84, 94, 101
politopo 77, 78
producto cartesiano 60
programa de Erlangen 129-130

quark 136, 137, 140, 141

radián 14, 15, 17, 18, 23, 87
radicación 95
red 108, 111-114, 118-119
reflexión 16, 18, 19, 33, 48, 72
rotación 16, 18-20, 28, 74, 106
rotorreflexión 72
Rubik, E. 105-106
Ruffini, P. 94

simetría
  axial 9, 10, 23, 114-115
  CTP 136
  gauge 136-139, 143, 155
  helicoidal 80-82, 145
sistema
  cristalino 112
  cúbico 112
  hexagonal 112
  monoclínico 112
  ortorrómbico 112
  romboédrico 112
  tetragonal 112
  triclínico 112
  trigonal 112
  sólido platónico 73
spin 136-140, 143, 152
subgrupo 26-28, 35, 63, 123, 154, 155
  normal 47-54, 58, 102, 104, 123
supersimetría 140, 143, 144

tabla 19-22, 27, 29, 32, 35
Tartaglia (Niccolò Fontana) 10, 84, 85-91
teoría
  cuántica 127, 128, 136-139, 141, 142
  de Galois 100-104
  de grafos 78
teselación 119-121, 147, 148
tetraedro 58, 71-74
Thompson, J.G. 79, 123, 124
Tits, J. 79, 128
torsión 18, 21, 58, 66, 67
transposición 57-58
traslación 14-16, 67, 68, 111, 136
triángulo 16-21, 26, 39, 87-88

Viète, F. 85, 91, 92, 94
Von Koch, H. 102

Weyl, H. 134, 136, 137