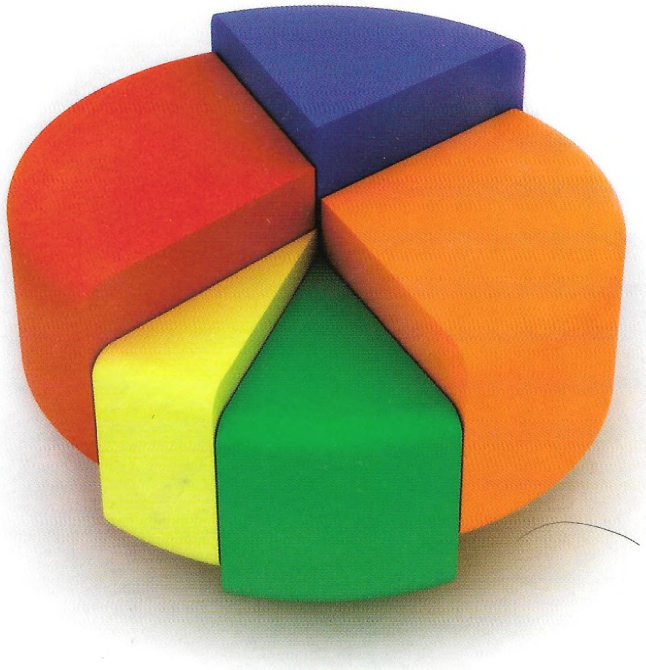
Hipotecas y ecuaciones

Las matemáticas de la economía

Lluís Artal - Josep Sales



El mundo es matemático

Hipotecas y ecuaciones

Las matemáticas de la economía

Buena parte de nuestro quehacer matemático diario está relacionado de un modo u otro con la economía: comparamos precios, calculamos la vuelta de la compra, interpretamos las noticias sobre la inflación o el paro... De hecho, es muy posible que contratar un préstamo o una hipoteca sea la decisión matemáticamente más compleja que tome un individuo cualquiera a lo largo de su vida. En este volumen se explican de forma amena y rigurosa las matemáticas que subyacen a la economía y las finanzas de personas y países.

Hipotecas y ecuaciones

Las matemáticas de la economía

Lluís Artal - Josep Sales

El mundo es matemático

© 2010, Lluís Artal y Josep Sales por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Babel, disseny i maquetació, S.L.
Créditos fotográficos: Corbis

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6969-0
Depósito legal: NA-1663-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. Historia del uso de los números en la economía 9
Sistemas de numeración. La necesidad humana de contar 9
Algoritmos de cálculo 17
Operaciones elementales: comercio y cálculo aritmético 18
Sistemas de medidas estándar 23
Matemáticas y teorías económicas 24
Aritmética política o el nacimiento de la estadística 26
Tablas demográficas: segundo nacimiento de la estadística 28

Capítulo 2. Dinero e inflación 31
Breve historia del dinero: del dinero mercancía al dinero fiduciario 31
Patrones monetarios, valor fiduciario y monedas de cuenta 32
Divisas y tipos de cambio: ¿por qué unas monedas valen más que otras? 34
Los algoritmos más sencillos y prácticos 37
El operador sigma 39
¿Cómo se mide la inflación? Tipos de índices 44
El tipo de interés: el coste del dinero 48
Los distintos tipos de interés de los bancos centrales: Euribor, Reserva Federal... 50

Capítulo 3. Banca y seguros. Préstamos y tipos de interés 53
Interés simple e interés compuesto 53
¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para duplicar el capital invertido? 56
Préstamos e hipotecas. ¿Cómo calcular la cuota de un préstamo?
Tipos de interés aplicados a los préstamos 58
¿Cómo se revisa mi hipoteca? ¿Cómo reducir la cuota de mis deudas? 62
Fundamentos del seguro. ¿Cómo se calcula la prima de mi seguro? 66
Estadística descriptiva 67

Capítulo 4. Producción y costes de producción. Rentabilidad de la inversión 69
Costes marginales y optimización del beneficio empresarial.
Punto óptimo de producción 69

¿Cómo y dónde colocar los ahorros? 78
Métodos de evaluación de inversiones 78
¿Cómo se determinan los salarios? 83
Inferencia de hipótesis en estadística laboral. Estudio sobre el desempleo 88
¿Es rentable fichar un crack o un deportista de élite? 92

Capítulo 5. ¿Cómo comprar al menor coste posible? El mercado 97
La oferta y la demanda 97
El papel del mercado en la formación de los precios. Teoría del equilibrio de mercado 100
Elasticidad de la demanda 105
El funcionamiento del mercado 107
Un estudio de mercado 111

Capítulo 6. Las matemáticas y la bolsa 117
Las bolsas y los mercados de valores 117
Análisis fundamental 121
Análisis técnico 125
¿Cómo se miden los rendimientos en la bolsa? 129
Correlación y regresión 132

Capítulo 7. Crecimiento y desarrollo 137
Renta nacional, ahorro, consumo e inversión. Producto Interior Bruto 137
La distribución de la producción por sectores económicos: las tablas input-output 141
Los ciclos económicos 143
¿Cómo se mide el bienestar de un país? Países ricos y países pobres 146
Indicadores de riqueza, desarrollo económico y desarrollo humano 151

Epílogo 153

Bibliografía 155

Índice analítico 157

Prefacio

La unión de las matemáticas con la economía nació de la necesidad humana de contar, la cual estaba intrínsecamente ligada desde un principio a la propia supervivencia. Se debía contar el número de miembros de la familia o del clan, o los alimentos de los que se disponía para subsistir. Cuando el clan acumulaba más alimentos de los necesarios, se tenía que saber contar para poder intercambiarlos por otros bienes con los pueblos vecinos. Desde un primer momento, la necesidad de contar estuvo unida a la de disponer de instrumentos de cálculo: inicialmente se contaba por parejas; luego, con los dedos de la mano, y más tarde, para realizar las operaciones de sumar y restar, multiplicar y dividir se inventaron las cifras y los algoritmos de cálculo sobre papel. Todo ello se vio incentivado por el desarrollo del comercio y de las actividades mercantiles, que fueron evolucionando y perfeccionándose en el transcurso de los siglos.

El primer capítulo de este libro relata la evolución de los signos, de los sistemas de numeración y los algoritmos de cálculo a través de las aportaciones realizadas por los antiguos egipcios y romanos, los indios, los mayas, los árabes y los europeos medievales, hasta llegar al desarrollo del comercio y el nacimiento de la contabilidad por partida doble que se produjo en el Renacimiento. Por otra parte, el nacimiento del Estado moderno exigió una estandarización de los sistemas de medidas y, al mismo tiempo, las necesidades de recaudación de impuestos y de planificación de la salud pública implicaron el nacimiento de las tablas demográficas y de la estadística, así como de las primeras máquinas calculadoras, como la Pascalina del francés Blaise Pascal, precursora de los modernos ordenadores.

El segundo capítulo ofrece una visión general del nacimiento del dinero, el cual está estrechamente unido al desarrollo del comercio, que evolucionará hacia una mayor complejidad desde la moneda metálica hasta el papel moneda o billete de banco, pasando de un patrón monetario basado en metales preciosos al patrón divisa. Cada país tiene su propia moneda convertible respecto a las monedas de otros países. Su paridad depende, entre otras variables, de la evolución de los precios dentro del propio país, es decir, de la inflación. Para conocer la inflación, los gobiernos elaboran los índices de precios, y para controlarla, ejecutan su política monetaria, uno de cuyos instrumentos es la variación del tipo de interés básico al que prestan dinero a los bancos.

El tercer capítulo se centra en el planteamiento matemático y la resolución de las operaciones bancarias más comunes, los préstamos e hipotecas, la refinanciación

de los préstamos y el papel de la estadística en el análisis económico. El cuarto capítulo trata esencialmente de las funciones de producción de una empresa y del rendimiento y evaluación de las inversiones. El capítulo siguiente analiza la estructura y el comportamiento del mercado, tanto de la oferta como de la demanda, y su papel en la formación de los precios.

En el sexto capítulo se estudia el funcionamiento de la bolsa, así como los instrumentos gráficos y matemáticos utilizados para analizar las cotizaciones y realizar previsiones bursátiles. Finalmente, el último capítulo versa sobre la elaboración de la contabilidad nacional, las relaciones entre macromagnitudes y las interrelaciones entre sectores productivos, los ciclos económicos, la distribución de la renta y los indicadores de los niveles de desarrollo.

Este libro versa sobre el uso de las matemáticas en la economía, de cómo el uso progresivo de las ciencias exactas ha hecho progresar la ciencia económica. Desde las innovaciones de Fra Luca Pacioli, matemático renacentista que inventó la partida doble en contabilidad, hasta las aportaciones modernas de la economía matemática, la aplicación de las matemáticas como instrumento de análisis económico ha otorgado un mayor rigor a la formulación de los postulados económicos y una mayor fiabilidad de los resultados obtenidos.

A continuación se exponen los principales instrumentos matemáticos utilizados por la ciencia económica, tales como conceptos básicos de numeración, variables, funciones, tendencias y derivadas, curvas, ecuaciones, sucesiones, progresiones, correlación y regresión, etc., que permiten tanto entender lo que sucede en nuestro entorno económico como también saber los criterios que tenemos que seguir en nuestras decisiones económicas de inversión, colocación de ahorros o aceptación de las condiciones de un préstamo. Se explicarán los principales conceptos matemáticos que van asociados al conocimiento de cuestiones económicas tales como el dinero, la inflación, la banca y el sistema financiero, las matemáticas financieras utilizadas en el cálculo de amortizaciones de préstamos y la rentabilidad de inversiones, la producción y el mercado, la oferta y la demanda, el comercio internacional, la formación de los precios, el mercado de capitales, la bolsa de valores y el desarrollo económico.

Capítulo 1

Historia del uso de los números en la economía

Los hombres han usado los números desde el inicio de la humanidad. Hoy en día existen tribus australianas y africanas que tan sólo tienen cinco palabras en su idioma para expresar los números: uno, dos, tres, cuatro y cinco. Cuando al resolver algún problema en su vida cotidiana obtienen un resultado superior a cinco, usan la palabra «muchos». Esto es así porque cada pueblo ha inventado los modos de expresión (cifras y letras, palabras y números) que le hacen falta de acuerdo con su manera de vivir y sus necesidades, y posiblemente estas tribus todavía no necesitan hablar de cantidades superiores a cinco. Estos pueblos viven y calculan en la actualidad del mismo modo que lo hacían todos los habitantes de la Tierra hace miles de años.

Sistemas de numeración. La necesidad humana de contar

El hombre necesita expresar las cantidades mediante palabras y cifras. Las palabras designan las cantidades en el lenguaje hablado. Las cifras expresan las cantidades de manera simplificada en el lenguaje escrito y se emplean en las operaciones que se efectúan con ellas. En los primeros tiempos de la humanidad los hombres se alimentaban de la caza y de las frutas silvestres, tal y como lo hacían sus antecesores, los simios, y como ellos, vivían donde había caza y fruta. Cuando por alguna razón se acababan sus fuentes de alimentación, debían irse a otro lugar donde encontrarlas. Este periodo, en el cual los números apenas eran necesarios, es mucho más largo que toda la época posterior, en la que sí se han utilizado.

Un día, los hombres y las mujeres empezaron a domar animales para asegurarse el alimento. Poco después aprendieron a cultivar la tierra, puesto que no había suficiente caza para alimentarlos a todos. Esto sucedía hacia el año 9000 a.C. (en aquella época la Tierra contaba con unos 8.000.000 de habitantes). A partir de entonces, la mujer y el hombre empezaron a necesitar más números en su vida. Surgieron situaciones en las que era necesario contar y escribir cantidades más o menos grandes, y

expresarlas por medio de palabras. El pastor tenía que decir a su compañera o a su vecino cuántas ovejas poseía y si eran más o menos las mismas que el año anterior. También tenía que precisar cuánto tiempo era un año para poder prever cuándo debía efectuarse la reproducción de los animales domésticos, cuándo realizar la siembra y la cosecha, etc. Con el paso del tiempo, también tuvo que conocer el importe de los impuestos anuales que debía pagar a los sacerdotes, los cuales tenían que dejar constancia escrita de quiénes pagaban y quiénes no. Éstas y otras muchas situaciones crearon la necesidad de expresar cantidades y escribirlas.

Para simplificar la escritura de las cantidades se crearon unos signos especiales para escribirlas: las cifras o dígitos. Los signos actuales empleados habitualmente en Occidente son diez, los conocidos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

¿Qué hacía un pastor prehistórico para contar las ovejas? Una vez las había reunido a todas, las agrupaba de diez en diez, después de cien en cien (diez grupos de diez), después de mil en mil (diez grupos de cien), y así hasta contarlas todas. La base de estos grupos era siempre el diez, y por eso decimos que la base o grupo básico de este sistema de numeración es el 10. Ahora bien, no todos los pastores lo hacían exactamente de este modo. Cada pueblo desarrolló sus sistemas de numeración, sistemas que a pesar de que fueran diferentes siempre tenían un elemento en común: sus bases eran divisibles por cinco. Así, diferentes civilizaciones usaron las bases 5, 10, 20 y 60.

El número 5 apareció cuando los hombres primitivos empezaron a contar con los dedos de la mano, al igual que todavía hacen hoy los niños y niñas pequeños. Algunos pueblos, como los mayas, contaban con los dedos de las manos y de los pies, y por ello empleaban como base el 20.

Los sumerios, los egipcios, los indios, los chinos y los mayas fueron los primeros pueblos que dieron una estructura a los números y usaron un sistema de numeración. Los sumerios vivieron en el actual Irak, en Oriente Próximo, hacia el año 4000 a.C. Realizaban operaciones aritméticas y cálculos geométricos complicados, pues querían estudiar la posición de las estrellas en el firmamento. Estos cálculos les permitieron confeccionar un calendario. La base de su sistema de numeración era el 60, y en él la posición de las cifras daba diferente valor a los números: unidades, decenas, grupos de 20 y grupos de 60. Era, por lo tanto, un sistema posicional.

Los sumerios escribían sobre unas tablillas de barro mediante unas cañas puntiagudas en forma de cuña; después de escribir las cocían en un horno para endurecerlas. Se han encontrado miles de tablillas llenas de cálculos matemáticos bajo la arena del desierto de Irak.

Tablilla de arcilla sumeria, procedente de la región de Ur, que precisa las superficies de una serie de parcelas en la ciudad de Umma.

Hoy en día todavía quedan restos del sistema de numeración sumerio en las medidas de ángulos y de tiempos. Una hora equivale a 60 minutos y un minuto, a 60 segundos. Un ángulo de un grado (en la calculadora: 1 DEG, grado sexagesimal) está formado por 60 subdivisiones llamadas minutos (60'), divididas cada una en 60 segundos (60").

Los antiguos egipcios, por su parte, escribían sobre papiro, el tallo de una planta que crece a orillas del río Nilo. En esta civilización los sacerdotes (los sabios del momento) hicieron numerosos descubrimientos referentes a los números. Para calcular, por ejemplo, la tercera parte del trigo recogido en un campo y pagarlo como tributo o para referirse a las partes en que podía dividirse una barra de pan, inventaron los números fraccionarios o fracciones. En 1858 el egiptólogo escocés llamado Alexander Henry Rhind compró un viejo papiro en el que aparecían diversos problemas sobre fracciones y geometría. De hecho, éste es el primer libro de matemáticas que se conoce: fue escrito hacia el año 1700 a.C. y nos ha permitido conocer el desarrollo de esta ciencia entre los egipcios.

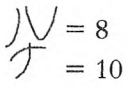
Fragmento del denominado Papiro Rhind*, la Biblia de las matemáticas egipcias. El documento tiene unos 33 cm de alto y más de 5 m de longitud.*

Los chinos, por su parte, eligieron una escritura de formato vertical. Clasificaban los números en «números chico» y «números chica» (impares y pares), y entre sus logros figura el hecho de empezar a usar números negativos y positivos. Como empleaban letras y signos de su alfabeto como cifras, cada palabra tenía también un valor numérico, lo cual era una fuente de problemas. Además, creían que las palabras tenían un significado mágico, según el número que representaban, atribuyéndoles toda una serie de misteriosas connotaciones.

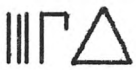
Los mayas, que vivían en América Central muchos años antes de la llegada de Cristóbal Colón, también escribían verticalmente. Habían confeccionado un calendario con meses de 20 días y un año de 360 días. Usaban un sistema de numeración posicional de base 20 y unos signos para expresar cantidades muy parecidos a los usados por chinos e indios.

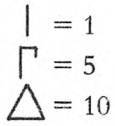
Los mayas y sus predecesores olmecas realizaron grandes avances en los ámbitos de las matemáticas y la astronomía, y definieron el concepto del cero o «nada» hacia el año 36 a.C., lo que constituye la primera referencia documentada de este número. Sin embargo, el 0 maya presentaba el problema de que no podía emplearse en las operaciones aritméticas y ello impidió el desarrollo del cálculo en esta civilización mesoamericana.

Sistema chino: 8 veces 10 = 80.

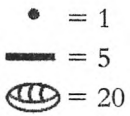


Sistema griego: (3 + 5) veces 10 =
= 8 veces 10 = 80.





Sistema maya: 4 veces 20 = 80.



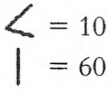
Sistema egipcio: 8 veces 10 = 80.

Sistema romano: 50 + 10 + 10 + 10 = 80.

LXXX

I = 1
X = 10
L = 50

Sistema sumerio: 60 + 10 + 10 = 80.



El mismo número en seis sistemas de numeración distintos.

Los indios fueron los calculistas más prodigiosos del mundo antiguo. Utilizaron cantidades enormes en sus cálculos aritméticos y plantearon problemas que hacían gala de una gran imaginación (en uno de ellos, por ejemplo, intervienen 1.024 monas en una batalla).

En el siglo VI d.C. se fechan sus dos grandes inventos: asignar un valor diferente a cada cifra según sea su posición en la escritura de la cantidad (como las unidades, decenas, centenas, millares...) e idear un signo especial para la cantidad 0 con el fin de indicar el número de elementos del conjunto vacío (lo llamaron *sunyia* y los árabes *cephir*). En un principio el 0 fue designado con el signo de un punto, pero éste

poco a poco se fue transformando en un punto dentro de un círculo y finalmente en un círculo.

Los números indios del siglo VI d.C. ya se escribían como los actuales:

$$\begin{gathered}\text{Ochenta mil trescientos cuarenta y tres} = 80.343 = \\ = \text{ocho decenas de millar, cero millares,} \\ \text{tres centenas, cuatro decenas y tres unidades} = \\ = 8 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.\end{gathered}$$

Los griegos, al igual que los chinos, utilizaban las letras de su alfabeto como dígitos. Pero su sistema no era posicional, lo que dificultó el progreso de sus métodos de calcular y escribir las cantidades. Por esta razón los antiguos griegos no progresaron demasiado en la ciencia de los números o aritmética; en cambio, avanzaron mucho en el desarrollo de la geometría.

Aristóteles (384-322 a.C.) usaba la palabra «economía» para referirse a la administración de la casa y el hogar, mientras que en los problemas considerados económicos utilizaba la palabra griega «crematística». Aunque no analizó todas las cuestiones económicas en detalle ni estudió las relaciones entre variables, sí que abordó cuestiones como el valor, el dinero y el interés.

El enfoque de Aristóteles era ético, siendo el primero en distinguir diferentes técnicas económicas en la administración de la empresa y la familia. Distinguió entre valor de uso y valor de cambio, y entre dinero y riqueza, y analizó los dos usos del dinero: medio de cambio y mercancía útil para facilitar el intercambio. La identificación y condena ética realizadas por Aristóteles entre el interés y la usura perduró hasta la Edad Moderna y fue la base de la doctrina de la Iglesia católica. El filósofo también razonó sobre otros temas económicos, como la propiedad privada y la esclavitud, y sus ideas ejercieron una gran influencia ética en el islam.

Los romanos no mejoraron demasiado los números griegos. Utilizaban las letras M, D, C, L, X,V e I como signos numéricos y unas rayitas por encima para designar cifras grandes. Por ello tuvieron los mismos problemas que los griegos. Es fácil observar la dificultad de escribir una cantidad grande como un millón o de operar con varias cantidades en el sistema romano.

Por este motivo, cuando en el siglo VIII los árabes llevaron el sistema indio a Europa a través de Andalucía, todos los que trabajaban en cálculo empezaron a emplearlo inmediatamente y abandonaron de modo definitivo el sistema romano de numeración.

BASES DE NUMERACIÓN Y UNIDADES DE MEDIDA

Hoy en día parece casi imposible que se haya contado tan sólo con la ayuda de los dedos de las manos, pero en ello se basa el sistema de numeración que empleamos diariamente, un sistema de base 10 y posicional con el cero. Sin embargo, esto no siempre ha sido así; de hecho, no usan este sistema los más rápidos y precisos calculistas modernos: los ordenadores. A continuación, se describen diversos sistemas de numeración, usados hoy y en épocas pasadas.

Sistema decimal (base 10)

- Diez cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Expresión: $72.603_{10} = 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$.
- Usado en la vida cotidiana desde la antigüedad.

Sistema hexadecimal (base 16)

- 16 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
- Expresión: $72.603_{10} = 11B9B_{16} = 1 \cdot 16^4 + 1 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0$.
- Usado en electrónica.

Sistema binario

- Dos cifras: 0, 1.
- Expresión: $72.603_{10} = 10001101110011011_2 = 1 \cdot 2^{16} + 0 \cdot 2^{15} + 0 \cdot 2^{14} + 0 \cdot 2^{13} + 1 \cdot \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.
- Usado en los ordenadores.

Sistema vigesimal

- Veinte cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.
- Expresión: $72.603_{10} = 91A3_{20} = 9 \cdot 20^3 + 1 \cdot 20^2 + 10 \cdot 20^1 + 3 \cdot 20^0$.
- Usado por mayas y sumerios con signos propios.

Debe considerarse igualmente que, a lo largo del tiempo, las diferentes culturas han empleado muy diversos sistemas de unidades de medida para las magnitudes (peso, longitud, moneda, volumen), los cuales en muchos casos estaban ligados a los propios sistemas de numeración. En general, la escritura y el cálculo usados en economía se simplifica mucho si se emplean iguales divisiones o particiones para designar a los múltiplos y submúltiplos en las unidades de medida y en la expresión de las cantidades. El sistema métrico decimal es un ejemplo de una elección adecuada. Define múltiplos de 10 para designar a los múltiplos de una unidad de medida y emplea también el sistema decimal de numeración para expresar las cantidades (por ejemplo, 2,547 metros son 2 metros, 5 decímetros, 4 centímetros y 7 milímetros).

MULTIPLICACIÓN ANTIGUA Y MODERNA

Los procedimientos, técnicas o maneras de calcular y obtener los resultados de las operaciones aritméticas se denominan algoritmos; éstos han progresado enormemente a lo largo de la historia de la humanidad. En las tablas siguientes se representan dos algoritmos para realizar la multiplicación 2.409 · 94 según los métodos utilizados en dos épocas muy distantes.

Multiplicar 2.409 × 94 con el método usado por los antiguos egipcios (3600 a.C.)

2.409	94
(1.204	188)
(602	376)
301	752
(150	1.504)
75	3.008
37	6.016
(18	12.032)
9	24.064
(4	48.128)
(2	96.256)
1	192.512

$= 94 + 752 + 3.008 + 6.016 + 24.064 + 192.512 = 226.446.$

El primer factor (2.409) se divide por dos sucesivamente hasta llegar a la unidad. Paralelamente, se duplica el segundo factor (94) tantas veces como el primer factor. El resultado del producto es la suma de los números de la columna derecha que tienen un número impar a su izquierda.

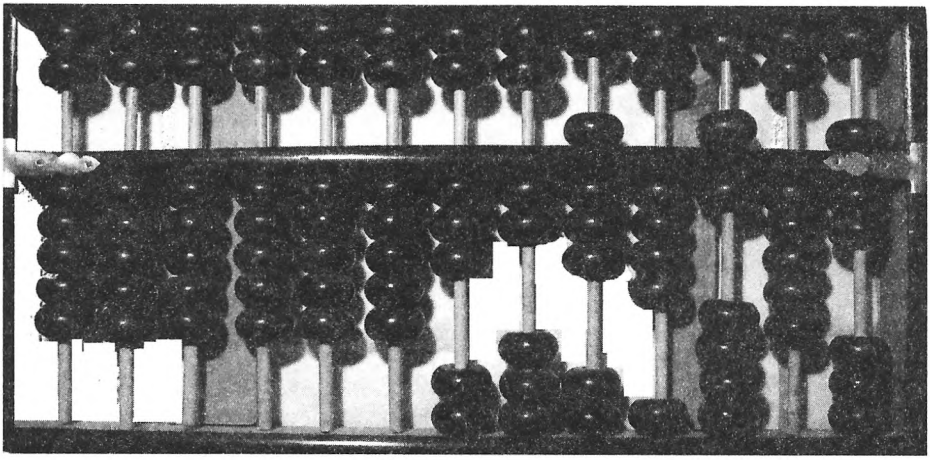
Multiplicar 2.409 × 94 con el método usado por un ordenador a mediados del siglo xx

					9	
					4	
					x	
		2	4	0	9	
				3	6	4 · 9
			8	1	0	90 · 9
					0	4 · 0
					0	90 · 0
		1	6	0	0	4 · 400
	3	6	0	0	0	90 · 400
		8	0	0	0	4 · 2.000
1	8	0	0	0	0	90 · 2.000
2	2	6	4	4	6	

Se multiplica 4 por 9, 90 por 9, 4 por 0, 90 por 0 y así sucesivamente... hasta 90 por 2.000. El resultado es la suma de los parciales obtenidos a la izquierda.

Algoritmos de cálculo

Griegos y romanos hacían sus cálculos como los pastores prehistóricos, utilizando para ello un montón de guijarros o bastoncillos. Las cifras sólo las empleaban para escribir los resultados. La palabra «cálculo» procede de la palabra latina *calculus*, que significa «piedra». Con el fin de no tener que llevar siempre piedras en los bolsillos, inventaron el ábaco. Es un aparato con el que todavía hoy muchos niños aprenden la aritmética elemental.



3 2 8 4 6 5 7

Un modelo moderno de ábaco y la cifra que aparece en él representada.

Cada fila es una posición de la cantidad que se escribe. Si una fila del ábaco no tiene ninguna bola desplazada significa que en esa posición hay un cero, aunque los romanos no lo podían representar con su sistema de numeración. En el mundo romano, la cantidad tres millones doscientos ochenta y cuatro mil seiscientos cincuenta y siete se escribía:

$$\overline{\text{MMMCCLXXXIV}}\text{DCLVII.}$$

Sin embargo, en el siglo v d.C. los indios ya escribían algo muy parecido a 3.284.657 tal y como se hace en la actualidad. En el siglo VIII los árabes incorporaron a su cultura los inventos indios de la numeración posicional y el cero cuando ocuparon militarmente el norte de la India. Durante la Edad Media, los árabes de-

sarrollaron los números negativos, la regla de tres y los métodos de proporcionalidad para resolver problemas como: «Hussein tiene 22 dinares, Omar tiene 19 y Khalil, 7. Reúnen su dinero y hacen un negocio en el que ganan 12 dinares. ¿Cómo deben repartírselos?». El Corán también describe complicadas situaciones de herencias que inspiraron el derecho árabe y obligaron a los calculistas a desarrollar procedimientos matemáticos de reparto proporcional según el grado de descendencia o ascendencia con la persona muerta. Para solucionar este tipo de problemas y resolver ecuaciones se desarrolló el álgebra. Esta palabra procede de la voz árabe *al-jabr* que significa «recomponer» o «reconstruir». También se definieron entonces los primeros algoritmos (o procedimientos de cálculo), palabra que procede de Al-Khwarizmi, nombre del más importante matemático árabe.

Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci (hijo de Bonifacio), realizó en la Italia del siglo XIII numerosos hallazgos en los ámbitos de la aritmética y el álgebra, los cuales serían desarrollados posteriormente durante el Renacimiento (siglos XIV y XV). En su *Libro de los ábacos* se condensan todos los conocimientos árabes, incluido el sistema de numeración posicional y el cero (al que llama *zephyrum*), así como las técnicas de cálculo con números enteros y fracciones. El texto también muestra la regla de tres simple y compuesta, las normas para calcular la raíz cuadrada de un número y las que resuelven ecuaciones de primer y segundo grado. Sin embargo, su invento más famoso es la llamada «sucesión de Fibonacci».

Operaciones elementales: comercio y cálculo aritmético

El primer tratado de aritmética comercial se publicó en Treviso (Italia) en 1470 y es de un autor anónimo. A lo largo del siglo XV se publicaron una treintena de libros que trataban esta materia (catorce de ellos en Italia y once en Alemania). Todos ellos contenían una descripción del sistema de numeración árabe en base 10 y los procedimientos o algoritmos de las cuatro operaciones con números enteros y positivos (los llamados números naturales); también incluían la descripción de los números quebrados y de sus operaciones, las reglas de tres, las progresiones, la resolución de problemas aplicables directamente a situaciones comerciales (como el cálculo del valor real de una mercancía permutada), el cálculo de impuestos y peajes, los problemas de aleaciones y la transformación de unidades de medida.

En esta época nació una relación más estrecha entre la economía, entendida como administración de recursos escasos, y las matemáticas, definidas como pensamien-

ENFRENTAMIENTO DE ALGORITMOS

En el mundo occidental cristiano los avances de la Edad Media se limitaron a traducir las obras originales árabes y las versiones árabes de antiguos libros griegos, como la *Economía* de Aristóteles. Poco antes del año 1000, el monje Gerbert d'Aurillac, futuro Papa Silvestre II, aprendió las cifras y su valor de posición de los árabes andalusíes, y también introdujo mejoras en el ábaco romano, aunque éste siguió sin emplear el cero. No fue hasta el siglo XII cuando los cruzados importaron desde el reino de Jerusalén, y por segunda vez, el cero, las cifras y el cálculo indoárabes. Sin embargo, la Iglesia intentó impedir el uso de los métodos de cálculo árabes con el argumento de que si eran más sencillos y eficaces era debido a que tenían algo de mágico o demoníaco. En aquellos momentos, los calculistas profesionales empleaban estos algoritmos en secreto para no tener problemas con la Iglesia. Sin embargo, y a pesar de la oposición eclesiástica, los algoritmos árabes se impusieron con fuerza en el mundo del comercio desde el inicio del Renacimiento.

to abstracto basado en la exactitud de deducciones lógicas mediante la aritmética elemental. Poder sumar y restar números (referidos a bienes que se intercambian) se convirtió en un instrumento básico del progreso. Posteriormente, el desarrollo del comercio generó la necesidad de usar la multiplicación y la división con unos procedimientos o algoritmos eficientes para realizar dichas operaciones con precisión y rapidez.

Para sobrevivir y tener éxito en esta nueva época eran precisos nuevos tipos de números, como las fracciones decimales, para poder hablar de partes de una unidad de medida en las dimensiones, los pesos y el volumen de las cosas y también para expresar sus valores mediante la moneda o el trueque. Sin embargo, esta clase de números ya aparecían en los jeroglíficos egipcios.

Una aplicación muy importante de las fracciones centesimales era representar el porcentaje como descripción de las partes de un todo en los descuentos y los intereses. Más adelante se amplió este nuevo tipo de número a otras fracciones con denominadores diferentes de 10 y 100. El proceso histórico evolutivo finalizó cuando estas cantidades se expresaron con la numeración posicional de base 10 que es la que se emplea en la vida cotidiana de hoy en día.

$$36/100 \text{ (fracción centesimal)} = 3{,}6/10 \text{ (fracción decimal)} = \\ = 36\% \text{ (porcentaje)} = 0{,}36 \text{ (número decimal)}.$$

En el Renacimiento, la cantidad 78, 4/10, 5/100, 6/1.000 se escribía 78 + 4/10 + + 5/100 + 6/1.000 = 78,456.

Este tipo de números fraccionarios se emplean desde el siglo XVII y reciben el nombre matemático de números racionales. Pueden escribirse de dos maneras (dos notaciones): la fraccionaria-porcentual y la posicional-decimal con la coma.

Los números racionales pueden tener un número finito (limitado) de cifras decimales. Es el caso de la división exacta, como 34/64 = 0,53125.

Y también pueden tener un número infinito (ilimitado) de cifras con algún tipo de repetición o ciclo, como 34/70 = 0,485714285714285714285714285...

Los bancos aparecieron en esta época para asegurar que la circulación del dinero que comportaban las transacciones de bienes y servicios se llevara a cabo en condiciones seguras. Los primeros banqueros fueron los orfebres medievales, que eran, en su mayoría, judíos y musulmanes. Los cristianos tenían prohibido dedicarse a este oficio de prestamista porque la Iglesia penaba el pecado de la usura. Sin embargo, posteriormente, muchos cristianos se convirtieron en banqueros y prestamistas.

El cambista y su esposa, *cuadro realizado por Quentin Massys en 1514. Se considera que el lienzo refleja el conflicto, propio de la época, entre el interés y la devoción, puesto que la mujer desatiende su libro de oraciones para observar el dinero que cuenta su marido.*

INVENCIÓN DE LA CONTABILIDAD

En 1494 el fraile franciscano Luca Pacioli inventó la contabilidad moderna. Su idea genial fue el concepto de la partida doble, un magnífico ejemplo del apoyo que han dado las matemáticas al comercio. A partir de aquel momento la necesidad de reflejar los ingresos y los gastos ya no era algo sin sentido, sino que empezaron a explicarse como causa y efecto. Su libro *La Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* se publicó en Venecia, en el contexto de las nuevas relaciones políticas y comerciales que se estaban desarrollando en aquellos momentos. Escrito con un gran sentido pedagógico y divulgador, el texto describía el funcionamiento de un negocio mercantil antes del inicio de las operaciones de compra y venta de mercancías. Advierte que el empresario tiene que preparar una lista completa de todas sus propiedades (o activos) y otra lista de sus compromisos con terceros (o pasivos). Los activos deben agruparse de acuerdo con el principio de valor y movilidad (primero, el dinero en efectivo y después, los bienes). Los pasivos deben agruparse según su vencimiento y exigibilidad de pago (a corto plazo y a largo plazo). Para sustentar la partida doble comprueba que toda operación mercantil que se practique tiene una causa, la cual debe producir necesariamente un efecto, por lo que existe una compensación numérica entre causa y efecto respectivamente.

Sobre el concepto contable de mercancías, Pacioli escribió: «De todo cuanto pongas en ella, la harás deudora día por día en tus libros y así también, por lo contrario, la harás acreedora común a todo cuanto saques o recibas de ella y como si fuera un deudor que te pagará en parte». Se considera el almacén de mercancías como un deudor de todo lo que se ponga o gaste en él por cualquier concepto. Para el registro de operaciones Pacioli propuso cuatro libros básicos: inventario (libro de inventarios y balances), *giornale* (libro diario), cuaderno (libro mayor) y *memoriale* (que hoy no existe). Su texto también describía la importancia de la contabilidad por medio de las cuentas y otros conceptos contables, ya que aquélla evidenciaba la situación del negocio y permitía al comerciante saber si funcionaba o no.

La contabilidad surgió del crecimiento del comercio acaecido en la Baja Edad Media y el Renacimiento (siglos XV y XVI) con el fin de hacer patente el volumen de negocio y las ganancias, el capital invertido y el patrimonio del empresario. Para iniciar un nuevo negocio que necesitaba más capital del que se tenía, el empresario debía recurrir al préstamo. A partir de aquel momento, los bancos y la contabilidad por partida doble se convirtieron en herramientas matemáticas imprescindibles.

Surgió entonces la necesidad de los números negativos, que se conocen como «números deudos» o «números absurdos». Eran llamados así porque se desarrollaron

en una época en la que el interés central del hombre era convivir con los problemas cotidianos de la naturaleza y, en aquellas circunstancias, tales números parecían no tener sentido. Se descubrieron en la India en el siglo V, pero no llegaron a Occidente hasta el siglo XVI.

Los números negativos también se manipulaban en los ábacos, pero usando tablillas o bolas de diferente color a las utilizadas para los números positivos. En el siglo XV ya se difundieron entre los comerciantes los símbolos germánicos + y − para indicar el exceso o el defecto de mercancías en sus almacenes. En el siglo XVI se les llamaba todavía números «falsos». Los números negativos no fueron aceptados universalmente hasta finales del siglo XVIII.

La extensión del sistema de numeración para que incluyera los números negativos fue muy práctica para simplificar la clase de operaciones propias de la contabilidad. Con la incorporación de los números negativos y el uso de los números racionales, toda ecuación de primer grado tenía siempre una solución matemática.

Por ejemplo, la ecuación $P + 50 = 32$ no tenía solución antes de la aceptación de los números negativos: $P + 50 - 50 = 32 - 50; P = 32 - 50; P = -18$.

Con la aparición del protestantismo en el siglo XVI los creyentes luteranos y calvinistas se vieron libres de la prohibición de la usura. Esta circunstancia conllevaba la posibilidad de generalizar tales prácticas mercantiles y facilitaba la acumulación de capitales, apareciendo entonces la denominada «ética del dinero». Esta época corresponde al nacimiento del capitalismo. Tener dinero se convirtió casi en el valor supremo de la vida. Su obtención dejaba de ser un medio para convertirse en un

El sociólogo Max Weber (en el centro, en una fotografía realizada en 1917) escribió entre 1904 y 1905 La ética protestante y el espíritu del capitalismo, *un texto fundamental que plantea numerosas hipótesis sobre las relaciones entre la moral luterana y el desarrollo del capitalismo.*

LOS «NÚMEROS DEUDOS»

Una de las primeras definiciones del número negativo fue realizada por el padre Tomás Vicente Tosca en su obra *Compendio matemático*, publicada en 1709. En uno de los problemas planteados en este texto describió una situación cotidiana de empleo de capital mediante cantidades relativas llamadas tener o haber, deber o deuda y ganancia, con el fin de dotar de significado numérico a las cantidades negativas e ilustrar lo que se entiende como cantidad menor que nada. En uno de sus capítulos explica: «Supóngase que un hombre no tiene bienes algunos, y que debe 1.000 escudos; y otro hombre no tiene tampoco bienes algunos, pero no debe nada. Es cierto que tiene el primero peor fortuna que el segundo, pero éste tiene nada; luego el primero tiene menos que nada. También, si al que no tiene bien alguno y debe 1.000 escudos, le dan 1.000 escudos, con los que paga la deuda, aumenta sus bienes; pero sus bienes después de este aumento son nada; luego antes del aumento, sus bienes eran menos que nada».

fin. Comportarse racionalmente era trabajar del modo más adecuado para obtener la máxima cantidad de riqueza.

La nueva ética protestante tenía una característica muy marcada: el ascetismo que permite explicar el que muchas casas parroquiales fueran centros creadores de empresas capitalistas. A la virtud capitalista del sentido de los negocios, los protestantes sumaban una forma de piedad intensa, lo que impregnaba y regulaba todos los actos de su vida. Para la ética protestante, el enriquecimiento era una señal de predestinación para la salvación eterna.

Sistemas de medidas estándar

En el siglo XVIII, tiempo de Ilustración y revoluciones, el desarrollo de la actividad comercial precisaba urgentemente del uso de instrumentos de medición física, así como también del desarrollo de los sistemas monetarios. En 1791 la Asamblea Nacional francesa definió el metro como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre y el kilogramo a partir de la masa de un litro de agua. Así se estableció el primer sistema de pesos y medidas con el objetivo de facilitar el intercambio internacional: el llamado sistema métrico decimal.

Cuando los cálculos y los trabajos de medición del meridiano terrestre aportaron una mayor precisión sobre el tamaño de la Tierra y se estudiaron más a fondo las propiedades del agua, se encontraron discrepancias con los patrones construidos

anteriormente. En 1799 se estableció el sistema métrico adoptando los patrones del metro y el kilogramo, fabricados en una aleación de platino.

Se estaba iniciando entonces la revolución industrial. La normalización de las piezas mecánicas, en particular los tornillos y las tuercas, era una cuestión de gran importancia y para ello se precisaban mediciones de mayor precisión. Estas exigencias llevaron a romper con la relación que existía entre los patrones y sus fuentes naturales. A partir de aquel momento, los mismos patrones se convirtieron en la base del sistema y permanecieron como tales hasta 1960.

Una gran ventaja del nuevo sistema es que los múltiplos y submúltiplos son múltiplos y divisores decimales. Anteriormente las unidades empleadas se dividían en tres, doce o dieciséis partes según la unidad y el país de origen, lo que dificultaba las operaciones aritméticas con los algoritmos basados en el sistema de numeración decimal.

El primer sistema métrico se adoptó internacionalmente en la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1889, que un siglo más tarde se convirtió en el Sistema Internacional de Unidades definido en 1983. En la actualidad, aproximadamente el 95% de la población mundial vive en países en los que se usa el sistema métrico y sus derivados.

Matemáticas y teorías económicas

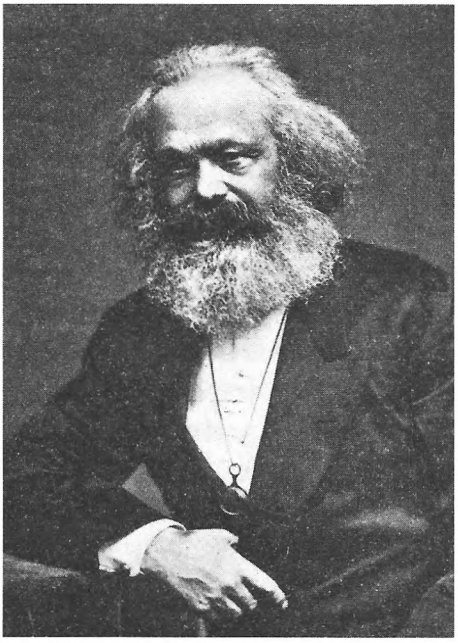
Entre los siglos XVI y XVIII se desarrollaron diferentes escuelas de pensamiento económico cuyo objetivo era ayudar al enriquecimiento del Estado; por este motivo la ciencia económica se denominó «economía política». Nació entonces el mercantilismo, que sostenía que el Estado sólo podía enriquecerse si vendía más al extranjero que lo que le compraba; es decir, que era necesario tener una balanza comercial favorable que permitiera la entrada de metales preciosos. La principal aportación de esta ideología fue la formulación de la teoría cuantitativa del dinero.

En el siglo XVIII los fisiócratas analizaban el cuerpo social de manera análoga al cuerpo humano, bajo el prisma de un «orden natural». Su espíritu analítico les llevó a definir la estructura del sistema económico de un país de forma muy precisa, como se puede apreciar por ejemplo en el *Tableau économique* del médico François Quesnay sobre las relaciones interindustriales, precursoras de la futuras tablas input-output.

En 1776 Adam Smith, que está considerado como el verdadero padre de la economía política, publicó *La riqueza de las naciones*. Los puntos teóricos innovadores de esta obra fueron la diferenciación entre valor de uso y valor de cambio; el reconocimiento de la división del trabajo, entendida como especialización de tareas, para la reducción de costes de producción; la predicción de posibles conflictos entre

los dueños de las fábricas y los trabajadores mal pagados, la acumulación de capital como la fuente para el desarrollo económico y la defensa del mercado como el mecanismo más eficiente de asignación de recursos. Smith era, por tanto, un defensor de la libertad económica.

Karl Marx, por su parte, afirmaba que sólo el trabajo produce el valor. En su obra *El capital* (1864) desarrolló ampliamente esta tesis. Marx establecía cuatro conceptos distintos de valor: individuales (para comparar el valor directo y el valor de producción), directos (sólo tiene en cuenta la competencia intrasectorial), de producción (que tiene en cuenta la competencia intrasectorial e intersectorial) y efectivos (precio de la realidad mercantil). Sin embargo, Marx no llegó a formular un análisis matemático de la cuestión.



Adam Smith (a la izquierda) y Karl Marx, dos pensadores que dieron un gran impulso a la economía política desde ópticas totalmente distintas.

A lo largo del siglo XIX muchos economistas, como Ricardo y Marx, desarrollaron la teoría de los precios y el valor, pero sólo gracias a los trabajos de pensadores posteriores, como Walras, Sraffa, Menger, Von Neumann y Morgersten, se realizó una matematización de dichas ideas y se creó la economía matemática. Léon Walras criticó las teorías liberales entonces en boga, considerándolas insuficientes para

explicar los problemas económicos de la época. En *Elementos de economía política pura* (1874) mostró su desacuerdo con la teoría del valor del trabajo y de la renta de los bienes raíces (terrenos, edificios, etc.) de David Ricardo y puso en duda la herencia clásica de Adam Smith. Junto al matemático Antoine Cournot introdujo el cálculo matemático en la economía.

El modelo de Walras representaba el precio de la cantidad ofertada y demandada en ecuaciones interrelacionadas. En éstas aparecían tres variables: los precios, la cantidad de oferta y la de demanda, y se tenían que calcular dos incógnitas, el precio y la cantidad, ya que, en equilibrio, la oferta debía igualar a la demanda. Walras fue el primero que dio la notación matemática del enunciado del equilibrio general, uno de los procesos que relaciona el análisis de la oferta y la demanda

A pesar de estos grandes avances, el proyecto de una economía política que pudiera escribirse con el lenguaje matemático de las funciones, las ecuaciones y el cálculo infinitesimal recibió fuertes críticas de otros grandes economistas del siglo XIX. Muchos de ellos empleaban un método de investigación histórico y rechazaban por absurda la pretensión de traducir en números y operadores matemáticos la libertad humana. Por otra parte, los matemáticos también eran reticentes a este tipo de análisis y aducían los pocos resultados que había dado hasta entonces la matematización de la economía; los muchos años de colaboración entre ambas disciplinas sólo habían generado el sistema de ecuaciones de equilibrio de Walras.

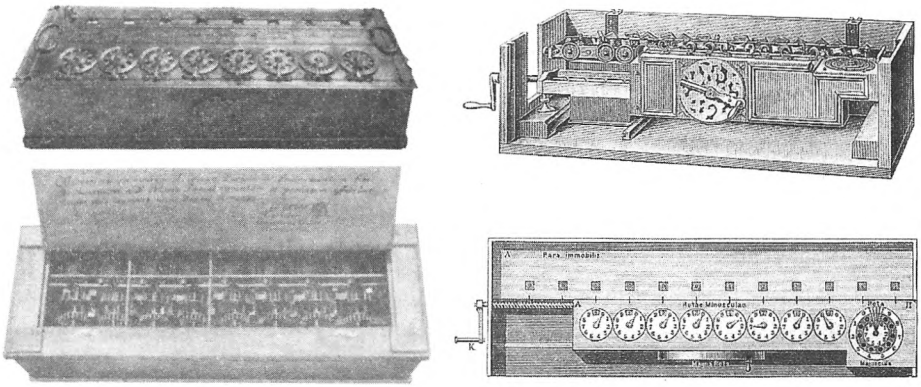
El estudio de la formación de los precios dio un salto adelante con la formulación matemática de Piero Sraffa, discípulo del inglés John Maynard Keynes. En su libro *Producción de mercancías por medio de mercancías* proponía la siguiente ecuación:

$$P = S + B + R,$$

en la que tanto el precio (P) como las variables de salario (S), beneficio (B) y renta (R) se refieren al estado de equilibrio.

Aritmética política o el nacimiento de la estadística

En 1642 un joven matemático francés, Blaise Pascal, inventó la pascalina, la primera máquina de calcular basada en un mecanismo de ruedas dentadas. Trabajaba con cantidades de hasta ocho cifras y hacía sumas y restas. Pascal realizó este dispositivo para facilitar el trabajo de su padre, ya mayor, que era inspector de impuestos. Se fabricaron unas cincuenta máquinas.



A la izquierda, la pascalina, y la derecha, la calculadora inventada por Leibniz.

En 1694 el filósofo y matemático alemán Leibniz mejoró la pascalina, creando la primera máquina que multiplicaba y dividía. El suizo Jakob Bernoulli escribió en 1705, año de su muerte, el libro *Ars Conjectandi*, en el que desarrolló la primera teoría de la probabilidad. En esta obra se afirmaba algo tan general como que la incertidumbre disminuye cuando el número de observaciones crece. Bernoulli planteó el siguiente experimento ideal: «En una gran urna hay 3.000 bolas negras y 2.000 bolas blancas. Si se extraen bolas, anotando su color y devolviéndolas a la urna, puede afirmarse que cuanto mayor sea el número de extracciones más se aproximará a 2/3 la proporción de bolas blancas y negras extraídas». Hoy en día esta afirmación se conoce como la «ley de los grandes números», y es una de las bases de la estadística matemática.

Antoine Lavoisier, descubridor de la nomenclatura y formulación química modernas, fue un entusiasta de la Revolución francesa, a la que aportó sus conocimientos de cálculo y la precisión de las medidas en diferentes campos de la administración. Participó en la definición del sistema métrico decimal y en 1791 escribió un informe titulado *Resumen de diversas obras de aritmética política*. La nueva república necesitaba urgentemente este informe puesto que en aquella época los impuestos se basaban en la propiedad, en la tierra realmente cultivada y en el ganado sujeto a recaudación.

Lavoisier intentó calcular cuánta tierra de labor había en Francia; para ello recopiló datos sobre el consumo anual de alimentos y alcohol, tanto en las ciudades como en los pueblos, y luego calculó cuánta tierra era necesaria para producir todos esos alimentos y bebidas. Gracias a su estudio se sabe que en 1790 Francia tenía 25 millones de habitantes, de los que 8 millones vivían en las ciudades y otros 8 millones trabajaban en la viticultura. Lavoisier reclamó la creación de una oficina estadística

para realizar registros regulares sobre la agricultura, el comercio y la población. Su confianza en la estadística era tal que creía que con su uso dejaría de existir la ciencia de la economía política porque los problemas se resolverían sin ninguna discrepancia.

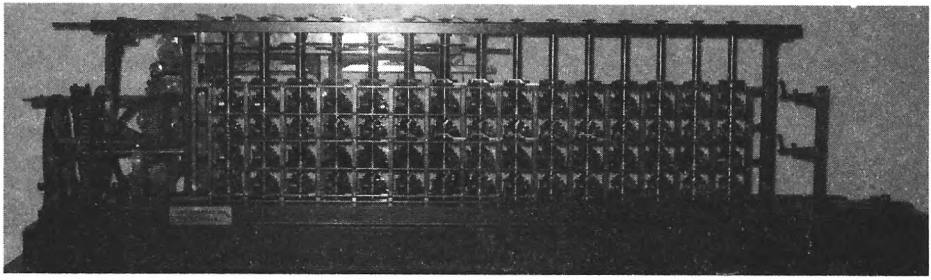
Otro trabajo de gran importancia fue *Ensayo sobre la población,* de Thomas Malthus, escrito a finales del siglo XVIII, que influiría poderosamente en muchos sociólogos y economistas. En esta obra se señalaba que dado que los rendimientos eran decrecientes y el factor tierra es fijo (no es infinito) las tendencias históricas mostraban que la producción de alimentos crecía en proporción aritmética (1, 2, 3, 4...), mientras que la población lo hacía en proporción geométrica (1, 2, 4, 8...). Por lo tanto, como la población se duplica una y otra vez, es como si el mundo se fuera dividiendo por la mitad una y otra vez, siendo cada vez menor la cantidad de alimentos de los que se dispone para satisfacer las necesidades de la población, hasta llegar a un nivel inferior al necesario para la vida, con lo cual se incrementaría la mortalidad o los salarios se colocarían a un nivel mínimo de subsistencia.

Hasta 1799 se publicaron 21 volúmenes del *Informe estadístico de Escocia* en los que el diputado Sir John Sinclair recopiló un enorme volumen de datos estadísticos extraídos de los registros parroquiales, que incluían resúmenes anuales de ingresos y gastos por hogar y los tipos de actividades generadoras de dichos ingresos.

A finales del XIX el interés por la cuantificación de los datos sociales y económicos era cada vez mayor. Las administraciones de los Estados recopilaban datos para poder efectuar una gestión política numérica, lo que condujo a los censos de población cíclicos y a la elaboración de modelos matemáticos que permitieran la confección de conclusiones y resúmenes inteligibles y utilizables por los políticos, los empresarios y los investigadores.

Tablas demográficas: segundo nacimiento de la estadística

En 1839 el médico William Farr aplicó los métodos estadísticos a la sanidad británica. Trabajó como «recopilador de extractos» en la Oficina Central del Registro en Londres y publicó en 1864 el informe *Tablas de la vida inglesa*, que incluía las primeras tablas empleadas por los actuarios de seguros para calcular los riesgos de las pólizas de seguros de vida. Se basaban en registros de nacimientos y defunciones y datos del censo. Estas tablas precisaban de complicados métodos numéricos. Para poder abordar estos cálculos, el gobierno inglés adquirió una máquina calculadora mecánica con un aparato de impresión diseñada por el sueco Georg Scheutz.



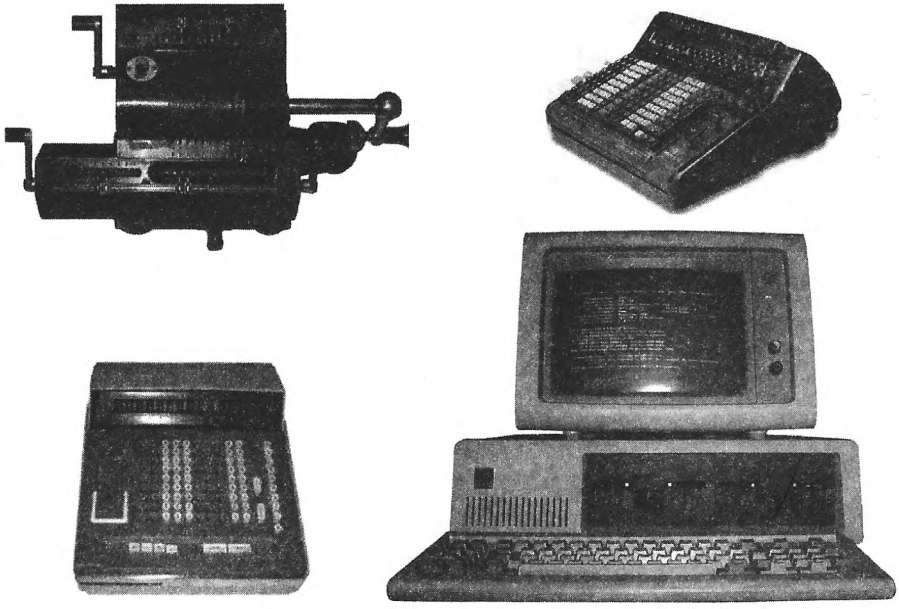
El calculador mecánico creado por Georg Scheutz en 1856.

Farr también colaboró con Florence Nightingale, una enfermera apasionada de la estadística. Ella creía que «podía mejorar las condiciones de la humanidad, orientando a los gobernantes sobre las decisiones más acertadas». Fue la primera persona que diseñó y usó diagramas y gráficos estadísticos para facilitar la comprensión de las enormes tablas numéricas. Finalmente, también trabajó con el matemático belga Adolphe Quetelet, un apasionado de la estadística, discípulo de Laplace, en una nueva versión del libro *Física social* (1835) en la que aparecían muchísimos datos sobre la población francesa recopilados a lo largo de los años, con tablas comparativas y estudios de relaciones entre variables estadísticas. Su gran invención fue el llamado «hombre medio», cuyas características cuantificables eran susceptibles de análisis numérico; aunque este concepto ha perdido vigencia, puede considerarse el antecedente del concepto general de promedios.

La decisión de realizar un censo de población se remonta a la Convención de Filadelfia de 1787, en la que se elaboró la Constitución estadounidense. El primer censo se realizó en 1790 y, a partir de entonces, se hicieron censos cada diez años. En el de 1890 se evidenció que el sistema de recuento y tabulación manual ya no era viable. Con el procedimiento empleado hasta entonces era imposible extraer conclusiones en un tiempo razonable de la gran cantidad de datos recogidos. Las autoridades no podían tomar las decisiones políticas y económicas apropiadas que se derivaran del tratamiento de aquellos datos en un tiempo inferior a los años que faltaban para el próximo censo.

Para superar esta situación se realizó un concurso para el diseño de una máquina que permitiera trabajar eficaz y rápidamente con los datos del censo. La ganadora fue una máquina de tarjetas perforadas del ingeniero Hermann Hollerith, que mediante un sistema eléctrico contaba el número de perforaciones realizadas en la tarjeta, que indicaban el valor de cada una de las variables estadísticas recopiladas en la hoja del censo. Las perforaciones de cada tarjeta habían sido realizadas por un operador a partir de los datos de las hojas del censo.

Hollerith construyó otras máquinas clasificadoras y tabuladoras que permitieron realizar en dos años y medio los cálculos del censo de 1890, empleando así cinco años menos que los utilizados para clasificar los datos del censo de 1880. Hollerith fundó su propia empresa de máquinas tabuladoras, clasificadoras y perforadoras, que tuvieron un éxito enorme en el mercado. En 1914 la Tabulating Machine Company de Hollerith se convirtió en la International Business Machines (IBM).



De izquierda a derecha y de arriba abajo, la Brunsviga (1927), la Mercedes Euklid (1935), la Anita electrónica (1961) y un ordenador personal IBM de 1980 muestran la vertiginosa evolución de la tecnología de cálculo en el siglo xx.

Entre 1900 y 1935, la tecnología evolucionó desde el aritmómetro Brunsviga hasta la Mercedes Euklid, que hacía las cuatro operaciones aritméticas combinadas con una precisión de 16 cifras. En la década de 1960 se introdujeron las máquinas electromecánicas y, finalmente, las electrónicas y las de semiconductores, que son la base de la computación actual. Aparecieron lenguajes de programación para controlar los ordenadores, diseñados específicamente para la gestión de la empresa, así como software de gestión de bases de datos como SAP o DB2, que están ideados para las enormes masas de datos de gestión de las grandes corporaciones y las administraciones públicas.

Capítulo 2

Dinero e inflación

El dinero es sobre todo un medio de pago generalmente aceptado, que se utiliza tanto en las operaciones de compraventa de bienes y servicios como en las operaciones financieras. Sirve tanto para el intercambio como también para medir el valor de los bienes, la riqueza y la situación patrimonial. El dinero es, por lo tanto, una unidad de cuenta para medir el valor de las cosas, así como un instrumento de pago. Tiene una forma física tangible, que es la moneda metálica o el billete de banco, pero también puede ser una unidad de cuenta para medir el saldo disponible de nuestra cuenta bancaria, o bien una tarjeta de crédito, que es una tarjeta de plástico cuyo chip o banda magnética registra todas las operaciones que le ordena su titular, a través de un cajero automático o bien a través de Internet, utilizando claves de acceso y tarjetas con tablas de números aleatorios.

Breve historia del dinero: del dinero mercancía al dinero fiduciario

El dinero ha ido evolucionando a lo largo de la historia. En un principio el comercio estaba basado en el intercambio de bienes, en el trueque de mercancías. Se trataba de intercambiar los excedentes de una comunidad por los excedentes generados por otra. Pronto algunos bienes, como las piezas de ganado, fueron considerados como referencia para valorar los trueques. Así, por ejemplo, veinte ánforas llenas de aceitunas podían valer una oveja, o cien ánforas llenas de vino, un buey. Por cierto, las ánforas llenas de agua (entre 25 y 30 litros de capacidad), denominadas *talento*, fueron consideradas como medidas de peso y, más tarde, como unidades monetarias.

La adopción de piezas de ganado como moneda de pago dio lugar a que estos animales-moneda fueran representados en piedras, tablillas de barro y, finalmente, en monedas metálicas. La evolución posterior condujo hacia las monedas metálicas acuñadas con metales preciosos, de modo que el valor de la moneda era el del metal que contenía (lo que se conoce como dinero metálico o también moneda-mercancía).

El siguiente paso estuvo marcado por la pérdida de valor del metal de acuñación, de modo que el valor intrínseco de la moneda era muy inferior al valor que representaba

(esta etapa del denominado dinero signo o fiduciario culminará con la aparición del papel moneda). Sin embargo, como se seguían acuñando monedas de bronce, plata y oro, los mercaderes de la Baja Edad Media acudían a los orfebres para que les pesaran las monedas más valiosas y fijaran su valor real; los orfebres, por su parte, emitían unos certificados sobre las monedas depositadas bajo su custodia. Pronto, los mercaderes consideraron más seguros y cómodos estos certificados, y de la evolución de estos certificados de depósito nació el billete bancario, así como también el oficio de banquero.

En la antigüedad el valor de las monedas estaba en relación directa con el material en el que habían sido fabricadas, como en el caso de este sextercio romano de bronce.

Los bancos disponían de unos depósitos que rara vez eran reclamados por sus titulares. Los orfebres-banqueros rápidamente descubrieron que sólo guardando una pequeña cantidad de disponibilidad líquida para sus clientes, el resto de sus depósitos podía destinarse a préstamos siempre y cuando se mantuviera un determinado coeficiente de liquidez. Y así nació el dinero bancario: si un titular deposita dinero en un banco y éste lo presta a un tercero, dicho dinero está en tres manos distintas: la del titular de la cuenta, la del banco y la del prestatario. De ahí la noción de masa monetaria como la suma del efectivo en manos del público más los depósitos bancarios.

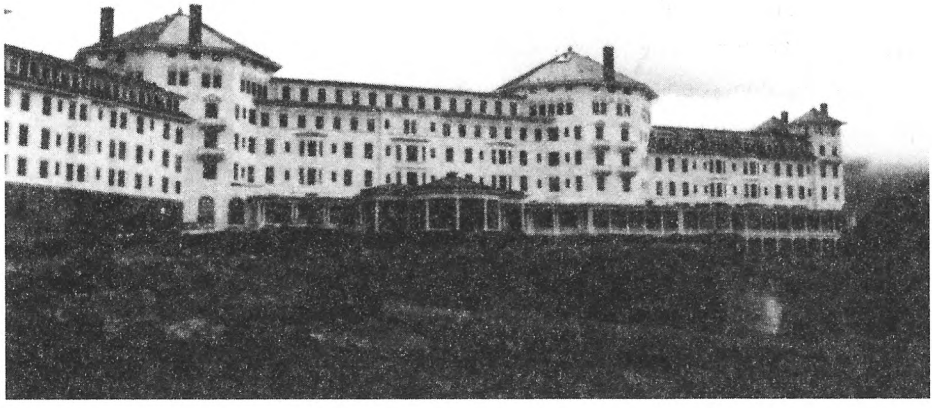
Patrones monetarios, valor fiduciario y monedas de cuenta

El patrón monetario es el metal al que se garantiza la convertibilidad de una moneda metálica o billete de banco ante su presentación en el banco emisor. Cada sistema monetario está basado en un metal determinado: oro, plata, bimetálico, divisa. Así,

La familia Fugger constituyó una de las principales entidades comerciales y financieras de los siglos XV y XVI. En la ilustración, Carlos V escucha a Jakob Fugger, quien financió su elección como emperador.

los gobiernos y los bancos emisores del papel moneda garantizaban la conversión automática en oro o plata de los billetes de banco emitidos, dependiendo de si se trataba de un sistema monetario basado en el patrón oro, o bien en un patrón bimetálico, en el que regía una determinada relación oro/plata. El dinero fiduciario se basa en la confianza del público en el banco emisor, que garantiza su conversión automática en el metal precioso del patrón monetario.

El patrón oro perduró hasta la Primera Guerra Mundial. En la posguerra fue sustituido por el patrón cambio-oro, basado en dos monedas fuertes que garantizaban su cambio en oro: el dólar y la libra esterlina. Como todos los países realizaban los pagos del comercio internacional en estas divisas fuertes, progresivamente basaron sus reservas en dichas monedas, hasta que en 1971 Estados Unidos abolió la convertibilidad del dólar en oro, hecho que supuso el abandono definitivo del patrón oro. Dicho patrón fue sustituido por el patrón fiduciario, que está basado en la confianza en unas divisas fuertes que constituyen las reservas de los bancos centrales de los distintos países.



El Mount Washington Hotel, de Bretton Woods, donde en 1944 tuvo lugar la Conferencia Monetaria y Financiera de las Naciones Unidas. Aquí se establecieron una serie de acuerdos que sustituían a los que se tomaron tras la Primera Guerra Mundial y que perduraron hasta 1971, cuando Estados Unidos abolió la convertibilidad del dólar en oro.

Divisas y tipos de cambio: ¿por qué unas monedas valen más que otras?

Cada moneda emitida por un banco central extranjero recibe el nombre de divisa y constituye el medio de pago utilizado en el comercio internacional. Normalmente, las operaciones de comercio internacional se pagan en la moneda del país exportador, aunque tienen una cierta preponderancia los pagos en divisas fuertes, como el dólar norteamericano o el euro. El valor por el que se cambia una divisa por otra es lo que se denomina tipo de cambio. Las divisas son convertibles si se pueden cambiar con otras monedas en función de los valores determinados por el comportamiento libre del mercado de divisas, es decir, cuando el tipo de cambio que afecta a esta divisa es flexible.

De esta manera, en el mercado de divisas, el dólar ($) se puede cotizar a un valor determinado con respecto al euro (€): 1 $ = 0,69 € (o lo que es lo mismo, se necesita 1,449 $ para comprar 1 €); por su parte, los tipos de cambio de la libra esterlina (£) pueden corresponder a 1,11 € o 1,61 $, y los de 100 yenes japoneses (¥) a 0,0067 £, 0,0075 € o 0,0108 $. Esto significa que si se realiza la compra de una máquina en Estados Unidos que cuesta 10.000 $ y se dispone de euros habrá que comprar dólares por valor de 6.900 €; si se dispone de libras esterlinas, habrá que pagar: 10.000/1,61 = 6.211, 18 £.

Cuando la divisa es de tipo de cambio fijo significa que su gobierno ha establecido un tipo de cambio predeterminado e invariable en relación a las demás divisas, con escaso margen de variación. Las monedas convertibles que cotizan libremente en los mercados de divisas presentan unas bandas de oscilación en relación a otras divisas, que es deseable que no sean superiores al 1%, ya que de lo contrario afectaría a la estabilidad de los tipos de cambio.

La determinación de los tipos de cambio, sean de tipo flexible o fijo, tienen una gran influencia en la competitividad de los países. Una inflación interna muy aguda encarece los productos de un país y reduce sus posibilidades de exportación, con lo que también se reduce su nivel de actividad, con los efectos negativos que esto puede suponer para el empleo. Es por este motivo que los países con tasas de inflación elevadas se ven forzados a devaluar sus monedas respecto a las demás divisas, con el fin de incrementar su competitividad a nivel internacional.

Se dice que una moneda se deprecia respecto a otra divisa cuando se necesita un importe creciente para adquirir dicha divisa. Así, si el dólar se deprecia respecto al euro significa que para comprar 1 € se necesita, por ejemplo, 1,60 $ en lugar de 1,449 $ como antes, es decir, para comprar 1 € ahora se necesita pagar un precio superior, ya que el dólar se ha devaluado respecto al euro. Y una moneda puede simultáneamente devaluarse respecto a unas divisas y revaluarse respecto a otras.

Además de los tipos de cambio de las divisas de dos países, también influye la evolución de sus índices de precios. Así, por ejemplo, si en el País 1 se registra un mayor aumento de los precios p_1, comparado con el aumento de los precios p_2 registrado en el País 2, el tipo de cambio entre ambas divisas variará en función de la variación de los índices de precios de los dos países.

Así, por ejemplo, si el tipo de cambio entre las divisas de estos países es E, dicho tipo de cambio variará en función de las variaciones relativas de precios p_1 y p_2, es decir:

$$\text{Nuevo tipo de cambio} = E \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

Si los precios del País 1 suben más que los del País 2 su tipo de cambio aumentará, es decir, tendrá tendencia a devaluarse; y en caso contrario, si son los precios del País 2 los que registran un mayor aumento relativo, la divisa del País 1 tenderá a apreciarse respecto a la del País 2.

LA PARIDAD DEL PODER ADQUISITIVO Y EL VALOR DE LAS DIVISAS

Para responder a por qué razón unas divisas valen más que otras es necesario introducir otro concepto: la paridad del poder adquisitivo de una moneda respecto a otra. Con 1 $ se puede comprar una cesta de determinados productos, y hay que averiguar si con otra moneda, aplicando el tipo de cambio vigente, se pueden adquirir más o menos productos. Es decir, si, por ejemplo, con 69 céntimos de euro se pueden comprar o no los mismos productos de la cesta de productos que se compra con 1 $. ¿Se pueden comprar con 69 € cien veces los productos de la cesta de 1 $ que también se comprarían con 100 $? Resulta obvio que si el dólar se devaluase un 10,4% con respecto al euro, para comprar una cesta de 1 $ en la nueva situación se necesitarían sólo 62,5 céntimos de euro, en lugar de los 69 céntimos que se requerían antes.

Por ejemplo, si se realiza la compra con euros de una cámara fotográfica que cuesta 150 € en Estados Unidos, con un tipo de cambio de 1 $ = 0,69 €, la cámara costaría 0,69 €/$ · 150 $ = 103,50 €.

Si el dólar se devalúa un 10,4% respecto al euro y baja su tipo de cambio hasta 1 € = 0,625 € (o 1 € = 1,6 $), entonces la cámara fotográfica pagada en euros será algo más barata: 0,625 €/$ · 150 $ = 93,75 €.

También podría suceder que el euro se devaluase respecto al dólar (o lo que es lo mismo, que el dólar registre una apreciación respecto al euro) y que ahora sólo hubiese que pagar 1,25 $ por 1 € (1 $ = 0,80 €). En tal caso, el precio de la cámara fotográfica se encarecería respecto al comprador europeo: 0,80 €/$ · 150 $ = 120 €.

Así pues, cuando en un país se devalúa su divisa respecto a la de otro país, sus productos de exportación resultan más baratos para el país extranjero, y a la inversa, las importaciones de este país extranjero se encarecen. En este caso, se dice que la paridad adquisitiva de tal país se ha deteriorado.

Por otra parte, se define la relación real de intercambio de un país como el cociente entre el precio medio de sus exportaciones y el precio medio de los productos importados, es decir:

$$\text{Relación real de intercambio} = \frac{\text{Precio medio de las exportaciones}}{\text{Precio medio de las importaciones}}.$$

Cuanto más elevada sea la relación real de intercambio de un país, más ventajas obtendrá del comercio internacional, ya que ello significa que vende productos de precios elevados a cambio de muchos más productos de precios más reducidos. En el comercio internacional todos los países buscan una ventaja comparativa, es decir, intentan exportar e importar unos determinados productos que les generen una relación real de intercambio favorable.

Los tipos de cambio de las distintas divisas son consecuencia de las transacciones realizadas en los mercados financieros según las necesidades de pagos internacionales de distintos agentes: bancos, bancos centrales, empresas multinacionales, instituciones financieras (fondos de inversión, fondos de pensiones, compañías aseguradoras, etc.). Las divisas más demandadas son las más utilizadas en los pagos internacionales, y suelen ser las de los países con economías más sólidas. Sin embargo, en la demanda de divisas influyen igualmente los tipos de interés pagados en los países de origen, así como las expectativas de cotización futura de las divisas. En algunas divisas también influyen las intervenciones de los bancos centrales para mantener los tipos de cambio infravalorados, para así favorecer las exportaciones. Es el caso de Estados Unidos, China y Japón, que mantienen sus divisas devaluadas con respecto al euro, para favorecer así su comercio internacional.

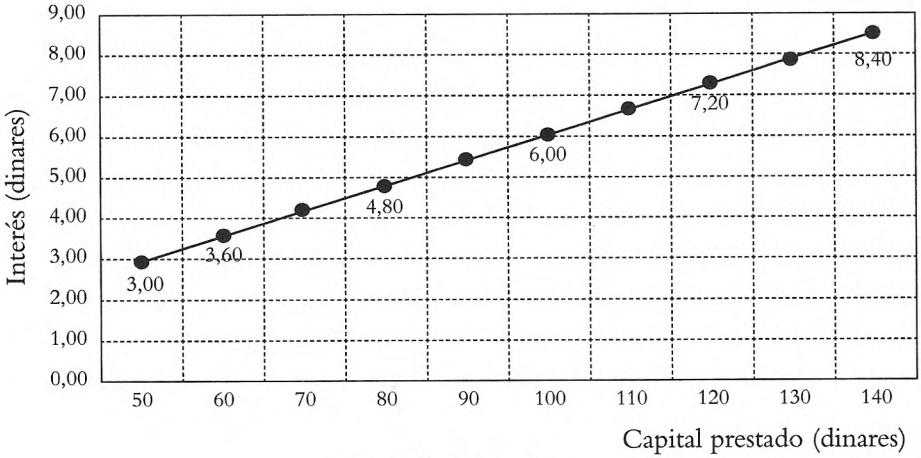
Los algoritmos más sencillos y prácticos

A continuación se describen las reglas más sencillas de la aritmética mercantil que fueron desarrolladas desde el Renacimiento hasta finales del siglo XX. La primera de ellas es la regla de tres simple directa, la cual plantea y resuelve problemas en los que dos variables son directamente proporcionales (si una aumenta, la otra también aumenta; si disminuye, la otra también disminuye). Por ejemplo, un prestamista gana 3 dinares en un préstamo de 50 dinares, ¿cuánto ganará en un préstamo de 120 dinares?

$$\begin{aligned} 50 \text{ dinares} &\longrightarrow 3 \text{ dinares} \\ 120 \text{ dinares} &\longrightarrow x \text{ dinares.} \end{aligned}$$

Como es bien sabido, la cuestión se resuelve del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 50/120 &= 3/x \\ 50x &= 120 \cdot 3 \\ 50x/50 &= 120 \cdot 3/50 \\ x &= 120 \cdot 3/50 = 7{,}20 \text{ dinares.} \end{aligned}$$



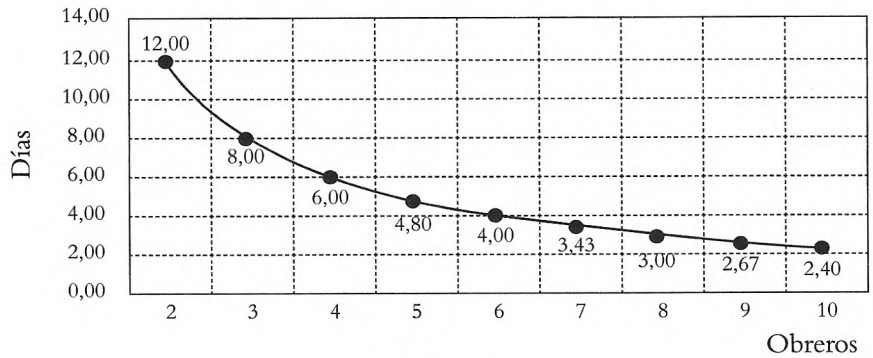
Regla de tres directa.

Por su parte, la regla de tres inversa plantea y resuelve problemas en los que dos variables son inversamente proporcionales (si una aumenta, la otra, en cambio, disminuye), como en el ejemplo siguiente: 2 albañiles construyen una pared en 12 días, ¿en cuántos días la construirán 5 obreros?

2 personas ———— 12 días
5 personas ———— x días.

El problema se resuelve del siguiente modo:

$$2/5 = x/12$$
$$2 \cdot 12 = 5x$$
$$5x/5 = 2 \cdot 12/5$$
$$x = 2 \cdot 12/5 = 4{,}80 \text{ días} = 4 \text{ días, } 19 \text{ horas, } 12 \text{ minutos.}$$



Regla de tres inversa.

Finalmente, una regla de tres compuesta resuelve problemas como el siguiente: si 40 trabajadores, trabajando 8 horas diarias, pintan 320 m de valla en 10 días, ¿en cuántos días pintarán 440 m de la misma valla 55 pintores trabajando 6 horas por día?

Pintores	Horas	Metros	Días
40	8	320	10
55	6	440	x
Inversa	Inversa	Directa	

La resolución del problema es la siguiente:

$10/x = 55/40 \cdot 6/8 \cdot 320/440$

$x = 10 \cdot 440/320 \cdot 8/6 \cdot 40/55 = 13{,}3$ días $= 13$ días, 8 horas.

El operador sigma

El operador sigma (Σ, la letra griega sigma mayúscula) es muy utilizado en las formulaciones matemáticas de teoría económica y representa el sumatorio; indica, por lo tanto, que tiene que realizarse una operación de suma. Por ejemplo, para indicar $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ se puede emplear la expresión $\sum_{i=1}^{4} x_i$.

El signo Σ delante de x_i dice que se han de sumar todos los valores de x_i y los números que se encuentran encima y debajo indican los límites de la suma, o sea el menor y el mayor de los subíndices que deben aparecer en la suma que se está desarrollando.

La suma $\sum_{k=3}^{6} x_k$ es $x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ y la suma $\sum_{j=m}^{n} x_j$ es $x_m + x_{m+1} + \ldots + x_{n-1} + x_n$.

Los subíndices sólo pueden tomar valores enteros. La suma total no cambia si únicamente se modifica la letra del subíndice.

Así, $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{m} x_j = \sum_{k=1}^{m} x_k$.

El término que sigue al operador sigma se llama sumando. En $\sum_{k=1}^{m} x_k$, el sumando es x_k.

ECUACIONES E INECUACIONES

Una ecuación es una expresión matemática que incluye una igualdad, números o constantes y letras, llamada incógnitas o variables. Únicamente algunos valores de estas incógnitas hacen que se cumpla la expresión indicada. La ecuación más sencilla tiene sólo una incógnita y ésta no está elevada al cuadrado ni al cubo. Por ejemplo, $x + 12 = 25 - 3x$ es una ecuación de primer grado, $12 + x^2 - 6x = 3$ es de segundo grado y $9 - 3x^2 - 6x^3 = -12$ es de tercer grado. En el siglo XIII Leonardo de Pisa resolvía problemas como éste: un platero tiene oro de ley 0,975 y oro de ley 0,750, y quiere obtener un lingote de oro de 2 kilos y ley 0,900, ¿qué cantidad de oro debe tomar de cada clase? La cuestión se resuelve del siguiente modo:

x kg ———— es el peso del oro de ley 0,975
$(2 - x)$ kg ———— es el peso del oro de ley 0,750

$x \cdot 0{,}975 + (2 - x) \cdot 0{,}750 = 2 \cdot 0{,}900$
$x \cdot 0{,}975 + 2 \cdot 0{,}750 - 0{,}750 \cdot x = 1{,}800$
$x \cdot 0{,}975 - 0{,}750 \cdot x = 1{,}800 - 2 \cdot 0{,}750$
$x \cdot 0{,}225 = 1{,}800 - 1{,}500$
$x \cdot 0{,}225 = 0{,}300$
$x = 0{,}300/0{,}225 = 4/3 = 1\ 1/3$ kg de ley 0,975
$(2 - x) = 2 - 1\ 1/3 = 2/3$ kg de ley 0,750.

Fibonacci también planteó y resolvió problemas de segundo grado como el siguiente: la superficie de un campo rectangular es 2.400 m^2. Se conoce que mide 20 m más de largo que de ancho. Calcular las dimensiones del campo. De este modo, se plantea que el ancho ($\times$) multiplicado por el largo ($x + 20$) da 2.400 m^2. Una ecuación de segundo grado estándar es: $ax^2 + bx + c = 0$ y la fórmula que permite calcular la incógnita x es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En este caso:

$x \cdot (x + 20) = 2.400;\ x^2 + 20x = 2.400;\ x^2 + 20x - 2.400 = 0$

La suma de los 8 primeros números impares se indicaría de este modo:

$$\sum_{j=0}^{8}(1+2j) = (1+2\cdot 0)+(1+2\cdot 1)+(1+2\cdot 2)+(1+2\cdot 3)+(1+2\cdot 4)+(1+2\cdot 5)+$$
$$+(1+2\cdot 6)+(1+2\cdot 7)+(1+2\cdot 8) = 1+3+5+7+9+11+13+15+17.$$

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot1\cdot(-2.400)}}{2\cdot1}=\frac{-20\pm\sqrt{10.000}}{2}=\frac{-20\pm100}{2}=\begin{cases}\dfrac{-20+100}{2}=40\text{ m}\\[2ex]\dfrac{-20-100}{2}=-60\text{ no es posible}\end{cases}$$

$x+20\text{ m}=40+20=60\text{ m}.$

La solución obtenida para las dimensiones del campo es, por lo tanto, 40 m × 60 m.

Las inecuaciones, por su parte, son parecidas a las ecuaciones, pero en lugar de contener un signo igual (=) cuentan con un signo de desigualdad que puede ser de cuatro tipos:

$\leq$ menor o igual que
$<$ menor que (estrictamente)
$\geq$ mayor o igual que
$>$ mayor que (estrictamente).

La inecuación de una variable $x - 7 \geq 13$ representa a todos los números que restados de 7 dan un resultado mayor o igual que 13. Las inecuaciones se resuelven de una manera muy parecida a las ecuaciones. Por ejemplo:

$$x - 7 \geq 13;\ x - 7 + 7 \geq 13 + 7;\ x \geq 20.$$

La solución de esta inecuación es el conjunto de todos los números iguales o mayores que 20. En algunos casos no se comportan exactamente igual las ecuaciones que las inecuaciones, como en el ejemplo siguiente:

ecuación $-\frac{x}{12}=3;\ -x=3\cdot12;\ -1\cdot(-x)=1\cdot36;\ x=-36.$

inecuación $-\frac{x}{12}\geq3;\ -x\geq3\cdot12;\ -1\cdot(-x)\leq(-1)\cdot36;\ x\leq-36.$

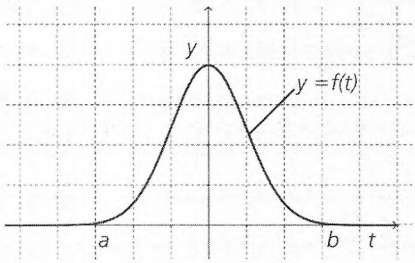
En este ejemplo, para resolver la inecuación es preciso invertir el signo de desigualdad. Esto puede comprobarse observando que si $7 < 13$, en cambio: $-7 > -13$.

La suma $\sum_{j=2}^{5}2^j$ resultaría $2^2+2^3+2^4+2^5=4+8+16+32.$

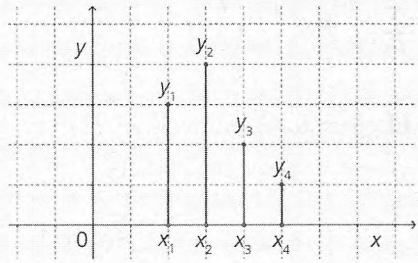
Y la suma $\sum_{l=1}^{3}(l+1)\cdot3^l=2\cdot3^1+3\cdot3^2+4\cdot3^3=6+27+108.$

VARIABLES DISCRETAS Y CONTINUAS

En muchas aplicaciones de las matemáticas actuales una variable se define en un conjunto discreto (lo que significa que dicha variable sólo puede tomar algunos valores, y entre dos de ellos la variable no tiene ningún valor). Esto se indica con $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Entre los valores x_1 y x_2 no hay ningún valor de la variable x. Hay otras variables, mucho más empleadas, que se definen en conjuntos continuos (lo que significa que dicha variable puede tomar todos los valores enteros, fraccionarios e irracionales). Un ejemplo sería $\{0 \leq t \leq \infty\}$. Muchas veces se precisa realizar la operación de integración ($\int f(x)dx$) para resolver diversas cuestiones relativas a funciones definidas en conjuntos continuos, como en el caso de la función o distribución de probabilidad normal. En el caso de variables de tipo discreto, la operación análoga a la integración en variables continuas es la suma (indicada con la letra griega Σ o sigma).



Función f(t) *de variable continua* t *definida en el conjunto* {a ≤ t ≤ b}.



Función y(x) *de variable discreta* x *definida en el conjunto* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Un conjunto de cuatro objetos puede nombrarse con letras (y números como subíndices): x_1, x_2, x_3 y x_4. Si se quiere hablar de un conjunto de n elementos (n puede variar según el problema) se indicará con $\{x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n\}$. Aquí, x_{n-1} indica el elemento anterior a x_n (que es el último). Para designar un elemento cualquiera de la serie (el que ocupa la posición i) se usa x_i. De este modo, por ejemplo, podemos indicar los precios de cuatro productos como p_1, p_2, p_3 y p_4, y las cantidades solicitadas de cada uno de ellos como q_1, q_2, q_3 y q_4.

Una de las aplicaciones más importantes de Σ es la expresión de series matemáticas, como la serie binomial. La ley de probabilidad binomial se aplica en el estudio de encuestas con dos respuestas posibles (por ejemplo, «sí» y «no») con una probabilidad de ocurrir cada una p y $q = (1 - p)$, valores que se determinan a partir de datos recogidos previamente. Las respuestas «sí» y «no» son dos sucesos complementarios y la suma de sus probabilidades $p + q = 1$, por tanto $q = 1 - p$.

Para conocer la probabilidad de tener hasta 3 respuestas «sí» debe calcularse la probabilidad de que ocurra uno de los sucesos siguientes: ningún «sí», un «sí», dos «sí» o tres «sí», que es $P(0 < k < 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$, mientras que la fórmula con el operador sigma es:

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{4}{k}p^k q^{n-k}=\binom{4}{0}p^0q^4+\binom{4}{1}p^1q^3+\binom{4}{2}p^2q^2+\binom{4}{3}p^3q=q^4+4pq^3+6p^2q^2+4p^3q.$$

La función que permite calcular la probabilidad de obtener entre 0 y k «sí» con n encuestas es la suma de las probabilidades hasta $P(k)$. Empleando el operador sigma queda del siguiente modo:

$$P(0)+P(1)+P(2)+...+P(k)=P(0\le k\le n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{k}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\binom{n}{0}p^0q^n+\binom{n}{1}p^1q^{n-1}+\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+...+\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^1+\binom{n}{k}p^kq^0.$$

El operador Σ también se aplica en las funciones estadísticas, por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned}\sum x_i &= a\cdot\sum y_i + b\cdot n\\ \sum x_i y_i &= a\cdot\sum y_i^2 + b\cdot\sum y_i\end{aligned}\right\},$$

que en forma desarrollada quedaría:

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2+...+x_n &= a\cdot(y_1+y_2+...+y_n)+b\cdot n\\ x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n &= a\cdot(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2)+b\cdot(y_1+y_2+...+y_n)\end{aligned}\right\}.$$

Igualmente, tiene su aplicación en las fórmulas estadísticas:

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y})}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{\frac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})\cdot(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})\cdot(y_2-\overline{y})+...+(x_n-\overline{x})\cdot(y_n-\overline{y})\right]}{\sigma_x\cdot\sigma_y},$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{N}}=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}},$$

$$\overline{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+....+x_nf_n}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i};\ N=\sum_{i=1}^{n}f_i=f_1+f_2+...+f_n.$$

¿Cómo se mide la inflación? Tipos de índices

La inflación es la subida anual de los precios de bienes y servicios, de forma que si no varían los salarios o los ingresos de los consumidores se deteriora su poder adquisitivo, lo que significa que con el mismo dinero podrán comprar menos cosas. La inflación se mide a través de la evolución de las variaciones de los precios. Los efectos de una elevada inflación son nocivos para la economía de un país, ya que reduce los niveles de renta de los consumidores y las familias, a la vez que reduce la competitividad económica en el comercio internacional, y de ahí la necesidad de controlarla. La estabilidad de los precios es una de las condiciones para la salud económica de una nación.

Las variaciones de los precios se miden con índices. Los precios son en realidad los precios medios de una cesta de bienes y servicios, en la que los distintos precios se ponderan con los pesos relativos de los productos que integran la cesta utilizada para calcular el precio medio. Se parte de un año base, al que se atribuye un valor 100, a partir del cual se van aplicando los incrementos de los precios medios ponderados registrados en los años posteriores.

Así, por ejemplo, si se toma como año base el año 0 con un índice = 100 y se registran los siguientes incrementos de precios en los años posteriores, la evolución del índice de precios será la siguiente:

	Δ anual en %	Índice de precios	Fórmula de cálculo
Año base	0,00	100,000	100 + 0
Año 1	1,25	101,250	100 + 1,250
Año 2	2,30	103,579	101,250 + (101,250) · 0,023
Año 3	1,50	105,132	103,579 + (103,579) · 0,015
Año 4	2,00	107,235	105,132 + (105,132) · 0,02
Año 5	3,00	110,452	107,235 + (107,235) · 0,03

Cálculo del índice de precios.

Los departamentos de estadística de un país elaboran numerosos índices de precios para varios productos, pero el más conocido es el índice de precios de consumo (IPC), elaborado a partir de una cesta fija de determinados productos utilizados normalmente por los consumidores (alimentos, ropa, vivienda, educación, transporte, etc.).

También se elaboran índices de precios para otros productos, como por ejemplo los de los productos industriales, los agrícolas, la construcción, la vivienda, etc.

La tasa de inflación de cada año (en %) se calcula de la forma siguiente:

$$\text{Tasa de inflación} = \frac{\text{Índice de este año} - \text{Índice del año pasado}}{\text{Índice del año pasado}} \cdot 100.$$

Existen muchas teorías para explicar por qué suben los precios. Algunas de ellas se muestran de forma algebraica, como la ecuación de transacciones elaborada por Irving Fisher. De acuerdo con esta teoría, el nivel de precios P de un país depende del volumen total de transacciones económicas (T), el total de dinero en circulación (M) y la velocidad de circulación (V) del dinero, es decir, la cantidad de veces que el dinero cambiaba de manos.

$$P \cdot T = M \cdot V.$$

LOS ÍNDICES DE PRECIOS

Para cuantificar la evolución de precios, cantidades de producción o valores respecto a un periodo de tiempo determinado se emplean los índices, de los cuales hay infinidad de definiciones. Si se desean calcular indicadores globales de la evolución de precios, cantidades de producción o valores de un país se debe partir de una serie temporal de los mismos. La comparación se realiza respecto a un año determinado, el año 0. Los índices de producción se calculan a precios constantes y los de precios, a producciones constantes.

Los índices más empleados para los índices de producción y precios son los de Laspeyres (Q_L, P_L), de Paasche (Q_P, P_P), y de Fisher (Q_F, P_F).

$$\text{Índices de Laspeyres: } Q_L = \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_0 q_0} \quad P_L = \frac{\sum p_t q_o}{\sum p_0 q_0};$$

$$\text{Índices de Paasche: } Q_P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_0} \quad P_P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t};$$

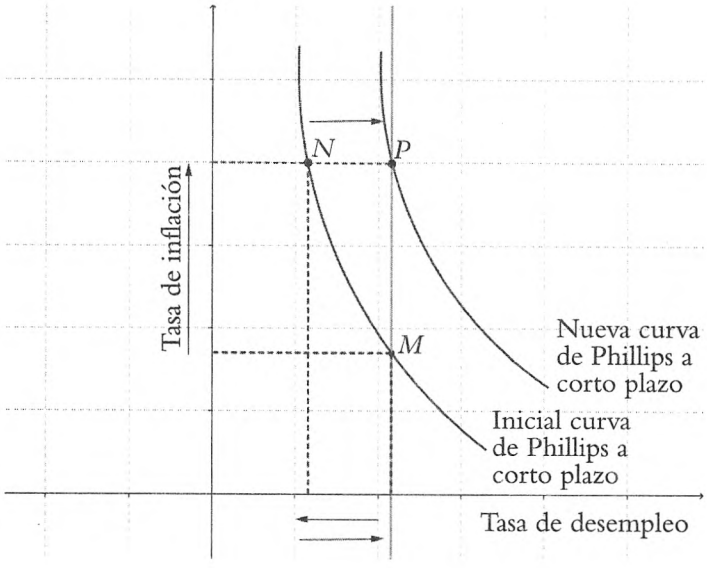
$$\text{Índices de Fisher: } P_F = \sqrt{P_L \cdot P_P} \quad Q_F = \sqrt{Q_L \cdot Q_P},$$

donde P = Precios y Q = Cantidades de producción, y $\sum p_0 q_t$ indica la suma de los valores de toda la producción de bienes del país en el año t, a precio constante p_0 del año 0, y $\sum p_0 q_0$, la suma de los valores de toda la producción de bienes del país en el año 0. Y lo mismo para las producciones a precio constante. El índice de Fisher es la media geométrica de los de Paasche y Laspeyres.

El economista estadounidense Irving Fisher, nacido en 1867 y fallecido en 1947, que entre otras aportaciones a la teoría económica desarrolló la ecuación de transacciones.

En esa igualdad, si se despeja la variable P, se obtiene esta nueva ecuación: $P = M \cdot V / T$. A partir de ella se deduce fácilmente que los precios aumentarán si se incrementa M, la masa monetaria en manos del público, y se mantienen invariables las otras dos variables V y T, o si aumenta la velocidad de circulación V del dinero. Y los precios disminuirán cuando disminuyan también la cantidad de dinero o la velocidad de circulación. Por el contrario, las variaciones de precios son inversamente proporcionales a las variaciones del volumen de transacciones: si la oferta de productos aumenta y la cantidad y velocidad de circulación del dinero se mantienen constantes, los precios bajan, y si las transacciones disminuyen (disminución de la producción), los precios aumentan.

Existen otras teorías para explicar el comportamiento de la inflación, como la curva de A.W. Phillips. Este autor relacionó la tasa inflación con la tasa de desempleo a partir de datos estadísticos del Reino Unido, elaborando una representación gráfica en la que la tasa de inflación estaba en el eje de ordenadas y la tasa de desempleo en el de abscisas. La curva de Phillips es decreciente, con un comportamiento parecido al de una curva de demanda: al elevarse los precios disminuye la demanda. El resultado fue la obtención de una relación también inversa entre el desempleo y la inflación motivada esencialmente por la subida de los salarios, es decir, con la inflación disminuye la tasa de desempleo, y al revés, una política de contención de precios trae como consecuencia un aumento del paro.



Curva de Phillips.

La inflación de precios puede estar producida por múltiples motivos: un aumento excesivo de la demanda puede generar un aumento de precios, si la producción (oferta) permanece invariable. Es lo que se conoce como inflación de demanda. Un incremento de los salarios, como consecuencia de una disminución del desempleo, así como un incremento de los precios de las materias primas, también puede generar inflación. Los precios suben aunque se mantenga una cierta tasa de paro, y se aceleran todavía más cuando hay expansión económica. En el último siglo los precios siempre han subido, incluso cuando había recesión. En períodos de recesión puede producirse una inflación de costes, es decir, los precios aumentan a pesar de que también se incremente el desempleo.

En casos de recesión económica muy intensa pueden darse situaciones de baja de los precios, es decir, deflación (inflación negativa). La deflación se produce cuando la masa monetaria y la velocidad de circulación del empleo disminuyen como consecuencia del aumento del desempleo y la disminución de crédito, y, al mismo tiempo, existe una situación de sobreproducción que empuja a las empresas a bajar precios para poder vender sus excedentes.

Otra situación límite es la hiperinflación, que se produce cuando los gobiernos deciden poner en circulación grandes masas de dinero (en otras palabras, ponen las máquinas de fabricar moneda a pleno rendimiento) para afrontar sus gastos o bien

inyectar liquidez a los consumidores, sin que varíe la estructura productiva del país, manteniéndose estancada o en recesión la actividad productiva. La hiperinflación suele ser de tres o más dígitos, o de más del 1.000%, y cuando es también muy elevada, hasta llegar incluso en un año a varias centenas por cien, se denomina inflación galopante.

En la década de 1920, cuando Alemania sufría una de las hiperinflaciones más fuertes de su historia, se produjeron situaciones como ésta: un billete de mil marcos era reconvertido en un billete de mil millones de marcos.

Cuando en un periodo de recesión económica, como a principios de la década de 1970 con la crisis del petróleo, se registra un gran aumento de los precios acompañado de un incremento del paro se produce el fenómeno conocido como estanflación.

El tipo de interés: el coste del dinero

El dinero, en un principio, no varía su valor nominal: un dólar es un dólar, un euro es un euro y una libra esterlina es una libra esterlina, es decir, el dinero se utiliza como unidad de cuenta para medir el valor de las cosas (bienes y servicios, casas, terrenos, riqueza). Es también un medio de pago generalmente aceptado, y como tal adquiere forma concreta: moneda metálica, billete de banco, transferencia, etc. Sin embargo, con el dinero se pueden comprar bienes y servicios, y éstos suelen variar de precio, de forma que a lo largo del tiempo, con una misma cantidad de dinero, a causa de las subidas de precios, cada vez se pueden comprar menos cosas, disminuye su poder

adquisitivo, o dicho en otras palabras, para comprar las mismas cosas se necesitará más dinero por culpa de la inflación.

El dinero se valora en función de la valoración de los bienes que se pueden comprar con él. Cuando hay inflación, se dice que el valor del dinero disminuye, y lo contrario sucedería en caso de reducción de los precios (deflación). Pero el dinero también tiene otra cualidad inherente, que es su liquidez, es decir, el hecho de su disponibilidad. Cuando una persona renuncia a la liquidez de su dinero, puede prestarlo a un tercero que lo precisa para adquirir unos bienes que necesita, y por cuya disponibilidad en un periodo de tiempo está dispuesto a pagar un precio adicional además de su devolución. Este precio que un tercero está dispuesto a pagar por el dinero prestado es el tipo de interés. Así pues, el tipo de interés es el precio del dinero.

El tipo de interés se define como un porcentaje a pagar por un capital prestado. Así, si se obtiene un préstamo de 1.000 € a tres años a un tipo de interés del 5% anual, cada año habrá que pagar 50 € en concepto de intereses, y al final de periodo, una vez devuelto el préstamo, se habrá pagado un total de 1.150 €.

Una persona puede necesitar una determinada cantidad de dinero para comprar un bien o un empresario otra cantidad de dinero para comprar una máquina, y ninguno dispone del dinero necesario para poder satisfacer sus necesidades. Para ello piden dinero prestado a un banco, pero a cambio de poder disponer del dinero deberán devolverlo en un plazo establecido y pagar un precio por la disponibilidad de este dinero. Este precio que pagarán por el dinero prestado es el tipo de interés. Por otra parte, otro ciudadano que disponía de dinero ocioso, renunciando a la liquidez que proporciona el dinero, lo había depositado en un banco, también a cambio de una retribución en forma de tipo de interés. Por lo tanto, el dinero tiene un precio tanto para el banco, que lo tiene que obtener de sus clientes pagando un precio para ello, como para el prestatario, que tendrá que devolver el préstamo más unos intereses.

El tipo de interés también es el precio que se paga como retribución de determinados activos financieros. Así, si un gobierno para obtener fondos emite deuda pública, bonos y obligaciones, letras del tesoro, etc., aparte de los plazos de amortización de los títulos, los retribuye con un determinado tipo de interés. Por ejemplo, el Estado puede emitir unos bonos al 3,5% de interés, o letras a corto plazo, a 3 o 6 meses, al 1% y 1,5% respectivamente. Las empresas privadas también pueden emitir títulos de renta fija (bonos, obligaciones) en el mercado de capitales, con unos tipos de interés determinados. Estas emisiones en forma de empréstito permiten a las empresas obtener dinero del mercado de capitales, pero para ello tendrán que pagar un coste, que es el tipo de interés.

Los distintos tipos de interés de los bancos centrales: Euribor, Reserva Federal...

Los bancos centrales de cada país fijan un tipo de interés básico, que es tipo de interés oficial, con el objetivo de controlar la cantidad de dinero en circulación, y de forma directa, también la inflación. Si se decide bajar el tipo de interés aumentará la masa de dinero en circulación, ya que los créditos serán más baratos, lo que animará el consumo privado y la inversión empresarial. Cuanta más cantidad de dinero haya en circulación, los consumidores tendrán más disponibilidades líquidas, créditos más fáciles, aumentará la demanda y los precios subirán. Por el contrario, si el crecimiento económico es excesivo y se dispara la inflación, los bancos centrales (Reserva Federal, Banco Central Europeo, etc.) tenderán a subir los tipos de interés básicos con el objetivo de frenar el consumo y la subida de los precios.

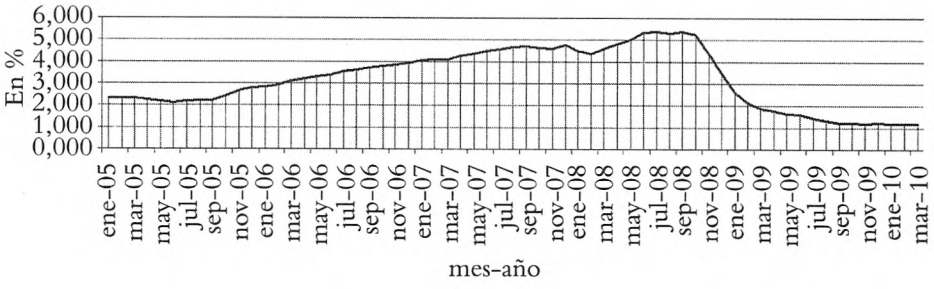
Este tipo de interés básico varía según los países o las zonas monetarias. Así, en enero de 2010, el Federal Reserve System (FED) de Estados Unidos lo tenía fijado en el 0,25%, el Banco Central Europeo en el 1%, el Banco de Inglaterra en el 0,50%, el Banco del Japón en el 0,10%, el Banco de Canadá en el 0,25%, el Banco de la Reserva Australiana en el 3,75%, el Banco Nacional Suizo en el 0,25%, etc. Este tipo de interés oficial es el que se utiliza como referencia y punto de partida en las subastas de dinero entre las entidades financieras para fijar el tipo de interés interbancario, es decir, el tipo de interés (precio del dinero) al que los bancos se prestan el dinero entre ellos.

Bancos Centrales	Tipo de interés
Banco Central Europeo	1%
Banco de Canadá	0,25%
Banco de Inglaterra	0,50%
Banco de Japón	0,10%
Banco de la Reserva Australiana	3,75%
Banco Nacional Suizo	0,25%
Reserva Federal de Estados Unidos	0,25%

Tipos de interés oficiales (a enero de 2010).

Estos tipos de interés interbancarios suelen ser ligeramente más elevados que los tipos de interés oficial. Así, el Euribor es el tipo de interés interbancario que se forma en la zona Euro. Se calcula a partir de los tipos interbancarios utilizados

en las operaciones de mercado abierto por los principales bancos europeos, y es el tipo de referencia utilizado en la mayoría de préstamos. En cualquier préstamo al consumo o hipotecario los bancos suelen utilizar el Euribor (o el tipo interbancario del Banco de Inglaterra o el FED, si se trata de Inglaterra o Estados Unidos) como tipo de referencia, más varios puntos.



Evolución del Euribor entre 2005 y 2010.

De hecho, existe un Euribor para cada una de las distintas operaciones de crédito, según sean a 1 mes, 3 meses, 6 meses, 12 meses... A su vez, los tipos de referencia interbancarios del FED, el Banco de Inglaterra y el Banco del Japón, también son distintos según sean a 1 día, 3 meses o 1 año. El cálculo del Euribor se realiza diariamente, antes de las 11 de la mañana, a partir de los tipos aplicados por los 64 bancos europeos más importantes: se eliminan los valores extremos (15% más altos y 15% más bajos) y se calcula la media aritmética. El tipo interbancario a un día, el Eonia, lo calcula el Banco Central Europeo a partir de los tipos interbancarios diarios utilizados por 48 bancos europeos.

Capítulo 3

Banca y seguros. Préstamos y tipos de interés

La incidencia de las matemáticas en el mundo de la banca posee su mayor importancia instrumental en el ámbito del cálculo de las cuotas de préstamos e hipotecas. La utilización de las funciones y las progresiones, son fundamentales en las decisiones financieras, como se verá en las páginas que siguen.

Interés simple e interés compuesto

En primer lugar habrá que definir algunos conceptos básicos, como el capital, el rédito y el tipo de interés. En economía, el capital es un factor de producción: es el valor de la aportación del empresario propietario, que invierte en instalaciones y maquinaria, es decir, en los denominados bienes de capital o inversión productiva. En el mundo de las finanzas, se asocia con la cantidad de dinero que uno posee, que se deposita en un banco y se destina a la adquisición de bonos, títulos de renta variable, renta fija u otra clase de activos financieros, o bien que se presta a un tercero a cambio de un rédito por un periodo determinado, que es un importe calculado aplicando un determinado porcentaje periódico sobre el capital prestado (diario, mensual, anual, etc.), y que se denomina tipo de interés.

Así pues, cuando uno pide una determinada cantidad C_0 a un banco, por ejemplo, para un periodo de tres años ($n = 3$) y a un tipo de interés anual del 6% (tipo de interés nominal $i = 6\%$), al cabo de tres años tendrá que haber devuelto el capital inicial más tres veces el 6% del capital, que es el rédito o importe de los intereses resultantes de aplicar el tipo de interés acordado. Por ejemplo, si $C_0 = 1.000$, el periodo del préstamo $n = 3$ años, el tipo de interés $i = 6\%$, al cabo de los tres años se tendrá que haber devuelto al banco 1.000 unidades monetarias más $3 \cdot (6/100) \cdot 1.000 = 180$, es decir, el capital más un rédito (intereses) de 60 unidades monetarias anuales (1.180 en total).

Cuando cada año se devuelve la misma cuantía de intereses, se dice que se aplica el tipo de interés simple, y el capital final C_n que hay que devolver al final

del periodo está compuesto por el capital inicial prestado más los intereses devengados y será:

$$C_n = C_0 + n \cdot i \cdot C_0 = C_0 (1 + n \cdot i).$$

Ésta es la fórmula del interés simple, donde C_0 es el capital prestado; i, el tipo de interés aplicado como % del capital (dividido por 100); n, el número de periodos temporales del préstamo a los que se aplica el tipo de interés; C_n, el capital total inicial más los intereses devengados, y $n \cdot i \cdot C_0$, el total de intereses devengados durante el tiempo de vigencia del préstamo.

Puede suceder que el problema sea el inverso, es decir, que el cliente del banco deposite un capital como importe de un depósito a plazo. El banco retribuirá el depósito bancario con un tipo de interés periódico, por ejemplo, al final de cada año. En tal caso el banco ingresará en una cuenta corriente del cliente los intereses devengados, ingreso que puede ser anual, trimestral, semestral o mensual, tal y como se establezca en el contrato del depósito a plazo.

El tipo de interés aplicado puede ser anual y liquidable por ejemplo una vez al año, al mes o al trimestre; en tal caso la cuota del tipo de interés ingresado en la cuenta del cliente será el interés anual, o dividido por doce o por cuatro según se trate. Pero puede ser que el tipo de interés sea mensual, trimestral o cualquier otra fracción de año. Entonces se aplica la misma fórmula, pero expresando el tiempo n en meses, trimestres o lo que convenga.

También podría darse el caso de que al cliente le interese invertir los réditos obtenidos en el depósito bancario al mismo tipo de interés. En tal situación, el nuevo tipo de interés que se aplica se denomina interés compuesto. Así pues, y siguiendo el ejemplo anterior, al final del primer año, el cliente reinvertirá el capital final de 1.060 unidades monetarias. Al final del segundo año tendrá un capital de 1.123,60, debido a que además de las 120 unidades monetarias de intereses también tendrá el 6% de las 60 unidades obtenidas el primer año, que es un importe de 3,6. Y al final del tercer año tendrá un capital final de 1.191,02, es decir, una rentabilidad global del 19,10% para todo el periodo; 1,1 puntos más que si se hubiese aplicado el tipo de interés simple.

El tipo de interés aplicado a un préstamo, o como rendimiento de un capital, puede ser mensual, trimestral o anual. Por consiguiente, un tipo de interés nominal del 12% anual pero aplicado mensualmente con un 1% mensual acumulativo no es lo mismo que un 12% nominal aplicado anualmente. Es por ello que se define la

FÓRMULA GENERAL DEL INTERÉS COMPUESTO

Generalizando a un periodo de n años, la fórmula general del interés compuesto en el caso de un depósito o préstamo con un capital inicial C_0 se obtiene así: el primer año $n = 1$ se generarán unos intereses iguales a $C_0 \cdot i$. A su vez, en el segundo periodo $n = 2$, pasarán a engrosar el capital inicial $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i)$. Y así sucesivamente hasta el año final, n (i en tanto por uno).

$n = 0$, C_0,

$n = 1$; $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i)$,

$n = 2$; $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i) + C_0 \cdot (1 + i) \cdot i = C_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2$,

$n = 3$; $C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i)^2 + C_0 \cdot (1 + i)^2 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)^2 = C_0 \cdot (1 + i)^3$,

.....

$n = n$; $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$.

Se deduce como fórmula del interés compuesto: $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$. De esta fórmula se puede deducir a su vez el valor del tipo de interés i o del número de periodos n, una vez dados los valores de las demás variables:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n; \quad \frac{C_n}{C_0} = (1+n)^n;$$

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}};$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1.$$

Por otra parte, si se pasa a formular $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$ en la notación logarítmica, se obtiene:

$$\log C_n = \log C_0 + n \cdot \log(1+i);$$

$$n \cdot \log(1+i) = \log C_n - \log C_0;$$

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}.$$

Estas fórmulas son utilizadas para calcular tanto el valor futuro de un capital invertido a un tanto por ciento determinado, como para calcular el interés anual que se ha obtenido de un capital final a partir de un capital inicial y también para calcular cuántos años o periodos tienen que transcurrir para obtener un capital final determinado a partir de un capital inicial.

tasa de interés anual equivalente. Un préstamo con un tipo de interés anual *i*, pero aplicado en *n* periodos del año (por ejemplo, meses) tendrá la siguiente tasa de interés anual equivalente:

$$\text{Tasa de interés anual equivalente} = (\text{TAE}) = \left[\left(1+\frac{i/100}{n}\right)^{n}-1\right]\cdot 100.$$

Si $i = 12\%$ anual, pero se aplica en 12 mensualidades ($n = 12$), la tasa de interés anual equivalente será:

$$\text{Tasa de interés anual equivalente} = (\text{TAE}) = \left[\left(1+\frac{12/100}{12}\right)^{12}-1\right]\cdot 100 = 12.682503\%,$$

donde $i = 12\%$ anual, $n = 12$ meses.

Si la aplicación del tipo de interés fuera trimestral, sería:

$$\text{Tasa de interés anual equivalente} = (\text{TAE}) = \left[\left(1+\frac{12/100}{4}\right)^{4}-1\right]\cdot 100 = 12.550881\%,$$

donde $i = 12\%$ anual, $n = 4$ trimestres.

El tipo de interés nominal está sesgado por los efectos de la inflación. Así, por ejemplo, si un particular ha invertido en unos títulos de deuda pública, que le dan un tipo de interés del 5%, y la inflación es del 3%, el tipo de interés real, es decir, el que realmente le determina el aumento de poder adquisitivo real que le proporciona el rendimiento de sus títulos, vendrá dado, grosso modo, por la diferencia entre el tipo de interés nominal de la emisión y la tasa de inflación.

$$\text{Tipo de interés real} = \text{Tipo de interés nominal} - \text{Tasa de inflación}.$$

¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para duplicar el capital invertido?

La aplicación de la fórmula del interés compuesto es sumamente sencilla. Se trata de conocer el valor final de una inversión a un tipo de interés y un periodo de tiempo determinados. Por ejemplo, si se invierte un capital inicial $C_0 = 10.000$ € a 3 años a un tipo de interés del 5% anual, ¿cuál será el valor del capital final C_3?

$$C_0 = 10.000\ €;\ i = 5\%\ (0{,}05),\ n = 3 \text{ años}.$$

Aplicando la fórmula $C_3 = C_0 \cdot (1 + i)^3$ se obtiene:

$$C_3 = 10.000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 10.000 \cdot 1{,}157625 = 11.576{,}25 \text{ €}.$$

Pero los problemas planteados por la aplicación del interés compuesto se complican cuando las otras variables del problema se convierten en incógnitas que hay que despejar. Así, por ejemplo, una de las cuestiones que puede plantearse un inversor es saber cuánto tiempo tendrá que esperar invirtiendo un capital a un tipo de interés determinado para poder duplicar el capital, u obtener una cantidad de dinero determinada.

Veamos un ejemplo sencillo: se quiere calcular cuánto tiempo tiene que transcurrir para que se duplique un capital invertido de 10.000 € aplicando un tipo de interés determinado, por ejemplo $i = 5\%$. Dados los valores del capital inicial $C_0 = 10.000$ € y final $C_n = 20.000$ € y del tipo de interés $i = 5\%$, se aplicará la fórmula:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)},$$

de la que se deduce el resultado siguiente:

$$n = \frac{\log 20.000 - \log 10.000}{\log(1+0{,}05)} = \frac{4{,}30103 - 4{,}00}{0{,}0211892991} = 14 \text{ años}.$$

¿QUÉ INTERÉS ME ESTÁN COBRANDO?

El comprador de un coche puede plantearse saber qué tipo de interés le están aplicando en realidad. El vendedor le dice que el precio del coche son 10.000 €, que tendrá que pagar en 5 años, de forma que el monto total de amortización del capital e intereses será de 15.000 €. El comprador desea calcular el tipo de interés aplicado.

Conociendo el número de años $n = 5$, el valor inicial $C_0 = 10.000$ € y el valor final $C_n = 15.000$ € se puede calcular el tipo de interés i aplicado mediante la fórmula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1.$$

Aplicando los valores del problema, el tipo de interés aplicado será:

$$i = \sqrt[5]{\frac{15.000}{10.000}} - 1 = \sqrt[5]{1{,}5} - 1 = 1{,}08447 - 1 = 0{,}08447 = 8{,}447\%.$$

Los logaritmos se calculan fácilmente con una calculadora científica, por medio de las fórmulas matemáticas de un programa como el Excel o directamente a través de un buscador (buscar log x).

Préstamos e hipotecas. ¿Cómo calcular la cuota de un préstamo? Tipos de interés aplicados a los préstamos

Normalmente, los consumidores o los empresarios, si no disponen del dinero suficiente para adquirir bienes de consumo duradero o maquinaria e instalaciones industriales o de negocios, suelen solicitar un préstamo a una entidad bancaria. En el caso de adquisición de bienes inmuebles, los préstamos que se conceden son con la garantía del inmueble adquirido, es decir, se trata de bienes con garantía hipotecaria o hipotecados. Esto significa que si el deudor no puede hacer frente a las obligaciones del préstamo, la propiedad del inmueble revierte a la entidad bancaria prestamista. El reembolso de los créditos y préstamos hipotecarios se denomina amortización del crédito o préstamo, y se realiza mediante el pago periódico (mensual, trimestral, semestral, anual, etc.) a la entidad prestamista de una cuota que incluye una parte de pago de intereses y el resto en concepto de devolución del capital prestado.

La mayor parte de los créditos y préstamos hipotecarios se conceden aplicando cuotas constantes, es decir, periódicamente se van realizando unos pagos idénticos que incluyen unas partes variables de intereses y de amortización del capital prestado. Las cuotas pueden pagarse al principio o al final de cada periodo, con lo cual variará tanto el monto de los intereses devengados como el del capital amortizado. Normalmente, las cuotas de amortización de un préstamo se realizan al final de cada periodo.

Sin embargo, existen otros sistemas de amortización de préstamos: pueden haber periodos de carencia en los que sólo se pagan intereses, cuotas variables, en las que se amortiza en cada periodo una parte fija del capital más los intereses del capital pendiente de amortizar. En este sistema (sistema alemán o de amortización constante) las cuotas periódicas son variables, ya que incluyen la parte fija de amortización del capital y la parte variable de los intereses.

Pero el sistema de amortización de préstamos más utilizado es el sistema francés o de amortización progresiva. Consiste en determinar una cuota constante (normalmente de pago al final de cada periodo), en la que hay una parte que corresponde al pago de intereses y otra, a la amortización del capital. En los primeros años de amortización del préstamo, la mayor parte de la cuota está integrada por el pago de intereses, y sólo una pequeña parte corresponde a la amortización de capital. A me-

dida que van pasando los periodos, al quedar menos capital para devolver, parte de los intereses va disminuyendo y aumenta la amortización del capital. Ahora bien, ¿cómo se calcula el monto de la anualidad constante para amortizar un préstamo de C_0 a un tipo de interés i y un tiempo de n periodos (años)? Para realizar este cálculo, se tiene que emplear la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica.

Una progresión geométrica es una serie de números en la que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por otro número fijo que se denomina razón de la serie. Así, la serie de números $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_{n-1}, a_n$ (en la que el subíndice indica el número de orden del término: 1 para el primero, n para el último) constituye una progresión geométrica siempre que, dada una razón r, se cumpla la condición: $a_2 = a_1 \cdot r, a_3 = a_2 \cdot r \ldots a_n = a_{n-1} \cdot r$, de modo que $r = a_n / a_{n-1}$. En consecuencia, expresando la serie en progresión geométrica en función del primer elemento a_1, se tendrá:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_1 \cdot r^2 \\ &\ldots \\ a_n &= a_1 \cdot r^{n-1}. \end{aligned}$$

Si se define la suma S_n de esta progresión geométrica se obtiene:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Si se multiplican los dos miembros de la igualdad (1) por la razón r se obtiene:

$$r \cdot S_n = r \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n.$$

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + r \cdot a_n. \qquad (2)$$

(dado que al multiplicar un término a_i por la razón r se obtiene el término siguiente a_{i+1}, es decir, $a_{i+1} = r \cdot a_i$).

Haciendo la resta $r \cdot S_n - S_n$, o sea (2) – (1), se obtiene:

$$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n; S_n \cdot (r-1) = r \cdot a_n - a_1,$$

de donde

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}. \qquad (3)$$

que es la fórmula de la suma de una progresión geométrica. Teniendo en cuenta que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ y sustituyendo dicho valor en (3) se obtiene:

$$S_n = \frac{r \cdot a_1 \cdot r^{n-1} - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r-1};$$

que es otra forma de expresar la fórmula de la suma de progresión geométrica:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r-1}. \tag{4}$$

Para el caso de un préstamo con una anualidad a constante durante un periodo de n años y con un tipo de interés i, el valor futuro C_n del pago de las n anualidades a será:

$$C_n = a \cdot (1+i)^0 + a \cdot (1+i)^1 + \ldots + a \cdot (1+i)^{n-2} + a \cdot (1+i)^{n-1} =$$
$$= a + a \cdot (1+i)^1 + \ldots + a \cdot (1+i)^{n-2} + a \cdot (1+i)^{n-1}.$$

El resultado es la suma de una progresión geométrica de razón $(1 + i)$ y primer término a.

Aplicando la fórmula $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r-1}$ (4) de la suma de la progresión geométrica se obtiene:

$$C_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{5}$$

Teniendo en cuenta que $C_n = C_0(1+i)^n$ y sustituyendo este valor en (5) se obtiene:

$$C_0(1+i)^n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Y despejando la variable a, que es la anualidad constante, se obtiene la fórmula para calcular la anualidad a constante de un préstamo:

$$a = \frac{C_0 \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}, \tag{6}$$

donde C_0 es el valor del préstamo.

SUCESIONES

La progresión geométrica es uno de los tipos de sucesiones más sencillas. Una sucesión es un conjunto ordenado de números en el que puede preverse el valor de un determinado término mediante una fórmula matemática en la que aparece una variable que indica la posición que ocupa dicho término en la sucesión. Esta fórmula se llama término general. En general, es una función de la variable posición (que suele llamarse *n*). La fórmula del término general es una función: $a_n = f(n)$, que depende de la posición del término *n*.

Existe otro tipo de sucesiones en las que el valor de un término se obtiene con una fórmula en la que aparecen algunos términos anteriores. Es el caso de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13..., en la que cada término es la suma de los dos anteriores. O bien la sucesión de término general $a_n = n + a_{n-1}$; $a_1 = 3$, que es 3, 5, 8,12,17, 23...

En toda sucesión es necesario indicar el valor del término o términos que inician la sucesión y su número de términos, si es una sucesión limitada.

Una sucesión puede constar de un número limitado o de una infinidad de términos, de manera que se puede alargar tanto como se desee obteniendo nuevos términos con la fórmula de su término general. Existen sucesiones crecientes (si el valor de sus términos va aumentando) y decrecientes (si el valor va disminuyendo), limitadas o ilimitadas.

Las sucesiones se emplean de manera generalizada en la matemática financiera. La sucesión que proporciona los intereses que devenga, a interés simple, un capital inicial unidad, con tasa de interés del 20% anual, a un año, dos años, etc., es 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2... Es una sucesión creciente ilimitada de término general $a_n = 1 + 0{,}2 \cdot n$.

La sucesión que proporciona los intereses que devenga, a interés compuesto, un capital inicial unidad, con tasa de interés del 20% anual a un año, dos años... es 1; $1{,}2^2$; $1{,}2^3$; $1{,}2^4$... Es una sucesión creciente ilimitada de término general $a_n = (1 + 0{,}2)^n$.

La sucesión 21, 23, 25, 27, 29, 31... es una sucesión creciente, ilimitada de término general $a_n = 21 + 2\,(n - 1)$; $a_1 = 21$.

La sucesión 1, 5, 25, 125, 625, 3.125... es una sucesión creciente, ilimitada de término general $a_n = 5^{n-1}$; $a_1 = 1$.

La sucesión $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}...$ es una sucesión decreciente, ilimitada de término general $a_n = \frac{1}{2n-1}$; $a_1 = 1$.

Por último, $1, \frac{1}{7}, \frac{1}{49}, \frac{1}{343}, \frac{1}{2.401}...$ es una sucesión decreciente, ilimitada de término general $a_n = \frac{1}{7^{n-1}}$; $a_1 = 1$.

¿Cómo se revisa mi hipoteca? ¿Cómo reducir la cuota de mis deudas?

Cuando se solicita un préstamo se firma un contrato con la entidad prestamista en el que se establecen las condiciones del crédito: cuota, periodicidad de los pagos, tipo de interés aplicado, tasa anual equivalente (en los casos en los que los pagos sean inferiores a un año), así como las condiciones fijadas en caso de incumplimiento por alguna de las partes.

Cuando los pagos se realicen al final de cada periodo la cuota fija debe calcularse con la fórmula deducida en el apartado anterior. La cuota fija recoge de una parte el pago de los intereses correspondiente al periodo devengado, mientras que el resto de la cuota se destina a la amortización del capital. Al final de cada periodo el capital pendiente de amortizar irá disminuyendo, con lo que el monto de los intereses también será menor, y a la inversa, la parte destinada a la amortización del capital irá creciendo progresivamente en los periodos siguientes. Con estos datos se calcula el cuadro de amortización de un préstamo, que permite saber en cualquier momento de la vida del préstamo el capital amortizado y el vigente pendiente de amortización. A continuación se presenta, a título de ejemplo, el cuadro de amortización de un préstamo de 10.000 € al 5% anual a 5 años. Para estas condiciones crediticias se calcula la cuota fija anual correspondiente, que da como resultado un importe de 2.309,75 € anuales.

Aplicando la fórmula (6) se obtiene la cuota fija del préstamo:

$$a = C_0 \cdot \frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 10.000 \cdot \frac{0{,}05\cdot(1{,}05)^5}{(1{,}05)^5 - 1} = 10.000 \cdot \frac{0{,}06381408}{0{,}27628156};$$

$$a = 10.000 \cdot 0{,}2309748 = 2.309{,}75.$$

Año	Capital	Interés	Suma intereses	Amortización capital	Cuota fija	Capital pendiente
1	10.000,00	0,05	500,00	1.809,75	2.309,75	8.190,25
2	8.190,25	0,05	409,51	1.900,24	2.309,75	6.290,01
3	6.290,01	0,05	314,50	1.995,25	2.309,75	4.294,76
4	4.294,76	0,05	214,74	2.095,01	2.309,75	2.199,75
5	2.199,75	0,05	109,99	2.199,76	2.309,75	-0,01

Cuadro de amortización del préstamo 1.

Como puede observarse, a medida que pasan los años y se van pagando las cuotas disminuye el capital pendiente, y en consecuencia también disminuye el monto de los intereses, a la vez que aumenta la cantidad destinada a la amortización del capital.

Ahora bien, puede suceder que un individuo o una familia tengan varios créditos vigentes, y con sus ingresos les sea muy difícil hacer frente al pago de las cuotas. Así, por ejemplo, si la persona que tenía el préstamo anterior tiene también otro préstamo de 30.000 €, a 10 años y al 8% anual, por el que paga una cuota 4.470,88 €, en total paga cuotas por un valor de 6.780,63 €.

Año	Capital	Interés	Suma intereses	Amortización capital	Cuota fija	Capital pendiente
1	30.000,00	0,08	2.400,00	2.070,88	4.470,88	27.929,12
2	27.929,12	0,08	2.234,33	2.236,55	4.470,88	25.692,57
3	25.692,57	0,08	2.055,41	2.415,47	4.470,88	23.277,10
4	23.277,10	0,08	1.862,17	2.608,71	4.470,88	20.668,38
5	20.668,38	0,08	1.653,47	2.817,41	4.470,88	17.850,97
6	17.850,97	0,08	1.428,08	3.042,80	4.470,88	14.808,17
7	14.808,17	0,08	1.184,65	3.286,23	4.470,88	11.521,94
8	11.521,94	0,08	921,76	3.549,12	4.470,88	7.972,82
9	7.972,82	0,08	637,83	3.833,05	4.470,88	4.139,77
10	4.139,77	0,08	331,18	4.139,70	4.470,88	0,07

Cuadro de amortización del préstamo 2.

Si a la persona en cuestión le es muy difícil afrontar dichos pagos, puede verse obligada a acudir a su entidad financiera o a otro banco para solicitar una refinanciación con un tipo de interés más reducido, pero sobre todo con una cuota total más reducida, ya que, por ejemplo, no puede pagar más de 5.000 € anuales. La nueva entidad financiera puede ofrecerle refundir sus dos préstamos en uno solo de 40.000 € y a un tipo de interés del 6%. El problema radica en saber cuál será la duración del nuevo préstamo, ya que el prestatario sólo puede pagar una cuota de 5.000 €.

Para calcular la duración del nuevo préstamo se debe despejar la variable n en la fórmula (6) del cálculo de la cuota de amortización de un préstamo:

$$a = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Dividiendo ambos término por C_0, queda

$$\frac{a}{C_0}=\frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}.$$

Y dividiendo los dos términos por $(1+i)^n$ se obtiene:

$$\frac{a}{C_0}=\frac{\frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{(1+i)^n}};\ \frac{a}{C_0\cdot i}=\frac{1}{1-\frac{1}{(1+i)^n}};\ 1-\frac{1}{(1+i)^n}=\frac{C_0\cdot i}{a};\ 1-\frac{C_0\cdot i}{a}=\frac{1}{(1+i)^n};$$

$$\frac{1}{(1+i)^n}=\frac{a-C_0\cdot i}{a};\ (1+i)^n=\frac{a}{a-C_0\cdot i}.$$

A continuación se debe pasar a logaritmos:

$$\log(1+i)^n=\log\left(\frac{a}{a-C_0\cdot i}\right);$$

$$n\cdot\log(1+i)=\log(a)-\log(a-C_0\cdot i).$$

Y despejar el número de años n:

$$n=\frac{\log(a)-\log(a-C_0\cdot i)}{\log(1+i)}.$$

Finalmente, aplicando esta fórmula y sustituyendo a, i y C_0 por sus valores, se obtiene:

$$n=\frac{\log(5.000)-\log(5.000-40.000\cdot 0{,}06)}{\log(1{,}06)}=\frac{3{,}69897-3{,}41497335}{0{,}02530587}=11{,}22 \text{ años.}$$

Si se elabora el cuadro de amortización se observa que, en efecto, en el año 11 todavía faltan por amortizar 1.073,73 € del capital, cantidad que corresponde a un 21,5% de la cuota, que es lo mismo que decir que la vigencia del préstamo es de 11 años, más el 22% de un año, es decir, 11 años y 80 días.

Año	Capital	Interés	Suma intereses	Amortización capital	Cuota fija	Capital pendiente
1	40.000,00	0,06	2.400,00	2.600,00	5.000,00	37.400,00
2	37.400,00	0,06	2.244,00	2.756,00	5.000,00	34.644,00
3	34.644,00	0,06	2.078,64	2.921,36	5.000,00	31.722,64
4	31.722,64	0,06	1.903,36	3.096,64	5.000,00	28.626,00
5	28.626,00	0,06	1.717,56	3.282,44	5.000,00	25.343,56
6	25.343,56	0,06	1.520,61	3.479,39	5.000,00	21.864,17
7	21.864,17	0,06	1.311,85	3.688,15	5.000,00	18.176,02
8	18.176,02	0,06	1.090,56	3.909,44	5.000,00	14.266,58
9	14.266,58	0,06	856,00	4.144,00	5.000,00	10.122,58
10	10.122,58	0,06	607,35	4.392,65	5.000,00	5.729,93
11	5.729,93	0,06	343,80	4.656,20	5.000,00	1.073,73

Cuadro de amortización del préstamo de refinanciación.

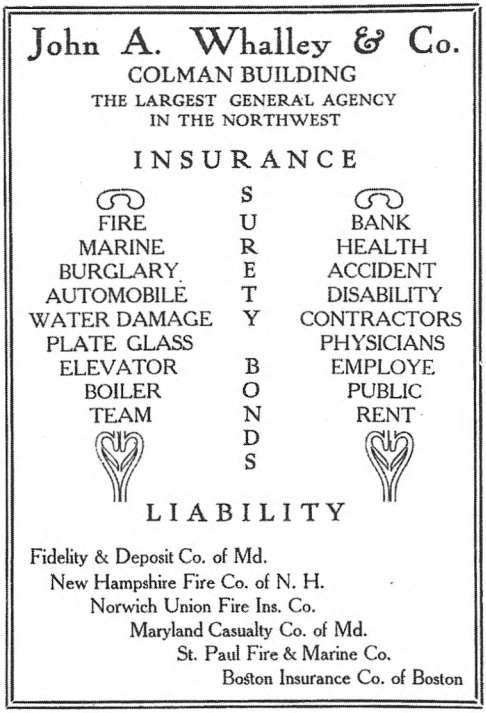
Los préstamos con garantía hipotecaria, lo que popularmente se conoce como hipotecas, son préstamos con cuota fija pero con tipo de interés variable en función de las alteraciones de un tipo de interés de referencia. Así pues, la cuota del préstamo varía en función del nuevo tipo de interés resultante; el cuadro de amortización se recalcula manteniendo el mismo periodo de vigencia del préstamo. Normalmente, el tipo de interés aplicado al préstamo se basa en un tipo de interés oficial más unas décimas o puntos absolutos. El tipo de interés de referencia suele ser el interbancario, como el Euribor para la zona euro de la Unión Europea, pero también puede aplicarse el tipo de interés específico al que se negocian los préstamos hipotecarios en el mercado del dinero. El tipo de interés de referencia puede ser a tres meses, un año, etc. Cuando se firma el contrato de préstamo se establece el tipo de interés de referencia (Euribor a tres meses, un año, etc.) más las décimas o puntos con los que se incrementa el tipo de referencia, así como los periodos de revisión (anual, trimestral, etc.).

Las revisiones de los tipos de interés aplicados a las hipotecas pueden producir sorpresas, tanto agradables como desagradables. Por ejemplo, si una familia consiguió un préstamo hipotecario de 300.000 € a 20 años, a un tipo de interés de referencia (por ejemplo, el Euribor) más 0,5 puntos, cuando dicho tipo de interés estaba al 2%, (tipo de interés aplicado: 2,5% anual) la cuota anual resultante fue de 19.244,14 €, es decir, unos 1.603,68 € mensuales (en el caso de dividir la cuota anual por 12 mensualidades). Si el tipo de interés de referencia subiera hasta el 5%, entonces el tipo de interés aplicado en la próxima revisión sería del 5,5% anual, con lo que la

cuota ascendería hasta 25.103,80 € (a razón de 2.091,98 € mensuales), es decir, se vería incrementada en un 30,45%. Y a la inversa, cuando baja el tipo de interés, las cuotas se reducen considerablemente.

Fundamentos del seguro. ¿Cómo se calcula la prima de mi seguro?

Las compañías de seguros cubren riesgos a empresas, familias y usuarios individuales en muchos campos, tales como accidentes, automóviles, enfermedad y muerte (seguros de vida), hogar, asistencia sanitaria y daños de numerosas ramas de seguro (incendios, inundaciones, inclemencias climatológicas, responsabilidad civil, etc.). Para poder cubrir estos riesgos las empresas aseguradoras tienen que calcular los precios que deben cobrar a sus clientes, de forma que teniendo en cuenta las previsiones de gastos necesarios para cubrir la indemnización de los siniestros la actividad aseguradora resulte rentable.



Anuncio de una compañía aseguradora norteamericana de principios del siglo xx que publicita todos los servicios que ofrece al público.

El cálculo de las primas se basa en métodos estadísticos (como el muestreo) y matemáticos, como el cálculo actuarial, el ajuste de curvas (regresión lineal y no lineal), la teoría de las probabilidades y el cálculo matricial para las tablas de mortalidad y morbilidad de la población. La aplicación de estos métodos debe basarse en la elaboración de unas buenas bases de datos históricos, dado que para prevenir los eventos futuros es necesario disponer de una información muy rigurosa sobre la evolución en el pasado de las distintas variables que intervienen en la determinación futura de los costes originados por la cobertura de los siniestros asegurados, a partir de los cuales se puede establecer la prima a pagar por el cliente.

A las compañías de seguros, para realizar sus previsiones de siniestrabilidad, les interesa el estudio de poblaciones enteras. El gran tamaño de algunas poblaciones obliga a utilizar técnicas estadísticas de muestreo, es decir, la determinación de una parte pequeña de la población objeto de estudio, que posea unas características semejantes a las de la población total, lo que significa que debe determinarse el nivel de confianza de la muestra, así como el error muestral. Las técnicas de muestreo son muy variadas y pueden basarse en criterios aleatorios o en el muestreo estratificado, cuando se eligen muestras representativas de distintos segmentos de población (o sectores), de diversas áreas geográficas, etc.

Las aseguradoras elaboran estadísticas sobre el coste de los siniestros, el número total de siniestros, el número total de pólizas y los ingresos que generan, y realizan comparaciones entre los pagos derivados de la siniestralidad y los ingresos de las primas. A estas variables básicas se unen otras variables que intervienen en el seguro, tales como la edad o la zona geográfica, con el fin de determinar unas fórmulas que permitan realizar predicciones sobre siniestros, riesgos, etc. mediante la aplicación de análisis multivariable, cluster y chaid.

En el cálculo actuarial de las primas de seguros de vida se parte de unas tablas (matrices) de probabilidad de muerte y supervivencia, en los que para cada grupo de edad y sexo se determina, en series históricas, la probabilidad de llegar o no vivo al grupo siguiente. Conociendo los costes de las coberturas de los siniestros, es posible determinar el importe de las primas con el objetivo de que el negocio asegurador resulte rentable.

Estadística descriptiva

La ciencia estadística permite el estudio de situaciones, cosas o personas mediante la cuantificación. La visión que se tiene de dichas situaciones, cosas o personas deja de ser algo exclusivamente intuitivo y adquiere una cierta objetividad. Naturalmente,

se pueden hacer muchas trampas y engañar con las estadísticas, pero un estudio estadístico científico bien planteado y ejecutado debe facilitar una comprensión mucho más exacta de dicha realidad y una más adecuada toma de decisiones para modificarla.

La estadística puede definirse como la operación de análisis matemático que permite estudiar con el máximo de precisión posible fenómenos incompletamente conocidos, y la economía, sin duda, es uno de ellos. Tres conceptos clave son el carácter, aquello en lo que recae la observación del fenómeno que se va a estudiar (para conocerlo se pretende analizar su variabilidad); el individuo, cada elemento afectado de una medida, de un número de orden o de un índice del carácter que se va a estudiar (pueden ser personas, familias, votantes, artículos, piezas, coches, etc.), y la población, el conjunto de individuos que forman el conjunto del cual se quiere hacer un estudio estadistico.

Cuando se examina una población se puede considerar el estudio de los valores del carácter en todos sus individuos. Pero, en muchos casos, esto será impracticable y, entonces, se escoje un grupo de individuos de la población, que recibe el nombre de muestra y está formado por los individuos realmente observados. De hecho, uno de los problemas que hay que resolver mediante la estadística es la selección de la muestra y el modo de estudiarla para poder sacar conclusiones válidas para el conjunto de la población.

Los caracteres estudiados pueden ser cualitativos (como, por ejemplo, el grado de satisfacción respecto a determinado servicio) o cuantitativos, y éstos, discretos (es decir, sólo pueden tener valores enteros, como por ejemplo el número de hijos por familia) o continuos (como, por ejemplo, el diámetro de las piezas fabricadas en una máquina). Los datos recogidos en el estudio estadístico de una variable se disponen en gráficas, que pueden ser de muchos tipos: de barras, histogramas, curvas, de sectores, etc.

Capítulo 4

Producción y costes de producción. Rentabilidad de la inversión

La cantidad de producción máxima que puede obtenerse con una cantidad determinada de factores de producción viene definida mediante la función de producción: $x = f(v_1, v_2 \ldots v_n)$, donde x es la cantidad producida y $v_1, v_2 \ldots v_n$ son las cantidades de los factores de producción. Estas cantidades están determinadas por el nivel tecnológico, y en principio permanecen invariables (supuesto de técnica constante) hasta que se produce un cambio tecnológico que obliga a variar las cantidades de los factores utilizados, o bien a sustituirlos por otros más económicos y más eficientes. La función de producción implica que las variables que intervienen (cantidades de producto y de factores de producción) son mensurables, y también que la técnica permanece constante y el comportamiento de los factores es continuo.

Costes marginales y optimización del beneficio empresarial. Punto óptimo de producción

Como todas las funciones, la de producción se puede expresar de forma analítica mediante una fórmula, gráfica o numérica mediante un cuadro estadístico. Este último consiste en poner en filas y columnas las cantidades de los factores para obtener una cantidad determinada de producto. En el gráfico se representan los valores contenidos en el cuadro.

Para poder plantear un modelo simplificado con sólo dos factores de producción se analiza a continuación un ejemplo basado en la fabricación de una aleación de aluminio y níquel, en la que la producción final (x) es función de la cantidad del factor níquel (v_1) y del factor aluminio (v_2), expresados mediante la siguiente fórmula:

$$x = v_1 + 2v_2.$$

FUNCIONES

Una función es una relación cuantitativa entre variables. En el caso más sencillo se trata de determinar la influencia que tienen los diversos valores que va adoptando una variable (llamada independiente, porque sus valores se van eligiendo a voluntad) sobre los correspondientes de la otra variable (llamada dependiente, porque es consecuencia de los valores dados a la primera). Existen funciones empíricas cuyos datos proceden de un experimento y funciones matemáticas cuyos datos están regidos por una fórmula exacta.

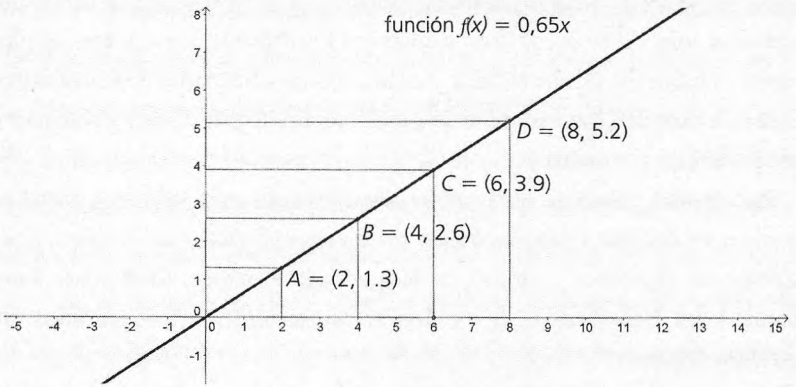
En economía, algunas funciones empíricas entre variables pueden aproximarse a una función matemática mediante la técnica llamada regresión. En otras ocasiones se dispone de una fórmula que aproxima directamente de un modo adecuado los valores correspondientes de las dos variables. Si se considera la cantidad a pagar como variable dependiente y el número de unidades que se compran como variable independiente, entonces esta función matemática representa una relación que puede expresarse así:

Cantidad a pagar = precio unitario · unidades adquiridas.

Si se usa la notación matemática, se representa como $f(x) = a \cdot x$, donde $f(x)$ indica que el valor de f depende de x (variable dependiente), a es un valor constante que representa el precio unitario y x es el número de unidades adquiridas (variable independiente).

Una función matemática puede «explicarse» de tres maneras: con su fórmula, con su tabla de valores y con su gráfica dibujada en un sistema de coordenadas cartesianas. Existen muchos tipos de funciones. Las más elementales son las funciones lineales o polinómicas de primer grado, como por ejemplo $f(x) = 0{,}65x$. A continuación se puede visualizar esta función en sus tres formas.

x	$f(x)$
0	0
2	1,3
4	2,6
6	3,9
8	5,2

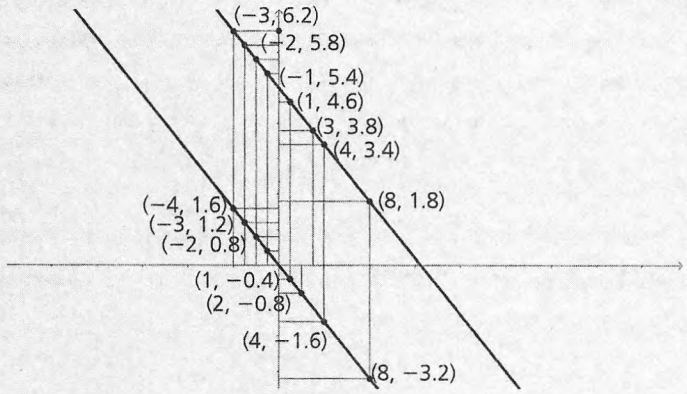


$f(x) = 0{,}65x$

La función $f(x) = 0{,}65x$ es una función lineal creciente o de proporcionalidad directa y representa la regla de tres simple directa. En esta función, al aumentar la variable independiente x, aumenta la variable dependiente $f(x)$. Al pasar x de 2 a 4, la función $f(x)$ pasa de 1,3 a 2,6. En el caso de la función práctica propuesta anteriormente (cantidad que se debe pagar = precio unitario · unidades adquiridas), los valores negativos de unidades adquiridas no tienen sentido real y la parte de la gráfica situada a la izquierda de 0 unidades no tiene significado alguno.

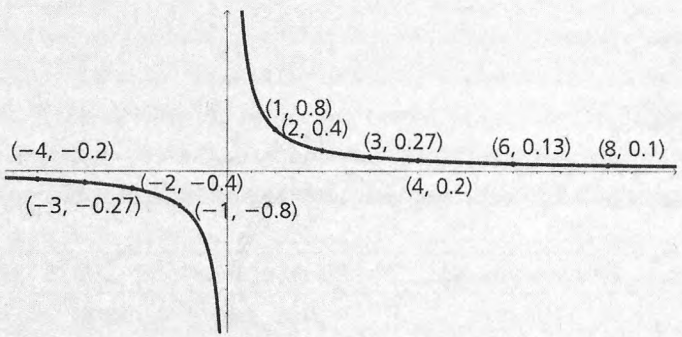
Hay otras muchas funciones lineales. Cada una indica diferentes relaciones entre las dos variables x y $f(x)$, como las dos funciones lineales decrecientes $g(x)$ y $h(x)$ de las figuras siguientes.

x	$g(x)$	$h(x)$
−4	1,6	6,6
−3	1,2	6,2
−2	0,8	5,8
−1	0,4	5,4
0	0	5
1	−0,4	4,6
2	−0,8	4,2
3	−1,2	3,8
4	−1,6	3,4
5	−2	3
6	−2,4	2,6
7	−2,8	2,2
8	−3,2	1,8



$g(x) = -0{,}4x \qquad h(x) = -0{,}4x + 5$

x	$i(x)$
−4	−0,2
−3	−0,267
−2	−0,4
−1	−0,8
0	---
1	0,8
2	0,4
3	0,267
4	0,2
6	0,133
8	0,1

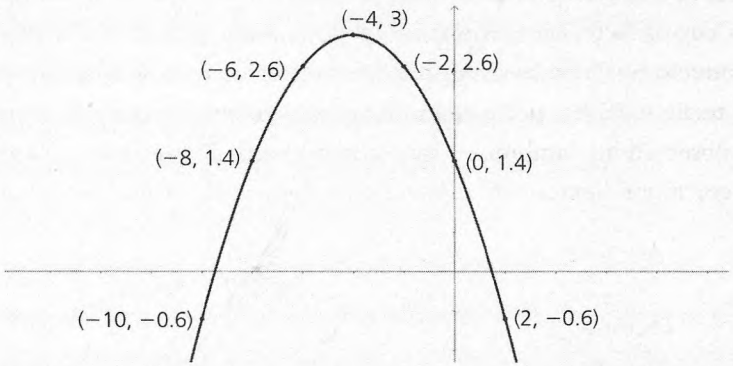


$i(x) = 0{,}8/x$

La función $i(x)$ es una función de proporcionalidad inversa. Representa la regla de tres simple inversa. En este tipo de funciones, al aumentar la variable independiente x, disminuye de un

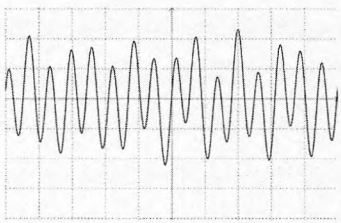
modo inversamente proporcional la variable dependiente $i(x)$. Por ejemplo, cuando x toma el valor 3, $i(x)$ es 0,8/3 = 0,267.

x	$p(x)$
−10	−0,60
−8	1,40
−6	2,60
−4	3,00
−2	2,60
0	1,40
2	−0,60



$p(x) = -0{,}1x^2 - 0{,}8x + 1{,}4$

También hay funciones polinómicas de grado 2, cuyas gráficas son curvas parabólicas como la $p(x)$ de la figura.



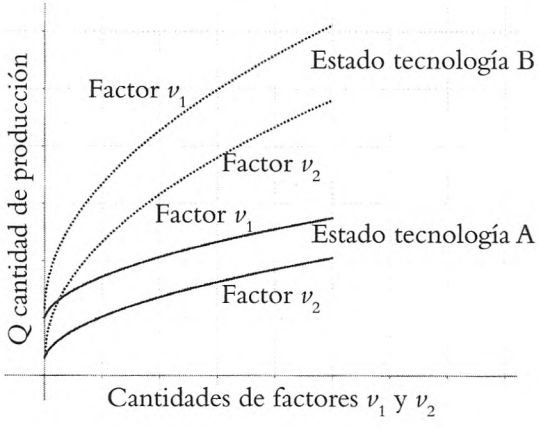
Las funciones de tipo periódico aparecen en muchas aplicaciones bursátiles.

Para las distintas producciones de la aleación se elabora el siguiente cuadro de producción, con datos numéricos deducidos de la fórmula:

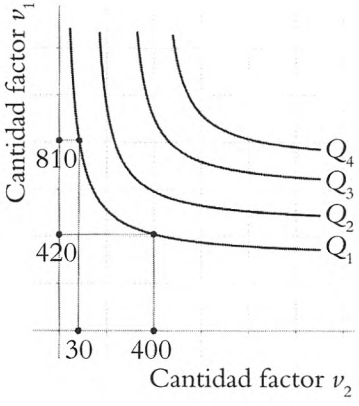
kg de aleación (x)	kg de aluminio v_2	kg de níquel v_1
10	3,5	3
20	7	6
30	10,5	9
40	14	12
50	17,5	15

Combinación de los factores de producción para la fabricación de la aleación aluminio-níquel.

Cualquier cambio tecnológico supone modificaciones en las combinaciones de los factores de producción, y, por lo tanto, conduce a la elaboración de un nuevo cuadro de producción, con la consiguiente modificación de la función de producción. A cada estado de la tecnología le corresponde un gráfico de producción con sus curvas factoriales propias, es decir, unas curvas que relacionan la cantidad de producto final con las cantidades de cada factor, correspondientes a este estado de la tecnología. Así, por ejemplo, en el gráfico en el gráfico de abajo a la izquierda se observan los cambios en las combinaciones de los factores de producción v_1 y v_2 correspondientes a dos estados tecnológicos distintos, *A* y *B*.



Curvas de producción.



Curvas isocuantas.

Aplicando distintas tecnologías, las combinaciones de los distintos factores de producción varían para obtener una misma cantidad de producto, es decir, que para obtener, por ejemplo, 50 kg de aleación se pueden combinar los factores de producción de distintas maneras.

Los gráficos elaborados con las distintas cantidades de los factores de producción, para obtener una misma cantidad de producto final Q_i (en el diagrama de arriba a la derecha las cantidades Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), constituyen las denominadas curvas isocuantas de los factores de producción.

Cada curva isocuanta representa las distintas cantidades de los factores de producción que generan una misma cantidad Q_i de producción final. Por ejemplo, la cantidad de producción Q_1 se puede obtener con la combinación de 420 unidades del factor v_1 y 400 unidades del factor v_2 y con la combinación de 810 unidades del factor v_1 y 30 unidades del factor v_2.

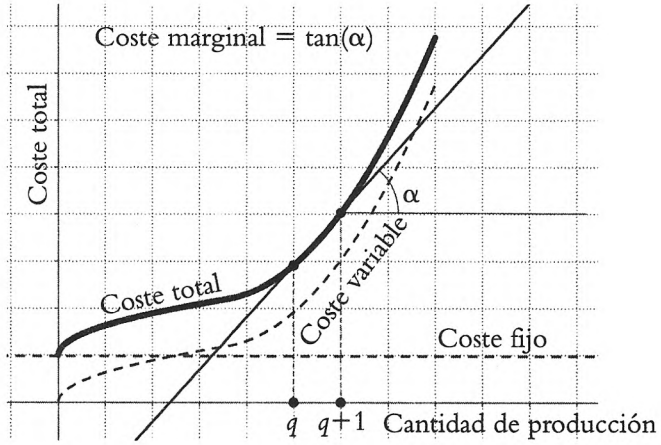
Todo proceso de producción comporta la existencia de unos costes fijos y de unos costes variables dependientes de la cantidad producida, cuya suma constituye el coste final. El coste marginal se define como el coste total adicional generado al aumentar la producción una unidad más de producto final.

$$\text{Coste marginal} = \frac{\Delta \text{ costes}}{\Delta \text{ de una unidad producida}}.$$

También se expresa como la derivada de la función de costes respecto a la derivada de la cantidad de producto:

$$\text{Coste marginal} = \frac{dc}{dq}.$$

Para una cantidad determinada, la derivada es la pendiente de la curva en el punto *A* que corresponde a esta cantidad.



Curva del coste total con la derivada y la pendiente de la curva.

El coste medio o unitario es el resultado de dividir el coste total por el número de unidades producidas:

$$\text{Coste medio} = \frac{\text{Coste total}}{\text{Producción total}}.$$

Por ejemplo, en una producción de 10 unidades de producto, para cada unidad se calculan el coste marginal y el coste medio:

Cantidad	Coste fijo	Coste variable	Coste total	Coste marginal	Coste medio
0	110	0	110		
1	110	60	170	60	170,00
2	110	110	220	50	110,00
3	110	150	260	40	86,67
4	110	210	320	60	80,00
5	110	310	420	100	84,00
6	110	450	560	140	93,33
7	110	600	710	150	101,43
8	110	780	890	180	111,25
9	110	980	1.090	200	121,11
10	110	1.200	1.310	220	131,00

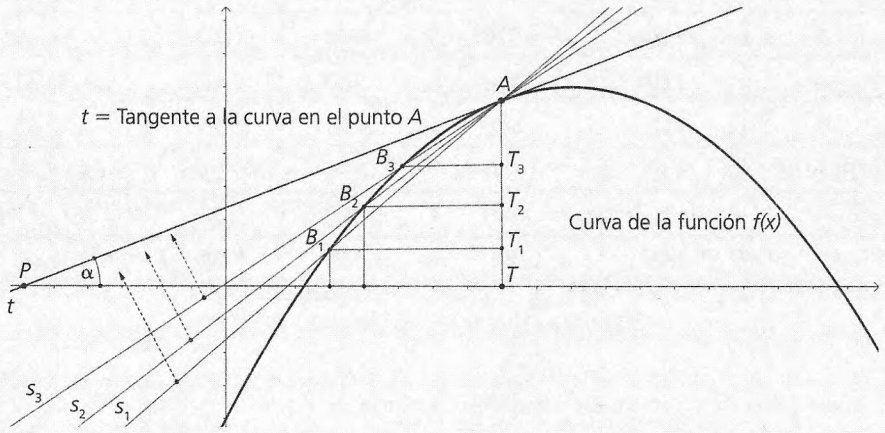
Costes de producción, total, marginal y medio.

Con estos datos se puede construir la curva de coste de producción, de coste marginal y de coste medio. Como puede observarse, el coste medio suele ser mucho más alto que el coste marginal. La curva del coste marginal indica los costes mínimos para cada cantidad de producto. El punto de intersección entre las curvas de coste marginal y de coste medio coincide con el punto mínimo del coste medio, ya que a medida que el coste marginal es inferior al coste medio, éste es descendente, y a partir del punto de intersección entre las dos curvas el coste marginal es superior al coste medio y este último es ascendente.

Esta tendencia ascendente de la curva de los costes medios a partir de su intersección con la curva de los costes marginales es la que determina la existencia de la ley de rendimientos decrecientes, es decir, la curva de los costes medios es descendente hasta que cruza la de los costes marginales, intersección que determina su punto mínimo a partir del cual los costes medios serán irremediablemente crecientes (a no ser que se produzcan cambios tecnológicos que abaraten los costes de producción) y, por lo tanto, al subir los costes medios los rendimientos serán decrecientes.

TENDENCIAS Y DERIVADAS

En economía, para conocer la tendencia de una variable respecto a otra (como la oferta de una mercancía respecto a su precio), se requiere conocer si la función que las representa está creciendo mucho o poco en un punto *A* de su gráfica. Esto permite comparar su nivel de variación (crecimiento o decrecimiento) respecto al que tiene en otros puntos de la curva. Para expresar este nivel de variación se utiliza la pendiente que hay en el punto, es decir, se calcula la inclinación de la recta que es tangente a la curva en el punto *A*. Esto se determina calculando el ángulo que forma esta recta tangente en *A* con la horizontal. Si el ángulo es muy grande significa que la recta tiene mucha pendiente, y al revés.

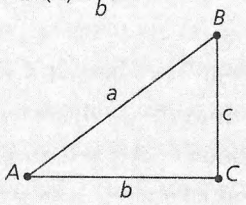


Se consideran diversos puntos de la curva: B_1, B_2, B_3, que van acercándose poco a poco hacia el punto *A*. Ahora se observan la rectas s_1, s_2, s_3, que unen dichos puntos con *A* y que cortan a la curva (rectas secantes). Se ve que poco a poco las secantes s_1, s_2, s_3 se van aproximando a *t*, la recta que es tangente a la curva en el punto *A*.

Los ángulos de las rectas secantes s_1, s_2, s_3 con la horizontal se van reduciendo hasta que, cuando los puntos B_1, B_2, B_3 llegan a coincidir con *A*, el ángulo con la horizontal es el de la recta tangente (α, alfa).

En un triángulo rectángulo *ABC* se denomina tangente del ángulo *A* $\tan(A)=\frac{c}{b}$.

El cociente de los dos catetos en cada triángulo AB_1T_1, AB_2T_2, AB_3T_3 va variando al cambiar la posición y, sucesivamente, es la tangente del ángulo 1, la del ángulo 2, la del ángulo 3..., hasta que los puntos *B*, en su «viaje» hacia *A*, llegan a ésta (el límite) y se convierten en la tangente del ángulo (α, alfa) indicado.



$\frac{AT_1}{B_1T_1} = \tan$ (ángulo 1); $\frac{AT_2}{B_2T_2} = \tan$ (ángulo 2); $\frac{AT_3}{B_3T_3} = \tan$ (ángulo 3); .... $\frac{AT}{PT} = \tan \alpha$.

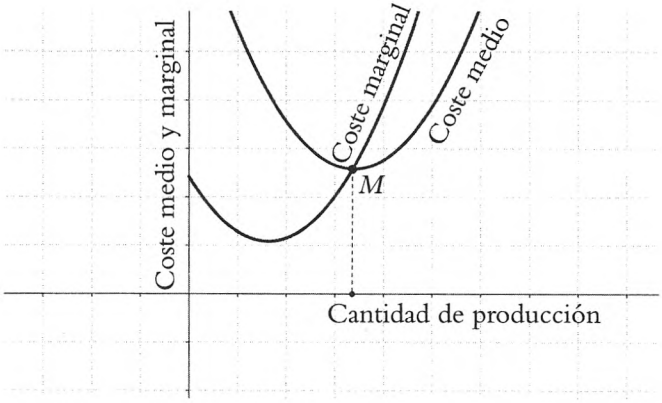
El $\lim_{Bi \to A} \tan$ (ángulo i) $= \frac{AT}{PT} = \tan \alpha$ se llama pendiente de la recta t (recta tangente a la función $f(x)$ en el punto A).

El valor del $\lim_{Bi \to A} \tan$ (ángulo i) $= \frac{AT}{PT}$ se le llama derivada de la función $f(x)$ en el punto A y coincide con el valor de la pendiente de la tangente a dicha función en A.

La derivada de cualquier función se calcula aplicando las reglas de derivación deducidas del cálculo de los límites antes mencionados. Las tablas de funciones derivadas para cada tipo de función se emplean para resolver cada caso del estudio de tendencias.

$$f'(x_0) = \lim_{Bi \to A} \frac{AT_i}{B_iT_i} = \tan\alpha = \text{Derivada de } f(x) \text{ en } A(x_0, y_0) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)(x_0).$$

El punto de intersección entre las curvas del coste medio y de coste marginal constituye el óptimo de producción de la empresa, ya que dicho punto coincide con el mínimo de la curva de costes medios y, como es lógico, las empresas tienen como objetivo producir siempre a unos costes mínimos.



Curvas de coste medio y marginal.

Sin embargo, el problema no es tan sencillo, ya que para alcanzar el punto óptimo de producción se debe tener en cuenta que para producir una misma cantidad de producto la tecnología permite varias combinaciones de factores de producción. ¿Cuál sería entonces la combinación de factores de producción óptima para la empresa?

Suponiendo, para simplificar, que hubiesen sólo dos factores A y B habría que definir un nuevo concepto: el producto marginal del factor de producción A o B, es decir, el incremento de producción generado por una unidad del factor de producción (A o B) por cada unidad monetaria del coste del factor.

En este caso de comparación de la productividad de dos factores de producción, el óptimo de producción sería aquel que iguale los dos productos marginales, es decir, que se dé la igualdad:

$$\frac{\text{Producto marginal de A}}{\text{Precio de A}} = \frac{\text{Producto marginal de B}}{\text{Precio de B}}$$

Para estudiar la tendencia de un proceso (económico, sociológico o estadístico) del que se conoce la función representativa $f(x)$, al cambiar la variable x se ha de observar la gráfica de la función que representa matemáticamente dicho proceso.

¿Cómo y dónde colocar los ahorros?

Métodos de evaluación de inversiones

La forma más sencilla de colocar los ahorros es mediante un depósito bancario a plazo, o bien comprando fondos de inversión. Hay otras formas más complejas, como por ejemplo invertir en bolsa o en proyectos empresariales que den un beneficio. El depósito bancario es retribuido mediante un tipo de interés. El fondo de inversión da un rendimiento, igual que los productos financieros que se cotizan en bolsa, que es el dividendo, más la plusvalía generada por la diferencia de cotización entre el día de su adquisición y el actual. La tasa del rendimiento de la inversión (o ROI, tasa de retorno de la inversión) será igual en porcentaje al beneficio dividido por el capital invertido, es decir:

$$\text{Tasa del rendimiento de la inversión (ROI)} = \frac{\text{Beneficio}}{\text{Capital invertido}} \cdot 100.$$

La tasa de rendimiento sobre el capital se utiliza tanto para medir el rendimiento de una colocación financiera como el de un proyecto empresarial o industrial.

Cuando se realiza una inversión también se puede comparar el rendimiento obtenido con lo que se habría ganado si se hubiese colocado el dinero en una cuenta bancaria a un tipo de interés determinado, es decir, intentar averiguar si

la diferencia de rendimientos de ambas opciones hacía recomendable la inversión en cuestión. Este rendimiento se denomina beneficio residual o valor económico añadido. Se trata de que cuando se obtiene un beneficio B a partir de un capital invertido C, hay que comparar este beneficio obtenido B con el que se obtendría si se hubiese invertido el capital C en una cuenta bancaria, a un tipo de interés i, de modo que:

$$\text{Valor económico añadido o beneficio residual} = B - i \cdot C.$$

Por ejemplo, si de una inversión de 1.000 $ se obtienen 110 $ de beneficio y el tipo de interés que ofrece la banca es del 5%, las tasas de rendimiento de la inversión y el valor económico añadido serán respectivamente:

$$\text{Tasa del rendimiento de la inversión} = \frac{110}{1.000} \cdot 100 = 11\%.$$

$$\text{Valor económico añadido o beneficio residual} = 110 - (1.000 \cdot 0{,}05) = 60\ \$.$$

Al hablar de inversión hay que distinguir muy claramente las inversiones reales de las inversiones financieras. Las primeras son las que se realizan en actividades productivas combinando los factores de producción (bienes de capital, trabajo, materias primas, energía, tecnología, etc.) para obtener bienes y servicios. Son las que hacen referencia a la denominada economía real. Las inversiones financieras son las que sólo se mueven en el sistema financiero y se desarrollan exclusivamente en el circuito del dinero: se invierte dinero en depósitos bancarios, productos financieros, acciones y obligaciones, activos subyacentes, opciones, futuros, productos derivados, warrants, etc.

La colocación de los ahorros en la bolsa es una operación mucho más delicada, ya que intervienen varios factores adicionales: el conocimiento del mercado y de los activos financieros en los que se piensa invertir y que se pueden comprar; decidir el momento oportuno en el que se pueden comprar y cuándo se pueden vender; el conocimiento del riesgo que se está dispuesto a asumir y que conlleva cada operación; el conocimiento y análisis de la evolución del mercado en referencia a los títulos en los que se piensa invertir o que se tienen en cartera, y la solvencia financiera y perspectivas de futuro de estos activos, aspectos todos ellos que serán tratados en un próximo capítulo.

En este capítulo se hará referencia principalmente a las inversiones reales. Un ejemplo sencillo es el de un negocio que, con un capital x (que es la incógnita del problema), da cada año una renta o beneficio constante de a_i = 1.000 €. Si se conoce la tasa de rendimiento constante r sobre el capital invertido x, por ejemplo, r = 5%, cabría preguntarse cuál es el monto del capital.

Por la fórmula del interés simple, se deduce:

$$a_i = r \cdot x,$$
$$x = a_i / r.$$

Por lo tanto, 1.000 = $r \cdot x$, de donde x = 1.000/0,05 = 20.000. El capital que dé una renta constante de 1.000 € anuales será de 20.000 €.

Toda inversión, tanto en un proyecto empresarial como en uno industrial, supone un desembolso inicial en el primer año, así como la obtención de unos beneficios o unas pérdidas cada año, a lo largo de todo el período de tiempo que dura la inversión. Por lo tanto, se trata de un flujo de caja en el que el primer año el monto de la inversión supone un flujo negativo (gasto), y los años siguientes, cuando la empresa o el proyecto ya está en funcionamiento, unos flujos positivos (beneficios), aunque algunos años también pueden ser negativos (pérdidas). Toda inversión tiene una vida, igual que los seres vivos. Las amortizaciones se calculan a partir de la duración de una inversión (lo que se denomina la vida útil).

Una de las cuestiones que se plantean al realizar la inversión es si durante la vida útil del proyecto se generarán flujos de caja suficientes como para recuperar como mínimo la inversión realizada. Pero en el transcurso del período de vida del proyecto es evidente que el poder adquisitivo del dinero se ve erosionado por la inflación, y al inversor no le interesa únicamente saber si recuperará el dinero invertido, sino también si el valor actualizado de todos los flujos previstos según una tasa de inflación prevista superará o no el valor actual de la inversión realizada.

Es obvio que 100 $ de hoy valen más que 100 $ dentro de cuatro años, y más si se prevé, por ejemplo, una tasa de inflación del 5% anual para los próximos cuatro años. Si se dispone, por ejemplo, de una renta anual de 100 $ para hoy y los próximos cuatro años, es evidente que los 100 $ del año que viene valdrán sólo el 95% de lo que valdrían actualmente, porque se verán afectados por la tasa de inflación. Y el tercer año estos 100 $ futuros valdrían actualmente sólo el valor equivalente a 90,25 $ actuales.

En definitiva, una renta de 100 $ durante 5 años, con una tasa de inflación del 5%, es decir, un total de 500 $ nominales, tendrían un valor actualizado de:

Primer año: 100.
Segundo año: 100/1,05 = 95,23809524.
Tercer año: 95,23809524/1,05 = 90,70294785.
Cuarto año: 90,70294785/1,05 = 86,38375985.
Quinto año: 86,38375985/1,05 = 82,27024748.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL VAN

El cálculo del VAN (valor actual neto de un proyecto de inversión) se realiza de la forma siguiente. Se considera un proyecto que representa una inversión inicial a_0 que genera cada año unos ingresos (anualidades). Siendo el flujo de caja anual ai (positivo o negativo) en el año *i* dentro de un período de *n* años de duración del proyecto y siendo *r* la tasa de inflación, se deduce el valor actualizado de la anualidad a_2 del segundo año valorada con el mismo poder adquisitivo del año anterior: $a_2 = a_1/1 + r$. Lógicamente, el valor cada unidad monetaria del periodo 2 será inferior al del periodo anterior 1, deflacionado por la tasa de inflación.

Generalizando este criterio para todos los *n* años de duración del proyecto, y sumando los valores actualizados de todos los flujos anuales, se obtiene el valor actualizado de los flujos de caja durante un período *n* de años:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n.$$

Y como cada año:

$$a_2 = \frac{a_1}{1+r} = a_1 \cdot (1+r)^{-1},\ a_3 = \frac{a_2}{1+r} = \frac{\frac{a_1}{1+r}}{1+r} = \frac{a_1}{(1+r)^2} = a_1 \cdot (1+r)^{-2} ...$$

Y así sucesivamente, hasta llegar al año *n*: $a_n = a_1 \cdot (1+r)^{-(n-1)}$.

De forma análoga, si se tiene una inversión *I* realizada en el año 0, que tiene una duración temporal (*t*) de *n* años a partir del año 0, y que cada año a partir de $t = 1$, genera unos flujos monetarios positivos o negativos (+/−) $a_1, a_2, a_3 ... a_n$, el valor actual neto del flujo motivado por la inversión, teniendo en cuenta la aplicación de una tasa de inflación prevista *r*, será:

$$VAN = -a_0 + a_1(1+r)^{-1} + a_2(1+r)^{-2} + ... + a_n(1+r)^{-n},$$

donde a_0 tiene valor negativo, porque es el valor de la inversión realizada el primer año 0.

En consecuencia, el valor actualizado de un flujo monetario de 100 $ anuales durante 5 años, aplicando la tasa de inflación prevista para los próximos cuatro años será:

$$100 + 95{,}23809524 + 90{,}70294785 + 86{,}38375985 + 82{,}27024748 = \\ = 454{,}59505042.$$

Por lo tanto, el valor actualizado de este flujo durante 5 años será un 9,0809899% inferior a los 500 $ nominales.

Sea el caso de una empresa que realiza una inversión industrial de $I = 1.000.000$ € en unas instalaciones que tienen una vida útil de 10 años. Por lo tanto, el período de vida del proyecto es de 10 años, a contar a partir del año 0 en el que se realiza la inversión. Para los próximos 10 años se prevé una serie de rentas positivas, que se especifican en el siguiente cuadro:

Año	Flujos	Flujos de caja	Valores actualizados
0	a_0	−1.000.000,00	−1.000.000,00
1	a_1	15.000,00	14.285,71
2	a_2	16.000,00	14.512,47
3	a_3	120.000,00	103.660,51
4	a_4	150.000,00	123.405,37
5	a_5	80.000,00	62.682,09
6	a_6	150.000,00	111.932,31
7	a_7	170.000,00	120.815,83
8	a_8	180.000,00	121.831,09
9	a_9	125.000,00	80.576,11
10	a_{10}	250.000,00	153.478,31
		VAN	−92.820,20

La empresa desea saber si con estos flujos de rentas positivas actualizadas podrá recuperar la inversión realizada, además de obtener una cierta plusvalía, teniendo en cuenta que ha previsto que la inflación sería del 5%. Aplicando la fórmula del VAN:

$$a_0 + I$$

$$\text{VAN} = -a_0 + a_1(1+r)^{-1} + a_2(1+r)^{-2} + \ldots + a_n(1+r)^{-n} = \\ = -1.000.000 + 15.000(1{,}50)^{-1} + 16.000(1{,}50)^{-2} + 120.000(1{,}50)^{-3} + \\ + 150.000(1{,}50)^{-4} + 80.000(1{,}50)^{-5} + 150.000(1{,}50)^{-6} + 170.000(1{,}50)^{-7} + \\ + 180.000(1{,}50)^{-8} + 125.000(1{,}50)^{-9} + 250.000(1{,}50)^{-10} = -92.820{,}20 €.$$

Si se realizan los cálculos, se obtienen los valores actualizados de la columnas de la derecha de la tabla, que sumados dan un valor actualizado negativo de –92.820,20, lo que significa que con este flujo de rentas previstas no podrá recuperarse el capital invertido, y además, se perderán 92.820,20 €.

Otro criterio utilizado para medir la rentabilidad de las inversiones es la tasa de rendimiento interno. Se trata de hallar la tasa de interés implícito, que aplicada a un flujo de rentas generado por una inversión, permitiría recuperar plenamente el capital invertido, es decir, el valor actualizado neto sería igual a cero. Se trata de hallar la tasa de rendimiento mínima a partir de la cual es aconsejable la realización de la inversión. Normalmente, la tasa de rendimiento interno del proyecto se compara con el tipo de interés o precio del dinero, ya que si es inferior la inversión no sería recomendable. La formulación de la tasa de rendimiento interno de la inversión (TRI) sería VAN = 0, es decir:

$$\text{VAN} = -a_0 + a_1(1+r)^{-1} + a_2(1+r)^{-2} + ... + a_n(1+r)^{-n} = 0,$$

donde $a_0 = I$, inversión inicial. La solución del problema consiste en despejar la incógnita r, que en este caso es la tasa de rendimiento interno. En nuestro ejemplo, el resultado de r que permite que se cumpla la condición de VAN = 0 para las rentas y la inversión del cuadro anterior es $r = 3{,}45\%$ (resultado que se obtiene mediante una calculadora financiera, una hoja de cálculo o manualmente, realizando iteraciones sucesivas).

¿Cómo se determinan los salarios?

Los salarios se forman como resultado de la confluencia de la oferta (trabajadores) y demanda (empresas) en el mercado de trabajo. Pero a lo largo de la historia se han formulado distintas teorías sobre los mecanismos que regulan los niveles salariales. Los economistas clásicos consideraban que una parte del stock de capital acumulado iba destinada al pago de trabajadores, lo que denominaban el fondo de salarios. El salario era el resultado de dividir dicho fondo de salarios por el número de horas trabajadas. La cuestión era determinar la cuantía de este stock de capital, qué parte se destinaba a la maquinaria, utensilios, edificios y mercancías, y qué parte al fondo de salarios. El nivel adquisitivo de los salarios, de acuerdo con las teorías de Malthus, tendía al nivel de subsistencia, ya que la población crecía a un ritmo muy superior al de la producción de alimentos, hasta crecer al límite del nivel mínimo de subsistencia,

lo que más tarde se denominó «ley de bronce de los salarios». Adam Smith también creía en esta teoría del salario de subsistencia, pero admitía que los salarios podían aumentar si también se incrementaba el stock de capital destinado a los mismos, y de ahí el por qué de la diferencia salarial entre distintos países, ricos y pobres.

Es cierto que los niveles de salarios dependen del stock de capital disponible, y también es cierto que son más elevados cuanto mayor sea dicho monto, es decir, cuanto mayor sea la cantidad de capital necesario por hora trabajada, dependiendo también del nivel tecnológico.

En el mercado de trabajo las dos partes se hallan en una situación muy desigual. Por un lado, están las empresas, que disfrutan de una posición de poder por una

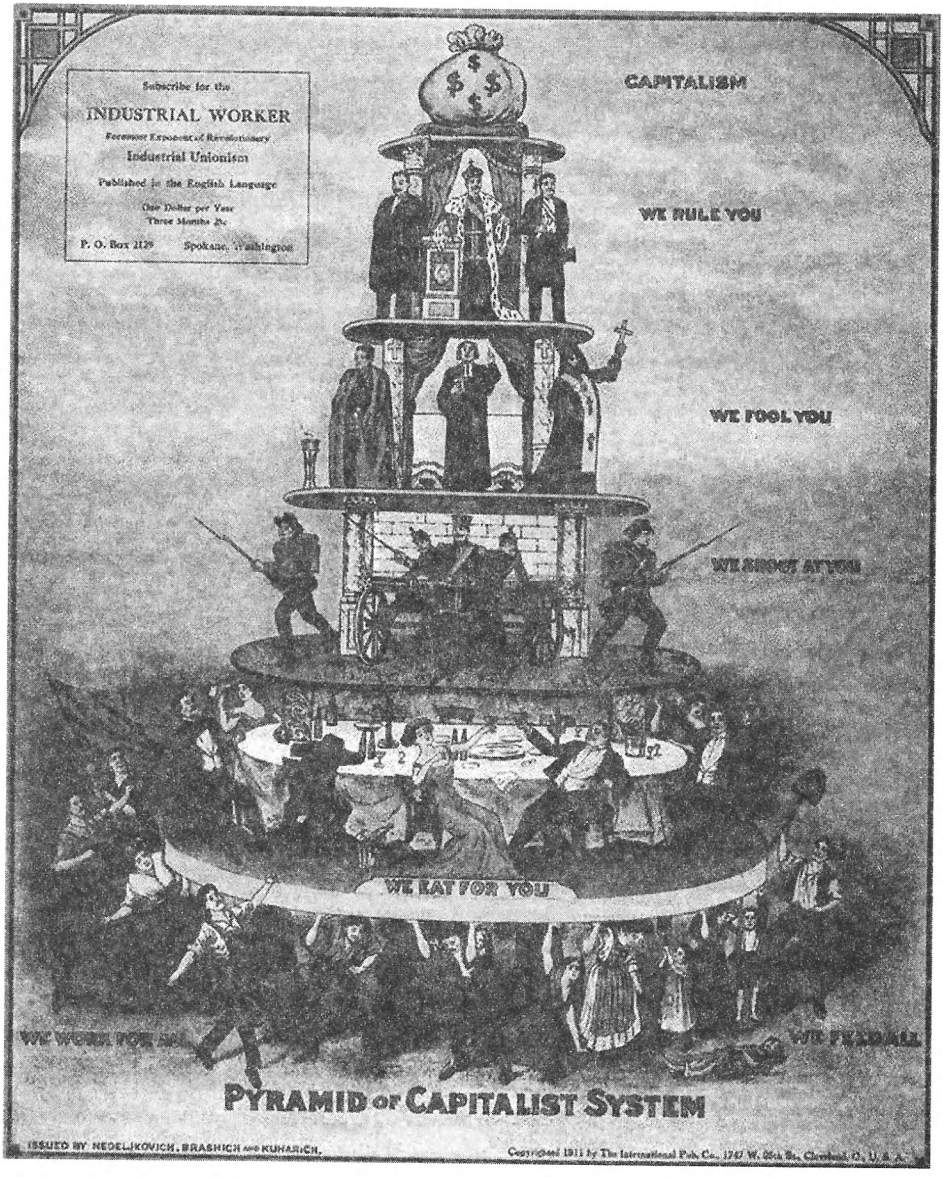
JOHN MAYNARD KEYNES (1883-1946)

Uno de los problemas que más preocupan a los economistas, empezando por el propio John Maynard Keynes, es el del paro, debido a las consecuencias sociales que éste conlleva. El paro está directamente relacionado con la situación del mercado de trabajo, que fija para cada nivel de la oferta y la demanda un nivel determinado de salarios. Si fuera un mercado completamente libre, de competencia perfecta, a una determinada cantidad de demanda de trabajo por parte de las empresas se establecería una oferta a un nivel de salarios en el punto de equilibrio, que establecería el nivel por debajo del cual, la oferta, es decir, los trabajadores, no estarían dispuestos a trabajar.

Sin embargo, aunque Marx consideraba que el capitalismo trataba a la mano de obra como si fuera una mercancía más, la formación de los salarios tiene unas connotaciones sociales que impiden que sea tratada como tal, o al menos así lo denunciaba Keynes. Éste fue el primer economista que dio al empleo la categoría de variable macroeconómica, y enfocó el análisis económico desde el punto de vista de la demanda, en cierta forma igual que Malthus.

John Maynard Keynes (a la derecha) charla con Harry Dexter White, del Departamento del Tesoro estadounidense, en el curso de la sesión inaugural de la reunión de Fondo Monetario Internacional de 1946.

doble razón: disponen de una inmensa cantidad creciente de recursos económicos (capital) y suelen concentrarse en unas pocas firmas de grandes dimensiones. Por otro lado, están los trabajadores individuales, con sus necesidades de subsistencia, cuya posición es de evidente debilidad ante la demanda protagonizada por las grandes empresas.



Un cartel de 1911 que denunciaba la situación de explotación vivida por los trabajadores de la época.

John Kenneth Galbraith analizó en su libro *El capitalismo americano* (1956) cómo las empresas tienden a concentrarse hacia la formación de grandes monopolios, que denomina «tecnoestructuras», que influyen de forma decisiva en la formación de los precios y de los salarios. Para contrarrestar este enorme poder, surge de forma espontánea en la sociedad una fuerza opositora que denomina «poder compensador». Este último, que tiende a restablecer las condiciones de competencia perfecta, está compuesto por las asociaciones de proveedores, las cooperativas y asociaciones de consumidores y el propio Estado; en el mercado de trabajo dicho poder está ejercido principalmente por los sindicatos de trabajadores, el Estado y las organizaciones internacionales, como la Organización Internacional del Trabajo (OIT).

Así pues, la presencia de los sindicatos y el Estado compensa la debilidad en el mercado de trabajo de los trabajadores considerados individualmente, ya que los sindicatos, con su poder de negociación y movilización, y el Estado, con su actividad reguladora, atenuan la tendencia de las corporaciones a presionar a la baja sobre los salarios. Pero los salarios representan el poder adquisitivo de los trabajadores y, en consecuencia, por debajo de ciertos niveles, se puede deteriorar mucho tanto su calidad de vida como la propia estabilidad social; es por ello que la mayoría de gobiernos establecen unos salarios mínimos. El Estado también regula la contratación, los horarios y el número de horas trabajadas, y los derechos de los trabajadores en general.

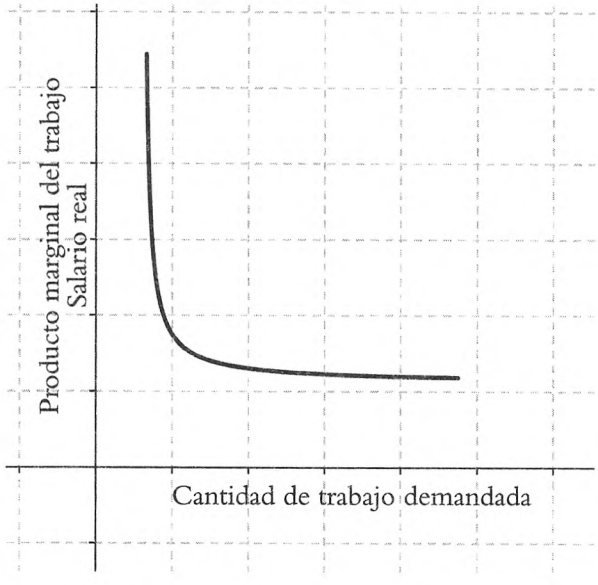
Debido a la actividad reguladora del Estado y de la acción de los sindicatos, el mercado de trabajo es rígido, es decir, que existen unos niveles mínimos establecidos para cada categoría profesional, fruto de las leyes laborales y de los convenios entre empresas y sindicatos. Cada empresa tiene su estructura organizativa, con sus categorías laborales y sus salarios establecidos.

En los últimos años se ha registrado en los países desarrollados un gran incremento del nivel general de salarios. El salario medio, que es un indicador del nivel de bienestar general, se ha incrementado notablemente, debido principalmente a dos factores: el aumento de la demanda de trabajo y el aumento del nivel tecnológico y la productividad. Esta última se incrementa, además de con más capital y tecnología, elevando el nivel cultural y la formación de los trabajadores. También en las situaciones de pleno empleo, la disminución de la oferta de la población activa y el aumento del número de personas no dispuestas a trabajar por los salarios que ofrece la demanda, puede provocar una presión al alza de los salarios.

Los salarios crecen hasta igualar el ingreso del producto marginal del trabajo multiplicado por el precio del producto, es decir:

Producto marginal del trabajo · Precio del producto =
= Ingreso del producto marginal del trabajo = Salario.

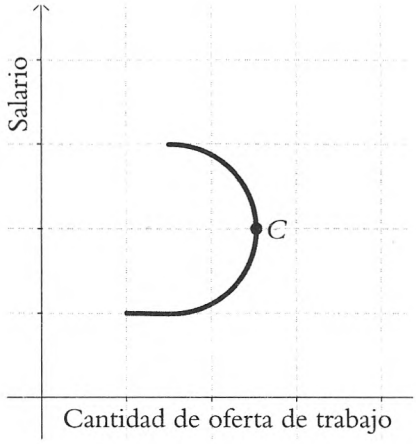
Si se considera la cantidad de trabajo resultará lógico que cuanto más alto sea el salario (ingreso del producto marginal del trabajo) se demandará menos cantidad de trabajo por parte de las empresas, y cuanto más descienda, más aumentará la demanda de trabajo. Si se traza la curva de la demanda de trabajo y del ingreso del producto marginal del trabajo, que coincide con el salario, se observa su convexidad decreciente respecto a los ejes de coordenadas, es decir, a salarios más altos, menos demanda de trabajo, y a la inversa, al disminuir los salarios aumenta la demanda de trabajo.



Curva de salarios y demanda de trabajo.

Por el contrario, si se analiza el mercado del trabajo por el lado de la oferta, cuanto más suben los salarios ofrecidos por las empresas demandantes de trabajo más aumenta la oferta, hasta que al llegar a un determinado punto de los salarios altos es posible que disminuya la oferta de trabajo, porque al aumentar el poder adquisitivo de los trabajadores puede que éstos disminuyan su jornada de trabajo y, como consecuencia de un efecto sustitución, prefieran dedicar más tiempo al ocio y otras actividades de esparcimiento, familiares y culturales. Este efecto sustitución se ilustra en el punto *C* de la curva de oferta de trabajo, en el que a un nivel alto del salario la oferta de

trabajo disminuye realizando un trazado de concavidad hacia el eje de abscisas, de forma que existe una oferta de trabajo máxima para un determinado nivel de salario elevado que cambia la tendencia de la curva en sentido opuesto.



Curva de oferta de trabajo (salarios-oferta de trabajo).

Inferencia de hipótesis en estadística laboral. Estudio sobre el desempleo

Un problema muy común en economía es la inferencia de hipótesis. Inferir quiere decir deducir, sacar una conclusión a partir de una hipótesis. Aceptar una inferencia estadística no significa que la conclusión sea una verdad absoluta, sino que se acepta como cierta con un pequeño margen de error al que se llama intervalo de confianza o nivel de significación.

En una encuesta sobre desempleo que se realiza en una zona de 8.000.000 de habitantes, se elige una muestra aleatoria (seleccionada al azar) de 2.000 personas. De estas 2.000, 700 declaran estar desempleadas (el 35% de las 2.000 personas). ¿Puede inferirse algo sobre el índice de desempleo que tiene dicha zona? Es decir, ¿puede asegurarse que el % de paro de la zona es de un 35%, o de un 34%, o de un 36%...? Lo que se desea es obtener un resultado con una fiabilidad del 95%, o sea, nivel de significación del 5% ($\alpha = 5/100 = 0{,}05$).

Para poder contestar a esta cuestión deben plantearse varias hipótesis de % de desempleo de la zona. Estas hipótesis deben tomarse alrededor del 0,35 (35%): 34, 36, 33, 37, 32, 38..., hasta que se encuentre alguna por encima y por debajo del

35% que deba rechazarse. Dado que se exige un nivel de significación del 5%, para determinar si una de las hipótesis debe rechazarse o no, se debe determinar si:

La probabilidad de que	el número de desempleados (k) de la población (hipótesis) por encima o por debajo de la media $\lvert k-\mu\rvert$ **sea mayor o igual que** el número de desempleados (700) de la muestra (dato) por encima o por debajo de la media $\lvert 700-\mu\rvert$	sea menor que	el nivel de significación ($\alpha = 5/100 = 0{,}05$).

Si esto ocurre, se rechaza la hipótesis realizada. Si no, se acepta la hipótesis.

Este cálculo de la probabilidad se repite para varias hipótesis. Cada hipótesis es un valor de p (% de desempleo supuesto en la zona). Se eligen diversos valores de p alrededor del 0,35 (35%) y se usa la distribución de probabilidad binomial, que es la adecuada en este caso por tratarse de una variable que sólo tiene dos respuestas posibles: sí o no. Como en nuestro ejemplo la población es de muchos individuos (n = 8.000.000) se utilizará la distribución normal como aproximación de la distribución binomial.

Como primera hipótesis se toma p = 0,33. En esta hipótesis, como la media y la desviación típica de una distribución binomial se calculan:

$$\text{media} = \mu = n \cdot p;\ \text{desviación típica} = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)},$$

por lo que resulta

$$\mu = 2000 \cdot 0{,}33 = 660;\ \sigma = \sqrt{2000 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}67} = 21{,}03.$$

Los desocupados k en la población total por encima o por debajo de la media son $\lvert k-\mu\rvert$ (el valor absoluto de $k-\mu$) y los desocupados en la muestra por encima o debajo de la media son $\lvert 700-\mu\rvert$ (el valor absoluto de $700-\mu$). Para que sea cierta la

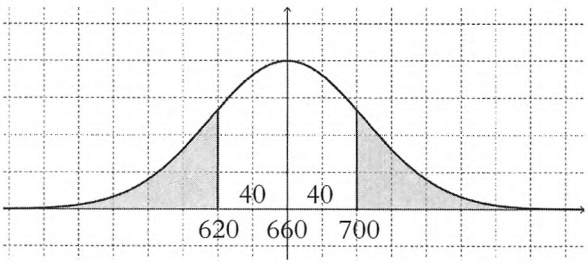
hipótesis $p = 0{,}33$, la probabilidad según la ley binomial $PB(|k-\mu| \geq |700-\mu|)$ tiene que ser menor que $\alpha = 0{,}05$, lo que se expresa del siguiente modo:

$$PB(|k-660| \geq |700-660|) < 0{,}05.$$

Se hacen las pertinentes operaciones en la inecuación, y quedará:

$$|k-660| \geq |700-660| \Rightarrow |k-660| \geq 40 \Rightarrow -40 \geq k-660 \geq +40 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -40+660 \geq k-660+660 \geq +40+660 \Rightarrow 620 \geq k \geq 700.$$

La ley binomial se aproxima a la ley normal, que es simétrica con eje de simetría en la media de la distribución que vale $\mu = 660$, para $p = 0{,}33$. Por lo tanto:



$PB(|k-660| \geq 40) = PB(620 \geq k \geq 700) = 2PB(k \geq 700)$, porque las dos zonas coloreadas son iguales.

Para aproximar una ley binomial (*PB* variable *k*, discreta) a una ley normal (*PN* variable *x*, continua) debe aplicarse la corrección siguiente:

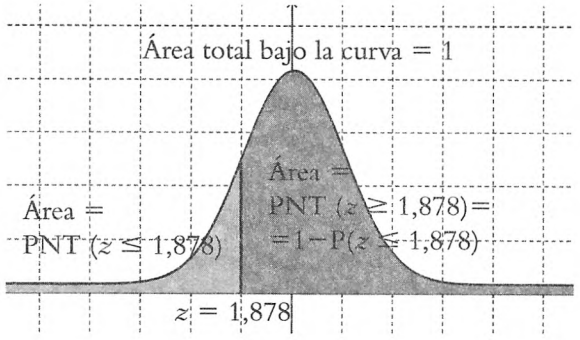
$$\text{PBinominal } (x \geq a) \cong \text{PNormal } (x \geq a - 0{,}5).$$

Es decir, según puede observarse en el gráfico,

$$PB(|k-660| \geq 40) = 2 \cdot PB(k \geq 700) \cong 2 \cdot PN(x \geq 700-0{,}5) = 2 \cdot PN(x \geq 699{,}5).$$

Ahora se aplica el cambio de la variable normal (x) a la variable normal tipificada (z) para poder emplear las tablas estándares de la distribución normal. Este cambio de variable se hace con la fórmula

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-660}{21{,}03}.$$



Como puede observarse en el gráfico,

$$PB(|k-660| \geq 40) \cong 2 \cdot PN(x \geq 699{,}5) = 2 \cdot PNT\left(z \geq \frac{699{,}5-660}{21{,}03}\right) =$$

$$= 2 \cdot PNT(z \geq 1{,}878) = 2 \cdot \left[1 - PNT(z \leq 1{,}878)\right].$$

En las tablas de la ley normal tipificada, al valor $z \leq 1{,}878$ le corresponde una probabilidadde $PNT(z \leq 1{,}878) = 0{,}96999$ y $PB(|k-660| \geq 40) \cong 2(1-0{,}96999) = 0{,}0602$, que resulta mayor que 0,05. Por consiguiente, dado que la probabilidad correspondiente a la hipótesis de $p = 0{,}33$, que es 0,0602, es mayor que 0,05, ello permite NO rechazar la hipótesis de que la muestra proceda de una población de 8 millones en la que el 33% de las personas estén desempleadas. O, dicho de otra manera, puede asegurarse que esta zona tiene un 33% de desempleo, con un error menor de un 5%.

Estos cálculos tienen que repetirse para otras hipótesis de p cercanas al 35% ($p = 0{,}35$), por ejemplo, 34%, 36%, 37%, 38%...

Con los resultados obtenidos se puede confeccionar una tabla que resuelva el problema para cada valor de la hipótesis p como la siguiente:

(p) Hipótesis	μ	σ	z	De la tabla de PNT (z)	Cálculo de $PB\|k-\mu\| \geq \|700-\mu\|$	¿Acepto hipótesis? ¿Es PB $< \alpha$?
0,32 (32%)	640	20,8614477	2,85	0,9978	0,0044	No
0,33 (33%)	660	21,028552	1,88	0,9699	0,0602	Sí
0,34 (34%)	680	21,1849003	0,92	0,8212	0,3576	Sí
0,35 (35%)	700	21,330729	–0,02	0,5	1	Sí
0,36 (36%)	720	21,4662526	0,91	0,8186	0,3628	Sí
0,37 (37%)	740	21,5916651	1,83	0,9664	0,0672	Sí
0,38 (38%)	760	21,7071417	2,74	0,9969	0,0062	No

De esta tabla puede concluirse que los valores de la muestra (700 desempleados de 2.000 personas entrevistadas) puede proceder de una población cuyo % de desempleo se halle entre el 33% y el 37%. Todo ello con un error o nivel de significación del 5%.

Para garantizar que una muestra sea representativa del comportamiento de la población de la que ha sido extraída (es decir, para hacer una inferencia estadística) es necesario determinar previamente el tamaño de la misma, el tipo de muestreo (modo de selección de los encuestados) más adecuado al estudio de la variable estadística de la que se trate, y la estimación en la que se eligen las variables que se van a estimar y los procedimientos matemáticos más adecuados.

¿Es rentable fichar un crack o un deportista de élite?

Es fácil escandalizarse cuando leemos en los medios de comunicación que se ha fichado a un futbolista, un jugador de baloncesto u otro deportista de élite por una cantidad astronómica. ¿Qué razones económicas pueden haber para realizar de forma razonable un gasto de tal envergadura? Al precio del fichaje habría que añadir su sueldo anual, que es una cantidad a veces superior a los 5 millones de euros.

El planteamiento de la operación es bastante complejo. Si un equipo deportivo ficha a una estrella, un «crack» como suele decirse, es posible que el equipo juegue mejor y gane más partidos. Si el equipo es ganador, su club tendrá más aficionados que acudan al campo, se incrementará el número de socios con el consiguiente aumento de la recaudación por el pago de las cuotas de afiliación, se recaudará más dinero por la venta de entradas al campo, se incrementarán los ingresos por publicidad, se venderán más camisetas y material deportivo con los colores del club, se cotizará más en los derechos de retransmisión de los partidos por televisión y, al ganar títulos, recibirá sustanciales importes de las federaciones nacionales e internacionales que organizan los torneos. Se trata, pues, de averiguar si los elevados costes del fichaje y del sueldo del deportista se compensan con la aparición de estos resultados tan positivos.

Para ilustrar el caso bastará con poner el siguiente ejemplo: un equipo de fútbol que tiene 22 jugadores en plantilla, hace años que no gana ningún título. Para simplificar el caso, se supone que todo el gasto del club se limita al coste de los salarios de los jugadores, que cobran en promedio 3 millones de euros anuales, es decir, la plantilla cuesta 66 millones de euros anuales; y que los ingresos del club proceden sólo de dos conceptos: por jugar la Liga recaudan 10 millones al año en concepto de venta de entradas y derechos de retransmisión por televisión, y tienen un contrato de publicidad de 5 millones de euros anuales. En total, por lo tanto, el club cuenta con unos ingresos

de 15 millones de euros anuales y unos gastos de 66 millones anuales, lo que ofrece unos resultados negativos de 51 millones de euros anuales.

Las perspectivas de ingresar más dinero ganando títulos son enormes. Si fueran campeones de Liga, además de los 10 millones habituales, ganarían 30 millones de euros adicionales, por mayor recaudación de entradas y cuotas de nuevos socios; si además ganaran la Champions ello supondría unos ingresos de 200 millones de euros, y sólo participar en la Champions, sin llegar a la final, 50 millones de euros, tal como se especifica en el cuadro siguiente:

Ingresos deportivos y TV	(millones €)
Campeón Liga	30
Copa Champions	200
Participar Champions	50
Participar Liga	10

Los ingresos de la consecución de los campeonatos de la Liga y la Champions se suman a los 10 millones que ya se ganan normalmente sin ganar ningún título. Por otro lado, están los ingresos por publicidad, que son de 5 millones de euros anuales, pero si se gana la Liga los contratos de publicidad duplican esta cifra. Si se gana la Champions se generan unos contratos de publicidad adicionales, por valor de 40 millones de euros; sólo participar en la Champions, sin llegar a la final, ya supone unos mayores ingresos por publicidad de 10 millones de euros, y el no va más sería ganar la Champions y la Liga el mismo año, ya que ello supondría unos mayores ingresos por publicidad, por valor de 70 millones de euros. En definitiva, los ingresos en concepto de publicidad son los siguientes según el palmarés deportivo:

Ingresos por publicidad	(millones €)
Jugar Liga	5
Ganar Liga	10
Jugar Champions	10
Ganar Champions	40
Ganar Liga y Champions	70

En los últimos 5 años el club ha obtenido unos resultados negativos de 255 millones de euros, y sus directivos deciden fichar un crack para mejorar la situación deportiva y las finanzas del club, cuyo traspaso cuesta 100 millones de euros; el jugador cobrará un sueldo de 7 millones de euros anuales, con un contrato de 5 años. La operación se realiza con normalidad, pero con gran escándalo de los medios de comunicación deportivos.

Se trata de averiguar, a tenor de los resultados deportivos de los próximos años, si con la duración de este contrato y el coste que ha supuesto para el club la operación de este fichaje estrella ha sido rentable.

En los años siguientes al fichaje estrella, los resultados deportivos han mejorado sustancialmente. El primer año no se ha ganado nada, pero al quedar en la parte alta de la clasificación, al año siguiente el club jugó la Champions. En el segundo año, además de jugar en Europa, quedaron campeones de Liga. El tercer año, aunque no ganaron la Liga, ganaron la Champions. El cuarto año ganaron la Liga y participaron en la Champions, y el último año de contrato sólo participaron en los dos campeonatos y no ganaron ningún título. En total tres títulos, dos Ligas y una Champions, en 5 años.

Al finalizar el contrato del jugador los directivos quisieron conocer el resultado de la operación de 5 años de duración, y elaboraron un cuadro comparativo entre los resultados económicos obtenidos con la incorporación del crack, y los que se hubiesen obtenido si hubiese continuado la situación anterior, sin haberse gastado un total de 135 millones de euros en este fichaje estrella (100 millones de traspaso y 35 millones de sueldo). Los resultados comparativos son los siguientes:

	Con fichaje crack	Sin fichaje crack	Títulos conseguidos
Costes			
Precio fichaje	100	0	
Precio jugador: 7 × 5	35	0	
Coste plantilla	330	330	
Coste total	465	330	
Ingresos			
Entradas partidos y TV			
Año 1	10	10	0 Liga 0 Champions
Año 2	90	10	1 Liga part. Champ.
Año 3	210	10	0 Liga 1 Champions
Año 4	90	10	1 Liga part. Champ.
Año 5	60	10	0 Liga part. Champ.
Total entradas y TV	460	50	
Publicidad			
Año 1	5	5	0 Liga 0 Champions
Año 2	20	5	1 liga Part. Champ.
Año 3	45	5	0 liga 1 Champions
Año 4	20	5	1 Liga part. Champ.
Año 5	15	5	0 Liga part. Champ.
Total publicidad	105	25	
Ingresos totales	565	75	
Resultado	100	−255	

Flujos de caja con y sin el fichaje del crack (5 años y millones €).

Como puede observarse, al final del contrato, además de recuperar los 135 millones de la operación, se obtiene un beneficio de 100 millones de euros. Sin embargo, los directivos deciden calcular el valor actual neto de este flujo de caja positivo, teniendo en cuenta que el precio del dinero es del 4%. También quieren conocer la tasa de rendimiento interno de los flujos de caja con el fin de poder valorar el rendimiento de la operación según diversos criterios. Los resultados obtenidos son los siguientes:

	Ingresos totales	Costes totales	Resultado
Año 1	15	173	–158
Año 2	110	73	37
Año 3	255	73	182
Año 4	110	73	37
Año 5	75	73	2
Total	565	465	100
VAN	80		
Tipo de interés 4%	0,04		
TRI	28%		

Flujos de caja con el fichaje del crack.

Se observa que el VAN (valor actualizado neto) es positivo en 80 millones de euros y, sobre todo, la tasa de rendimiento interno del proyecto deportivo, consistente en el fichaje estrella de un crack, ha sido muy positiva, del 28%. Sin embargo, existe en estas consideraciones un fallo importante, ya que no se ha valorado suficientemente la opción de no obtener ningún título, que es un postulado de riesgo que hay que tener en cuenta. En el cuadro siguiente se ha realizado el cálculo de los resultados que se hubiesen obtenido jugando el crack, pero sin ganar ningún título:

	Ingresos totales	Costes totales	Resultado
Año 1	15	173	–158
Año 2	15	73	–58
Año 3	15	73	–58
Año 4	15	73	–58
Año 5	15	73	–58
Total	75	465	–390

Flujos de caja con el fichaje del crack (sin obtención de ningún título).

Como puede observarse, en tal circunstancia, los resultados hubiesen empeorado mucho en relación al pasado, ya que los 390 millones de euros de pérdidas hubiesen representado un aumento del 50,94% del resultado negativo del último quinquenio. Así pues, en el cálculo de la rentabilidad de cualquier negocio no hay que valorar únicamente los resultados reales y proyectarlos para realizar las previsiones futuras, sino que hay que valorar también los escenarios de futuro, y tener en cuenta los riesgos y las amenazas que pueden surgir del entorno, aplicando el cálculo de probabilidades a que se produzcan determinados sucesos, tanto si se trata de oportunidades como de amenazas.

Capítulo 5

¿Cómo comprar al menor coste posible? El mercado

El mercado era originariamente el lugar donde se reunían compradores y vendedores: los productores y comerciantes ofrecían sus productos y los ciudadanos compraban los bienes que necesitaban. Los vendedores, evidentemente, deseaban obtener la máxima ganancia, es decir, el mayor margen posible entre el precio de venta y el coste de producción, y los compradores, adquirir los bienes que necesitaban lo más baratos posibles. Los vendedores sabían perfectamente que si ponían precios elevados las ventas disminuirían, y si en el transcurso del día no habían vendido sus existencias y bajaban los precios éstas se vendían con mayor fluidez. Con este tanteo entre vendedores y compradores al final acababan estableciéndose unos precios bastante estables, que oscilaban de acuerdo con la climatología y las épocas de escasez.

La oferta y la demanda

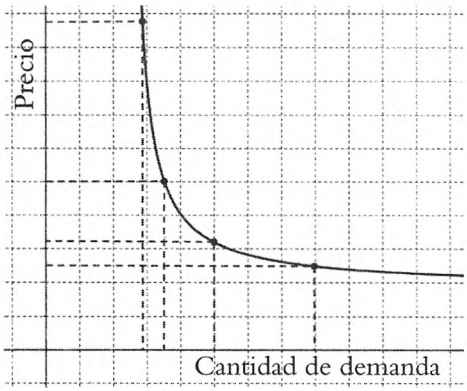
El mercado es tan viejo como la existencia humana, pero en la actualidad es un mecanismo sumamente evolucionado y complejo. Los productos pueden haber sido producidos a miles de kilómetros de distancia, y haber pasado por varias transformaciones y comercializaciones. Puede que un grupo reducido de la oferta se ponga de acuerdo y fije unos precios monopolísticos, y a su vez, que un grupo poderoso de consumidores presione sobre los precios. Pero, en definitiva, el mercado continúa siendo el mecanismo por el cual la concurrencia de vendedores (oferta) y compradores (demanda) fija los precios. El precio de equilibrio de mercado es aquel en el que compradores y vendedores se ponen de acuerdo en unas condiciones de competencia perfecta. Cuando una de las partes tiene más poder que la otra se produce una situación de monopolio, que puede ser tanto monopolio de oferta como de demanda.

El mercado no sólo existe para los bienes de consumo e inversión y servicios, sino también para los factores de producción, como las materias primas, la tecnología o el trabajo. Los elementos que determinan su funcionamiento son básicamente las preferencias de los consumidores (sus gustos y lo que están dispuestos a pagar) y los

El mercado es tradicionalmente el lugar de encuentro entre vendedores y compradores, aunque hoy en día este término tiene un significado mucho más amplio, hasta el punto de ser una de las principales características de la economía capitalista. En la ilustración, el mercado central de la ciudad estadounidense de Lancaster, en Pennsylvania.

costes de producción de la oferta, así como las estrategias empresariales para obtener las máximas ganancias.

La demanda se estudia a través de la elaboración de unos cuadros estadísticos históricos de las cantidades demandadas de un bien, en función de la evolución de los precios. A cada precio le corresponde una cantidad demandada. La representación gráfica de la curva de demanda es una hipérbola descendente, en la que en el eje de ordenadas se representan los precios, y en el de abscisas, las cantidades demandadas que corresponden a cada precio.



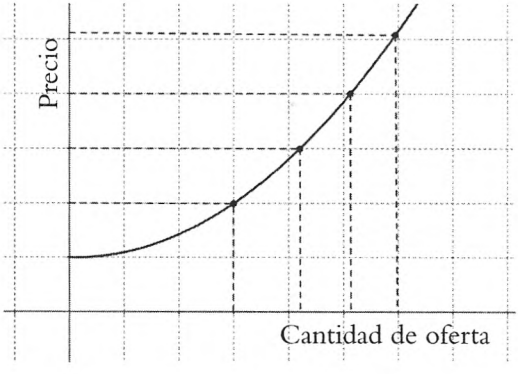
Curva de demanda.

La curva de demanda no permanece fija, sino que se desplaza a medida que varían las condiciones económicas. De esta manera, por ejemplo, si aumenta el nivel de renta de los consumidores es evidente que a un mismo precio habrá más cantidad demandada del bien, con lo cual la curva de demanda sufrirá un desplazamiento hacia la derecha. Y lo mismo sucederá en el caso de que aumente el número de consumidores. Por el contrario, si lo que se produce es una disminución del nivel de renta debido a una crisis económica, la curva de la demanda se desplaza hacia la izquierda.

Así pues, una cosa son los desplazamientos registrados a lo largo de la curva de la demanda, en la que sólo se relacionan cantidades del bien demandado con sus precios, manteniendo constantes las demás variables que intervienen en el mercado (nivel de renta, número de individuos, etc.), y otra muy distinta son los incrementos de la demanda, motivados por la variación de otras variables que intervienen en la formación de los precios y que provocan desplazamientos de la curva de demanda hacia la derecha o hacia la izquierda.

La curva de oferta representa las cantidades de producto que las empresas están dispuestas a ofrecer a unos determinados precios de venta, con los que pueden obtener un beneficio.

La oferta se representa también en unos ejes de coordenadas, en los que los precios se representan en el eje de ordenadas, mientras que en el de abscisas figuran las cantidades ofertadas a cada nivel de precios. El resultado de la representación gráfica es una parábola ascendente, en la que se parte de un precio mínimo por debajo del cual no existiría oferta, ya que estaría por debajo de los costes de producción.



Curva de oferta.

En el estudio de la oferta aparece un elemento muy importante: los costes de producción. Cuanto más bajos son los costes en relación al precio, más alto será el beneficio de la empresa y, por lo tanto, ésta estará dispuesta a ofrecer al mercado más cantidad de producto.

En los costes de producción tienen un papel relevante los costes de los factores de producción, como el trabajo, la energía y la maquinaria, cuya combinación está determinada por el nivel tecnológico alcanzado por la empresa. Así, cada vez se utilizará menos energía y menos trabajo, y la maquinaria será utilizada con mayor eficiencia; en esto radica el progreso tecnológico. Éste supone también la búsqueda de factores sustitutivos que aumenten la eficiencia y la productividad de la empresa.

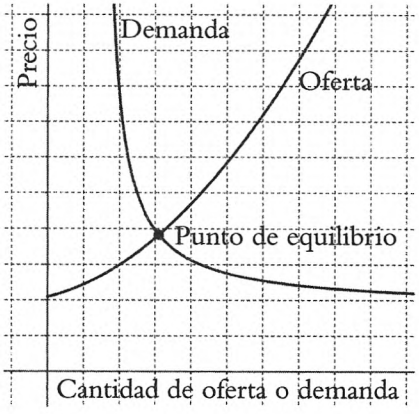
De este modo, el proceso productivo se automatiza, sustituyendo trabajo humano por trabajo de cadenas de producción automatizadas, con el consiguiente ahorro de salarios; se sustituyen unos materiales por otros más resistentes y fiables a la vez que más baratos, etc.

Igual que en la curva de la demanda, la curva de la oferta también puede presentar desplazamientos. Si varían los precios del mercado, la cantidad ofrecida sigue el trazado de la curva de la oferta. Pero si varían las condiciones tecnológicas o bien aumenta el número de competidores, la oferta total puede aumentar y, en consecuencia, la curva de la oferta también experimentará un desplazamiento hacia la derecha.

El papel del mercado en la formación de los precios. Teoría del equilibrio de mercado

Cuanto mayor sea el precio de mercado, mayor será la oferta, pero con precios elevados la demanda tenderá a disminuir. Y, por el contrario, cuanto más baje el precio de mercado, más aumentará la demanda, aunque disminuirá el beneficio de los empresarios.

Llega un punto en el que las curvas de demanda y oferta se cruzan, y este punto de intersección es el que marca el equilibrio entre la oferta y la demanda, es decir, el precio al que los consumidores están dispuestos a comprar y las empresas, por su parte, a vender. Se denomina punto de equilibrio, porque si las condiciones del mercado son estables (niveles de renta, preferencia de los consumidores, nivel tecnológico, costes de los factores de producción, etc.), no hay motivos para que varíe.



Curvas de oferta y demanda.

Sin embargo, el punto de equilibrio también puede verse influido por los desplazamientos de las curvas de oferta y demanda, es decir, por las variaciones del nivel tecnológico y el aumento de la competencia en el caso de la oferta, y las variaciones del nivel de renta y número de consumidores, o simplemente la variaciones en las preferencias y gustos de los consumidores. Por el lado de la oferta, el punto de equilibrio del mercado sería aquel en el que el coste marginal (es decir, el aumento del coste de un producto generado por el aumento de la producción en una unidad de producto) iguale al beneficio marginal (es decir, el beneficio que producirá esta nueva unidad vendida).

Así, el beneficio marginal es:

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta b}{\Delta q};\ \text{o expresado en derivadas: } \frac{db}{dq},$$

donde b = beneficio y q = cantidad de producto. Y el coste marginal es:

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta q};\ \text{o expresado en derivadas: } \frac{dc}{dq},$$

donde c = coste y q = cantidad de producto.

Los estudios de la formación de los precios y los de mercado requieren la utilización de un nivel matemático potente. En primer lugar, hay que elaborar estadísticas de ventas, volúmenes de producción y precios, así como también analizar a qué precios se equilibra la oferta con la demanda, o dicho con otras palabras, si se fija un determinado precio para un bien o servicio qué demanda podrá generar, y en función de las curvas de costes cuáles van a ser las ganancias de la empresa, o del sector económico, si el estudio se realiza a nivel macroeconómico.

Es obvio que para la elaboración de estudios de mercado, tanto a nivel individual (microeconomía) de una sola empresa como a nivel agregado para todas las empresas del sector, es necesario elaborar estadísticas, análisis gráficos y otros tipos de análisis estadísticos más complejos, como el análisis de la varianza, el análisis multivariable y los ajustes de curvas, para determinar qué otras variables, además de la oferta y la demanda, intervienen en la formación de los precios y las ganancias empresariales.

EL EQUILIBRIO GENERAL

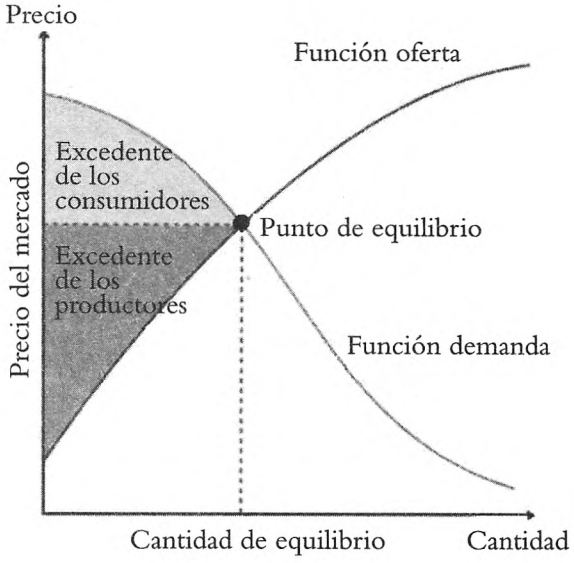
El equilibrio general consiste en analizar los fenómenos de la economía cuando todos los sectores que la conforman se consideran de modo simultáneo, de modo que se analizan todos los impactos directos o indirectos y las interrelaciones de los mercados. Léon Walras (1834-1910) fue el primero que dio la notación matemática del enunciado del equilibrio general.

Walras creía en la empresa como centro de la economía y estudió su acción en el marco de una competencia entre agentes. También observó una interdependencia de todos los mercados económicos: los mercados de productos (bienes y servicios) y los de factores de producción (trabajo, tierra y capital). Analizó los procedimientos para fijar los precios y las cantidades de manera simultánea y planteó el problema económico del equilibrio general, es decir, de la estabilidad de los equilibrios en el mercado. El italiano Vilfredo Pareto y el austriaco Carl Menger continuaron su trabajo, y se consideran los padres de la escuela económica neoclásica marginalista.

Léon Walras, el economista francés que dio al enunciado del equilibrio general sus fundamentos matemáticos.

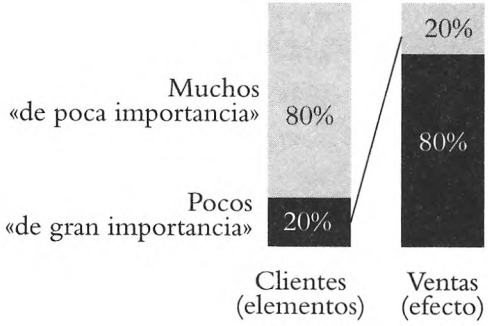
La teoría del equilibrio general se estudia en microeconomía (economía de la empresa). Es una explicación global del comportamiento de la producción, del consumo y de la formación de los precios en una economía. El equilibrio general intenta dar una explicación que va de lo particular a lo general (*bottom-up*), pues empieza por los mercados y los agentes individuales. En cambio, la macroeconomía (agregación de variables microeconómicas) usa una visión que va de lo general a lo particular (*top-down*), y su análisis empieza por los componentes más destacados.

Los modelos generales modernos del equilibrio son muy complejos y requieren de ordenadores muy potentes para calcular soluciones numéricas.

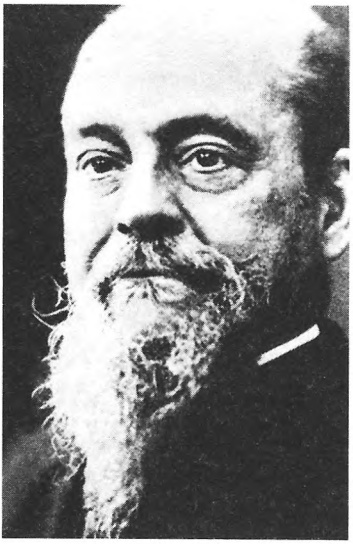


En el modelo de Walras se representan las funciones de los precios de la cantidad ofertada y de la demandada en ecuaciones interrelacionadas. Los precios, la cantidad de oferta y la cantidad de demanda son las tres variables. Se deben calcular dos incógnitas: el precio y la cantidad en el equilibrio en el que la oferta iguala a la demanda. En la curva o función de oferta el precio crece con la cantidad y en la curva o función de demanda el precio decrece con la cantidad. El punto de equilibrio es el punto de intersección de ambas curvas.

Por su parte, el principio de Vilfredo Pareto (1848-1923) se basa en el conocimiento empírico. Este economista y filósofo italiano observó que en su sociedad la gente se dividía naturalmente entre los «pocos de mucho» y los «muchos de poco». Se establecían así dos grupos de proporciones 80-20 tales que el grupo minoritario, formado por un 20% de población, ostentaba el 80% de algo y el grupo mayoritario, formado por un 80% de población, el 20% de ese mismo algo. Estas cifras son arbitrarias; no son exactas y pueden variar. Su aplicación reside en la descripción de un fenómeno y, como tal, es aproximada y adaptable a cada caso particular. Hay que tener en cuenta que tanto la distribución de los efectos como sus posibles causas no es un proceso lineal, sino que el 20% de las causas totales originan el 80% de los efectos.



Desde que Pareto enunció este principio, se ha constatado que es aplicable a diversas situaciones de la economía y los negocios. El principio dice que el 20% de una acción producirá el 80% de los efectos, mientras que el 80% restante sólo origina el 20% de los efectos. Para un reparto equitativo hay que conseguir minimizar el principio de Pareto, de forma que el reparto esté lo más alejado posible de una distribución de proporciones 80-20. Este principio se usa igualmente en el análisis comercial. Las compañías que hacen un análisis de facturación respecto al número de clientes constatan que, aproximadamente, el 80% de la facturación depende del 20% de los clientes. Casi nunca se observa una relación 80-20 exacta, pero la desproporción entre ventas y número de clientes suele ser cierta.



Vilfredo Pareto, economista italiano que acuñó el principio de los dos grupos de proporciones 80-20, el cual se ha aplicado con éxito a los más diversos ámbitos.

LA CURVA ABC DEL ALMACÉN

El principio de Pareto también se utiliza para analizar el surtido o gama de productos que vende una empresa comercial, donde el 80% de la facturación proviene del 20% del catálogo de productos, y ha dado lugar a la clasificación *ABC*: *A* = 20% de los artículos, que generan el 80% de los movimientos del almacén; *B* = 15% del valor total de stock y el 30% del total de los artículos, y *C* = 5% del valor total de stock y el 50% del total de los artículos. Esta clasificación también se utiliza para agrupar los artículos dentro del almacén en un número limitado de categorías, cuando se controlan según su nivel de disponibilidad. De este modo, los productos *A* se colocarán cerca de los lugares donde se preparan los pedidos, para así perder el menor tiempo posible en mover las mercancías.

El principio de Pareto se ha aplicado con éxito a los ámbitos de la política y la economía. Describe cómo cerca del 20% de la población ostenta el 80% del poder político y la abundancia económica, mientras que el 80% restante, lo que Pareto denominó «las masas», se reparte el 20% de la riqueza y tiene poca influencia política. En líneas generales, sucede lo mismo con el reparto de los bienes naturales y la riqueza mundial.

Elasticidad de la demanda

Los bienes económicos son escasos y su obtención requiere un coste, que obviamente hay que medir en unidades físicas y monetarias. Una vez producidos a unos costes determinados, tienen que venderse, colocarse en el mercado. En función de la demanda se forman los precios de venta de los productos, que si son superiores a los costes de producción dan lugar a una ganancia. Aquí se generan tres tipos de necesidades en la toma de decisiones por parte del empresario:

1. Prever la evolución de la demanda, y en consecuencia la evolución de los precios de venta.
2. Intentar reducir al máximo los costes de producción, con el fin de obtener el máximo beneficio, y determinar el umbral de rentabilidad por debajo del cual no es aceptable continuar produciendo el bien o servicio en cuestión.
3. Elaborar un modelo matemático que permita determinar la condición de equilibrio del mercado y ver cómo se forman los precios en función de la oferta y la demanda.

Así pues, se tiene que estudiar cómo varía la demanda en función de la evolución de los precios de oferta. Para ello se define una relación entre la variación de la demanda y la variación de los precios, que se denomina elasticidad de la demanda, y que se expresa de la forma siguiente:

$$\text{Elasticidad de la demanda} = \Delta q \,/\, \Delta p,$$

donde Δq es la variación de la cantidad demandada de un bien y Δp es la variación del precio del bien.

También se puede expresar en variaciones en % de la cantidad demandada sobre la variación en % del precio:

$$\text{Elasticidad de la demanda} = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} \text{ o lo que es lo mismo: } E = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}.$$

Es decir, la derivada de q respecto de p, $\frac{dq}{dp}$ multiplicada por $\frac{p}{q}$.

La elasticidad de la demanda se mide en términos unitarios; se mide, por lo tanto, cuánto varía la cantidad de bienes demandada por unidad monetaria de incremento del precio. Si la demanda varía mucho con la variación de los precios se dice que es una demanda elástica; si los precios suben mucho, la demanda bajará en forma proporcional hasta que los consumidores se vean obligados a comprar otros bienes sustitutivos más baratos. La demanda elástica presenta una elasticidad superior a la unidad, es decir, que por la variación de una unidad en el precio se registran aumentos en varias unidades en la demanda. Por el contrario, si la demanda apenas varía con las variaciones de los precios, se dice que se trata de una demanda rígida o inelástica. En este caso la elasticidad de la demanda es inferior a la unidad.

Los bienes de primera necesidad, como los alimentos, la ropa y el calzado, suelen tener una demanda inelástica, ya que son difícilmente sustituibles, mientras que los bienes de lujo son los que presentan unas demandas más elásticas, ya que cuando aumentan de precio son sustituidos por otros bienes más baratos, mientras que si experimentan bajas de precios su demanda se dispara rápidamente.

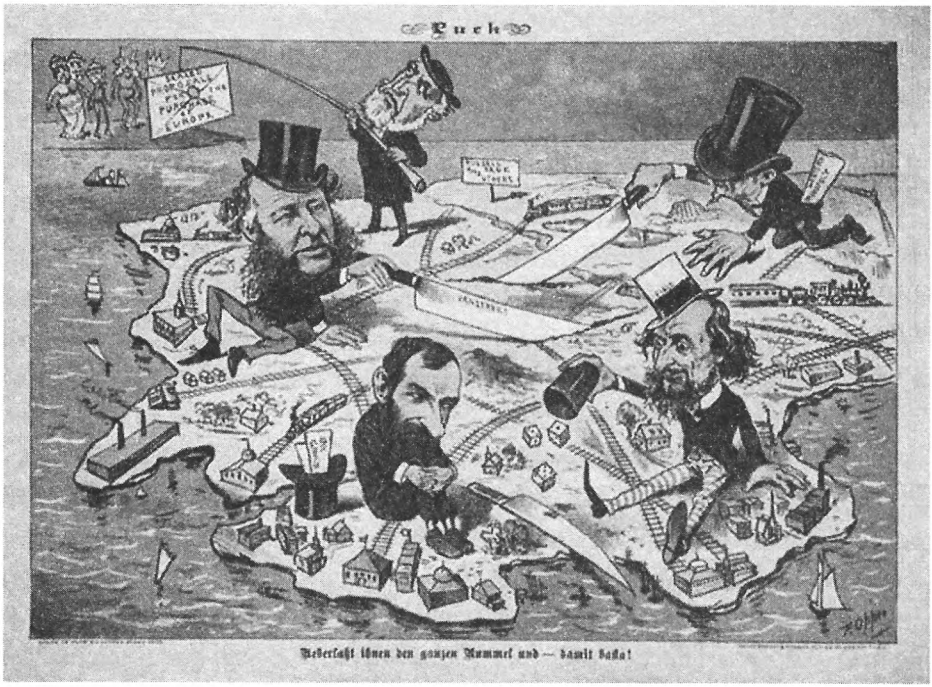
En la formación de los precios también influyen los niveles de renta de los consumidores, ya que a mayor renta más capacidad de compra para adquirir un mayor

número de bienes. Por lo tanto, la elasticidad de la demanda se corresponde a un nivel determinado de renta, y puede variar cuando éste aumenta, es decir, que la curva de demanda se desplaza hacia la derecha.

El funcionamiento del mercado

A nivel teórico y abstracto parece como si el mercado funcionara en unas condiciones de competencia perfecta y transparencia total, es decir, como si existiera un gran número de empresas que ofrecen unos productos obtenidos a un mínimo coste y a un nivel máximo de calidad; que estos productos satisfacen perfectamente las necesidades de los consumidores, y que éstos toman decisiones racionales de compra: adquieren los productos que cubren sus necesidades al mejor precio y comparativamente los de mejor calidad, de forma que obtienen un nivel máximo de utilidad al mínimo precio. La realidad no es ésta, sino que el mercado no es de competencia perfecta y suele haber unas pocas empresas que ofrecen unos productos con una tecnología y un precio que el resto de las empresas del mercado no están en condiciones de fabricar y, en consecuencia, fijan los precios más elevados posibles que el consumidor puede pagar. O simplemente existe una sola empresa que puede ofrecer un producto en situación de privilegio, como el suministro de combustibles, o también productos de alta tecnología, como determinados aparatos de precisión o aviones, a unos precios que satisfacen más las ansias de beneficios empresariales que los intereses del consumidor. En otros casos, las empresas lanzan al mercado productos o servicios novedosos, de los que el consumidor no tiene conocimiento porque antes no existían. A través de campañas publicitarias se crea la necesidad del nuevo producto y el consumidor responde compulsivamente y de forma irracional a comprar un producto que no necesita pero del que le han convencido que sí necesita, pagando un precio elevado y, a veces, hasta abusivo.

También existen unas pocas empresas que disfrutan de situaciones privilegiadas, tales como concesiones administrativas (suministros de agua, electricidad, transportes públicos, etc.) que les permiten imponer al consumidor unos precios demasiado altos. Estas situaciones de monopolio (cuando una sola empresa domina el mercado), si no interviene el Estado, suelen ser muy perjudiciales para los consumidores, aunque en determinados países puede ser el propio Estado el que realiza estas actividades monopolísticas. En otras ocasiones, cuando la oferta está formada por un número reducido de empresas (oligopolio), éstas pueden ponerse de acuerdo sobre los precios que deben ofrecer a los consumidores, con lo cual el resultado es el mismo que en



El dibujante estadunidense Frederick Burr Opper caricaturizó en esta viñeta, publicada hacia 1885, el reparto del país llevado a cabo por los millonarios monopolistas.

la situación monopolística: dominio absoluto del mercado a favor de las empresas y en perjuicio de los consumidores. El oligopolio es un tipo de mercado que suele ser muy corriente en los sectores de automóvil y las aseguradoras.

Pero además del monopolio de oferta, también puede existir el monopolio de demanda (monopsonio), es decir, cuando existe una sola empresa compradora ante una multitud de empresas proveedoras. En esta situación, la empresa compradora puede imponer unas duras condiciones a las vendedoras, respecto a plazos de entregas, fuertes descuentos en los precios, rappels de compra, condiciones de exposición del producto, condiciones de pago, etc. Un ejemplo de monopsonio es el de las grandes superficies, que imponen a sus proveedores (multinacionales incluidas) duros descuentos, además de rappels de compras (descuentos adicionales sobre el volumen de negocio), condiciones de mercancías en depósito que no son facturadas hasta el momento de su venta, periodos de pago superiores a los 30 días, compensaciones por la exposición de los productos (la gran superficie cobra a sus proveedores unos importes que descuentan de las facturas, porque considera que la exposición de sus productos en los estantes del supermercado es una publicidad por la que hay que

pagar), etc. Evidentemente, cuando una empresa quiere comerciar con una gran superficie, tiene que firmar un contrato de suministro, con unas condiciones muy duras impuestas por esta situación de demanda monopsónica.

Otro factor que influye en los precios finales de los productos es la existencia de intermediarios o comisionistas, que cargan pequeños márgenes al precio inicial, o bien cobran comisiones sobre las cifras de ventas. La existencia de numerosos canales de intermediarios en la comercialización de un producto puede encarecer notablemente el precio final que tiene que pagar el consumidor, pudiendo llegar algunos intermediarios a situaciones de auténtico privilegio monopolista. Esta situación suele darse en los canales de distribución de los productos agrícolas, de ahí la gran diferencia entre los precios de venta al consumidor final y los pagados al agricultor.

Otra forma de organización de mercados es la de las subastas, que consisten en unos foros en los que se ofrecen a la venta determinados bienes al mejor postor.

EL DESCUENTO COMERCIAL

Existen numerosas formas en las que se materializan las operaciones comerciales, especialmente por lo que se refiere al cobro. Una de ellas es el descuento comercial, por el que una empresa acude a una entidad financiera para que le adelante el cobro de una factura que ha emitido a un cliente. El banco le descontará un interés por el cobro adelantado, que es lo que se denomina descuento comercial, y se aplicará al descuento de pagarés, letras de cambio o el simple endoso de facturas antes de su fecha de vencimiento. Si el valor del efecto descontado en el banco por una empresa tiene un importe V_n, que deberá cobrarse en una fecha de vencimiento n a un cliente que ha aceptado la deuda, el banco le adelantará un importe inferior V_0 y aplicará un interés i anual por la operación (que ajustado al periodo de tiempo n por el que se cobra por anticipado, da una tasa de interés efectiva i_e), de forma que los intereses cobrados por el banco serán:

$$D = V_n \cdot i_e.$$

Y el valor que percibirá la empresa por cobro anticipado V_0 será:

$$V_0 = V_n - V_n \cdot i_e = V_n(1 - i_e) = V_n - D;\ V_0 < V_n,$$

donde V_0 es el importe anticipado por el banco; V_n, el valor del efecto descontado; i, la tasa de interés anual aplicada por el banco; i_e, la tasa de interés efectiva aplicada en función del tiempo transcurrido; n, el período de vencimiento y D, el monto de intereses ($= V_n \cdot i_e$).

Se trata de la misma fórmula que la del interés simple, pero con cobro anticipado.

Existen varias formas de subastas; la más común es la subasta al alza (subasta inglesa), en la que se ofrece un determinado artículo a un precio mínimo de salida y los posibles compradores van subiendo sus ofertas hasta que se adjudica al mejor postor. Esta modalidad ha pasado progresivamente de presencial a poderse realizar por medios electrónicos y a través de Internet.

Otra modalidad de subasta es la subasta a la inversa, es decir, que se parte de un precio máximo y se va bajando de valor hasta que un comprador detiene el descenso (subasta holandesa). En la subasta americana, por su parte, los posibles compradores tienen que depositar con anticipación los importes que ofrecen.

Las subastas también pueden ser de compra, que es la modalidad que normalmente utilizan las administraciones públicas cuando quieren adjudicar un proyecto o adquirir un bien. Estas subastas son a sobre cerrado, y se adjudican a la oferta más económica. Una modalidad parecida es la del concurso, en la que además del precio se tienen en cuenta otros factores que pueden constituir una oferta más ventajosa.

Actualmente, existen muchos tipos de subastas, según el sector, la procedencia y el tipo de producto. Así, existen las subastas de aduanas, en las que se subastan los

En esta ilustración inglesa de 1819 se caricaturiza la venta por subasta a raíz de la polémica que había suscitado que el príncipe regente Jorge IV vendiera por este sistema diversos efectos pertenecientes a su madre recientemente fallecida.

bienes decomisados; las subastas inmobiliarias, en las que las entidades financieras subastan los inmuebles embargados; las subastas judiciales, de características análogas; las subastas por Internet, que se realizan electrónicamente; las subastas numismáticas, de objetos de arte, de antigüedades, etc.

La subastas son un sistema de formación de precios o de organización de mercados muy transparente, ya que en ellas fluyen la oferta y la demanda en condiciones de libertad absoluta. Es por este motivo que su sistema se aplica también a mercados más complejos, como en el de divisas, siendo un instrumento muy eficaz para el control de cambios, la asignación de emisiones de valores del Estado o letras del Tesoro, y la asignación de emisiones de títulos de renta fija. En el mercado de valores las bolsas aplican la subasta como sistema para fijar las cotizaciones de salida al iniciar las sesiones, o bien como cotizaciones de los títulos en el cierre de la sesión bursátil.

Un estudio de mercado

A continuación, analizaremos un estudio de mercado basado en el siguiente caso: se ha estimado que un determinado detergente es empleado por el 26% de los hogares; se realiza una muestra, preguntando sobre su uso en 12 hogares, y se desea calcular la probabilidad de que en la muestra se encuentre un número de usuarios de dicha marca comprendido entre 6 y 9. En este caso, se trata de una variable con sólo dos valores (sí lo usa, no lo usa), de probabilidad estimada 26% y 74% (100-26). Mediante las leyes de la combinatoria se deduce que la probabilidad $PB(k)$ de que aparezcan k usuarios de la marca en una muestra de n, es:

$$PB(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

donde $p = 0{,}26$ y $(1 - p) = 1 - 0{,}26 = 0{,}74$. Esta fórmula corresponde a una distribución (o función) de probabilidad llamada binomial que fue deducida por Jakob Bernoulli en el siglo XVII. Por su parte,

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

indica el número de combinaciones distintas que se pueden obtener de n objetos tomados en grupos de k.

DIVERSAS MANERAS DE AGRUPAR OBJETOS

Se entiende por combinaciones de n objetos dispuestos en grupos de k objetos (con $k < n$) todos los grupos de k objetos en los que dos grupos se consideran distintos si difieren en un objeto por lo menos, independientemente del orden en que estén colocados. En este caso de combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3, el número de grupos posibles se indica por C_4^3 y se calcula mediante la fórmula dada.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4.$$

Pueden formarse 4 grupos distintos. Se comprueba que, en efecto, si los 4 elementos que se combinan son las letras A, B, C, D, entonces los 4 grupos de combinación serían ABC, ABD, ACD, BCD. Existen otros tipos de agrupaciones de objetos que son muy empleados en matemática discreta. Entre ellos están las variaciones y las permutaciones.

Las variaciones de m objetos tomados en grupos de n en n V_m^n se forman teniendo en cuenta que dos grupos serán distintos si se diferencian en algún elemento o bien si tienen los mismos en un orden diferente. El número de variaciones de 4 elementos (p, q, r, s) tomados en grupos de 3 serían:

pqr, pqs, prq, psq, prs, psr,
qrp, qpr, qps, qsp, qrs, qsr,
rps, rsp, rpq, rqp, rsq, rqs,
spq, sqp, sqr, srq, spr, srp.

El número de grupos se calcula con $V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-n+1)$; en este caso:

$$V_4^3 = 4 \cdot (4-1) \ldots (4-3+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ grupos.}$$

Las permutaciones son variaciones en las que en cada grupo están todos los elementos, o sea que $m = n$. Las permutaciones de 3 elementos (M, N, P) son las variaciones de 3 en 3 y los grupos son MNP, MPN, NMP, NPM, PMN, PNM. El número de grupos se calcula mediante la fórmula:

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-n+1) = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3.2.1 = n!$$

En esta caso, $P_3 = 3(3-1)(3-2) = 3! = 6$ grupos.

La probabilidad de que ocurra uno o varios de los sucesos posibles se calcula sumando las probabilidades individuales de cada uno de ellos, en el caso de que sean independientes (o sea, que no puedan ocurrir a la vez).

En nuestro ejemplo, la probabilidad de que aparezcan 6 usuarios en la muestra, es:

$$PB(6)=\binom{12}{6}0{,}26^6\cdot 0{,}74^6=0{,}0468708102.$$

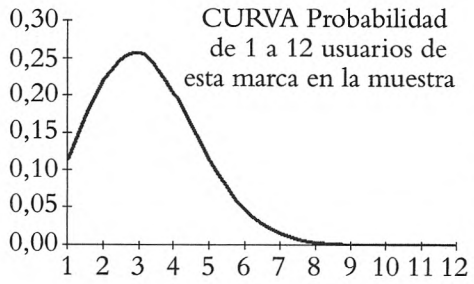
Empleando la fórmula dada, se disponen en la tabla calculada con Excel los valores de $PB(1)$ a $PB(12)$.

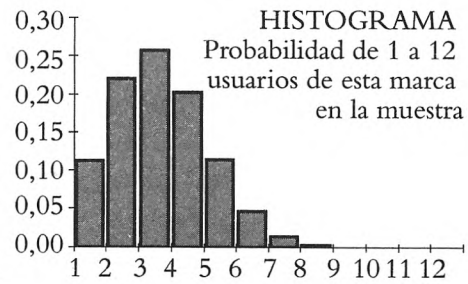
k	1	2	3	4	5	6
$PB(k)$	0,1136850903	0,2196887556	0,2572931372	0,2034006557	0,1143441524	0,046870801

k	7	8	9	10	11	12
$PB(k)$	0,0141155309	0,0030996943	0,0004840363	0,0000510200	0,0000032593	0,0000000954

El gráfico de la distribución de probabilidad se presenta en dos formatos: a la derecha se muestra el histograma de la muestra y a la izquierda, una función continua que tiene por fórmula

$$PB(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$





Y la probabilidad pedida, que corresponde a los valores entre 6 y 9, es:

$$PB(6\le x\le 9)=PB(6)+PB(7)+PB(8)+PB(9)=$$
$$=0{,}0468708102+0{,}0141155039+0{,}0030996943+0{,}0004840363=$$
$$=0{,}0645700627=6{,}46\%$$

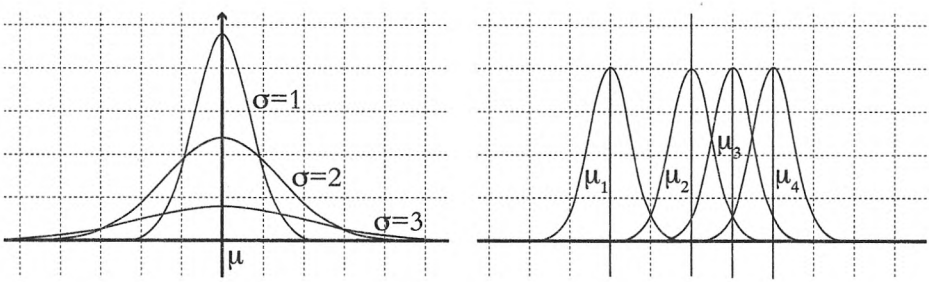
Las medidas de tendencia central y de dispersión de una distribución de probabilidad binomial se calculan mediante las expresiones:

$$\text{media} = \mu = n \cdot p; \text{ desviación típica} = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

En este caso, sus valores son:

$$\text{media} = \mu = 12 \cdot 0{,}24 = 2{,}88; \text{ desviación típica} = \sigma = \sqrt{12 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}76} = 1{,}479.$$

La distribución binomial es una distribución de probabilidad con una forma gráfica que se va aproximando hacia la forma de una distribución normal cuando el número de individuos de la población es muy grande. Aunque la curva binomial sea ligeramente asimétrica, la distribución normal presenta una gráfica simétrica.



A la izquierda, gráficas de tres distribuciones normales de igual media μ y desviaciones típicas σ = 1; σ = 2; σ = 3. A la derecha, gráficas de tres distribuciones normales de igual desviación típica σ = 1 y medias μ_1, μ_2, μ_3, μ_4.

El estadístico y el economista con un trabajo que implique la aplicación de la teoría de probabilidades deben familiarizarse con un gran número de distribuciones de probabilidad. El estudio de cada situación en la que intervengan variables aleatorias (variables cuyos valores no pueden predecirse) se corresponde con una determinada distribución de probabilidad (una función).

Hay algunas distribuciones de probabilidad que aparecen en un gran número de problemas de carácter económico y social. En los casos en los que la variable o el carácter estudiado sea de tipo discreto (valores enteros, sí-no) suele adecuarse la distribución binomial. Cuando la variable es de tipo continuo, la distribución más adecuada, en muchos casos, es la distribución normal o campana de Gauss.

Un sorprendente resultado matemático llamado «teorema central del límite» asegura que si una población muy grande (las medidas de muchos ejes fabricados por una

máquina, los votantes de un país, parámetros biométricos de personas, características psicológicas, conductas de grupos humanos, etc.) se adapta a una distribución de probabilidad como la normal, entonces las medias de las muestras extraídas de dicha población también se distribuyen de acuerdo con la ley normal y con la misma media que la población. Y la desviación típica de las muestras extraídas también se distribuye de acuerdo con la ley normal, con la misma desviación típica que la población de procedencia.

Este teorema es la base de la relación que se establece entre los resultados de una muestra (pocos individuos) y los valores de la realidad más grande y compleja (población, muchos individuos) que se quiere estudiar e indica la gran importancia que la distribución de probabilidad normal tiene en los estudios estadísticos.

De los resultados de las encuestas de población activa que se realizan periódicamente pueden inferirse los valores de toda la población estudiada con un cierto margen de error, que se conoce como nivel de confianza del estudio y que se define previamente.

La probabilidad $P(z)$ de que ocurra un suceso z, se calcula con el área que encierra la función de distribución y el eje OX. Por esto en la gráfica de esta función no tiene sentido hablar de $P(0,45)$, porque no pueden asegurarse más que valores dentro de

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA

Se trata de una distribución normal simplificada y estandarizada de la característica o variable que se estudia. Todos los valores reales x_i de la variable estudiada se cambian de escala restándoles su media μ y dividiendo este resultado por la desviación típica σ. La variable tipificada se denomina z.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

De este modo, el conjunto de valores x_i centrados en μ pasan a estar centrados en el 0. La división por σ la convierte en una distribución estándar y normalizada, de desviación típica $\sigma = 1$. Así se puede usar la misma distribución (la misma gráfica, la misma función, la misma tabla de valores) para cualquier distribución real, una vez realizado el cambio de variable, facilitando el cálculo de las probabilidades. Este cambio de variable es necesario para poder emplear una sola tabla de la ley normal, que se emplee en todos los estudios.

Con este cambio de variable (de x a z) todas las distribuciones de variables estadísticas que se comporten de acuerdo con la ley normal se transforman en una misma función de distribución (la llamada densidad de probabilidad) que tiene por expresión matemática $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ con media 0 y desviación típica 1.

un intervalo debido a los errores de medida inherentes a cualquier instrumento y porque el área es 0 (pues un segmento tiene área 0).

En variables estadísticas continuas solamente tiene sentido hablar de la probabilidad de que suceda un valor de z dentro de un intervalo determinado $z \in [a,b]$ y entonces el área se calcula con una integral de la función de densidad, como sigue:

$$PNT(a \leq z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

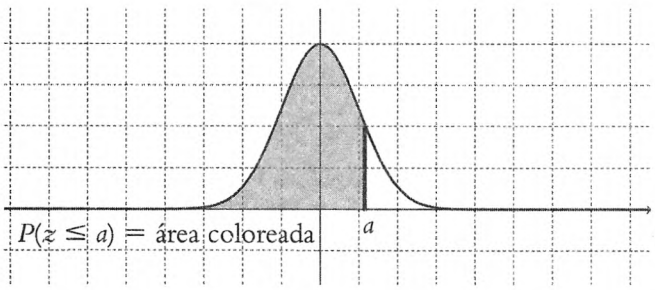
También se puede hablar de la probabilidad de que suceda una medida z que sea menor que un valor determinado, es decir, que esté en un intervalo abierto como $]-\infty, a]$ y que se escribe:

$$PNT(z \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Ambas probabilidades se calculan mediante una integral que nos dará el área correspondiente.

Gráficamente la probabilidad de que se den valores de z menores o iguales que a, es el área en gris del gráfico siguiente y corresponde al valor de la integral anterior:

$$PNT(z \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$



Esta integral tiene que calcularse mediante aproximaciones matemáticas, pues no tiene un valor exacto. A partir de éstas se han confeccionado las tablas de la distribución de probabilidad normal tipificada. Con ellas se puede resolver cualquier estudio estadístico que siga una distribución normal. Mediante el uso de estas tablas (que se encuentra en cualquier libro de estadística elemental) pueden calcularse probabilidades como:

$$PNT(z \leq 1) = 0{,}8413;\ PNT(z \leq 2) = 0{,}9972;\ PNT(z \leq 3) = 0{,}9987.$$

Capítulo 6

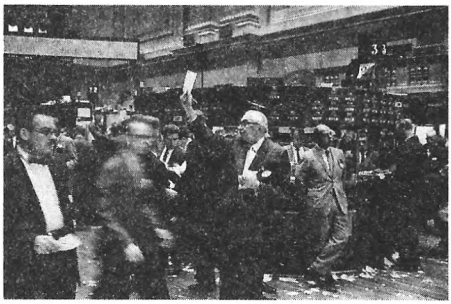
Las matemáticas y la bolsa

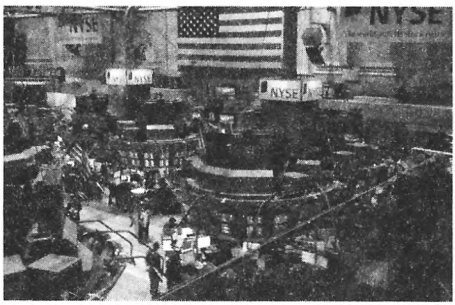
Existen dos mundos económicos: el de la producción de bienes y servicios que se intercambian por dinero, que podría denominarse la economía real, y otro muy distinto, en el que sólo circula el dinero, que constituye lo que podía denominarse la economía monetaria, el mundo de las finanzas. Dentro de este mundo del dinero entrarían los mercados financieros, que pueden ser de distintas clases según el tipo de activos que se negocian: mercados de divisas, mercados de dinero (mercado interbancario), mercados de productos derivados, etc. En este segundo grupo habría que incluir las bolsas de valores (o mercados de capitales), que son los lugares donde se compran y venden activos financieros, es decir, valores, acciones, obligaciones, bonos, deuda pública, etc.

Las bolsas y los mercados de valores

Las bolsas constituyen un mercado organizado en el que existen unas normas para poder operar, y no todas las empresas pueden entrar a cotizar. Tradicionalmente, la organización de las operaciones se realizaba en corros: ateniéndose a un horario determinado, los operadores (agentes de cambio y bolsa) se reunían en el denominado «parquet» para realizar las operaciones para cada sector de valores. En aquel mismo lugar los corredores se ponían en contacto con los compradores y vendedores de títulos, que les transferían las órdenes de compra y venta de valores, y realizaban las operaciones a viva voz.

En función de las ordenes recibidas, se realizaban las operaciones mediante el sistema de subasta: se ofrecían a gritos el número de valores en venta y sus precios de salida, para que otro operador con una orden de compra de un cliente también «cantara» una cantidad de valores con el precio que estaba dispuesto a pagar, y si se ponían de acuerdo en el precio por coincidir los precios de venta y compra ofrecidos y demandados de los títulos se cerraba la operación, también de viva voz, y se marcaba así la cotización (precio) del valor. Las cotizaciones finales solían variar respecto al precio de salida, ya que si había más títulos en venta que intenciones de compra bajaban las cotizaciones para encontrar comprador, y al contrario, si había más títulos compradores que en venta, subían las cotizaciones.





Dos fotografías de la bolsa de Nueva York: la de la izquierda corresponde a la época en la que todas las operaciones se realizaban a viva voz y la de la derecha, a la actualidad, cuando las terminales de los ordenadores presiden los mercados bursátiles.

En la actualidad los mercados de valores funcionan como mercado continuo, es decir, los operadores o intermediarios financieros (*brokers*) están conectados electrónicamente a tiempo real con las bolsas de valores.

Existen varios tipos de mercados de valores, que varían según los países, ya que cada bolsa de valores tiene su propia normativa y está organizada de forma distinta. Se conoce como mercado primario o de emisión aquel en el que se negocian títulos recién emitidos de nueva creación, tanto acciones (renta variable) como obligaciones (renta fija). El mercado secundario es el que negocia con títulos ya emitidos; es, por lo tanto, el lugar al que acuden los inversores para revender sus títulos.

Existe una gran variedad de productos que se negocian en los mercados financieros. Al margen de los títulos de renta variable (acciones) y renta fija privada y pública (obligaciones, pagarés, letras del Tesoro, bonos, deuda pública, etc.), existe una gran diversidad de productos financieros: warrants, fondos de inversión, contratos de opciones, contratos de futuros, etc. Los productos financieros salen al mercado a un valor nominal, y una vez se cotizan en bolsa el precio del título va variando según su cotización.

Los warrants son derechos para la adquisición de valores a un precio determinado y en un periodo preciso. Pueden ser warrants de compra (*call*) que permiten comprar en el futuro un título en unas determinadas opciones, y warrants de venta (*put*), que son los que confieren el derecho de vender un título en un periodo de tiempo. El derecho del warrant europeo sólo se puede ejercer al término del contrato, mientras que en el denominado warrant americano el derecho se puede ejercer en cualquier momento. Por otra parte, cada bolsa de valores tiene una organización muy distinta.

Para medir la evolución de las cotizaciones se utilizan los índices bursátiles. Los índices bursátiles se elaboran a partir de la evolución de los índices de cada valor, con base 100 (y a veces con base 1.000 o superior). Así, para el valor V_i, si en el momento t tiene un precio P_tV_i y se compara con la cotización que tenía en el momento 0, P_0V_i, se calculará la evolución de su precio en relación al momento 0 a través de un índice I_{it} con base 100 en el momento 0:

$$\text{Índice del valor } V_i \text{ en el momento } t\text{: } I_{it} = \frac{P_tV_i}{P_0V_i} \cdot 100.$$

Éste sería el índice para un solo título. Para un conjunto de valores se podría calcular la media simple de los precios de los valores en el momento t en relación a la media simple de sus precios en el momento 0, que es la referencia de la base del índice. Lo más habitual es calcular medias ponderadas, es decir, el índice de cada valor va multiplicado por el peso relativo que tiene en el conjunto de valores que componen el índice. Se utilizan varios criterios de ponderación, como la capitalización bursátil (valor del capital de la empresa o del valor del capital al inicio de ser admitida su cotización en bolsa) o el volumen de contratación.

En este caso, el índice general del conjunto de n títulos sería la suma ponderada de los índices de cada título, aplicando un criterio de ponderación M para cada valor i:

$$\text{Índice general} = I = \sum_{i=1}^{n} I_iM_i.$$

Para calcular los índices se utilizan varios tipos; el más corriente es el de Laspeyres, aunque en algunas bolsas se utiliza el índice de Paasche (París, Bruselas) o el de Fisher; el índice de medias simples ya apenas se usa. Cada bolsa de valores elabora sus propios índices de forma distinta, aplicando fórmulas diferentes. Así, la de Nueva York elabora el Dow Jones y el Nasdaq; la de Tokio, el Nikkei; la de Frankfurt, el DAX; la de París, el CAC 40; la de Roma, el MIB 30; la de Bruselas, el BEL 20; la de Madrid, el Ibex 35; la de Londres, el Financial Times-SE 100, etc. Los índices se calculan a partir de la evolución de las cotizaciones ponderadas según la capitalización o el volumen de contratación, que dependen de la bolsa en cuestión.

Los índices suelen ajustarse cuando alguno de los valores que lo componen está afectado por el cobro de dividendos o por unos derechos de suscripción de acciones, en una ampliación de capital. Así, por ejemplo, si el valor V_i está afectado por el

cobro de un dividendo d, el valor de dicho dividendo se resta del precio del valor V_i, de forma que su índice ajustado será:

$$\text{Índice ajustado del valor } V_i \text{ en el momento } t\text{: } I_{it} = \frac{P_t V_i - d}{P_0 V_i} \cdot 100.$$

Existe una gran variedad de valores mobiliarios. Pueden ser títulos privados (acciones, obligaciones, participaciones de fondos de inversión, pagarés de empresa y entidades de crédito) o públicos (deuda pública, letras del Tesoro, obligaciones y bonos del Estado, etc.), de renta fija (con un tipo de interés fijo) o renta variable (que dan un dividendo variable de acuerdo con los beneficios obtenidos y su distribución), warrants, etc.

El tipo de operaciones que pueden realizarse en bolsa también son muy diversas. Pueden ser operaciones al contado (se liquidan en el momento de la operación), a crédito (tanto compras a crédito con dinero prestado como ventas a crédito con títulos prestados), a plazo (se liquidan en una fecha determinada) o de opciones: comprador y vendedor se comprometen a comprar o vender unos activos financieros en unas determinadas condiciones ventajosas (con una prima), denominándose las opciones de compra *call*, y las de venta, *put*.

Los activos subyacentes son el activo financiero que va asociado a una opción. Puede tratarse de un índice de bolsa, acciones, mercancías (oro, petróleo, materias primas, etc.), tipo de interés, divisas, etc. Las operaciones con bloques son las que se realizan fuera de mercado: un comprador y un vendedor se ponen de acuerdo para cruzarse entre ellos un número de títulos a un determinado precio que no tiene que ser el precio de cotización. Dicha cantidad suele ser lo bastante grande como para no ser negociada dentro del mercado ya que podría generar mucha volatilidad.

También están los contratos de futuros, en los que las dos partes se comprometen a comprar o vender unos activos financieros a un precio determinado en una fecha de vencimiento futura. Se diferencian del contrato de opciones en el hecho de que en éste no se tiene la obligación de comprar o vender cuando se cumplen las condiciones del contrato, que sólo se puede ejecutar de forma voluntaria durante el periodo de duración del contrato, mientras que en los de futuros las cláusulas del contrato son de cumplimiento obligatorio al llegar a la fecha de vencimiento establecida. Los contratos de futuros tienen el objetivo de hacer coberturas cuando el vendedor quiere fijar el precio del activo subyacente y la tendencia del mercado es a la baja; de este modo, no perderá dinero, mientras que sí lo perderá si la cotización

del activo es al alza. En el caso del comprador, el interés está en fijar el precio del activo cuando su cotización es al alza, para que así en el futuro le salga más barato. Si el precio sube, el vendedor que tenga un contrato de futuros verá limitados sus beneficios, mientras que el comprador saldrá ganando, porque podrá comprar el activo subyacente a un precio menor.

Otras operaciones de bolsa son las ofertas públicas de adquisición de acciones (OPA) y las ofertas públicas de venta (OPV). La primera se produce cuando una empresa quiere adquirir o absorber a otra, y ofrece comprar las acciones de esta última a un precio superior al de su cotización, en unas condiciones muy ventajosas para el vendedor. La segunda se da cuando una empresa es admitida a cotización en bolsa y ofrece sus acciones y obligaciones al mercado.

Actualmente todas las bolsas funcionan electrónicamente y poseen medios informatizados de contratación y cámaras de compensación de operaciones. También poseen programas informáticos de gestión y operaciones para facilitar tanto el trabajo de brokers y operadores como para controlar y liquidar las operaciones realizadas. Sin embargo, tienen horarios y reglamentos de funcionamiento, de forma que para operar en ellas o bien para ofrecer activos a cotización se deben cumplir unas normativas, que varían según las bolsas y los países.

Análisis fundamental

Los analistas bursátiles realizan dos tipos de estudios sobre los valores que cotizan en bolsa. El primero consiste en analizar la estructura financiera de la empresa objeto de estudio, es decir, los balances y demás estados financieros. El segundo es el análisis técnico, que se centra en estudiar estadística y, sobre todo, gráficamente la evolución de las cotizaciones, relacionándolas con otras variables explicativas con el objetivo de poder realizar proyecciones futuras del comportamiento del mercado para los valores estudiados.

En el análisis fundamental suelen analizarse los balances y cuentas de pérdidas y ganancias de unos cuantos ejercicios, de tres a cinco, estudiando además los contenidos de las memorias anuales, así como también datos sobre el mercado, la coyuntura y el entorno económico y sociopolítico. Ante todo, es necesario conocer en profundidad la estructura financiera de la empresa objeto del análisis financiero a través del análisis de sus balances y de las relaciones de sus masas patrimoniales.

El balance explica cómo se financia la empresa, de dónde obtiene los fondos (capital, reservas, créditos a largo plazo, etc.) y cómo los aplica. En un principio, el

ESTRUCTURA DEL BALANCE

El balance de una empresa se ordena en una tabla dividida en dos partes. A la izquierda se sitúa el activo, que ordena los bienes y derechos de la empresa de menor a mayor liquidez. Es evidente que la masa patrimonial más líquida es el dinero disponible en caja y bancos; algo menos líquido son las facturas pendientes de cobro de los clientes, hasta llegar al final, en el que las masas patrimoniales de terrenos y edificios son los que presentan menor liquidez. El activo se divide en dos partes: el fijo, que está formado por las masas patrimoniales que no son objeto de la actividad mercantil, y el circulante, cuyo objeto es la actividad mercantil y posee una liquidez inferior al año.

El pasivo se sitúa en la parte derecha del balance y se ordena de arriba abajo, de menor a mayor exigibilidad. Las masas patrimoniales más exigibles son las deudas a los proveedores y acreedores a corto plazo, que constituyen el pasivo circulante, porque se trata de deudas que son exigibles a menos de un año. A continuación se hallan las deudas a medio y largo plazo (con vencimiento superior a un año), las reservas (beneficios no distribuidos de ejercicios anteriores) y, finalmente, el capital de la empresa, propiedad de los accionistas.

	Activo	Pasivo	
Activo	**Activo fijo**	**No exigible**	**Recursos permanentes**
Material	Terrenos	Capital	
	Edificios	Reservas	
	Instalaciones		
	Maquinaria	**Exigible a largo plazo**	
Inmaterial	Patentes, programas	Endeudamiento	
Realizable	**Activo circulante**	Créditos a largo plazo	
	Existencias	**Exigible a corto plazo**	**Pasivo circulante**
	Deudores	Créditos a corto plazo	
	Clientes	Proveedores	
Disponible	Caja y bancos		

Estructura del balance.

capital, las reservas y los créditos a largo plazo constituyen los denominados recursos permanentes, que se aplican a la inversión en el activo fijo (material e inmaterial), aunque en el inicio de la actividad parte de los recursos permanentes pueden aplicarse también a la adquisición de existencias.

El análisis fundamental consiste en relacionar las distintas masas patrimoniales del balance tanto entre sí como con el beneficio y otras variables extracontables, con el fin de conocer la solvencia, la liquidez, la situación de la tesorería, el nivel de endeudamiento, la rentabilidad, etc. Los ratios de balance constituyen el eje principal del análisis fundamental.

Una de las cuestiones que más llaman la atención respecto al análisis fundamental es que el valor de una empresa en bolsa (donde capitalización bursátil = número de acciones emitidas × cotización) suele ser muy superior al valor contable deducido de su balance.

De esta manera, el valor teórico (contable) de una acción o valor según balance es:

$$\text{Valor teórico de una acción} = \frac{\text{Neto patrimonial (capital + reservas)}}{\text{Número de acciones}}.$$

Comparando este valor teórico con su cotización en bolsa, se deduce si la empresa en cuestión está sobrevalorada o infravalorada. También puede compararse, para la totalidad del valor de la empresa, el valor de la capitalización bursátil con el valor contable de la empresa:

$$\text{Ratio precio / valor contable} = \frac{\text{Capitalización bursátil}}{\text{Valor contable}}.$$

E igualmente sobre el flujo de caja (*cash flow*) o los recursos generados (beneficio + amortizaciones):

$$\text{Ratio precio / } \textit{cash flow} = \frac{\text{Valor capitalización bursátil}}{\textit{Cash flow} \text{ (recursos generados)}}.$$

$$\text{Ratio precio / } \textit{cash flow} \text{ por acción} = \frac{\text{Precio por acción}}{\textit{Cash flow} \text{ por acción}}.$$

RATIOS FINANCIEROS

La solvencia de una empresa se mide con el fondo de maniobra, que es igual a la diferencia entre el activo circulante y el exigible a corto plazo. Tiene que ser positivo, a ser posible lo mayor que se pueda, aunque un tamaño excesivo supondría una utilización poco eficiente de los recursos. Si es nulo significa que la empresa tiene serios problemas de solvencia y, si es negativo, corre el riesgo de suspender pagos.

$$\text{Fondo de maniobra} = \text{Activo circulante} - \text{Pasivo circulante}.$$

También se puede expresar con las masas patrimoniales complementarias del activo y el pasivo:
Fondo de maniobra = Recursos permanentes − Activo fijo.

$$\text{Ratio de liquidez} = \frac{\text{Activo circulante}}{\text{Exigible a corto plazo}} > 1.$$

$$\text{Ratio de tesorería} = \frac{\text{Realizable + disponible}}{\text{Exigible a corto plazo}} = 1.$$

Si es < 1 indica riesgo de suspensión de pagos. Si es muy superior a 1 indica que hay exceso de fondos líquidos y riesgo de baja rentabilidad.

$$\text{Ratio de disponibilidad} = \frac{\text{Disponible}}{\text{Pasivo circulante}}.$$

Si es muy reducido puede existir riesgo de tensiones de tesorería.

$$\text{Ratio de endeudamiento} = \frac{\text{Exigible a largo y corto plazo}}{\text{Pasivo}}.$$

Un valor adecuado es entre 0,5 y 0,7.

$$\text{Ratio de gastos financieros} = \frac{\text{Gastos financieros}}{\text{Ventas}} < 0{,}04.$$

A partir de 0,05, se considera excesivo.

$$\text{Margen de las ventas} = \frac{\text{Ventas} - \text{Coste de las ventas}}{\text{Ventas}}.$$

Indica el margen comercial de la empresa.

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Beneficio antes de intereses e impuestos}}{\text{Activo total}} > \text{Precio del dinero.}$$

$$\text{Rentabilidad} = \frac{\text{Beneficio}}{\text{Capital}} > \text{Precio del dinero.}$$

$$\text{Plazo de cobro} = \frac{\text{Clientes}}{\text{Ventas}} \cdot 365.$$

Indica el número de días que se tarda en cobrar de los clientes.

$$\text{Plazo de pago} = \frac{\text{Proveedores}}{\text{Compras}} \cdot 365.$$

Indica el plazo de pago a proveedores y acreedores en general.

$$\text{Ratio de rotación del activo} = \frac{\text{Ventas}}{\text{Activo}}.$$

Indica el volumen de ventas que la empresa es capaz de generar en proporción a su activo. Si es >1 indica el número de veces que las ventas multiplican al activo.

$$\%\ \text{incremento ventas} = \left(\frac{\text{Ventas } V_n}{\text{Ventas } V_{n-1}} - 1\right) \cdot 100 \text{ entre los ejercicios } n-1 \text{ y } n.$$

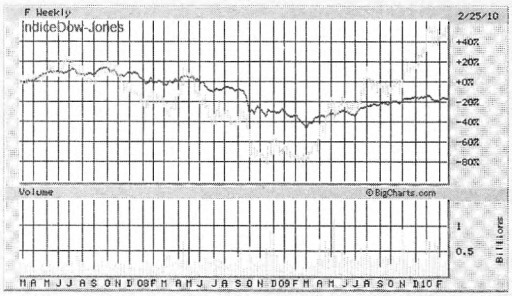
Análisis técnico

El análisis técnico consiste en estudiar el comportamiento concreto de los movimientos de los precios y los valores de distintas clases de activos financieros, como títulos bursátiles, índices, precios de mercancías, opciones, futuros, divisas, etc., a través del análisis estadístico y de gráficos con el fin de predecir la evolución futura del mercado de cada uno de estos elementos. Para ello no sólo es necesario el estudio de la evolución de la variable precios de los títulos a través del tiempo mediante gráficos (de velas, barras, líneas, punto y figura, etc.), sino también realizar ajustes de curvas mediante técnicas de regresión estadística que permitan relacionar la variable precio con otras variables y poder realizar así predicciones con una cierta fiabilidad. El análisis técnico se basa en tres principios: la historia se repite, los precios se mueven por tendencias y los movimientos del mercado lo descuentan todo (es decir, los precios ya han tenido en cuenta toda la información sobre la evolución de la empresa, los datos macroeconómicos, etc.).

LAS TEORÍAS DE DOW

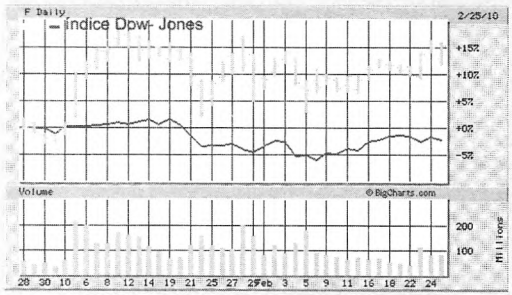
El primero en analizar las oscilaciones del mercado como precursor del análisis técnico fue el norteamericano Charles Henry Dow (1851-1902), que elaboró el primer índice bursátil en 1884. Su nombre se asocia todavía al famoso índice bursátil Dow-Jones. A partir del análisis gráfico del comportamiento de los índices, elaboró su propia teoría sobre las evoluciones del mercado, distinguiendo tres clases de tendencias: la primaria, la secundaria y la terciaria.

La primaria es una evolución a más de un año (entre 1 y 3), aunque puede variar en ciertas situaciones, y que puede ser alcista o bajista. Después de un periodo bajista, un grupo de inversores con iniciativa deciden invertir en bolsa. Al subir la bolsa otros inversores acuden en masa, mientras que los primeros aprovechan para vender sus títulos y obtener plusvalías. Al cabo de un tiempo, al darse cuenta de que el alza empieza a amortiguarse, los inversores dejan de invertir progresivamente y se tiende al estancamiento y hacia una nueva etapa a la baja.



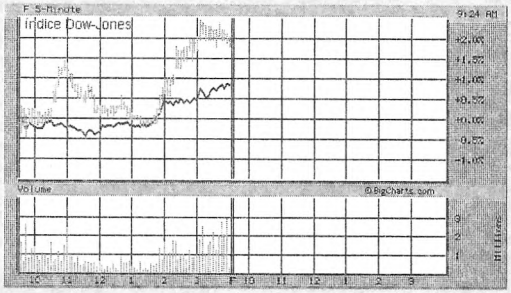
Curva de Dow primaria 3 años.

La secundaria puede durar entre 1 y 8 semanas. Se trata de unos ciclos más cortos, que se superponen a los primarios. Se traducen en pequeñas bajadas en periodos alcistas, y en subidas en periodos de caída de las cotizaciones.



Curva de Dow secundaria 2 meses.

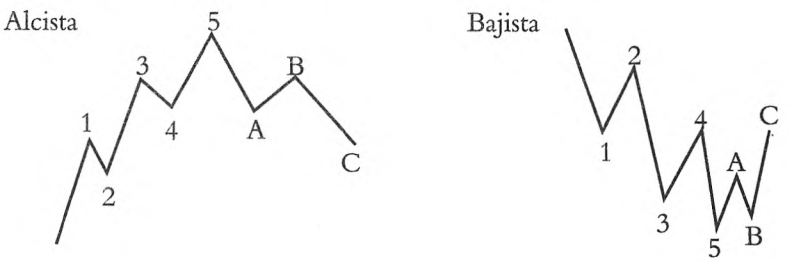
La terciaria tiene un ciclo mucho más corto, y son las oscilaciones diarias, consecuencia de la afluencia de ofertantes o demandantes en un momento dado.



Curva de Dow terciaria 2 días.

Ralph Nelson Elliott (1871-1948) realizó una aportación posterior a la teoría de Dow sobre el comportamiento de la bolsa. Observó que las cotizaciones seguían unas pautas repetitivas que podían ser identificadas y que, además, dicha evolución seguía una relación muy estrecha con la naturaleza, definiendo unas ondas de comportamiento parecida a la de la serie Fibonacci, que es una serie en la que cada elemento es la suma de los dos anteriores. En 1946, a raíz de un estudio sobre los datos de muchos años de los valores del Dow Jones Industrials Average (DJIA), trazó un gráfico de dicha evolución.

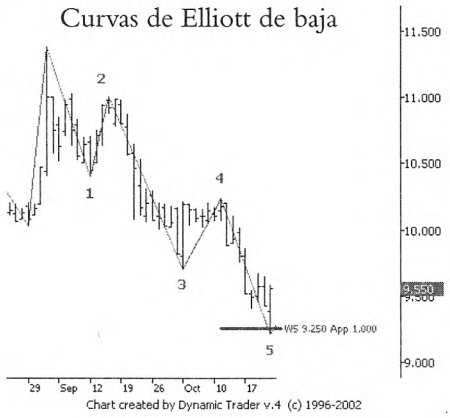
Del gráfico confeccionado extrajo la conclusión de que dicha evolución presenta unas formas con pautas repetitivas de diferente periodo y amplitud. El principio de ondas de Elliott dice que los mercados de acciones tienen un ritmo que se repite: el alza tiene 5 ondas hacia arriba seguidas de 3 ondas hacia abajo. El ciclo completo, tiene 8 ondas, 5 de alza y 3 de baja. En el tramo de ascenso del ciclo, las ondas 1, 3 y 5 son ondas de impulso (de ascenso), mientras que las 2 y 4 corrigen las ondas 1 y 3. Tras 5 ondas de ascenso se inicia un tramo de descenso con tres ondas A, B y C. En caso del proceso bajista de la bolsa también se obtienen de curvas parecidas con 5 ciclos.



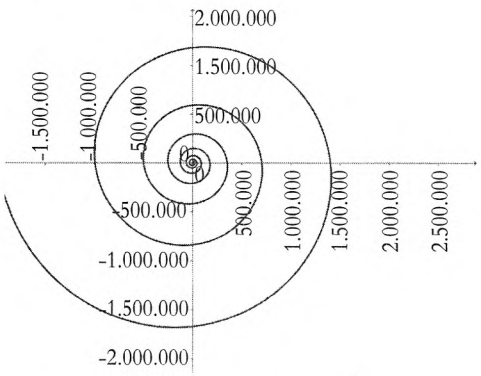
En casos reales de evolución de valores bursátiles aparecen las ondas de Elliott como puede observarse en los gráficos adjuntos.

Curvas de Elliott de alza

Curvas de Elliott de baja



Si se consideran las ondas de Elliott como una representación de la psicología humana, que es la que produce los movimientos de la bolsa a gran escala, resulta aceptable que precisamente los números de la serie de Fibonacci sean los que establezcan una escala en dichas ondas.



Elliott afirmaba que los mercados también se gobiernan por el ratio perfecto. La evolución de la bolsa se asemeja así a la forma de una espiral logarítmica (la forma de una caracola marina o la dirección del viento en un huracán). Simplificando, puede preverse que, al término de una fase alcista, la corrección siguiente será de un valor las tres quintas partes del aumento anterior, tanto en lo que se refiere al tiempo que durará como a su amplitud.

Se ha observado que la evolución del precio de los productos básicos tiene la misma estructura que las ondas de Elliott. Puede observarse en un producto como el

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y LA BOLSA

Al estudiar la evolución de los datos de muchos mercados de valores, Elliott dedujo que la base matemática del principio de ondas es la sucesión de Fibonacci (¡descubierta en el siglo XIII!). Esta sucesión (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...) tiene muchas propiedades aplicables al análisis del mercado bursátil.

La suma de dos números cualesquiera seguidos da el siguiente número de la serie; al avanzar en la serie, la relación de cualquier número con el siguiente (dividiendo uno por el otro) se va aproximando cada vez más al número irracional $\Phi - 1 = 0{,}618034...$, llamado ratio perfecto (el número de oro menos 1), que se presenta en las proporciones de muchos objetos de la naturaleza y del arte occidental. De esta forma una corrección a una tendencia del mercado que alcanza el 61,8% de retroceso es un punto en el que el mercado suele girar al alza o, de lo contrario, completará con mucha probabilidad el retroceso hasta el 100%.

Las raíces cuadradas que no dan números enteros o racionales producen una nueva clase de números llamados números irracionales, ya que no pueden escribirse en la forma de una fracción. Dichos números tiene infinitas cifras decimales, en las que nunca se halla un ciclo de repetición de cifras como en los números racionales, llamados periódicos, como:

$$4/7 = 0{,}571428571428571428571...$$

Existen otros tipos de números irracionales como el número π de la geometría, el número e del interés compuesto y el número áureo Φ.

oro: en tiempos recientes su precio siempre se ha movido en contra de la tendencia del mercado bursátil; por lo tanto, también debe seguir la forma del ciclo de Elliot, aunque en el otro sentido.

¿Cómo se miden los rendimientos en la bolsa?

En una emisión de deuda pública existe una inversión inicial, y unos intereses periódicos que se reciben cada año mientras dure la emisión. Para calcular la rentabilidad total de la emisión para todo el periodo se calcula la tasa de rendimiento interno (TRI), teniendo en cuenta que como ingreso también se deben contabilizar las desgravaciones fiscales de la emisión.

En una emisión de obligaciones, cuando el tipo de interés es variable, la rentabilidad global de la emisión suele calcularse aplicando la fórmula del valor actual neto (VAN), a

partir de una estimación del precio del dinero (tasa de descuento). Este mismo método se utiliza para valorar una empresa, en la que se actualizan los flujos de caja que genera cada año en función de la inversión inicial y la tasa de descuento aplicada.

Un problema que puede plantearse es saber la rentabilidad anual de una inversión. Así, por ejemplo, si en un momento t se realiza una inversión de valor I_0 y al cabo de n días se venden las acciones por I_t de forma que $I_0 < I_t$ se obtiene un rendimiento neto de B por la suma de la plusvalía obtenida $|I_t - I_0| > 0$ más los dividendos, derechos de suscripción, etc. La rentabilidad R (en %) de la inversión será:

$$R \text{ (Rentabilidad)} = \frac{B}{I_0} \cdot 100.$$

La rentabilidad anual R_a se calcula mediante una regla de tres simple:

Rentabilidad R obtenida en ——— n días
Rentabilidad anual R_a obtenida en ——— 365 días

$$R_a = R \cdot \frac{365}{n}.$$

Uno de los ratios más utilizado en la valoración del rendimiento de un título es el PER (*Price-Earnings Ratio*), que relaciona el valor de adquisición C_t de un título en un momento dado, con las ganancias obtenidas o esperadas de este título en un periodo t (dividendos, primas, derechos de suscripción, plusvalía esperada), de modo que:

$$\text{PER} = \frac{C_t}{G_t} = \frac{\text{Cotización de la acción}}{\text{Ganancias netas (beneficios por acción)}},$$

donde C_t es el coste del título, y G_t las ganancias netas esperadas del título en el periodo t.

Obsérvese que el inverso del PER es la rentabilidad por acción:

$$\text{Rentabilidad por acción} = \frac{\text{Ganancias netas (beneficios por acción)}}{\text{Cotización de la acción}} = \frac{1}{\text{PER}}.$$

En relación a los ratios de resultados obtenidos por acción, los más habituales son los siguientes:

$$\text{Rentabilidad por dividendo} = \frac{\text{Total dividendo}}{\text{Capitalización bursátil}} = \frac{\text{Dividendo por acción}}{\text{Precio por acción}},$$

en el que:

$$\text{Dividendo por acción} = \frac{\text{Beneficio después de impuestos}}{\text{Número de acciones}},$$

siempre que se distribuya la totalidad del beneficio entre los accionistas. En el caso en el que sólo se reparta una parte del beneficio en forma de dividendo será interesante conocer el ratio que representa su porcentaje.

El dividendo también puede calcularse sobre el valor contable de la acción, su valor de mercado o su valor nominal.

Otro ratio de interés es el que relaciona el cash flow de la empresa (recursos generados = beneficio neto + amortizaciones) con el número de acciones:

$$\text{Cash flow por acción} = \frac{\text{Beneficio neto} + \text{amortizaciones}}{\text{Número de acciones}}.$$

Finalmente, es necesario mencionar cómo se mide la volatilidad y el riesgo de los títulos. El riesgo se mide con el indicador beta (β), que indica el riesgo que supone invertir en un determinado título, y mide la variación (volatilidad) con la que se comporta la cotización del título en cuestión en relación con la variación de las demás cotizaciones del mercado. El valor n de β significa que el rendimiento del título volátil es n veces el valor del rendimiento del índice o del conjunto del mercado. Así si es $\beta = 2$ y el rendimiento medio del mercado es del 10%, el del título en cuestión será el doble, el 20%.

El riesgo se mide comparando el rendimiento de un título respecto con el conjunto del mercado. Este rendimiento presentará unas desviaciones respecto a la media del mercado, que se mide con la desviación típica σ, o la varianza, que es la desviación típica elevada al cuadrado, σ^2. Si la media de los rendimientos del mercado es R, y la del título i es R_i, el riesgo medido con la desviación típica será:

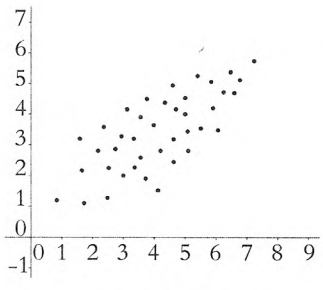
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (R_i - R)^2}.$$

También se puede utilizar la semivarianza, es decir, la varianza que sólo recoge los cuadrados de las desviaciones negativas, que son las que miden el riesgo de pérdidas.

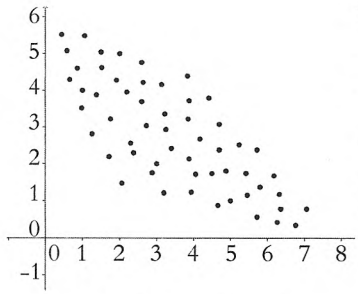
Correlación y regresión

En economía se observa a menudo que hay parejas de variables que parecen tener una relación entre sí. A esta variación conjunta de las dos variables se la llama covariación o variación conjunta. Básicamente se suele considerar que existe covariación entre dos variables estadísticas en los casos que se presente una dependencia causal unilateral (la variable X influye en Y, pero no al revés) o bien interdependencia (influencia en los dos sentidos, de X a Y y de Y a X).

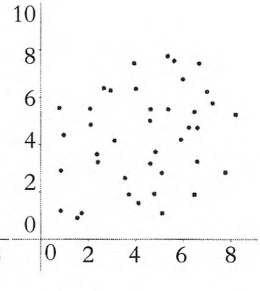
Una primera aproximación al estudio de la covariación entre dos variables estadísticas es emplear los métodos gráficos. En los siguientes diagramas de coordenadas se ha dibujado la nube de puntos que corresponden a todos los pares de valores de las dos variables de las que se quiere analizar su covariación. Es el llamado diagrama de dispersión.



Correlación lineal positiva.



Correlación lineal negativa.



No correlación.

Existen dos técnicas que permiten analizar la covariación entre dos variables estadísticas: la regresión y la correlación. Esta última calcula un coeficiente (un número) que se emplea como indicador de la intensidad o del grado de covariación entre las dos variables, y la regresión determina una línea o una función matemática que expresa la covariación de una manera continua.

La inferencia estadística del valor del coeficiente de correlación de la población de procedencia de una muestra, al que se llama R, a partir del coeficiente de correlación obtenido en la muestra es una cuestión que ha sido analizada profundamente. En principio, puede considerarse r como un estimador de R y tiene que investigarse si realmente es un buen estimador. Dado que se pueden sacar muchas muestras distintas de una población, cada una de ellas tendrá su propio coeficiente de correlación. Los r de todas las muestras que se puedan extraer constituyen una variable aleatoria con su propia distribución muestral.

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

Cuando se prevé que dos variables se relacionan con una correlación lineal (lo cual puede verse al dibujar su diagrama de dispersión), ya puede realizarse el cálculo del coeficiente de correlación. En el caso de una muestra de n pares de valores (x_i, y_i) con $i = 1, 2, 3..., n$, una medida del grado de asociación lineal de ambas variables viene dada por el parámetro r, llamado coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

donde $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y son las medias y las desviaciones típicas de las variables X e Y en la muestra. El coeficiente de correlación r siempre oscila entre -1 y $+1$. Si $r = +1$ o $r = -1$ los puntos de la muestra están sobre una línea recta. Si r es un valor próximo a $+1$ (o a -1) hay una relación lineal muy fuerte entre las dos variables. Si r es un valor pequeño (cerca de 0) hay una correlación muy débil entre las dos variables, excepto que el diagrama de dispersión sugiera otro tipo de correlación no lineal.

El coeficiente r es un número sin dimensión (no tiene unidades, ni depende de las empleadas en las variables X e Y).

En la siguiente tabla se recogen los valores de dos variables estadísticas X e Y de una muestra de 5 individuos.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	2	5	7	10	14

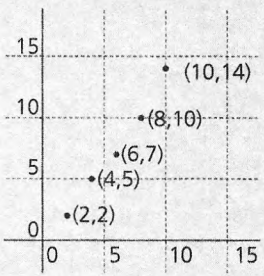


Diagrama de dispersión.

Para analizar su correlación se calcula la media $\bar{x}$, la desviación típica σ y el índice r.

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{(2-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2}{5}} = 2{,}828,$$

$$\bar{y} = \frac{2+5+7+10+14}{5} = 7{,}6, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{(2-7{,}6)^2+(5-7{,}6)^2+(7-7{,}6)^2+(10-7{,}6)^2+(14-7{,}6)^2}{5}} = 4{,}128,$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot\left[(2-6)(2-7{,}6)+(4-6)(5-7{,}6)+(6-6)(7-7{,}6)+(8-6)(10-7{,}6)+(10-6)(14-7{,}6)\right]}{2{,}828\cdot 4{,}128} = 0{,}981.$$

LINEAS DE REGRESIÓN

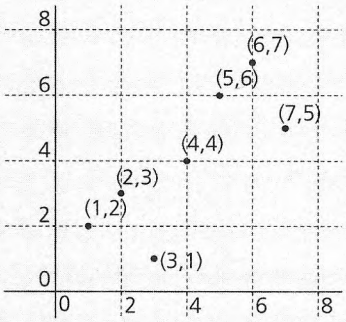
Si los puntos (x_i, y_i) que aparecen en el diagrama de dispersión de un estudio estadístico se aproximan a una curva o a una recta, un ejercicio matemático muy útil consiste en hallar la función matemática que mejor se aproxime a esta nube de puntos. La gráfica de esta función es la curva (o la recta) de regresión, que se puede usar para realizar predicciones.

El método matemático que se emplea para obtener la ecuación de la función representativa de la nube de puntos obtenida de los valores de la muestra tomada se llama método de los mínimos cuadrados.

$$\left.\begin{aligned} \sum y_i = a\cdot\sum x_i + b\cdot n \\ \sum x_i y_i = a\cdot\sum x_i^2 + b\cdot\sum x_i \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se hallan los valores de a y b. Se supone que son, por ejemplo, a' y b'. Entonces la recta de ajuste óptimo es la recta de ecuación: $y = a'x + b'$.

En el caso de la tabla y el diagrama de dispersión adjuntos, la recta de regresión se calcula del modo siguiente:



x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	2	3	1	4	6	7	5

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{2+3+1+4+6+7+5}{7} = 4$$

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
	1	2	1	4	2
	2	3	4	9	6
	3	1	9	1	3
	4	4	16	16	16
	5	6	25	36	30
	6	7	36	49	42
	7	5	49	25	35
Totales	28	28	140	140	134

$$\left.\begin{aligned} \sum y_i = a\cdot\sum x_i + b\cdot n \\ \sum x_i y_i = a\cdot\sum x_i^2 + b\cdot\sum x_i \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 28 &= a28 + b\cdot 7 \\ 134 &= a\cdot 140 + b\cdot 28 \end{aligned}$$

Soluciones: $a' = \frac{11}{14}$; $b' = \frac{6}{7}$.

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es: $y = \frac{11}{14}x + \frac{6}{7}$. Para calcular la recta de regresión de Y sobre X se cambia x_i por y_i y el sistema quedará (para no confundir, se cambia el nombre de a y b por c y d):

$$\left.\begin{array}{l} \sum x_i = c \cdot \sum y_i + d \cdot n \\ \sum x_i y_i = c \cdot \sum y_i^2 + d \cdot \sum y_i \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 28 = c28 + d \cdot 7 \\ 134 = c \cdot 140 + d \cdot 28 \end{array}\right\},$$

que da la misma ecuación: $y = \frac{11}{14}x + \frac{6}{7}$. En la mayor parte de casos habría otra ecuación distinta. En este caso X e Y tienen una relación de interdependencia.

Debe distinguirse entre correlación y causalidad: en casos como el estudio de las tres variables (por ejemplo, número de libros editados, número de televisores vendidos y número de asesinatos cometidos por año) se podrían sacar conclusiones muy erróneas (como que a más libros vendidos más televisores vendidos o más crímenes cometidos).

Capítulo 7

Crecimiento y desarrollo

En el estudio de la economía se distinguen dos enfoques distintos: el microeconómico, que hace referencia a la definición de variables económicas valoradas a nivel individual, las cuales afectan tanto a los consumidores y a las economías domésticas como a las empresas, y el macroeconómico, que estudia estas variables a nivel agregado. Así, el estudio de los precios, los costes de producción y las ventas de una empresa, las rentas individuales o familiares y sus niveles de consumo, las ventas de un producto a un precio determinado y las preferencias del consumidor forman parte de la microeconomía. En cambio, el estudio del comportamiento agregado de todas las empresas de un sector, tanto a nivel de producción como de empleo de mano de obra, o los niveles generales de precios y el comportamiento de la demanda o la oferta agregada, forman parte del estudio de la macroeconomía. De este modo, tienen la consideración de variables macroeconómicas la valoración de la producción de una nación y su crecimiento, la oferta y la demanda, las importaciones y exportaciones, el ahorro, la inversión, el gasto público, la tasa de inflación, etc.

Renta nacional, ahorro, consumo e inversión. Producto Interior Bruto

El Producto Interior Bruto (PIB) de un país es el valor total a precios de mercado de su producción en bienes y servicios en un período determinado, que normalmente es un año. Está formado por la suma de los valores de la producción de todos los sectores económicos, es decir, es igual a la suma de todos los valores añadidos que aporta cada sector económico. Así, un sector económico compra bienes y servicios de otros sectores (materias primas, productos semielaborados, energía, tecnología, mano de obra) que constituyen los costes de producción, y después de una serie de manipulaciones y operaciones, obtiene un bien (o servicio) que tiene un precio superior; le añade, por lo tanto, valor a los costes de producción. La suma de estos valores añadidos generados durante un año por todos los sectores productivos de un país, es, tal y como ya se ha señalado, el valor del PIB anual, y

su crecimiento es uno de los indicadores más utilizados para valorar el progreso económico de un país.

El PIB puede medirse en los precios de cada año, los precios corrientes, o bien con los precios constantes, referidos a un año base, con lo que se neutraliza los efectos de la inflación; ello permite comparar las producciones de cada año en términos reales. Así, por ejemplo, si el PIB del sector lechero fue de 500 millones de euros en 2005 y de 700 millones en 2010, lo que supone un incremento del 6,96% anual, estas cifras corresponden al PIB nominal en los precios corrientes de cada año; pero si la tasa de inflación registrada durante el quinquenio ha sido del 3% anual, los 700 millones de euros de 2010 equivalen a 603,83 millones de euros a precios de 2005, es decir, el aumento real ha sido del 3,85% anual en lugar del 6,96% anual.

De la producción total en bienes y servicios (PIB) de un país, una parte se destina al consumo, tanto privado como público; otra parte de estos bienes que no son de consumo, como la maquinaria e instalaciones industriales o infraestructuras, constituyen los bienes de inversión, y la parte no consumida en el interior, se vende a países extranjeros y constituye las exportaciones al exterior. La producción se valora de acuerdo con sus precios de venta, que son los que se fijan en el mercado, los cuales normalmente son superiores a los costes de los factores de producción, incrementando su valor en forma de valor añadido. En síntesis, el PIB de un país durante un año será:

$$\text{PIB} = C + G + I + Exp,$$

donde C = Consumo privado, G = Consumo público (Gasto público), I = Inversión y Exp = Exportaciones.

El PIB se obtiene a partir de la contabilidad nacional. Si al PIB se le resta el valor de las importaciones se obtiene el Producto Nacional Bruto (PNB) a precios de mercado, es decir, se tiene el valor de lo que realmente ha gastado el país: su producción menos la diferencia entre sus exportaciones y sus importaciones:

$$\text{PNB} = PIB - Imp = C + G + I + Exp - Imp,$$

donde Imp = Importaciones.

Si al PNB se le deducen las amortizaciones de la inversión se obtiene el Producto Nacional Neto a precios de mercado, y si a éste se le añaden las subvenciones a la exportación, y se le restan los impuestos indirectos, se obtiene el

Producto Nacional Neto al coste de los factores, también denominado Renta Nacional. Por lo tanto,

$$\text{Renta Nacional} = C + G + I + Exp - Imp - Amort + Subv - Tax.ind,$$

donde *Amort* = Amortizaciones de la inversión, *Subv* = Subvenciones a la exportación y *Tax.ind* = Impuestos indirectos.

Si a la Renta Nacional se le suman las transferencias, las pensiones de jubilación y los subsidios pagados a las familias, y se le restan las cuotas a la seguridad social, los beneficios no distribuidos y los impuestos sobre beneficios de las empresas, se obtiene la Renta Personal. Y, finalmente, si a ésta se le restan los impuestos directos (sobre los ingresos, las sucesiones) se obtiene la Renta Personal Disponible, que es la que realmente mide el nivel de vida y la capacidad adquisitiva de los ciudadanos de un país.

En consecuencia, cuando se habla de renta nacional o de PIB hay que tener en cuenta que no son sinónimos, ya que tal y como se ha visto, se trata de conceptos de contabilidad nacional muy distintos. No obstante, el PIB, y concretamente su tasa de crecimiento, es el indicador más utilizado en política para expresar la salud de una economía, tanto por los países desarrollados como por los países emergentes o en vías de desarrollo.

El PIB per cápita (PIB/Población) también es un indicador muy utilizado, aunque a veces se denomina «renta per cápita», cuando en realidad se trata del PIB. La tasa de crecimiento no siempre refleja una buena situación económica. A veces, un crecimiento excesivo del PIB, del orden de dos dígitos, puede llevar asociados unos «costes de crecimiento» que producen serios desajustes estructurales en la economía, como por ejemplo una incapacidad del sector financiero, una pérdida de productividad o una serie de desajustes en las infraestructuras de transportes y distribución o de servicios, que pueden frenar la fase expansiva e incluso desencadenar un período de crisis económica.

Desde la perspectiva macroeconómica y de la contabilidad nacional, la producción de un país se puede contemplar desde dos puntos de vista: desde el valor de la producción, como la suma de todos los valores añadidos generados por todos los sectores productivos de bienes y servicios, y desde el consumo total de bienes y servicios por los distintos agentes económicos. El valor total de bienes y servicios producidos por un país se destina al consumo o a la compra de bienes de inversión (maquinaria, infraestructuras, equipamientos, etc.).

En definitiva, el valor total de la producción será igual a la suma de todos los ingresos (Y), y éstos se destinarán al consumo (C) y a la inversión (I), de tal forma que $Y = C + I$; y si tenemos en cuenta también que de la totalidad de los ingresos la parte que no se destina al consumo constituye el ahorro (A), la anterior ecuación de la renta también podrá expresarse como $Y = C + A$, es decir, los ingresos totales son iguales al consumo más el ahorro. Luego, $I = A$; por lo tanto, en una economía cerrada (sin tener en cuenta las inversiones extranjeras), el ahorro será igual a la inversión.

Keynes definió la función de consumo en función de la renta, es decir, $C = f(Y)$, y determinó que a ciertas variaciones de los niveles de renta existía una propensión a consumir definida como el cociente entre los incrementos de consumo provocados por los incrementos de renta:

$$0 \leq \text{Propensión al consumo} = \frac{\Delta C}{\Delta Y} \leq 1,$$

de forma que oscila entre los valores 0 y 1, es decir, siempre es positiva pero inferior a la unidad.

Keynes también definió el multiplicador k de la inversión que relaciona los incrementos de renta con el incremento resultante de la inversión: $\Delta Y = k \cdot \Delta I$; despejando k, se obtiene $k = \Delta Y / \Delta I$.

Teniendo en cuenta que $Y = C + I$, si se despeja I ($I = Y - C$) y se sustituye el valor de I en la ecuación de k, se obtiene que $k = \Delta Y / (\Delta Y - \Delta C)$. Dividiendo numerador y denominador por ΔY se llega a:

$$k = \frac{1}{1 - \frac{\Delta C}{\Delta Y}},$$

es decir, que el multiplicador de la inversión es igual al inverso de 1 menos la propensión al consumo. Esto significa que cuanto más se acerque a la unidad la propensión al consumo, cuanto más sensible sea el consumo a los incrementos de renta, el multiplicador será más grande.

Y, en caso contrario, para rentas elevadas, en las que la propensión a consumir desciende porque los consumidores ya tienen satisfechas muchas de sus necesidades y no van a consumir ya en la misma proporción en la que aumenten sus ingresos,

la propensión al consumo se acerca a 0 y, en consecuencia, el multiplicador *k* será cada vez menos elevado.

Así, por ejemplo, en un país pobre, la propensión a consumir es elevada, por ejemplo de 0,9, lo cual significa que se dedica al consumo el 90% de los ingresos. Aplicando la fórmula, el multiplicador resultante *k* es 10. En cambio, en un país rico, la propensión al consumo es mucho más baja, por ejemplo de 0,6, es decir, que sólo se dedica al consumo el 60% de los ingresos. En este caso, el valor resultante de *k* será mucho más bajo, de 2,5. Así pues, el multiplicador de la inversión es directamente proporcional a la propensión al consumo.

La distribución de la producción por sectores económicos: las tablas input-output

Uno de los aspectos más importantes al estudiar la producción de un país es conocer su distribución entre los distintos sectores productivos; concretamente, cómo se interrelacionan las producciones de dichos sectores, es decir, qué parte de la producción de cada sector va destinada a cada uno de los distintos sectores como productos intermedios y qué parte de la producción va destinada a la demanda final.

A este respecto cabe destacar la contribución de Wassily W. Leontief (1906-1999) que, seguidor del *Tableau Économique* del fisiócrata François Quesnay y de los estudios matemáticos sobre el equilibrio general de Walras, representó mediante una matriz las relaciones interindustriales de la economía de un país, en las que en las filas se representaban los valores de las producciones (salidas o *outputs*) de un sector, que eran consumidas por otros sectores, y en las columnas, las compras (entradas o *inputs*) que cada sector realizaba a los demás sectores industriales. La relaciones interindustriales representadas mediante esta matriz de entradas y salidas, denominada tablas input-output (o tablas de entradas y salidas), se concretaban en cada casilla de forma que la casilla x_{ij} representa el valor total de la producción del sector *i*, utilizada por el sector *j*, y X_i el valor total de la producción *i* vendida al resto de sectores de la economía.

A continuación figura como ejemplo la estructura de la tabla input-output de la producción de un país. En ella se han ordenado por filas las producciones de los distintos sectores (1, 2, 3... *n*), que incluyen los sectores agrícola, industrial y terciario. En las columnas, por su parte, se han representado los consumos de los distintos sectores.

	Sectores de consumo (columnas: inputs)										
	Consumo intermedio								**Consumo**		
		1	2	3	4	....	n	Producción	Demanda interna	Exportaciones	Σ Consumo final
Sectores de producción (filas: outputs)	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}		x_{1n}	X_1			
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}		x_{2n}	X_2			
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}		x_{3n}	X_3			
	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}		x_{4n}	X_4			
	n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{n4}		x_{nn}	X_n			
Σ Compras intersectoriales		X_1	X_2	X_3	X_4		X_n	X			
Impuestos sobre productos											
Salarios											
Excedente											
Total producción interna											
Importaciones											
Σ Recursos oferta											

Tabla input-output. Tabla de relaciones intersectoriales.

La tabla input-output es un instrumento muy eficaz para la contabilidad nacional, la estimación del Producto Nacional Bruto y la realización de predicciones. En la matriz de consumos intermedios se obtiene el valor total de la producción. Parte de esta producción es destinada al consumo interno (demanda interna), es decir, al consumo privado, más el consumo del gobierno (gasto público) y la inversión (formación bruta de capital), y la parte excedente y no consumida por la demanda interna es destinada a la exportación. La suma del total de la demanda interna más las exportaciones constituye el consumo final o output total. Desde el punto de vista de los consumos (columnas), si al total de los consumos intersectoriales se suman los impuestos sobre los productos (Impuesto sobre el valor añadido, etc.), los importes de los salarios y los excedentes empresariales (beneficios), se obtiene el total de la producción interna, a la que si se suman las importaciones se obtiene el valor total de los recursos.

Una utilidad importante de las tablas input-output es el estudio del nivel tecnológico de una economía a través de la definición de la matriz de coeficiente técnicos.

Para cada casilla de la intersección ente filas y columnas entre sectores se define un coeficiente técnico del sector *i* respecto al sector *j* de la forma siguiente:

$$a_{ij} = x_{ij}/X_j.$$

La matriz de coeficientes técnicos es muy útil en las predicciones económicas, ya que permite evaluar el impacto que puede tener para una economía un evento determinado, como puede ser una guerra o la deslocalización de un sector económico.

Los ciclos económicos

Los ciclos económicos son fases periódicas de aceleración o desaceleración de la actividad económica de un país, una región económica, un conjunto de países o incluso a nivel mundial, en las que el crecimiento de la producción, los beneficios empresariales y el empleo oscilan desde la expansión y la prosperidad de la población y las empresas a la recesión y la crisis. Los ciclos económicos se pueden representar gráficamente mediante una curva sinusoide en la que el PIB está en el eje de ordenadas y el tiempo, en el de abscisas, de forma que la distancia entre los puntos máximos o mínimos de la curva indica la frecuencia y duración de cada período cíclico.

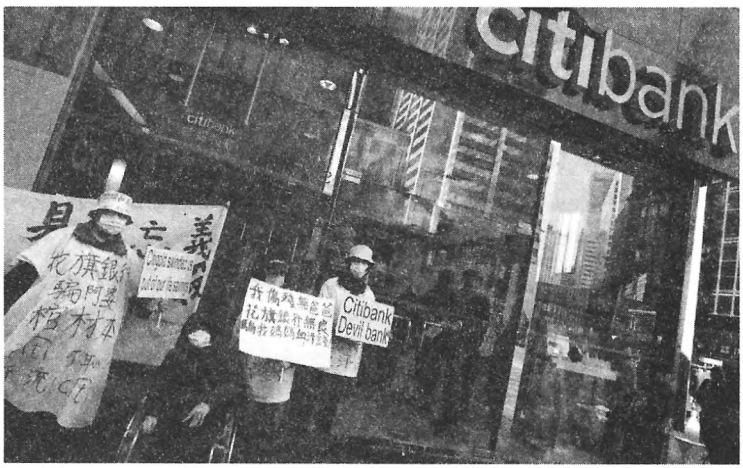
El ciclo se inicia después de un período de crisis con una fase de recuperación y expansión posterior, hasta alcanzar un punto máximo superior o auge. Al cabo de un tiempo de haber alcanzado el máximo de los negocios, la obtención de beneficios y el mínimo de la tasa de desempleo, se invierte la tendencia en este punto de inflexión y puede empezar un período de recesión, provocada por la caída de la demanda, la producción, la inversión y el empleo.

Esta recesión suele deberse a un crecimiento excesivo de la inversión industrial, que a su vez está motivada por una expansión del sistema crediticio, con intereses bajos que facilitan la renovación a crédito de las estructuras productivas; lo que trae como consecuencia una sobreinversión que conlleva un nivel de sobreproducción asociada a una infrautilización de la capacidad productiva. El paso siguiente es el aumento de los costes medios de producción, una caída del beneficio marginal y de la productividad, un aumento progresivo de la tasa de desempleo y un aumento de la morosidad en la devolución de los créditos y las deudas en general. Al aumentar el desempleo, bajan las ventas de las empresas, ya que disminuye la capacidad adquisitiva de la demanda, aumenta todavía más el paro, disminuye la inflación con la disminución de la producción, se congelan o disminuyen los salarios y los precios de los productos, y disminuyen los

beneficios y las expectativas empresariales. Estas últimas pueden sacudir a los mercados financieros y generar una caída de las cotizaciones en las bolsas de valores.

El período de recesión o depresión se agudiza y empeora hasta generar un período de crisis y alcanzar el punto mínimo del ciclo. Una vez alcanzada esta fase, la economía llega a un punto en el que ya no puede descender más y que corresponde a la capacidad mínima necesaria para que el país siga funcionando. En esta fase, las empresas menos competitivas ya han desaparecido, y para decirlo de cierta forma, la economía se deshace de sus elementos menos eficientes. Llegados a este punto, sólo es cuestión de tiempo que, como fruto de medidas gubernamentales que fomenten la inversión y el empleo, o bien por una reanimación de la demanda, la maquinaria productiva vuelva a reanimarse para entrar en una nueva fase expansiva y repetir el ciclo.

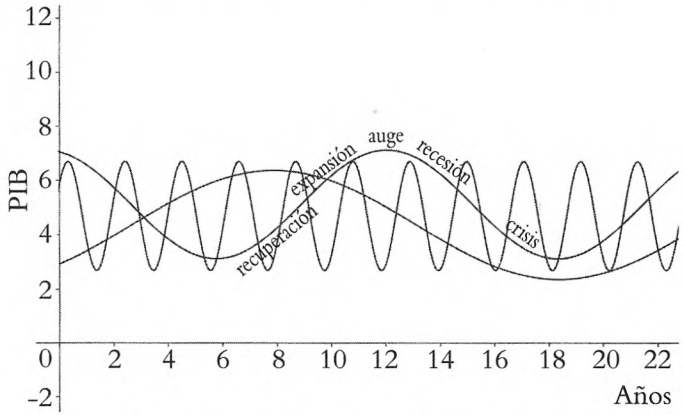
Sin embargo, es necesario señalar que el tipo de crisis descrita pertenece a la economía real, es decir, los sectores productores de bienes y servicios. Pero las crisis también pueden iniciarse en el sector financiero, cuando explotan burbujas financieras especulativas en determinados campos de inversión financiera, fruto de una falta de control de los mercados financieros y un exceso de euforia inversora motivada por unas facilidades añadidas por el propio sector financiero. Este tipo de crisis de origen financiero suele traer consecuencias nefastas para la economía real, ya que al afectar a la solvencia de las instituciones bancarias, la falta de liquidez perjudica enormemente el normal funcionamiento de las empresas y la demanda de los consumidores, y puede retrasar de forma excesiva el retorno a una fase de recuperación.



Protesta de clientes de la sucursal de Citibank en Hong Kong, banco perteneciente al Citigroup, que era el mayor grupo financiero de Estados Unidos hasta que la bancarrota de diversas entidades de crédito relacionadas con el mercado de las hipotecas desató la crisis mundial en 2008.

Las teorías sobre los ciclos económicos están fundamentadas en series estadísticas de períodos largos. Se ha demostrado que existen distintas clases de ciclos económicos, de diferentes duraciones, y que pueden solaparse de forma que si coinciden los puntos de crisis de distintas clases de ciclos puede aumentar la gravedad de los mismos. Los estudios estadísticos sobre los ciclos han sido numerosos, y mediante el análisis de regresión y multivariante han intentado averiguar cuáles son las variables que determinan las causas de las crisis económicas. Los modelos econométricos también se han utilizado frecuentemente para predecir los cambios futuros de tendencia del ciclo económico. Estos modelos consisten en un conjunto de ecuaciones sobre determinadas variables (PIB, precios, exportaciones, demanda, demanda de dinero, etc.) en función del comportamiento de una serie de variables externas. Tienen que considerarse igualmente las crisis motivadas por acontecimientos externos a la evolución intrínseca de la economía, como la crisis del petróleo de 1973 o la invasión de Kuwait por Irak.

Según los estudios empíricos, existen varias clases de ciclos económicos. Prescindiendo de los ciclos estacionales, ligados a determinados sectores como la agricultura o el turismo, se distinguen esencialmente tres clases de ciclos: a corto, medio y largo plazo. Entre los ciclos cortos cabría cifrar los descritos por Kitchin, que oscilan entre los 18 y los 40 meses. Los ciclos a medio plazo oscilan entre los 4 y 5 años, también descritos por Mitchell, y entre los 6 y 10 años, descritos por el francés Juglar. Finalmente, el ruso Kondratieff estudió ciclos de muy largo plazo, de cerca de 50 a 60 años, período en el que según este autor se producían crisis tan graves como la de 1929. También en las bolsas de valores, tal y como se ha visto en el capítulo anterior, se producen ciclos en las cotizaciones de los títulos y los índices bursátiles, que fueron descritas por Charles Dow y posteriormente por Elliott, que definió 8 ondas de oscilación bursátil.



Ciclos económicos a corto, medio y largo plazo y fases del ciclo.

¿Cómo se mide el bienestar de un país? Países ricos y países pobres

Existe la creencia generalizada de que el bienestar de un país se mide por el nivel de su renta per cápita (en realidad, PIB per cápita), por la tasa de crecimiento del PIB o por el superávit de su balanza comercial (exportaciones de mercancías menos importaciones), de su balanza por cuenta corriente (sumando a la balanza comercial la balanza de servicios formada por los transportes y fletes, turismo, seguros, etc.) o de su balanza de capitales (entradas y salidas de capitales). Sobre la balanza de pagos hay que tener en cuenta que su saldo siempre se equilibra, ya que un superávit de la balanza por cuenta corriente se salda con un déficit de la balanza de capitales, y viceversa.

Un aspecto muy relacionado con la balanza de pagos es el de la deuda externa. Los países en vías de desarrollo y con índices de pobreza elevados, en los que la población crece a un ritmo superior al del PIB, y también de la producción agrícola, suelen registrar un nivel elevado de endeudamiento internacional, especialmente con las grandes potencias económicas.

Por otro lado, los países con ingresos altos se limitan a zonas muy restringidas: Unión Europea, Suiza, países nórdicos y pequeños Estados europeos, Estados Unidos y Canadá, Japón, Australia, Corea del Sur y Australia, además de los países del Golfo Pérsico exportadores de petróleo. En el resto del mundo la riqueza se halla muy mal distribuida.

Sin embargo, dentro de un mismo país, la riqueza también se halla repartida de forma muy desigual. Un instrumento analítico para medir la distribución de la renta en un país es la curva diseñada por el matemático Lorenz, en la que en unos ejes de coordenadas se representan los porcentajes de ingresos que corresponden a determinados porcentajes de población. En el eje vertical (eje de ordenadas) se representan los porcentajes acumulados de ingresos, y en el eje horizontal (eje de abcisas), los porcentajes acumulados de población. Cada punto de la curva representa el porcentaje de renta que posee un determinado porcentaje de población. Si se traza una recta desde el origen de coordenadas hasta el punto en el que el 100% de los ingresos corresponde al 100% de la población, esta recta diagonal con un ángulo de 45° corresponde a una situación de distribución de la renta totalmente equitativa, es decir, que a cada punto de la recta a un determinado porcentaje de población corresponde el mismo porcentaje acumulado del ingreso total. Sin embargo, la curva de Lorenz está normalmente por debajo de la diagonal de la

equidad o de distribución equitativa, y cuanto más se acerca al eje de abscisas, más desigual es la distribución de la renta. En el gráfico se observa cómo la curva *B* corresponde a una situación de distribución de la renta más equitativa que la de la curva *A*.

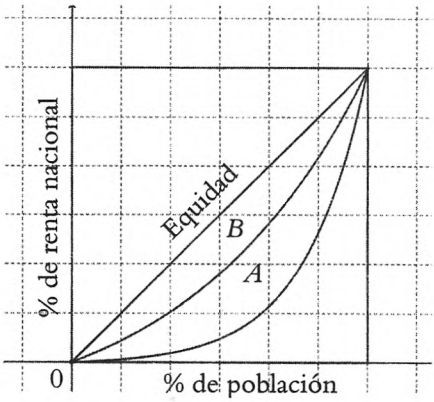
LA DESIGUALDAD MUNDIAL EN CIFRAS

La desigualdad económica entre países a nivel mundial es muy grande. Si se clasifican los países de acuerdo con las tipologías sobre los niveles de ingresos establecidas por el Banco Mundial (ingresos altos: igual o más de 9.361 $ per cápita; medios altos: entre 3.031 $ y 9.360 $, medios bajos: entre 761 y 3.030 $, y bajos: menos de 761 $), se observa que el 16% de la población mundial produce el 76% del PIB mundial, mientras que el 37% de la población mundial con ingresos bajos sólo produce el 3% del PIB mundial, tal y como se observa en el cuadro siguiente, en el que los países de ingresos bajos y medios se agrupan por regiones geográficas.

Producción y población mundial 2006

Grupos de países	Población (millones)	% Población mundial	PIB (millones $)	% PIB mundial
Ingresos bajos	2.403	36,87%	1.611.831	3,34%
Ingresos medios altos	810	12,43%	5.316.864	11,02%
Ingresos medios bajos	2.276	34,92%	4.734.576	9,81%
Total ingresos medios	3.086	47,35%	10.051.440	20,83%
Ingresos medios y bajos	5.489	84,21%	11.663.271	24,17%
Asia Oriental y Pacífico	1.900	29,15%	3.636.593	7,54%
Europa y Asia centrales	460	7,06%	2.483.602	5,15%
América Latina y Caribe	556	8,53%	2.945.193	6,10%
Oriente Próximo y Magreb	311	4,77%	730.103	1,51%
Asia Meridional	1.493	22,91%	1.142.319	2,37%
África subsahariana	770	11,81%	709.500	1,47%
Ingresos altos	1.029	15,79%	36.583.031	75,83%
Total mundial	6.518	100,00%	48.246.302	100,00%

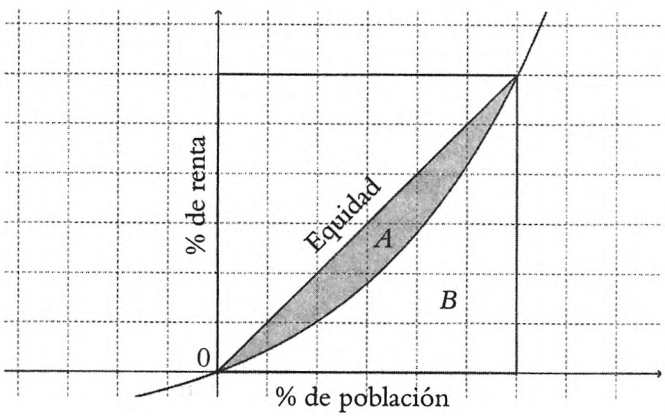
Fuente: Informe sobre el desarrollo mundial 2008, Banco Mundial.



Curva de Lorenz.

A partir de la curva de Lorenz, el matemático italiano Corrado Gini estableció un coeficiente que lleva su nombre para medir la desigualdad. Una vez trazada la curva de Lorenz, se distinguen dos áreas: el área A, que corresponde a la comprendida entre la diagonal de la equidad y encima de la curva, y el área B, que es la que corresponde al área de la superficie situada debajo de la curva de Lorenz hasta los ejes. El coeficiente de Gini se define como el cociente entre la superficie de A y la superficie total $A + B$, es decir:

$$\text{Coeficiente de Gini} = \frac{\text{Área entre la curva de Lorenz y la línea de equidad}}{\text{Área total del triángulo formado debajo de la diagonal}}.$$



Curva de Lorenz con las superficies A *y* B *del coeficiente de Gini.*

$$\text{Coeficiente de Gini} = \frac{\text{Superficie de } A}{\text{Superficie de } A + B}.$$

Cuanto menor sea la superficie de A, más justa será la distribución del ingreso y, por lo tanto, si tiende a cero, se acercará cada vez más a la diagonal de la equidad y el valor del coeficiente de Gini también tenderá a 0. Por el contrario, cuanto más grande sea la superficie de A, más grande será el coeficiente de Gini y éste tenderá a 1. Este coeficiente se utiliza para medir la desigualdad no sólo en la distribución de la renta, sino también por regiones y países, y también para medir la desigualdad en la distribución de determinados servicios sociales o del gasto público entre la población de un país o una región.

Un concepto importante que hay que tener en cuenta en el desarrollo de un país es el de su nivel de desarrollo económico. ¿Qué significado tiene decir que un país está más desarrollado que otro? ¿Qué variables deben utilizarse para clasificar a los países entre ricos y pobres? La tasa de crecimiento del PIB es importante, pero los países menos desarrollados suelen presentar tasas mucho más elevadas de crecimiento, ya que obviamente suelen partir de niveles más bajos del Producto Interior Bruto, y por el motivo contrario, los países desarrollados presentan unas tasas de crecimiento más reducidas.

La primera cuestión que se plantean los organismos internacionales y las agencias de las Naciones Unidas para combatir la pobreza y el atraso económico es qué medidas económicas hay que tomar para conseguir que un país subdesarrollado (o como se les denomina, en vías de desarrollo) pueda despegar en el camino del desarrollo económico. En un principio el desarrollo económico no se limita únicamente al crecimiento del PIB, sino también a una mejora de las condiciones sociales, un aumento del bienestar y la calidad de vida de la población, así como una mejora en la distribución de la renta y la riqueza, no sólo entre los grupos sociales, sino también entre las distintas zonas geográficas del país.

Para que exista desarrollo económico es necesaria una acumulación primitiva de capital, que normalmente puede originarse en la agricultura, con el fin de generar unos excedentes que se inviertan en el sector industrial, para aumentar así la productividad de la economía del país. El incremento de las exportaciones genera una acumulación de capital, que unida a la atracción de capitales extranjeros, se invierte en el sector industrial. El aumento de la productividad conlleva el aumento de los salarios, así como el incremento de la demanda y el desarrollo del mercado

interior. El fuerte crecimiento supone la aparición de demanda de servicios cada vez de mayor calidad, que en una última fase del desarrollo disparará la creación de un sector terciario importante, con una productividad superior a la del sector industrial.

A nivel práctico, los economistas se preguntan cuáles son las variables que definen el crecimiento económico y, en su estadio más elaborado, el desarrollo económico de un país. Las variables más importantes son el producto nacional (PIB), el stock de capital, las infraestructuras de comunicaciones y transportes o «capital social», el gasto en educación (capital humano), la fuerza de trabajo, el ahorro, el nivel de renta de la demanda, el nivel tecnológico, la estructura y dimensión de los mercados, etc. Pero la pregunta fundamental es la siguiente: ¿por qué razones los países presentan un crecimiento económico con el paso del tiempo? Muchas de las respuestas están basadas en la inversión, el nivel tecnológico, la inversión en educación, que supone una mayor cualificación de la fuerza de trabajo, o la dimensión de la propia fuerza de trabajo, etc.

Como simplificación del problema se han definido una serie de ecuaciones en las que se relacionan todas estas variables y, a través de la econometría, se realiza la medición y la verificación de estas ecuaciones a través de técnicas estadísticas, como por ejemplo la regresión lineal y el ajuste de curvas. El método econométrico consiste en especificar un modelo en varias ecuaciones que expresan unas funciones que relacionan una serie de variables explicativas y dependientes, que es necesario evaluar y verificar con la finalidad de una vez estimados los parámetros (constantes de la ecuación cuyos valores hay que estimar empíricamente) poder realizar predicciones.

Un modelo econométrico sencillo sería el de la oferta y la demanda en un mercado concurrencial. Sea q_1 la cantidad demandada de un producto determinado a un precio p_1 y q_2 la cantidad ofrecida de este producto a este mismo precio p, tanto q_1 como q_2 son funciones del precio $f(p)$ y $g(p)$ respectivamente y se expresan de esta forma: función de demanda: $q_1 = f(p)$ y función de ofera: $q_2 = g(p)$. Las funciones $q_1 = f(p)$ y $q_2 = g(p)$ se podrían expresar de esta forma: $q_1 = \alpha + \beta\, p$, $q_2 = \omega + \eta \cdot p$, donde α, β, ω, η serían los parámetros que hay que estimar con datos empíricos. Una de las condiciones que deben cumplirse es que tanto la oferta q_2 como la demanda q_1 del producto en cuestión deben coincidir, ya que son las cantidades que se demandan y ofrecen en el punto de equilibrio $q_1 = q_2$. A través del análisis regresional de las nubes de puntos que corresponden a los datos estadísticos observados en las variaciones de las cantidades demandadas y ofrecidas de este producto en función de las variaciones del precio, es posible estimar los valores de los parámetros y definir unas ecuaciones que podrían ser utilizadas para predecir los valores de las cantidades ofrecidas y demandadas del producto en función de la variación de su precio.

Indicadores de riqueza, desarrollo económico y desarrollo humano

Tanto la tasa de crecimiento del Producto Interior Bruto (PIB) como la de su cuantía per cápita son unos indicadores insuficientes para medir con precisión el nivel de desarrollo económico de un país, y más si se tienen en cuenta las enormes diferencias estruturales y de calidad de vida que existen entre los países ricos y los países más pobres. El Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) ha definido y calculado diversos índices que permiten conocer con más rigor y profundidad las diferencias reales entre los distintos niveles de desarrollo entre países.

El PNUD ha elaborado varios índices, entre los que destacan el Índice de Desarrollo Humano (IDH) y el Índice de Pobreza Humana (IPH). El primero de éstos es un indicador estadístico compuesto que mide el avance de un país en función de tres dimensiones básicas para el desarrollo humano:

1. Vida larga y saludable (medida según la esperanza de vida al nacer).
2. Acceso a los conocimientos, es decir, educación (medida por la tasa de alfabetización de adultos y la tasa bruta combinada de matriculación en educación primaria, secundaria y superior, así como los años de duración de la educación obligatoria).
3. Nivel de vida digno, medido por el PIB per cápita y la Paridad del Poder Adquisitivo (PPA), cuantificada en dólares.

Las Naciones Unidas definen el desarrollo humano como el proceso por el que una sociedad mejora las condiciones de vida de sus ciudadanos a través de un incremento de los bienes con los que éstos pueden cubrir sus necesidades básicas y complementarias, y de la creación de un entorno en el que se respeten los derechos humanos. Es la cantidad de opciones que posee una persona para ser o hacer lo que ella desea. A mayor cantidad de opciones mayor desarrollo humano; a menor cantidad de opciones, menor desarrollo humano. El desarrollo humano también puede definirse como una forma de medir la calidad de vida de las personas en su entorno vital. Es una variable fundamental para la calificación de un país o región.

En el informe publicado por el PNUD en 2009 el IDH oscilaba entre Noruega con un índice de 0,971, en primera posición, al 0,340 de Níger en el puesto 182. El PNUD clasifica los países en tres grandes grupos:

Países con desarrollo humano alto (IDH $\geq$ 0,800): 83 países.
Países con desarrollo humano medio (0,500 $\leq$ IDH $<$ 0,799): 75 países.
Países con desarrollo humano bajo (IDH $<$ 0,500): 24 países.

Entre los países con desarrollo humano alto se hallan los países desarrollados de América del Norte, Europa Occidental, los países nórdicos europeos, Suiza, Japón, algunos países del cono sur de América Latina; mientras que en los de índice bajo se encuentran prácticamente todos los países del África subsahariana.

El IDH surgió como una iniciativa para clasificar a los países a partir de unas variables que no eran las usadas normalmente en economía (PIB, balanza comercial, consumo energético, desempleo, etc.), sino que incidían en otros ámbitos de la sociedad que condicionan la calidad de vida, como la educación (tasa de alfabetización, número de matriculados según nivel educacional, etc.) o la salud (tasa de natalidad, esperanza de vida, etc.). El valor del índice se pondera con las siguientes variables: esperanza de vida al nacer, tasa de alfabetización de los adultos (% personas de 15 años y mayores), tasa bruta de matriculación en la enseñanza primaria, secundaria y terciaria, y PIB per cápita.

El PNUD también elabora otros índices, como el Índice de Pobreza Humana (IPH), confeccionado a partir de la probabilidad de sobrevivir a los 40 años, la tasa de analfabetismo, los niños con peso inferior a la media de su edad y la población con menos de 2 $ dólares diarios para vivir. También se elaboran índices sobre el medio ambiente (emisiones de CO_2), u otras áreas (consumo de energías primarias, renovables y nuclear, gasto militar, derechos humanos, derechos e integración de la mujer, etc.).

La metodología para calcular el IDH necesita crear antes un índice para cada una de las variables consideradas (esperanza de vida, educación y PIB). Para ello se escogen valores mínimos y máximos (valores límite) para cada uno de estos indicadores. Cada uno de los componentes se expresa con un valor entre 0 y 1, para lo cual se utiliza la siguiente fórmula general total.

$$\text{Índice del componente} = \frac{\text{Valor real} - \text{Valor mínimo}}{\text{Valor máximo} - \text{Valor mínimo}}.$$

El IDH se calcula promediando sus tres componentes principales. Los valores límite de éstos (máximo y mínimo) que se utilizan para el cálculo del IDH son de 85 y 25 años para la esperanza de vida al nacer; del 100% y 0% para los dos componentes de educación y de 40.000 y 100 $ para el PIB en dólares per cápita ajustados para cada país con la PPA respecto a la divisa estadounidense.

Epílogo

Como ha podido observarse, en el estudio del crecimiento y desarrollo económicos se utilizan ecuaciones y sistemas de ecuaciones, funciones, algoritmos, representaciones gráficas, cálculos matriciales, etc. A lo largo de estas páginas se han expuesto los principales conceptos matemáticos utilizados en el análisis económico. Y a lo largo de la historia las distintas escuelas de pensamiento económico han ido utilizando de forma progresiva el análisis matemático tanto para elaborar como para de demostrar las distintas teorías económicas. Con el paso del tiempo se ha ido imponiendo la utilización del método inductivo, y las teorías económicas han tenido que basarse en el análisis de datos reales recopilados, que requerían un cómputo inicial, que a su vez facilitaba lógicamente, en un segundo estadio, la utilización de métodos estadísticos y matemáticos de análisis.

Bastará con recordar el uso del cálculo diferencial y de las derivadas por las escuelas neoclásicas marginalistas, con autores tales como Léon Walras, Wilfredo Pareto, Stanley Jevons o Alfred Marshall, en la elaboración de las teorías del comportamiento del consumidor y de la formación del equilibrio general; el uso de sistemas de ecuaciones para definir modelos económicos utilizados por la econometría, disciplina que nace de la combinación del análisis económico con el análisis matemático y estadístico, es decir, que aplica a las teorías macroeconómicas dichos análisis para verificar su cumplimiento; o el uso del cálculo matricial empleado por Leontief en la elaboración de las tablas input-output para estudiar las relaciones intersectoriales de la economía.

En síntesis, a lo largo del último siglo se ha asistido a una progresiva utilización de las matemáticas en el análisis económico, protagonizado en muchos casos por el interés de los propios matemáticos en el estudio de la ciencia económica. A este respecto hay que recordar la aportación de grandes matemáticos en el avance de la ciencia económica, tales como John Maynard Keynes, creador de la macroeconomía e inspirador en la elaboración de modelos econométricos, o John von Neumann y Oskar Morgenstern, que formularon la teoría de los juegos. El desarrollo de la economía como ciencia va intrínsecamente unido a la utilización cada vez más rigurosa de métodos matemáticos. De ahí que tanto en las facultades de ciencias económicas como en las escuelas de negocios tener una sólida formación matemática supone un requisito indispensable para adentrarse en tales disciplinas.

Bibliografía

AMAT, O., *La Bolsa. Funcionamiento y técnicas para invertir*, Barcelona, Deusto, 2000.

BARBANCHO, A.G., *Estadística elemental moderna*, Barcelona, Ariel Economía, 1990.

COLLETTE, J.P., *Historia de las matemáticas*, Madrid, Siglo XXI, 1993.

ELVIRA, O. y PUIG, X., *Análisis técnico bursátil*, Barcelona, Gestión 2000, 2001.

FRISCH, R., *Las leyes técnicas y económicas de la producción*, Barcelona, Sagitario, 1963.

HALM, G.N., *Economía del dinero y la banca*, Barcelona, Bosch, 1963.

IFRAH, G., *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa Forum, 2001.

—, *The Universal History of Computing*, Hoboken, John Wiley & Sons Inc., 2001.

KRUGMAN, P.R. y OBSTFELD, M., *Economía internacional. Teoría y política*, Madrid, Addison Wesley, 2000.

LORING, J., *La gestión financiera*, Barcelona, Deusto, 1997.

SAMUELSON, P.A. y NORDHAUS, W.D., *Economía*, Madrid, Mc Graw Hill, 1996.

STIGLER, S.M., *The History of Statistics*, Cambridge, Harvard University Press, 1989.

SUÁREZ, A., *Decisiones óptimas de inversión y financiación de la empresa*, Madrid, Pirámide, 1987.

SYDSAETER, K. y HAMMOND, P.J., *Matemáticas para el análisis económico*, Madrid, Prentice Hall, 2002.

TURNER, J.C., *Matemática moderna aplicada*, Madrid, Alianza Universidad, 1986.

Índice analítico

activo subyacente 120-122
algoritmos de cálculo 8, 18-19
análisis
  fundamental 121-125
  técnico 121, 125-129
aritmética 15, 17-20, 25-30, 38

beneficio
  marginal 102, 143
  residual (RI) 80
bolsa de valores 118-119

calculadora de Leibnitz 28
ciclos
  de Juglar, Kitchin, Mitchell, Kondratieff 146
  económicos 9, 143-145
coeficiente
  de correlación 132-133
  de Gini 148-149
  técnico 142-143
contabilidad 8, 22-23, 138-139, 142
convertibilidad 32-34
correlación y regresión 132-135
coste
  marginal 74-77, 101
  medio 74-77
cuota de un préstamo 58-61
curva
  de demanda 46, 98-99, 107
  de Lorenz 146, 148
  de oferta 87, 88, 99
  de Phillips 46, 47
  de salarios 87
  de costes (medios, marginal) 69-78
  de oferta y demanda de trabajo 87-88
  de producción 73
  isocuanta 73

derivadas 76, 77, 101
descuento comercial 109
distribución normal tipificada 115
Dow, C.H. 126-127, 145

ecuaciones e inecuaciones 40
elasticidad de la demanda 105-107
Elliott, principio de ondas de 127, 129
equilibrio de mercado 97, 100-105
estadística 26-30, 67-68, 88-92

factores de producción 69, 72, 73, 77-79, 100, 102
Fibonacci (Leonardo de Pisa) 18, 40, 61, 127-129
fracción 11, 18-20, 42, 129
función
  de costes 74
  de producción 69-73
  lineal 71
funciones 42, 53, 69, 70-72, 150

Galbraith, J.K. 86

hiperinflación 47-48

índice
de Fisher 45, 119
de Laspeyres 45, 119
de Paasche 45, 119
de precios 44
Dow-Jones 126
general de bolsa 120
inflación
tasa de 45, 56, 80-82, 137, 138
galopante 48
interés simple e interés compuesto 53-56

Keynes, J.M. 26, 84, 140

Lavoisier, A. 27
Leontief, W. 141
ley de bronce de los salarios 84
líneas y curvas de regresión 125, 134-135
logaritmo 58, 64, 154

Malthus, T. 28, 83, 84
Marx, K. 25, 84
Menger, C. 25, 102
mercado
de capitales 49
de divisas 34
de trabajo (oferta y demanda) 83-86
de valores 111
multiplicador 140-141

números
griegos 14
negativos (números deudos o absurdos) 12, 18, 21-23

óptimo de producción 69-78

Pacioli, L. 21
Pareto, V. 102- 105
paridad del poder adquisitivo 36, 152
partida doble 7, 21
Pascal, B. 7, 26
pascalina 7, 26, 27
patrón monetario 7, 32-34
PIB per cápita 139, 146, 152, 153
poder adquisitivo 44, 56, 80, 81, 86, 87
Price Earnings Ratio (PER) 130
prima de seguros 66-67
Producto Interior Bruto (PIB) 137-141, 143, 145-147, 149-154
producto
marginal 78, 86-87
derivados 79, 117
geométrica 59-61

ratios financieros 124
regla de tres (simple directa, inversa, compuesta) 18, 37-39, 71, 130
relación real de intercambio 36-37
renta nacional 137-141
Ricardo, D. 25-26

Sinclair, J. 28
sistema
binario 15
decimal 15
hexadecimal 15
métrico decimal 15, 23-24, 27
vigesimal 15

sistemas
de medida 7, 23-24
de numeración 7, 9-16
Smith, A. 24-26, 85
Sraffa, P. 25, 26
sucesiones 61, 139

tablas input-output 24, 141-143
tasa
de desempleo 46, 143
de interés anual equivalente (TAE) 56
de rendimiento de la inversión (ROI) 78-83
de rendimiento interno de la inversión (TRI) 83, 129
teorías de Dow 129
tipo
de cambio (flexible o fijo) 34-36
de interés 48-66, 79, 95, 120, 129
de interés interbancario 50

valor actual neto (VAN) 81, 95, 129
variables
discretas y continuas 42
estadísticas 29, 92, 115, 116, 132, 133

Walras, Léon 25-26, 102-103, 141
warrants 79, 118, 120