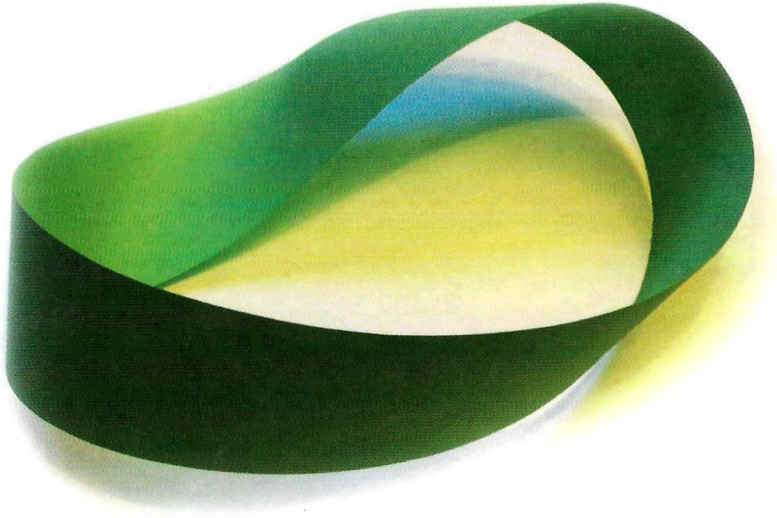
Un descubrimiento sin fin

El infinito matemático

Enrique Gracián



El mundo es matemático

Un descubrimiento sin fin

El infinito matemático

Si la búsqueda del conocimiento se asimilara a una cacería, el infinito sería, sin duda, caza mayor. Abriéndose paso entre dogmas y paradojas, esta fantástica presa se ha movido por los parajes de la filosofía antigua, la religión medieval y la ciencia moderna. Este libro sigue el rastro elusivo del infinito en la mente de filósofos, teólogos, físicos y, sobre todo, matemáticos.

Un descubrimiento sin fin

El infinito matemático

Enrique Gracián

El mundo es matemático

© 2010, Enrique Gracián por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Créditos fotográficos: iStockphoto

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6968-3
Depósito legal: NA-1662-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. ¿Qué es el infinito? 9
El infinito cotidiano 9
Una definición de diccionario 11
Muy grande y muy pequeño 14
Ápeiron 15
Infinito potencial y actual 17
El infinito en la enseñanza 21

Capítulo 2. Discreto y continuo 25
Densidad 25
Discreto y continuo 26
Atrapar el tiempo 28
Paradojas de Zenón 31
- La dicotomía 33
- Aquiles y la tortuga 34
- La flecha voladora 34
- El estadio 35

Una cuadratura del círculo 39
Irracionales 43
El salto cuántico 47

Capítulo 3. Encuentros en el infinito 51
La pintura tridimensional 51
De la perspectiva a la proyectiva 53
Transformaciones continuas 54
Cuadraturas 58
Eudoxo 60
Kepler 64
Galileo 66
Cavalieri 68
Descartes 70

Capítulo 4. *Calculus* 73
El análisis infinitesimal 73
Newton 76
Leibniz 78
Epsilones 85

Capítulo 5. El paraíso de Cantor 91
Las series de Fourier 91
Sucesiones fundamentales 93
La recta real 95
Los números cardinales 96
Conjuntos numerables 100
Más que infinito 103
Números trascendentes 106
Números transfinitos 110
La hipótesis del continuo 112

Capítulo 6. El infierno de Cantor 117
Los primeros años 117
Las revistas científicas 121
La controversia del infinito 124
Dedekind 124
Mittag-Leffler 126
El Cantor excéntrico 127
La locura 128
El infinito del siglo XXI 130

Anexo 133

Bibliografía 137

Índice analítico 139

Prefacio

El escritor francés Alphonse Allais (1854-1905) decía «El infinito se hace largo, sobre todo hacia el final», lo que expresa, no sin un cierto sentido del humor, que nuestra visión del infinito está siempre impregnada de una determinada proximidad. Dicho de otra manera, que sólo podemos verlo «desde aquí», desde el lugar en que, como seres finitos que somos, nos encontramos, desde nuestra finitud. Cuando miramos a lo lejos empezamos a perdernos y a hacer consideraciones filosóficas, elucubraciones, conjeturas, ante las cuales solemos acabar, en el mejor de los casos, adoptando una postura intelectual, cuando no una simple actitud ante el tema. No es de extrañar, por consiguiente, que el infinito haya sido, sea y siga siendo tema de reflexión filosófica, religiosa y científica. Tres grandes paisajes del pensamiento humano que no siempre tienen sus fronteras bien delimitadas.

A la mayoría de las personas lo primero que nos produce la idea del infinito es una sensación de vértigo, de estar ante algo que, hagamos lo que hagamos, acabará por escapársenos. Y así es. Quizá sea éste uno de sus mayores motivos de interés, ya que es una fuente de creatividad, cómo no, infinita. En este sentido, la historia del infinito en las matemáticas es tan interesante y fructífera que puede hablarse de «las matemáticas del infinito», que es tanto como decir que tan escurridizo concepto se ha conseguido convertir en un objeto más de la matemática, como lo pueda ser un número o una figura geométrica.

Un objeto matemático es, básicamente, un objeto bien definido. En este sentido, un matemático es un cazador: explora terrenos desconocidos, acecha, observa la presa, espera, la sitúa en su mira y apunta hasta que la tiene perfectamente enfocada; entonces dispara.

Y ésta es la historia del infinito en las matemáticas, la de una presa que costó más de tres mil años abatir. Una presa que, abriéndose paso entre dogmas y paradojas, se movió por los parajes de la filosofía griega, de las especulaciones religiosas y entre los secretos de las más oscuras sectas iniciáticas. Pero también entre los objetos de la geometría y en el laberinto de los números, terrenos más propicios para el cazador.

Podemos, por tanto, seguir el rastro del infinito en la mente de los mayores pensadores de todas las culturas, ya sean filósofos, teólogos, físicos o matemáticos, en una aventura no exenta de peligros. Algunos la pagaron con la locura; otros, literalmente, se jugaron la vida y acabaron ajusticiados por sectas intolerantes o abrasados por el fuego de religiones intransigentes; todo por algo que no era más que una idea. Pero sabemos que una idea puede incidir de manera decisiva en nuestro modo

de percibir el futuro, más allá de nuestra propia existencia, y, consecuentemente, de hacer temblar los cimientos en los que se apoyan las creencias de todas las culturas.

En cualquier caso es un tema que, en cierta forma, afecta a nuestra visión del mundo y, por lo tanto, interesa no sólo a matemáticos, sino también a filósofos, sin olvidar que ambos puntos de vista se deben compartir, ya que, como dijo en una ocasión el matemático francés Jean Charles de Borda (1733-1799): «Sin matemáticas no se penetra hasta el fondo de la filosofía; sin filosofía no se llega al fondo de las matemáticas; sin las dos no se ve el fondo de nada».

Capítulo 1

¿Qué es el infinito?

El infinito es un concepto inherente al pensamiento humano. Es muy probable que nazcamos con un vago concepto mental de infinitud que rápidamente asociamos con su contrario, la clara percepción de la finitud que forma parte de nuestra propia naturaleza. Para la filosofía o la teología, reflexionar sobre el infinito puede ser una actividad circunstancial, pero para las matemáticas, investigar el infinito ha sido y sigue siendo una necesidad.

El infinito cotidiano

Es conocida la anécdota de un profesor de matemáticas el día que explicó por primera vez el infinito en clase. Se hizo con una caja de tizas, tomó una y empezó a dibujar una línea en la pizarra. Cuando llegó al final del encerado siguió trazando la línea en la pared, bajó hasta el suelo, siguió y siguió sin parar de dibujar hasta salir por la puerta de la clase y desapareció al fondo del pasillo sin soltar la tiza. Los alumnos se quedaron atónitos esperando que sucediera algo. Al cabo de de poco sonó el timbre que anunciaba el final de la clase. El profesor había desaparecido. La última persona que dio fe de él fue un bedel que lo vio enfilar calle abajo dejando tras de sí un trazo blanco en las paredes de las casas. Pasaron tres días y la dirección del colegio decidió ponerle un sustituto. Al cabo de unos meses, el profesor apareció por sorpresa en mitad de la clase de matemáticas. Llevaba una mochila, una larga barba y, cómo no, un pequeño trozo de tiza en la mano. Entró dando zancadas y trazando una línea por el suelo, siguió por la pared hasta que alcanzó la pizarra y ahí se detuvo. Con evidentes signos de cansancio se dirigió a sus alumnos y dijo: «Ésta es una línea increíblemente larga, pero no es nada comparada con el infinito».

No sabemos qué decisión tomó el centro con respecto al profesor, o si fue internado directamente en un centro sanitario. Tampoco, si sus alumnos tuvieron una percepción clara de lo que era el infinito. Lo que sí quedó establecido es que el infinito conllevaba algún tipo de situación excepcional, cuando no traumática.

Hay muchas historias, a cada cual más exótica, que intentan proporcionarnos una percepción del infinito. En contextos religiosos solía hacerse referencia al infi-

nito temporal, más vulgarmente conocido como eternidad, cuando se hablaba de castigos perpetuos. El purgatorio podía ser largo, pero no eterno; el castigo del infierno, en cambio, reportaba un tiempo infinito. Para darnos una somera idea de lo que esto significaba se proponían trabajos titánicos, como el de recoger los granos de arena de inmensas playas, tomando uno cada cien siglos, por ejemplo. Uno de los escenarios más curiosos para ejemplificar la eternidad era el siguiente: imaginemos que la Tierra fuera una bola compacta de acero y que una vez cada millón de años una paloma rozara suavemente su superficie. Cuando, debido al rozamiento, la esfera se hubiera convertido en un diminuto punto, habría pasado la eternidad (aunque sería más correcto decir «una» eternidad). Todos estos ejemplos se explicaban a los niños para que se fueran haciendo una idea, por desgracia siempre amenazante, de la enorme magnitud del infinito.

Mi primera «visión» del infinito la tuve de niño la primera vez que me encontré entre dos espejos paralelos colocados en la cabina de un ascensor. «¿Qué es esto?»,

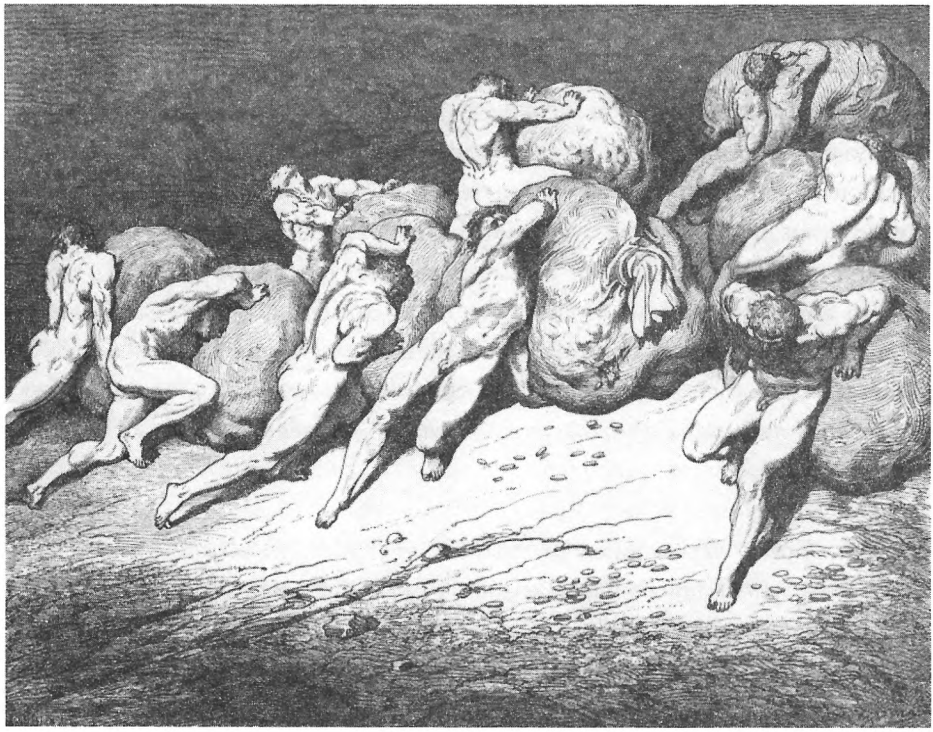


Ilustración de Gustave Doré para el Infierno, *la primera parte de la* Divina Comedia *de Dante Alighieri. Ser conducido al infierno significa un padecimiento eterno, un castigo infinito.*

pregunté. Mi padre me cogió de la mano y me respondió sin más: «Es el infinito». Desde entonces para mí el infinito es un paisaje, pavoroso o fascinante, según se mire, pero por el que más vale andar cogido de la mano.

Para todos nosotros el infinito debe estar ahí, en algún lugar absolutamente inaccesible y que, en el mejor de los casos, nos genera cierta aprensión, mientras que en su peor versión puede degenerar en el horror cósmico. Pero, por otro lado, la alternativa al infinito no es nada alentadora. Si el universo es finito, ¿qué es lo que hay después de sus límites? Respuesta: la Nada. Con mayúscula. Un concepto mucho más inaceptable que el de infinito.

Una definición de diccionario

«Infinito» es una palabra que, hasta cierto punto, se podría considerar como culta, ya que encierra conceptos filosóficos de envergadura. Sin embargo, se utiliza con mucha frecuencia en el lenguaje coloquial y al que nos referimos en muchas ocasiones: «El espacio infinito», «infinitas veces», «un tiempo infinito», «tener una paciencia infinita» son expresiones que utilizamos con cierta facilidad. Todos entendemos lo que se quiere dar a entender con ellas, siempre y cuando no profundicemos demasiado, ya que si nos ponemos a ello rápidamente veremos que nuestra capacidad para reflexionar sobre el concepto infinito se nos agota enseguida, y muy rápidamente empezaremos a utilizar «fotos fijas», clichés que poco o nada nos aportan. Y es que tal concepto es de naturaleza ineludiblemente filosófica: ponerse a pensar en el infinito es ponerse a filosofar, algo para lo que hay que tener cierta predisposición y, sobre todo, contar con algún punto de arranque. En estos casos lo más sencillo es acudir al diccionario.

El Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua nos propone las siguientes acepciones:

(Del lat. *infinītus*).

1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. adj. Muy numeroso o enorme.
3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito*
4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. m. *Mat* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. m. *Mat* Signo (∞) con que se expresa ese valor.
7. adv. m. Excesivamente, muchísimo.

Vamos a analizar estas acepciones sin ánimo, por supuesto, de poner en entredicho su interpretación lingüística, sino con el objetivo de acercarnos en todo lo posible a los significados matemáticos. La primera de ellas dice que infinito se refiere a algo que no puede tener fin ni término. Aquí haremos un par de observaciones. En primer lugar, no se afirma que no tenga, sino que no puede tener; se trata de una diferencia sutil: si nosotros decimos que el infinito no tiene fin hacemos dos afirmaciones, una implícita, que dice que el infinito existe, y otra explícita, que afirma que no tiene fin. En segundo lugar, si decimos que no puede tener fin afirmamos que, en caso de existir, no puede finalizar. Tal vez parezca que esta diferencia está cogida por los pelos, pero encierra un concepto, el de infinito potencial e infinito actual, con el que tendremos que bregar más adelante.

La segunda, la tercera y la última acepciones son calificativos que hacen referencia a percepciones o sensaciones. La cuarta, que se ciñe a una cuestión técnica, tiene un trasfondo geométrico que significó un importante hito en la historia de las matemáticas, al interpretar el infinito como un punto en el que coinciden rectas paralelas. La sexta acepción hace referencia al signo utilizado para simbolizar el infinito, del que también hablaremos más adelante. La quinta, «Valor mayor que cualquier cantidad asignable», es la que más se aproxima al concepto matemático del infinito.

Los conceptos básicos que hemos observado guardan relación con la idea de un progreso infinito, tanto espacial como temporalmente, pero el objeto al que se aplican es demasiado vago, y se emplea el término infinito más como adjetivo que como sustantivo. Cuando decimos «amor eterno», estamos indicando una concepción temporal del concepto de infinito y, de hecho, lo que queremos significar es una extrema fidelidad. Si decimos, en cambio, que el universo es infinito, lo que hacemos es hablar de una «inmensidad espacial». Sigue siendo algo vago y, como percepción, nos remite a la contemplación de un cielo nocturno en una noche sin luna, con millones de estrellas y una supuesta negrura de fondo a la que damos la inquietante dimensión de infinito. Está claro, por tanto, que lo primero que debemos hacer si nos disponemos a abordar el tema del infinito es tratar con algún objeto que tenga un elevado nivel de concreción, y aunque pueda parecer paradójico, debido al supuesto carácter abstracto de las matemáticas, el mejor agarradero lo encontramos en la serie natural de los números o, hablando con más propiedad, en la serie de los números naturales.

Como es sabido, no hay nada más natural que un número natural, y en cualquier cultura avanzada todo el mundo entiende a qué nos referimos cuando hablamos de

EL SÍMBOLO DEL INFINITO

El círculo que se suspende sobre las imágenes de los santos representa la eternidad. En latín, la palabra *caelum* significa tanto «cielo», como «círculo», y es, como curva sin fin, un camino que se puede recorrer infinitas veces durante un tiempo infinito y, por tanto, una posible representación de la eternidad. Del mismo modo, en determinados contextos paganos el símbolo del infinito ha sido utilizado como signo de santidad en sustitución del círculo. En la mayoría de ediciones del tarot, en la primera carta puede verse el símbolo del infinito sobre la cabeza del Mago. Dicho símbolo, que mucha gente interpreta falsamente como un «ocho tumbado», se corresponde con una curva llamada «lemniscata de Bernoulli», y fue introducido por el matemático británico John Wallis (1616-1703). Otra versión afirma que el signo procede de la letra M (símbolo del número mil) en su forma cursiva y que Wallis, que era filólogo, lo adoptó para simbolizar un número muy grande.

En la carta del tarot correspondiente al mago, éste luce sobre su cabeza el símbolo del infinito.

la serie 1, 2, 3,... de los números naturales. ¿Cuándo acaba dicha serie? La respuesta inmediata es nunca ¿Y por qué no se acaba nunca? Porque siempre podemos añadir un número más. Ésta es una respuesta correcta, tan correcta que, como veremos más adelante, encierra una definición bastante precisa del término infinito. De todas maneras, pensemos que en la respuesta «nunca» hay implícito un concepto temporal además de numérico. Es como decir que «siempre» podremos ir añadiendo números. Si eso es algo que hacemos reloj en mano, supone que deberemos admitir que no sólo la sucesión numérica es infinita, sino también el tiempo. Esta confusión supuso, en más de una ocasión, un inconveniente serio en el tratamiento del infinito.

Muy grande y muy pequeño

Vamos ahora a plantearnos un pequeño experimento de carácter virtual. Supongamos que tenemos una pelota con la siguiente característica: cada vez que bota en el suelo, sube a una altura que es la mitad de la altura desde la que se dejó caer; es decir, si, por ejemplo, se deja caer desde dos metros, en el siguiente bote sube hasta un metro, luego hasta 50 cm y así sucesivamente. Supongamos ahora que nos plantean el siguiente problema. Dejamos caer la pelota desde una altura de 10 m; cuando la pelota se haya parado, es decir, cuando ya no bote más, ¿cuál habrá sido la distancia recorrida por ella? No podemos decir que el enunciado de este problema no sea real, ya que tenemos o podemos tener constancia de que llega un momento en que la pelota deja de botar y no puede estar dando saltitos eternamente, pero, por otro lado, podemos interpretar que el camino recorrido es infinito, ya que la posibilidad de ir dividiendo la altura por la mitad no tiene fin, obteniéndose cada vez una altura más pequeña, tan pequeña como queramos

Una pelota ¿deja de botar en algún momento o da botes cada vez más pequeños, imperceptibles, infinitamente?

imaginar. Ésta es una típica paradoja asociada al infinito (que más adelante veremos con detalle), pero que de momento nos introduce en un nuevo paraje, el de lo infinitamente pequeño.

Por consiguiente, la idea de inmensidad no es la única que podemos tener del infinito: existe lo infinitamente pequeño. Pensemos en un segmento de recta que dividimos en dos partes; a su vez, una de ellas puede ser dividida en otras dos, y así sin parar, de manera que podremos hacer, al menos teóricamente, infinitas divisiones en las que cada vez obtenemos segmentos más pequeños. ¿Tiene fin este proceso? No, ya que de la misma manera que en la serie de los números naturales decíamos que siempre podríamos añadir un número más a la serie, en este otro ejemplo también podremos dividir siempre el nuevo segmento por la mitad. De manera que lo infinito hace referencia tanto a lo muy grande como a lo muy pequeño. A estas dos acciones se las denomina «prolongación infinita» y «proceso de división infinito».

Ápeiron

Las primeras referencias a especulaciones o reflexiones en torno al tema del infinito las encontramos, como es habitual, cuando buscamos fundamentos filosóficos originales, en la cultura griega. Como es sabido, una de las muchas virtudes de los filósofos griegos fue la de crear el propio lenguaje filosófico. Concebían una palabra específica para representar una idea, estableciendo así una, llamémosla así, terminología filosófica con tanta o más precisión que la terminología científica, pues, al fin y al cabo, esta última es heredera de la anterior. En el caso que nos ocupa, la palabra clave era *ápeiron*, término que procede de *pérata*, que significa «límite de algo»; por tanto, lo que no tiene *pérata* es *ápeiron*, infinito, sin límites.

En el marco de la filosofía griega, este «sin límites» adquiere una significación especial que hace referencia no tanto a la idea de una extensión infinita tal y como la entendemos coloquialmente, sino como origen de todo lo que existe. La idea subyacente es la de que cualquier cosa existente lo es en función de sus límites. Si pensamos en un objeto cualquiera, por ejemplo una mesa, lo primero que observamos en ella, antes incluso que su funcionalidad, son los límites que la definen y la separan del resto circundante. Ésta es una idea que abarca tanto a los seres inanimados como a los vivos. Lo que hace que una célula viva exista es una membrana que le impone unos límites con el medio que la rodea. De ser así podemos afirmar que todo lo que «es» lo es dentro de sus límites y existe gracias a esos límites. De esta forma, el *ápeiron*

se asemeja a un magma indefinido en el cual todo lo existente ha nacido gracias a la aparición de límites precisos dentro de ese magma. En consecuencia, *ápeiron* tiene más razón de ser por la presencia de lo indefinido que de lo ilimitado. No es de extrañar que, por extensión, además del poder creador, como mera existencia de las cosas, se le atribuyera también el poder de dar determinadas funciones e incluso virtudes a las cosas creadas. De ahí la idea de asociar el *ápeiron*, y, por consiguiente, la idea de infinito, con la de Dios en las diferentes concepciones religiosas.

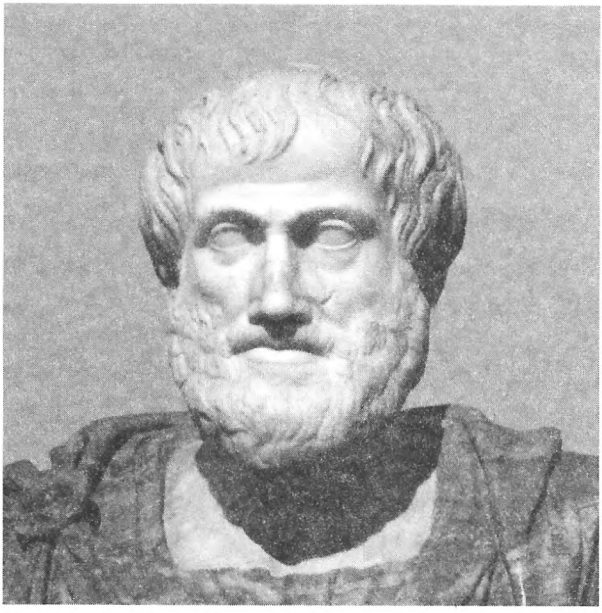
Y de aquí nace también una cierta ambivalencia o sentido contradictorio en el término debido a que este *ápeiron*, como origen de todas las cosas, tiene connotaciones del *kaos* original y, por tanto, está asociado con el mal, con algo no deseado, ya que no forma parte de nuestra existencia; de ahí la ambivalencia del infinito, que puede ser asociado tanto con la divinidad inalcanzable como con las fuerzas desorganizadas y caóticas del mal en su más pura esencia. Éste es el aspecto negativo del infinito, que se perpetúa a lo largo de la historia de nuestra cultura y al que J.L. Borges hacía referencia al hablar de él «como un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética: hablo del infinito».

Otra acepción del concepto de *ápeiron*, más cercana a lo que vulgarmente entendemos por infinito, es la que nos induce a pensar en un espacio euclideo, en el sentido de un espacio geométrico sin límites. En este sentido, y siguiendo el pensamiento de Platón, Aristóteles no cree en un espacio infinito. Según su razonamiento, un espacio es un lugar que puede ser ocupado por un cuerpo, sin importar si en el momento presente hay o no algún cuerpo ocupándolo. Un espacio infinito sería susceptible de ser ocupado por un cuerpo infinito, lo que es imposible.

Este esquema obligaba a concebir el movimiento de planetas y estrellas como absolutamente circular, ya que se trataba de movimientos continuos que, en caso de ser rectilíneos hubieran requerido de un espacio infinito para poder ser realizados. Esta configuración cósmica fue heredada por Copérnico y hasta por el mismo Kepler, que compartían esos puntos de vista sobre el espacio y el infinito.

Para la escuela eleata a la que pertenecían Parménides (530 a.C.-460 a.C.) y Zenón (490 a.C.-430 a.C.), la realidad, el universo, no podía tener un origen y, por tanto, ni principio ni fin. A este respecto Parménides afirmaba que: «...el Todo es uno, inmóvil e infinito, ya que el límite limitaría con el vacío». Lo que nos pone en un callejón sin salida, porque supone salir del horror al infinito para caer en el horror al vacío.

Existe una serie de conceptos que no podemos comprender, pero que están ahí. No existe mucha diferencia entre el horror a la nada y el miedo al infinito; de he-



En el pensamiento aristotélico el espacio infinito no tiene cabida. Según el filósofo griego, un espacio infinito sólo puede ser ocupado por un cuerpo infinito, algo inexistente. Este busto de mármol de Aristóteles es una copia romana del original griego en bronce de Lysippos, del 330 a.C.

cho, se compensan el uno al otro, aunque en la lucha suele acabar ganando el infinito, ya que, en cierta forma, nos es más próximo. No podemos concebir el espacio en el que vivimos como finito. Cuando alguien trata de imaginarlo así, la primera pregunta que le viene a la cabeza es: «¿Y después que hay?». La respuesta no puede ser «nada». Por lo menos tiene que haber espacio, aunque esté vacío. El asunto es simple. No conocemos la nada y, en cambio, tenemos la presencia constante de las cosas que forman el infinito, aunque sea un infinito imaginario. Y es que el infinito no es sólo una idea o un concepto. Su permanencia, en cualquier cultura, con todos sus interrogantes, es un signo inequívoco, nos guste o no, de que nos pertenece, como la vida, la muerte o el tiempo.

Infinito potencial y actual

Supongamos que marcamos con una tiza una raya en el suelo, de forma que si damos un paso hacia delante nos situamos al otro lado de la raya. Es un acto que, «potencialmente», podemos hacer. Cuando lo hacemos y nos situamos al otro lado

de la raya hemos «actualizado» ese potencial, lo hemos convertido en un acto. Existe una clara diferencia entre lo potencialmente posible y el acto realizado. Podría darse el caso, por ejemplo, de que en el momento en que fuéramos a iniciar la acción nos sobreviniera un mareo repentino que nos impidiera el acto de pasar al otro lado de la raya.

Decimos que la serie de los números naturales 1, 2, 3, 4,... es infinita. En principio esto es algo que nadie pone en duda, ya que dado cualquier número n siempre podremos crear un siguiente número que será $n + 1$, no importa cuán grande sea el número n. Pero una cosa es tener la posibilidad de hacerlo y otra es que ya esté hecho. Se trata de una diferencia sutil. Tener la posibilidad de hacerlo define el infinito potencial; tenerlo hecho, el infinito actual. La elección de las palabras castellanas para designar estas dos clases de infinito no es muy afortunada, o por lo menos no demasiado intuitiva. Tal vez lo serían más (aunque también más comprometidas) «infinito teórico» para infinito potencial, e «infinito real» para infinito actual.

Sabemos que nadie puede construir toda la serie de los números. También es cierto que nadie ha visto nunca dos rectas paralelas, ya que las rectas son infinitas y, a lo sumo, podemos ver segmentos de rectas paralelas. ¿Quiere esto decir que las rectas paralelas no existen? Existen en la medida en que existan las rectas, pero ¿existe realmente una recta infinita? El mismo Euclides, en sus famosos *Elementos de geometría*, se andaba con mucho tiento al tratar el tema, ya que cuando se refería a rectas hablaba de «segmentos cuya longitud la podemos hacer todo lo larga que queramos», en una clara alusión al infinito potencial.

La aceptación del infinito temporal o del actual no es simplemente un problema de elección, de gustos o de simpatías, sino que se trata de una postura filosófica nada trivial. Hay que tener en cuenta que el infinito potencial fue el único admitido en matemáticas (y en la ciencia en general) hasta finales del siglo XIX. Aristóteles manifestaba la prohibición tácita de que en su escuela filosófica se aceptara el infinito actual: «No es posible que el infinito exista como ser en acto o como una substancia y un principio», escribió, y añadió:

«Está claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles», de manera que el infinito «existe potencialmente [...] es por adición o división».

Así, la regulación aristotélica del infinito no permite considerar un segmento como una colección de puntos alineados, pero sí permite dividir ese segmento por la mitad tantas veces como queramos.

EL INFINITO Y LOS PADRES DE LA IGLESIA

Durante la Edad Media, el debate sobre el infinito actual no podía adquirir tintes matemáticos debido a que era propiedad exclusiva de la divinidad y, por tanto, debía ser debatido únicamente en los foros teológicos, ya que, como afirmaba San Agustín, «sólo Dios y sus pensamientos son infinitos». Sin embargo, es sorprendente que los padres de la Iglesia negaran a Dios la posibilidad de crear el infinito actual. Santo Tomás de Aquino demuestra en la *Summa Theologiae* que, aunque Dios es omnipotente, ilimitado, no puede crear cosas absolutamente ilimitadas. Una conclusión que, en el contexto religioso en el que la plantea Santo Tomás, sólo puede justificarse si se admite que el infinito actual es idéntico al mal absoluto.

El siguiente cuestionario sobre la idea del infinito le fue planteado a una persona de cultura media, que carecía de cualquier tipo de preparación filosófica o matemática. Sus respuestas fueron rápidas, sin pensar demasiado, espontáneas y dictadas por el «sentido común», al que se supone depositario de nuestro entorno cultural.

P: ¿Qué es el infinito?

R: *Algo que no se acaba nunca.*

P: ¿Qué quiere decir eso?

R: *Pues que puedes estar contando y no acabarías nunca.*

P: ¿Por qué no acabarías nunca?

R: *Porque no hay un número final.*

P: ¿Cómo lo sabes?

R: *No me he puesto a comprobarlo. Me lo creo.*

P: O sea que estamos hablando de una creencia.

R: *No exactamente. Yo sé que por grande que sea un número siempre le podré sumar otro número.*

P: No estoy de acuerdo. Aunque te dediques exclusivamente a esta tarea, tu vida es limitada y no «siempre» podrás estar sumando números.

R: *No importa, generaciones y generaciones de seres se podrían dedicar a esto.*

P: También la vida en la Tierra es limitada. De hecho todo el Sistema Solar tiene fecha de caducidad.

R: *Es igual. No hace falta que nadie lo haga, basta con saber que se puede hacer. Aunque en la Tierra sólo existieran delfines se podría hacer. Que nadie pueda hacer una cosa no quiere decir que esa cosa no pueda existir.*

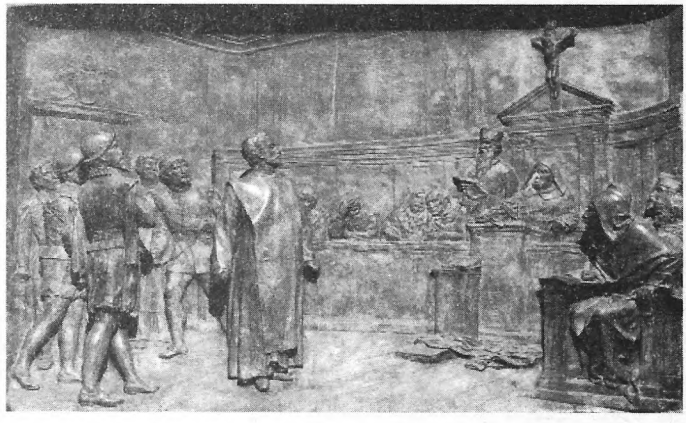
P: Eso es tanto como aceptar que el infinito es algo que existe independientemente de nosotros.

R: *Desde luego.*

En estas respuestas está el núcleo del debate entre el infinito actual y el potencial. La persona interrogada ha terminado por inclinarse claramente a favor del pensamiento aristotélico.

LAS LLAMAS DEL INFINITO

En 1600, Giordano Bruno (1548-1600) cometió «un pecado de pensamiento» al imaginar que vivíamos inmersos en un espacio infinito poblado por una infinidad de mundos. Luego cometió el error de expresar ese pensamiento públicamente, lo que le llevó a morir en la hoguera. Previamente permaneció en prisión durante siete años, sometido a todo tipo de vejaciones y torturas, lo que demuestra dos cosas: en primer lugar, la convicción absoluta de Giordano de su idea del infinito y de la libertad de pensamiento, y en segundo lugar, lo peligroso que puede llegar a ser oponerse al entorno cultural en determinadas épocas de la historia. Lo tristemente paradójico de la situación es que actualmente se ha llegado a un cierto consenso en la comunidad científica sobre el hecho de que el Universo en el que nos encontramos podría ser finito. Conclusión: una idea no es más que eso, una idea y por ella podemos poner en juego nuestro prestigio, pero no la vida. No vale la pena.



Bajorrelieve en bronce del escultor italiano Ettore Ferrari (1848-1929) que ilustra el proceso contra Giordano Bruno por la Inquisición romana. Campo de' Fiori, Roma.

El infinito en la enseñanza

El infinito potencial entra a formar parte de nuestras estructuras mentales ya desde los primeros años de formación escolar. Va muy asociado con la idea de contar objetos y, por tanto, a la serie de los números naturales o bien a procesos cíclicos asociados al paso del tiempo: al día le sigue la noche; a la noche, el día, y así sucesivamente. Suele ser una representación mental que no evoluciona y que, si plantea conflictos con la intuición, lo hace sin provocar crisis mentales destacables. En realidad, permanece más o menos estable en nuestras representaciones mentales porque no le planteamos grandes exigencias.

En cambio, con el infinito actual las cosas funcionan de otra manera: su aparición siempre tiene lugar en un escenario matemático; lo hace sin previo aviso y sin la preparación suficiente, por lo que la crisis está garantizada, hasta el punto en que en muchos casos se convierte en un conflicto difícil de superar. ¿Cuándo se presenta este conflicto en toda su magnitud? Cuando se empieza estudiar la asignatura de cálculo. Se han hecho y se siguen haciendo estudios para identificar y valorar estos elementos críticos en la enseñanza de las matemáticas y, más específicamente, en la asignatura de cálculo.

Para el lector lego debemos aclarar que cuando se habla de cálculo en este contexto no nos referimos a objetos de cálculo numérico, que sería más propio del área de la aritmética, sino del llamado cálculo infinitesimal, una materia cuyos estudios suelen dar comienzo alrededor de los diecisiete años, en la enseñanza secundaria, y que se prolongan en la mayoría de carreras técnicas o científicas durante dos o tres años más.

ACEPTAR EL INFINITO ACTUAL

La mayoría de encuestas y estudios que se han llevado a cabo en la población han puesto de manifiesto que el cincuenta por ciento de los sujetos que conforma la muestra no acepta la existencia del infinito actual. Lo interesante es que no se trata de un problema de madurez, ya que la estadística deja claro que este hecho no cambia con la edad. Se da incluso la situación de profesores que, teniendo que explicar en sus cursos definiciones o teoremas en los que el infinito actual juega un papel determinante, «siguen el juego», pero en su fuero interno mantienen una postura inflexible al respecto; simplemente consideran que el infinito actual no debe existir como tal.

La inclusión de la teoría de conjuntos en la enseñanza secundaria, que trajo consigo el falso epíteto de «matemáticas modernas», ha sido considerada por muchos pedagogos como un absoluto fracaso. Quizá sea debido a que dicha teoría tenía un interés para las matemáticas como fundamentación de su cuerpo teórico, pero poca utilidad práctica en cuanto a la utilización de las mismas. El resultado fue que en la mayoría de centros los profesores se limitaron a enseñar cosas muy elementales, como los conceptos de pertenencia a un conjunto o la inclusión entre conjuntos, conceptos que son muy intuitivos y que no deberían requerir de un lenguaje matemático que no sea el de su propia simbología. Por el contrario, se obvió una parte interesante que es la que hace referencia, como veremos en los últimos capítulos, al concepto de cardinalidad (que viene a ser como el número de elementos que contiene un conjunto), especialmente cuando dicho concepto se aplica a conjuntos infinitos. En este escenario se habla siempre del infinito actual, y aquí es donde el estudiante entra en conflicto con lo que él considera el «sentido común», ya que va a tener que aceptar conjuntos de elementos en los que algunas partes son iguales al todo, algo que el mismo Euclides se encargó de dejar claro en sus *Elementos* al afirmar taxativamente que «el todo es mayor que la parte», como tal parece que ha de suceder en buena lógica. O que un conjunto acotado pueda ser infinito, ya que para nuestro entendimiento, lo infinito no tiene límites.

Como iremos viendo a lo largo de este libro, la lógica elemental, o lo que llamamos «intuición», pueden resultar herramientas engañosas cuando tratamos con el infinito actual.Y es que frente a determinados conceptos solemos confundir el comprender con el creer. La crisis que se produce en los estudiantes de matemáticas frente al infinito actual es similar a la de los estudiantes de física frente a la mecánica cuántica. Un ejemplo típico de este último caso sería el siguiente. Supongamos que tenemos una caja con una bolita y dos agujeros; si movemos la caja aleatoriamente, podemos esperar que la bolita caiga por uno de los dos agujeros. En determinados movimientos, hasta podríamos aceptar la posibilidad de ser capaces de calcular la probabilidad de que lo haga por uno de los dos. Lo que es más difícil de aceptar es que la bolita caiga por los dos a la vez. En física cuántica esa posibilidad existe y, además, choca frontalmente contra nuestra intuición. No es un problema de comprensión del fenómeno en sí, pues todo el mundo sabe lo que significa «caer por los dos agujeros a la vez», de manera que frente a esta situación lo correcto sería decir «no me lo creo» en lugar de «no lo entiendo».

Algo similar sucede con el infinito actual. Cuando afirmamos que un diminuto segmento de recta contiene infinitos puntos, sabemos lo que estamos diciendo; otra cosa es que nos lo creamos o no.

EL ARENARIO DE ARQUÍMEDES

Nuestra terminología de «millones», que nos permite enumerar grandes cantidades, fue introducida por el matemático francés Nicolás Chuquet (ca. 1445-1488) en 1484 con el sufijo «illion» M = 10^6 (según esta nomenclatura, M1 es un m-illion, M2 = bi-llion, M3 = tri-llion, etc.). Los antiguos sistemas de numeración solían quedarse un poco cortos al tratar con números muy grandes. En la antigua Grecia, los sistemas de numeración no permitían pasar de los 100 millones. Arquímedes fue el autor de un famoso escrito de aritmética conocido como «El Arenario» (el contador de arena) en el que, entre otras cosas, se dedicó a contar (teóricamente) el número de granos de arena que había en la Tierra. En realidad el objetivo era demostrar que se podía establecer un método de numeración adecuado para contar colecciones de objetos que, aunque parecieran infinitos, no lo eran. Arquímedes estableció para ello un sistema consistente en tres periodos basados en las potencias sucesivas de miríadas (Ω), una medida equivalente a 10.000 unidades. Con este sistema el número más alto que alcanzó fue $10^{8 \cdot 10^{16}}$, que es una cantidad muy respetable. Lo que nadie se explica es por qué motivo se paró en dicha cifra, cuando nada le impedía seguir más adelante.

Capítulo 2

Discreto y continuo

El antagonismo entre lo *discreto* y lo *continuo*, que en muchos pensadores ha ejercido un auténtico efecto de fascinación, se remonta a los filósofos de la antigua Grecia, pero tiene vigencia actualmente en ciencias tan diversas como la física, las matemáticas, la psicología, las ciencias del conocimiento o la lingüística.

Densidad

Las grandes culturas de la Antigüedad, en especial la griega, daban un significado metafísico a los números, de manera que su visión del mundo dependía de un sistema de numeración. En general, al hablar de números nos estamos refiriendo a la serie de los números naturales, $1, 2, 3, \ldots$, ya que los quebrados o números fraccionarios entraron a formar parte del privilegiado elenco griego de los números de una manera un tanto forzada, ya que no eran tratados como números en el sentido en que lo hacemos actualmente, sino como proporciones entre cantidades o relaciones de semejanza entre determinadas figuras geométricas. En este punto es necesario aclarar un aspecto de la numerología que guarda una relación directa con el concepto de infinito: si todo lo que existe ha de poder ser explicado a través de los números, debemos tener suficientes números para designar todas y cada una de las cosas conocidas y, sobre todo, las que están por conocer. En este sentido, la serie de los números naturales no plantea problemas, ya que se prolonga indefinidamente. Sin embargo, la de los números fraccionarios tienen una propiedad de la que los números enteros carecen y que los matemáticos griegos observaron con cierta suspicacia: la densidad.

Entre dos números enteros consecutivos cualesquiera no hay ningún otro. Por ejemplo, entre 6 y 7 no «cabe» ningún otro número natural. Obviamente, nos referimos a otro número cualquiera que sea mayor que 6 y menor que 7. Sin embargo, esto deja de ser cierto si a la colección de los números naturales le añadimos los fraccionarios. Siguiendo con el ejemplo anterior, el número

$$\frac{6+7}{2} = \frac{13}{2}$$

sí está entre el 6 y el 7.

Por este sistema siempre podremos encontrar un número que esté situado entre otros dos. Si los números dados son A y B, tendremos garantizado que

$$A < \frac{A+B}{2} < B.$$

Pero para eso es necesario que entre nuestra colección de números contemos con los fraccionarios o racionales.

Como este proceso lo podemos repetir indefinidamente, podemos asegurar que entre dos números racionales cualesquiera hay siempre infinitos números racionales. Ésta es la propiedad de densidad a la que hacíamos referencia. Dicho concepto da al traste con el de «siguiente». En el conjunto de los números naturales se puede decir sin ambigüedades que el número que sigue al 12 es el 13, pero en el conjunto de los racionales carece de sentido hablar del número siguiente a N, ya que si afirmamos que dicho número es M, incurrimos en un error, puesto que

$$\frac{N+M}{2}$$

es anterior a M.

La densidad nos coloca frente a una percepción del infinito a la que normalmente no estamos habituados. Utilizando un ejemplo geométrico, cuando imaginamos una recta lo hacemos pensando que se prolonga indefinidamente por ambos extremos. Es nuestra percepción de lo infinitamente grande. Pero la misma acción que hemos hecho con los números fraccionarios la podemos llevar a cabo con los puntos de un segmento. Entre dos puntos siempre puede encontrarse otro, de manera que el número de puntos contenidos en un segmento también es infinito.

Discreto y continuo

En el Diccionario de la Real Academia Española, «discreto» tiene como tercera acepción: «separado, distinto», y remite a su significado matemático en *cantidad discreta*: «La que consta de unidades o partes separadas unas de otras, como los árboles de un monte, los soldados de un ejército, los granos de una espiga, etc.». Como veremos más adelante, el hacer referencia a «partes separadas» es definir lo discreto por medio de una herramienta matemática muy avanzada, ya que hay que dejar muy claro lo que quiere decir «separadas», algo que en matemáticas no es tan obvio como parece.

Para comprender bien los entresijos del infinito, tanto de lo infinitamente grande como de lo infinitamente pequeño, es necesario tener una idea clara de lo que significan los conceptos de «continuo» y «discreto». Veamos con un sencillo ejemplo la diferencia que hay entre ambos. Imaginemos dos recipientes iguales, uno que contiene agua y el otro, canicas. Vertemos el primero sobre una vasija: veremos fluir el líquido y cómo en el recipiente va subiendo el nivel a medida que se va llenando de agua. Cuando echamos las canicas, la situación es completamente distinta, y en especial cómo la percibimos: lo que observamos es que las canicas caen, de una en una, en el recipiente. Se trata de experiencias muy distintas, y no sólo visualmente, sino también auditivamente: en el primer caso se trata de un ruido continuo, mientras que en el segundo diferenciaremos el sonido que produce cada bola cuando choca con el recipiente. Tal como ya habremos deducido, en el primer caso tenemos un ejemplo de proceso continuo, mientras que el segundo es un proceso discreto.

Veamos otro ejemplo: el tiempo fluye de manera continua desde las nueve de la mañana hasta las nueve de la noche. Pero si consultamos un horario de trenes en ese mismo intervalo de tiempo nos encontraremos con un conjunto de valores discreto. Si un tren sale a las diez de la mañana y el siguiente a las once, entre esos dos valores, 10 y 11, no hay ningún otro, por eso son valores discretos. En cambio, la medida del tiempo entre las 10 y las 11 es un continuo que puede tomar infinitos valores: las 10 horas, 25 minutos 0,34628761720041244474 segundos es uno de ellos.

En los términos en que lo hemos planteado podríamos pensar que se trata de un concepto intuitivo y aparentemente simple. Sin embargo, ha generado apasionadas controversias a lo largo de la historia, en parte porque el tema no tiene nada de simple y, en parte, porque, como veremos más adelante, la intuición no siempre es buena consejera, ya que un mismo objeto puede parecernos de naturaleza continua o discreta, según la escala con que lo observemos.

La polémica creada en torno a la antítesis continuo-discreto guarda una estrecha relación con el concepto de infinito; no es de extrañar, por tanto, que sus foros de discusión se encuentren básicamente en el ámbito filosófico, como muestra el enfrentamiento que tuvo lugar en la antigua Grecia entre la escuela pitagórica y la eleática, del que, como veremos más adelante, las paradojas de Zenón son paradigmáticas.

La pregunta clave de si el mundo en el que vivimos es discreto o continuo toca muy de cerca a nuestras propias percepciones y, por tanto, entra de lleno en las llamadas ciencias del conocimiento. Lejos de consideraciones filosóficas o de inter-

pretaciones psicologistas, a comienzos del siglo XX la física y la matemática entraron sin titubeos en el mundo de lo discreto, la primera con la aparición de la mecánica cuántica y la segunda con el nacimiento de las llamadas matemáticas discretas.

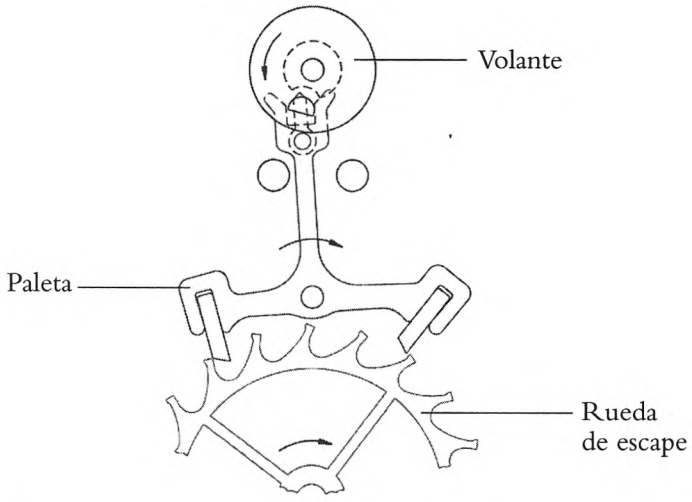
Atrapar el tiempo

Dicen que la diferencia más importante entre ciencia y tecnología es que la primera cambia nuestra manera de ver el mundo, y la segunda, nuestra manera de vivirlo. En este orden de cosas podemos afirmar que el reloj mecánico ha sido uno de los inventos más revolucionarios de la historia de la humanidad y de los que más han influido en la vida cotidiana de las personas. Además, gracias a un dispositivo en el que las matemáticas jugaron un papel decisivo, el tiempo dejó de ser observado como un proceso continuo para pasar a convertirse en una serie «discreta» de intervalos.

Los primeros relojes mecánicos hicieron su aparición en el siglo XIV (en China datan del siglo X); eran mecanismos que ahora podríamos considerar rudimentarios. La fuerza motriz se basaba en un peso que descendía por la fuerza de la gravedad y que pendía de una cuerda enrollada en un cilindro, de manera que al descender hacía rodar el cilindro, que a su vez movía la maquinaria del reloj. Al no existir todavía esfera ni agujas, las horas se marcaban mediante campanadas. Hablamos, por supuesto, de grandes relojes que rendían servicio a una determinada comunidad. En muchos idiomas la palabra «reloj» hace referencia a la idea de campana (*clock, cloche*). Las campanas se accionaban de forma manual por alguien que consultaba la marcha del reloj.

Ni que decir tiene que la precisión de estos relojes dejaba mucho que desear, y no debido a la imperfección de los mecanismos, sino a una cuestión de física elemental. El peso que accionaba los mecanismos no descendía con velocidad uniforme, ya que, al estar sometido a la acción de la gravedad, la velocidad del peso iba creciendo conforme descendía. Un ingenioso invento mecánico, conocido como escape, resolvió en gran parte el problema.

Se trata de un mecanismo formado por una rueda dentada, un áncora y un péndulo. El áncora traba la rueda de escape en uno de sus extremos. Cuando se balancea, la libera para dejarla trabada con el otro extremo. Este balanceo del áncora se consigue mediante un péndulo. Y así es como nació lo que hoy conocemos como «tic-tac», un intervalo de tiempo que desde aquel momento atrapa, o cuanto menos regula, la vida cotidiana de la mayoría de las personas.



Este artilugio mecánico, conocido como escape, dio una mayor exactitud al tiempo. El volante lleva a cabo un movimiento periódico de oscilación que desplaza la paleta a ambos lados. En cada oscilación, esta última hace avanzar la rueda de escape tan sólo un diente, regulando el movimiento de toda la maquinaria del reloj.

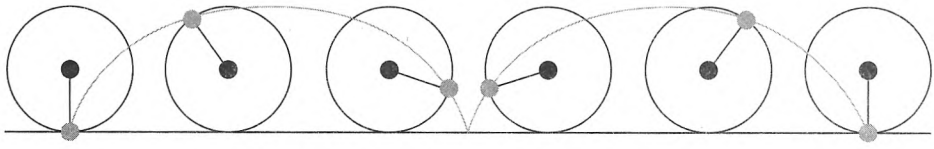
Aún había que resolver otro serio problema si se pretendía que los relojes marcaran un ritmo del tiempo que, valga la redundancia, no dependiera del tiempo. El problema radicaba en que las primeras horas eran más largas que las últimas, es decir, los relojes se adelantaban conforme se acababa la cuerda. Ello era debido a que los péndulos, en su recorrido, seguían una trayectoria circular. Hay una mane-

UN CURIOSO JUGUETE

Imaginemos que invertimos la cicloide, que la apoyamos luego encima de una mesa y la hacemos girar. Obtendremos una superficie cuya generatriz es la cicloide. Es como si le pidiéramos a un alfarero que nos fabricara un cuenco de manera que la curva que lo definiera fuera la cicloide. Un objeto así se fabricó (en plástico) y se vendió en los años sesenta en algunas tiendas de objetos curiosos de Estados Unidos. ¿Qué tiene de curioso ese cuenco? Pues que si dejamos rodar una canica por su interior, siempre tarda lo mismo en llegar al fondo, no importa la altura desde la que la hayamos dejado caer. No deja de ser curioso observar cómo dos bolitas, una dejada en el borde superior del cuenco y otra en el lado opuesto, hacia la mitad de la altura, llegan simultáneamente a la parte más baja.

ra fácil de entender este fenómeno si observamos la trayectoria pendular de una bola al dejarla caer en el interior de una semicircunferencia (podemos hacer el experimento con un bol esférico). Veremos que la bolita irá describiendo trayectorias cada vez más cortas hasta que, finalmente, se parará (lo que equivale a decir que al reloj se le acabe la cuerda). Está claro que cuando está a más altura tarda más en llegar al centro que cuando se encuentra más cerca de éste, ya que el recorrido es menor (ésta es la causa de que los relojes se adelantaran). La pregunta que se planteaba en aquel entonces era: ¿existe alguna curva en la que esto no suceda, es decir, una curva en la que la pendiente y la distancia a la base estén relacionadas de forma que la velocidad de caída y el espacio recorrido se compensen? El resultado debería ser una curva en la que el tiempo que tarda la bolita en llegar al vértice de la base sea el mismo, sin que importe la altura desde la que se la deje caer, motivo por el cual esta curva, ya antes de haber sido descubierta, recibió el nombre de *tautócrona*, que quiere decir «igual tiempo».

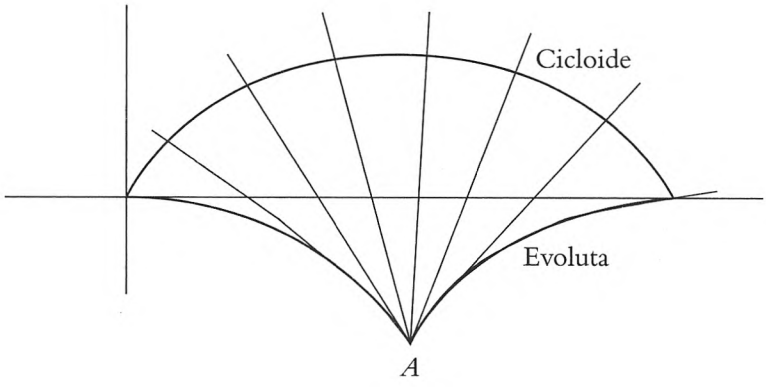
En 1673 Christiaan Huygens, demostró que la *cicloide* poseía las características requeridas para ser una tautócrona. La curva cicloide se define como la trayectoria que describe un punto situado sobre una circunferencia cuando ésta gira, sin deslizarse, sobre una recta.



El gráfico ilustra cómo una circunferencia, al girar, forma una curva conocida como cicloide.

A Huygens se le ocurrió que si un péndulo describía en su movimiento una cicloide, no importaría la altura de la que partiera en cada oscilación, pues igual que sucedía con la canica en el cuenco, el tiempo que tardaría en llegar a la parte más baja siempre sería el mismo.

Pero ¿cómo conseguir que la curva que describe el péndulo sea un arco de cicloide? La solución a este problema reside en una de las propiedades más fascinantes de la cicloide: «la evoluta de una cicloide es también una cicloide». El concepto de *evoluta* es demasiado complicado para explicarlo aquí, pero podemos ver en qué se traduce geométricamente dicho resultado. Imaginemos que partimos por la mitad una cicloide y que juntamos ambas mitades en un vértice A, como en la figura:



Construcción de una evoluta partiendo de una cicloide.

Si tomamos un hilo de una longitud fija, sujeto al vértice *A*, y lo extendemos de manera que siempre esté apoyado en alguna de las ramas de la cicloide, el extremo de dicho hilo describe una curva que es también una cicloide. Huygens había encontrado la manera de confeccionar un péndulo autoajustable sólo con darle la vuelta al dibujo anterior, de manera que el movimiento del péndulo quedara constreñido a las dos ramas de la cicloide.

Aunque el tiempo no se puede considerar una magnitud física, como pueda serlo la masa o la temperatura, sí es medible, y a partir del invento de Huygens podemos afirmar que se puede tratar a conveniencia como una magnitud discreta.

Nuestra vida cotidiana se sigue ajustando al compás del «tic-tac», a una medida discreta del tiempo. Sin embargo, en el ámbito científico el intervalo entre el «tic» y el «tac» se ha ido reduciendo de manera asombrosa. Es infinitamente más pequeño, coloquialmente hablando, que un segundo. Los actuales relojes atómicos marcan ciclos en los que un segundo se divide en 9.192.631.770 partes. ¡Qué gran discreción la de estos relojes!

Paradojas de Zenón

Lo discreto está formado por elementos, por unidades, pero ¿y lo continuo? Parece lógico pensar que lo continuo no puede tener esa estructura, ya que las unidades son separables y entre dos unidades que estén en contacto no puede haber nada, ya que de haber algo podría ser dividido a su vez en unidades. Y es que, a poco que reflexionemos sobre ello, veremos que el concepto de lo infinitamente pequeño

nos lleva directamente al de continuidad. Las reflexiones sobre la naturaleza de lo continuo ocuparon ya desde sus orígenes una parte importante del pensamiento griego, uno de cuyos representantes más significativos lo podemos encontrar en la figura de Zenón, que, por medio de sus conocidas paradojas, pondría de manifiesto la fragilidad de cualquier teoría que se basara en lo infinitamente grande o en lo infinitamente pequeño.

En gran medida, las exposiciones de Zenón tienen como objetivo validar las teorías de Parménides (del que al parecer era discípulo), que afirmaba que lo que existe forma un todo, una unidad indivisible, tanto espacial como temporalmente. Además, en el ánimo de Zenón estaba también el querer combatir a los pitagóricos, que defendían el «flujo continuo» como mecanismo generador de todas las cosas.

La imposibilidad de dividir el tiempo negaba como consecuencia el movimiento, considerado como una sucesión de espacios que fueran ocupados por un objeto a lo largo de una sucesión temporal. La idea de Zenón era que si se admitían hipótesis contrarias a las de Parménides, se incurría en contradicciones, en absurdos que la razón no podría aceptar. Para ello se valió de un método lógico del que se le puede considerar, si no el creador, al menos sí un claro precursor: el llamado método de la *reducción al absurdo*.

Este método consiste básicamente en lo siguiente: se supone que una determinada hipótesis es cierta y, a partir de ella, se hace una serie de deducciones lógicas que nos acaban conduciendo a un resultado que es obviamente falso; de aquí concluimos que la hipótesis también era falsa. En términos de lógica de enunciados, el esquema se basa en que

$$V \Rightarrow V$$
$$F \Rightarrow F$$
$$F \Rightarrow V$$

en donde V = VERDAD, F = FALSO y $\Rightarrow$ es un operador que significa «implica». Es decir que, por ejemplo, $V \Rightarrow V$ viene a decir que una verdad conduce a otra verdad. Es decir, que algo que es verdad no puede implicar nunca una falsedad; dicho de otra manera: de una verdad no se puede deducir nunca algo que es falso, y si es así es porque el punto de partida no era cierto. El mecanismo de reducción al absurdo se basa en esta ley. Es, por tanto, una forma de razonamiento cuya finalidad es demostrar la falsedad de una afirmación. Y éste es el esquema lógico en el que se basan las paradojas.

Los pitagóricos tenían una visión matemática y geométrica de la realidad que se formaba a partir de puntos: los puntos generaban rectas; las rectas, superficies, y éstas, cuerpos tridimensionales. Zenón argumentaba en contra aduciendo que si los puntos carecían de dimensión no podían tener una magnitud medible; por lo tanto, nada construido con ellos podía tener magnitud y, en consecuencia, no tenían rango de existencia. Además, todo aquello que estuviera constituido por puntos era susceptible de ser dividido infinitas veces, lo que llevaba a numerosas situaciones absurdas.

EL PENSAMIENTO PARADÓJICO

Una paradoja es una forma de argumentación que choca con el pensamiento común. Se argumenta a partir de un principio con la idea de llegar a conclusiones contradictorias y poner en tela de juicio el principio en el que se sustenta. En un contexto más preciso, las paradojas lógicas, de la que la escuela eleática es pionera, se basa en desarrollar a partir de enunciados lógicos otros que pueden ser indistintamente verdaderos o falsos. Una de las paradojas más populares de la Antigüedad es conocida como «paradoja del mentiroso», propuesta por Epiménides el Cretense. Dice así: «Todos los cretenses son unos mentirosos». Epiménides no puede decir la verdad, ya que es cretense, pero tampoco miente, ya que afirma algo cierto, de aquí la contradicción.

Las paradojas tienen una arquitectura lógica impecable. Han sido motivo de reflexión hasta nuestros días y tienen muchas interpretaciones posibles. Son un pilar fundamental para la comprensión del problema del infinito en todas sus dimensiones. En principio se supone que Zenón estableció en torno a este tema más de cuarenta paradojas; de todas las que nos han llegado, entre las más conocidas se encuentran cuatro, que son: la dicotomía, Aquiles y la tortuga, la flecha voladora y el estadio, que vamos a ver con cierto detalle.

La dicotomía

Esta paradoja ataca directamente la noción de movimiento, demostrando su imposibilidad en el hecho de que un móvil que tenga que desplazarse entre dos puntos A y B siempre tendrá que recorrer primero la mitad de la distancia que separa los puntos A y B; una vez que haya recorrido dicha distancia tendrá que volver a recorrer la mitad de la distancia que queda, y así sucesivamente. Esta infinidad de distan-

cias que se ve obligado a recorrer el móvil no puede hacerse en un tiempo finito. Luego el movimiento es imposible.

Aquiles y la tortuga

Aquiles, «el de los pies ligeros», considerado el hombre más rápido, es lo opuesto, en lo que a velocidad se refiere, a una tortuga. En esta paradoja se plantea una carrera entre ambos. Si a los dos se les da el pistoletazo de salida a la vez, está claro que Aquiles quedará vencedor. El truco consiste en dejarle a la tortuga una ventaja, por pequeña que sea. En estas condiciones, Aquiles deberá llegar primero al punto del que partió la tortuga. En ese instante, cuando Aquiles llegue, la tortuga, que no se detiene en ningún momento, ya no estará allí, sino que estará algo más adelantada; no importa lo poco que sea. De manera que Aquiles deberá recorrer otra vez la distancia que lo separa de dicho punto. Pero cuando llegue, la tortuga se habrá desplazado de nuevo, y Aquiles no la alcanzará. Como éste es un proceso que puede repetirse *ad infinitum*, Aquiles jamás logrará alcanzar a la tortuga.

Aunque pueda parecer que ambas paradojas son, si no iguales, sí muy parecidas, hay entre ellas una sutil diferencia: en el primer caso, el espacio se dividía siempre en segmentos iguales; en cambio, en la paradoja de Aquiles y la tortuga el espacio se divide en proporciones decrecientes que son proporcionales a las velocidades de los corredores.

La flecha voladora

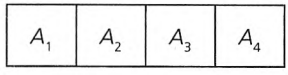
Ésta es la paradoja más confusa de las cuatro. Los historiadores aducen que el texto está corrupto y ha habido que recomponerlo. Viene a decir que cuando arrojamos una flecha al espacio tenemos la sensación de que ésta se aleja de nosotros, pero en realidad no se mueve, ya que la flecha, como cualquier otro objeto, debe ocupar un espacio que sea igual a sí misma, y para ello tiene que estar en reposo. Si el tiempo está constituido por instantes indivisibles, la flecha no puede ocupar dos o más lugares simultáneamente.

Así como las dos primeras paradojas hacían referencia a la imposibilidad de dividir el espacio indefinidamente, ésta se centra en la indivisibilidad del tiempo y, más concretamente, en la existencia de lo que llamamos «un instante», ya que si es indivisible carece de duración y, por tanto, no hay movimiento. El instante así concebido tiene la misma naturaleza de construcción mental que el punto en la geometría.

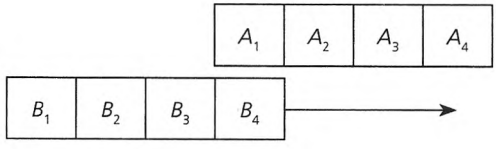
El estadio

Supongamos que el tiempo es una magnitud discreta, que podemos imaginar tan pequeña como queramos, cuya unidad fundamental es τ. Esto quiere decir que no existe ninguna unidad de tiempo más pequeña que τ, que es, por tanto, indivisible. Podemos imaginar un reloj en el que cada «tic» o «tac» se corresponda con una de estas unidades indivisibles.

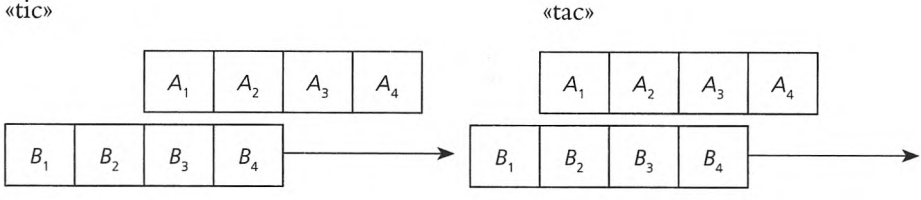
Consideremos ahora cuatro cuerpos iguales, A_1, A_2, A_3 y A_4, que permanecen en estado de reposo (originalmente la paradoja se representa con una fila de cuatro soldados):



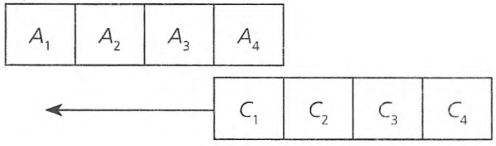
y otros cuatro cuerpos, B_1, B_2, B_3 y B_4, exactamente iguales a los anteriores y que se desplazan hacia la derecha:



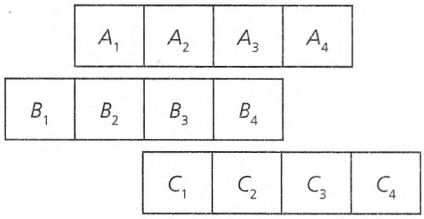
pero que lo hacen de forma tal que en cada instante de tiempo uno de los cuerpos B adelanta a otro de los A:



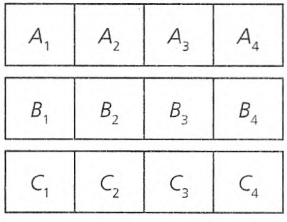
Consideremos ahora una tercera serie de cuerpos C_1, C_2, C_3 y C_4, también exactamente iguales a los anteriores, pero desplazándose hacia la izquierda, de forma tal que en cada instante de tiempo cada uno de ellos adelante hacia la izquierda a uno de los cuerpos A:



La paradoja aparece cuando consideramos simultáneamente los dos movimientos, el de los cuerpos *B* y el de los *C*. Si partimos de la siguiente posición relativa:



en el siguiente intervalo de tiempo (en un «tic» del reloj), los cuerpos se encontrarán en esta posición:



pero ello supone que C_1 habrá adelantado a dos de los cuerpos *B*; por tanto, podríamos dividir el tiempo en dos, cosa que contradice la hipótesis de que era una unidad indivisible.

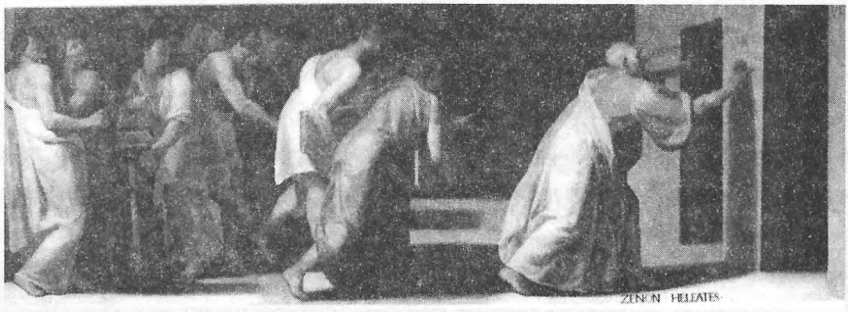
Ésta es la más controvertida de las cuatro paradojas aquí presentadas, en parte porque Aristóteles le hizo una crítica demoledora al poner de manifiesto que Zenón tomaba como referencia de la misma forma a cuerpos en reposo que a cuerpos en movimiento. Si la velocidad del cuerpo que se mueve es uniforme, no puede considerarse igual la velocidad con la que se pasa a un cuerpo en movimiento que a otro que está en reposo. Se dice que esta paradoja es controvertida en la medida en que la crítica de Aristóteles es trivial y cuesta creer que se le pasara por alto a Zenón.

Otras interpretaciones reparan en la posibilidad de que la paradoja se centrara más en el hecho de que, como en las anteriores, el movimiento y el tiempo puedan ser divididos infinitas veces; de esta forma, para que uno de los objetos pueda rebasar a otro en movimiento, primero tendrá que pasar a la mitad del que está en reposo, y así sucesivamente.

En cualquier caso, parece bastante plausible que Zenón, una vez más, deseara enfrentar a la escuela pitagórica con una contradicción en cuanto a la indivisibilidad de los elementos geométricos.

ZENÓN, UN GENIO OLVIDADO

Zenón de Elea (ca. 490 a.C.-ca. 425 a.C.) fue un filósofo griego de la escuela eleática fundada por Parménides. La fuente principal del pensamiento de Zenón nos ha llegado a través del *Parménides*, uno de los *Diálogos* de Platón. Su filosofía puede resumirse en el monismo, que, en pocas palabras, afirma que todo es uno y que el cambio no existe. En muchos aspectos Zenón no ha obtenido el reconocimiento que según algunos filósofos se merecía. Bertrand Russell subsanó en parte esta carencia al afirmar que «En este caprichoso mundo nada es más caprichoso que la fama póstuma. Una de las víctimas más notables de la falta de juicio de la posteridad es el eleático Zenón. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inconmensurablemente sutiles y profundos, la grosería de los filósofos posteriores dictaminó que él fuese un mero prestidigitador ingenioso, y sus argumentos, todos ellos sofismas. Tras dos mil años de continua refutación, estos sofismas fueron rehabilitados, y produjeron la fundación del renacimiento matemático...» (*Los principios de las matemáticas I*, 1903).



Fresco de la Biblioteca Real del Monasterio de El Escorial que representa a Zenón de Elea mostrando a sus discípulos las puertas de la Verdad (Veritas) y de la falsedad (Falsitas).

En cambio, la crítica que hace Aristóteles a la primera paradoja deja las bases de un concepto que será esencial en la historia del infinito, algo que, además, está considerado por muchos autores como una de las contribuciones más importantes que se han hecho al concepto de infinito.

En primer lugar, advierte que la palabra «infinito» admite dos acepciones: el ser infinito en extensión y el ser infinito en divisibilidad, y que en esta paradoja ambos conceptos se confunden, ya que al ser aplicados al tiempo y al espacio hacen que un espacio limitado, aunque sea infinitamente divisible, pueda ser recorrido en un tiempo finito. Hace entonces la siguiente distinción: en el espacio continuo en el que se desplaza el móvil hay un número infinito de mitades, pero sólo en potencia, no en acto. Y ahí reside la importancia de la aportación de Aristóteles, ya que a partir de ese punto, cuando se habla del infinito se hace en dos acepciones muy diferentes y en cierta medida irreconciliables: los llamados infinito potencial e infinito actual que vimos en el capítulo anterior.

Muchas veces establecemos lo que es verdad o cierto mediante el sentido común, que es sentido al fin, común o no, y que se basa en eso que llamamos sentidos, que podríamos definir, en términos de tecnología moderna, como los dispositivos mediante los cuales percibimos y procesamos mentalmente la realidad que nos rodea. Algo es razonable en la medida en que nuestra percepción nos indica cómo se manifiesta. Por muy paradójico que sea el vuelo de la flecha, nuestra percepción sensorial nos deja claro que la flecha se aleja de nosotros. Zenón era, por supuesto, muy consciente de este hecho, pero también sabía que, en ocasiones, los sentidos podían no ser un apoyo fiable a la razón, por lo que planteó el siguiente razonamiento: de la misma forma que una cosa tiene magnitud o no la tiene, un objeto produce o no produce sonido. Una cesta llena de granos de mijo produce un determinado sonido cuando la volcamos sobre una superficie. Zenón se pregunta entonces si un solo grano produce algún sonido. En caso afirmativo, la siguiente pregunta es si producirá algún sonido medio grano de mijo. El proceso, como podemos suponer, es que la división sucesiva del grano nos llevará a un punto en el que ya no será perceptible el sonido. Partiendo de este hecho se puede afirmar que la suma de elementos que son cero dan siempre cero, es decir, que si juntamos muchas cosas que no producen sonido el resultado final tampoco producirá ningún sonido. El objetivo de Zenón es que no podemos confiar en los sentidos cuando nos movemos en un determinado escenario de razonamientos. Ésta es una tendencia de pensamiento en la que los sentidos dejarán lugar a la intuición, especialmente en el razonamiento matemático, pero, como veremos más adelante con las teorías

de Cantor, también la intuición resultará ser engañosa, y no podremos sustentarnos en ella si queremos adentrarnos en escenarios de pensamiento en los que el infinito sea una realidad, un objeto que podamos manejar con la misma soltura que si fuera un número natural.

Zenón razona que si la unidad está compuesta de infinitas partes, esto sólo es posible si cada una de ellas no tiene magnitud, ya que si la tiene puede a su vez ser dividida y no constituiría una unidad fundamental. Pero de ser así, el objeto que constituye las unidades tampoco tendrá magnitud, ya que la suma de cosas que no tienen magnitud no puede tener una magnitud. Fue así como los griegos dieron significado a la palabra *ápeiron* en lugar de «infinito». En magnitud, ser *apeira* significa no tener un límite definido, concepto más en consonancia con la idea de que un objeto es infinito porque puede ir haciéndose tan grande como se quiera. No es tanto la idea, por ejemplo en la serie numérica, de que los números no se acaban nunca, como la de que dado un número cualquiera siempre podremos añadir otro. Algo parecido sucede con lo infinitamente pequeño, en el sentido, en este caso, de poderse hacer tan pequeño como se quiera, concepto que en el análisis que se establecería en el siglo XIX tomaría carácter de definición matemática establecida con todo rigor.

Una cuadratura del círculo

Las construcciones con regla y compás forman parte de los llamados problemas geométricos de la Antigüedad, ya que fueron objeto de una intensa investigación por parte de los griegos. La variedad de problemas que pueden plantearse va desde los muy sencillos, pasando por los difíciles y muy difíciles, hasta los imposibles. Los más famosos son la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. De todos ellos, el primero es el más popular, hasta el punto de que cuando algo presenta una gran dificultad llega a decirse: «Esto es más difícil que la cuadratura del círculo».

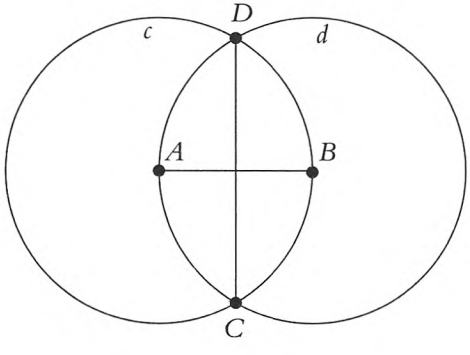
Cuando hablamos de construcciones con regla y compás hay que ceñirse a unas normas de juego muy concretas, ya que en caso contrario los problemas que se plantean serían extraordinariamente triviales. Por ejemplo, hallar el punto medio de un segmento con una regla milimetrada es, por decirlo de alguna manera, hacer trampa, ya que ni siquiera nos haría falta un compás. El primer paso es aclarar lo que entendemos por «regla». La regla es un objeto ideal, que presenta un borde completamente recto para dibujar líneas rectas, pero que carece de cualquier tipo de marcas

que puedan utilizarse para medir distancias. El «compás» es un compás normal y corriente, móvil, en el sentido de que puede abrirse y cerrarse en cualquier ángulo. Lógicamente, no puede ser utilizado para hacer marcas que puedan ser luego utilizadas como distancias, ya que esto sería lo mismo que tener una regla milimetrada.

EL COMPÁS DE MASCHERONI

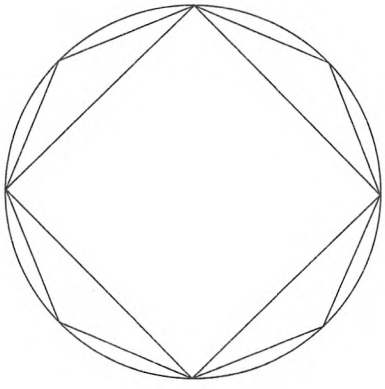
Las construcciones con regla y compás han ocupado desde siempre un lugar de honor en el elenco de las matemáticas recreativas. Una de las publicaciones más curiosas sobre este tema fue la de William Leybourn, un agrimensor que en 1694 publicó un libro titulado *Pleasure with Profit (Placer con beneficio)* en el que planteaba todo tipo de juegos matemáticos con «regla y tenedor». Los tenedores de la época eran horquillas que podían hacer las veces de compás fijo. Pero la gran convulsión en la historia de las construcciones con regla y compás aconteció en 1794, cuando el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni publicó, en su *Geometria del Compasso,* la demostración de que toda construcción hecha con regla y compás se podía hacer también sólo con compás (con compás móvil, por supuesto). En este contexto, como es imposible dibujar rectas con un compás, se conviene que dos puntos determinados por la intersección de arcos determinan una recta.

Una vez definidas las reglas del juego podemos entender la manera de resolver un problema. Por ejemplo, veamos cómo se puede trazar una perpendicular a un segmento por su punto medio. Supongamos que el segmento dado tiene extremos A y B. En primer lugar, se dibuja una circunferencia con centro en A y radio AB. A continuación, se traza otra con el mismo radio, pero con centro en B. La recta que une los puntos de intersección de ambas circunferencias es la perpendicular pedida.



Antes de continuar es preciso advertir que es una labor infructuosa intentar cuadrar un círculo con regla y compás, ya que en el año 1882, el matemático alemán Ferdinand von Lindemman (1852-1939) demostró que π era un número trascendente, de manera que la cuadratura del círculo es un problema para el que no existe solución.

Lo que sí está demostrado es que se puede construir cualquier polígono regular cuya área sea igual a la de un cuadrado dado. Aunque esté teóricamente demostrado, no siempre es tarea fácil cuadrar un polígono regular. Basándose en este resultado, Antifón de Atenas (ca. 480 a.C.-411 a.C.) ideó un sistema para conseguir la cuadratura del círculo cuya lógica es difícil de rebatir. La idea de Antifón es la siguiente: partimos del hecho de que se puede construir un cuadrado cuya área sea igual a la de una serie de polígonos regulares que iremos construyendo a continuación. A partir de una circunferencia dada, le inscribimos un hexágono:



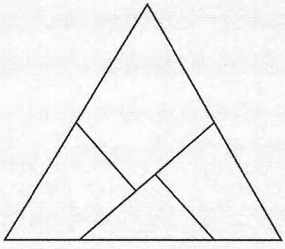
Ya sabemos que el hexágono lo podemos cuadrar, es decir, podemos construir con regla y compás un cuadrado que tenga la misma área que el hexágono. Ahora el proceso consiste en ir aumentando el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia, sabiendo que podemos cuadrar cualquiera de ellos. La diferencia entre el área de cualquiera de estos polígonos inscritos y el área de la circunferencia se va haciendo cada vez más pequeña. En realidad, puede ser tan pequeña como queramos. Pensemos, por ejemplo, en un polígono de varios cuatrillones de lados. Uno cualquiera de dichos lados estará realmente muy pegado a la curva de la circunferencia, hasta el punto de que sería muy difícil distinguir el segmento rectilíneo del curvo. Antifón considera que de este modo se puede obtener la cuadratura del círculo.

El razonamiento es, desde un punto de vista lógico, impecable; el único problema es que hay un salto mágico que damos por supuesto y que tiene lugar en los recónditos e inaccesibles territorios de lo infinitamente pequeño, un paraje al que no tenemos acceso.

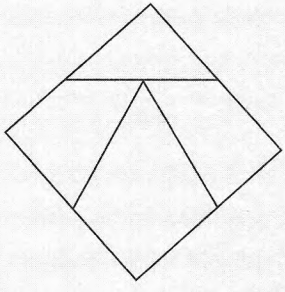
La circunferencia es una realidad, los polígonos de infinitos lados también, pero en cuanto consideramos que el proceso que nos lleva de los infinitos lados a la circunferencia tiene un final feliz estamos considerando un infinito actual. Mientras esto no suceda se trata de un infinito potencial.

LA CUADRATURA DE UNA MESA

Las cuadraturas suelen constituir un ejercicio geométrico difícil incluso en el caso de figuras muy elementales, como el triángulo, el pentágono o el hexágono, hasta el punto de que algunas de ellas están firmadas por sus autores. Por ejemplo, para cuadrar un triángulo equilátero se debe seguir un proceso en el que dicho triángulo quede despiezado (siempre con regla y compás) de la siguiente manera.



Con estas piezas se puede construir un cuadrado que tenga la misma área que el triángulo:



Maty Grünberg aprovechó esta construcción geométrica para diseñar una mesa que podía utilizarse, según las necesidades, de estructura cuadrada o triangular.

Irracionales

Los números 1, 2, 3,..., los que habitualmente utilizamos para contar, son imprescindibles para poder medir algo. Si tomamos, por ejemplo, un pedazo de madera razonablemente recto y hacemos una marca para cada número, de manera que queden todas a la misma distancia, podremos empezar a mensurar, es decir, a establecer longitudes. La distancia entre dos números es lo que llamamos unidad de medida.

Supongamos que nuestra unidad viene determinada por un segmento OA y que deseamos medir la longitud de una barra B. Colocamos nuestra unidad sobre ella y vamos contando cuántas veces el segmento está contenido en la barra. Supongamos que el resultado es cinco: diremos, en ese caso, que la barra mide 5 unidades. Hemos tenido suerte porque el resultado ha sido un número entero.

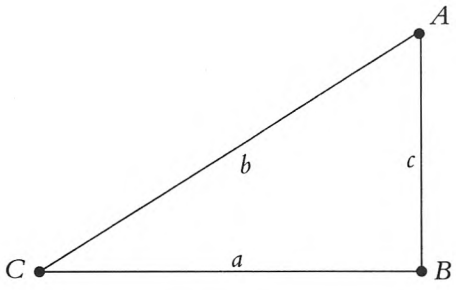
Se podría dar el caso de que esto no fuera así: por ejemplo, si la barra midiera 4 unidades y media. Tampoco es problema, ya que esto significa que a nuestra unidad de medida debemos añadirle una división más que representa una mitad. En símbolos, esto lo representamos poniendo una fracción del tipo 1/2. Ésta es la manera de construir una regla de medir, y cuantas más divisiones hagamos, más precisa resultará la medición.

Está claro que esto tiene sus límites, es una cuestión puramente física que relaciona el grosor de las marcas con nuestra capacidad visual para distinguirlas. Una regla cualquiera, como la que utilizan los escolares, suele tener divisiones hasta el milímetro, es decir, la unidad de medida (si se trata de un centímetro) ha sido dividida en diez partes.

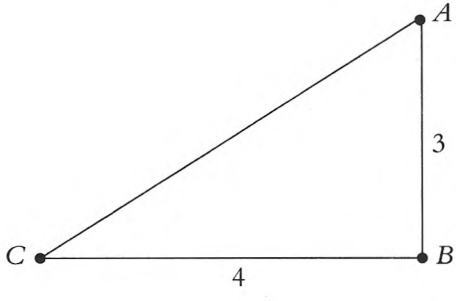
Conviene recordar, antes de proseguir, algunas nociones elementales de geometría. Un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus ángulos recto, es decir, que mide 90°. Por ejemplo, el triángulo ABC de la figura de la página siguiente es recto, ya que el ángulo B mide 90°. A los dos lados que forman el ángulo recto se les llama catetos, mientras que el tercero es la hipotenusa. En consecuencia, la hipotenusa es siempre el lado mayor de los tres, y el que se opone al ángulo recto.

El famoso teorema de Pitágoras afirma que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. De manera que se cumple que:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$



Esto permite encontrar el valor de la hipotenusa en el caso de que se conozca la longitud de ambos catetos. Por ejemplo, en un triángulo como

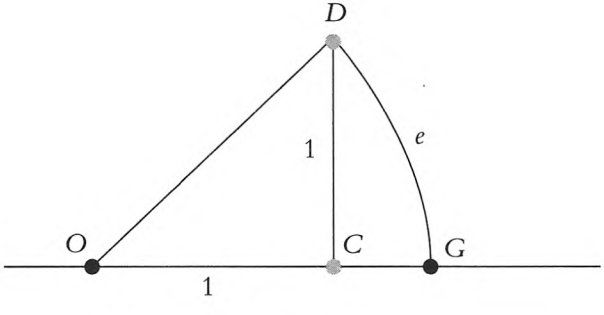


se cumple que

$$3^2 + 4^2 = \overline{AC}^2,$$

con lo que el valor de la hipotenusa será 5.

Supongamos ahora que tomamos una unidad de medida en una recta con origen en *O*, de manera que $OC = 1$. Construyamos ahora un segmento perpendicular por el punto *C*, de forma que *CD* tenga también longitud 1. Tal como se observa en la figura siguiente, hemos obtenido así un triángulo rectángulo *OCD* cuya hipotenusa es *OD*.



Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\overline{OC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{OD}^2.$$

De manera que $\overline{OD}^2 = 1+1 = 2$, con lo que $OD = \sqrt{2}$.

Si con un compás bajamos la longitud OD sobre la recta, no podemos asignarle ningún valor conocido al segmento OG. En este sentido se dice que la longitud OG es «inconmensurable».

Implícitamente lo que estamos afirmando es que $\sqrt{2}$ no se puede obtener como una fracción, lo que nos lleva a dar una definición precisa de número racional: se dice que un número N cualquiera es racional cuando se puede obtener como cociente de dos enteros.

Según esta definición, son números racionales 2/3, 8/5, 2.773/12.452. Lógicamente, los números enteros también son racionales, ya que cualquier entero se puede obtener como cociente de otros dos; por ejemplo, 8 es lo mismo que 16/2.

En algunos textos apócrifos de los *Elementos* de Euclides puede encontrarse la demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional (véase una demostración en lenguaje moderno en los anexos).

A los números que no son racionales se los llama *irracionales*, calificativo muy significativo de la naturaleza de dichos números. Pero lo más grave del asunto es que esto sucedía no sólo con todas las diagonales de todos los cuadrados, sino también entre la altura y el lado de un triángulo equilátero o entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. Es decir, que no se había descubierto un número irracional, sino algo mucho más grave: la existencia de números irracionales. Los números enteros no podían medir con precisión las figuras más emblemáticas del pitagorismo. Se puede afirmar rotundamente que el descubrimiento de los números irracionales creó una crisis sin precedentes en la historia de la matemática griega. Pensemos que en las sectas pitagóricas, que se caracterizaban, entre otras cosas, por un fuerte secretismo preservado bajo juramento, uno de los secretos mejor guardados fue la existencia de los números irracionales. La leyenda afirma que desvelarlo era algo que podía ser castigado con la muerte.

Si observamos la expresión decimal veremos que hay una diferencia sustancial entre un número racional y otro irracional. Por ejemplo, el número ½ tiene una expresión decimal que es 0,5. En cambio, $1/3 = 0{,}333333333...$ tiene infinitos decimales, pero los tenemos perfectamente controlados, pues siempre son 3. Un número como

$$\frac{325}{100} = 3,25$$

tiene sólo dos decimales. Sin embargo,

$$\frac{95}{99} = 0,4545...$$

tiene infinitos decimales, pero 45 se repite siempre (es lo que llamamos *periodo*).

$$\frac{47113}{9000} = 5,2347777...$$

es otro tipo de decimal en el que el periodo aparece después de una fase no periódica.

En cambio, la raíz cuadrada de 2 es una expresión decimal infinita en la que los números aparecen sin orden ni concierto, de forma aleatoria, como si hubieran sido determinados por una ruleta. No siguen ninguna ley de formación ni nada que se parezca. ¿Podemos afirmar que realmente conocemos el valor de $\sqrt{2}$? En cualquier caso, si la respuesta es afirmativa sólo podemos asegurar que conoceremos valores aproximados, y que la aproximación puede ser tan buena como queramos, pero nada más... y nada menos, ya que cuando expresamos «tan buena como queramos», afirmamos implícitamente que estamos capacitados para ejercer algún tipo de control sobre esa sucesión infinita de números.

El matemático británico Brook Taylor (1685-1731) estableció una aproximación a $\sqrt{2}$ mediante una sucesión de sumas definida como sigue:

$$1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}},...$$

Con cada término de esta sucesión se obtiene un valor que se aproxima a $\sqrt{2}$, con la particularidad de que lo hace alternativamente por la derecha y por la izquierda, según puede observarse en la siguiente tabla de valores en la que están calculados los nueve primeros términos.

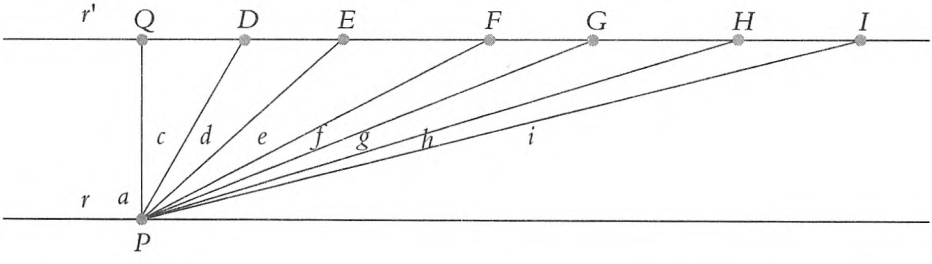
1	
	1,5
1,4	
	1,4166666
1,41379310	
	1,41422857
1,41420118	
	1,41421568
1,41421319	

De manera que, partiendo de 1, a la izquierda de $\sqrt{2}$, y de 1,5, a la derecha, nos vamos aproximando al teórico valor real de dicho número. Pero se trata de sucesiones infinitas que cada vez se encuentran más cerca del valor real de $\sqrt{2}$. Es cierto que potencialmente las cosas son así, pero afirmar que $\sqrt{2}$ es un número concreto es tanto como aceptar el infinito actual.

Si alguien afirma que los números irracionales no existen, como defendieron los griegos y otras muchas personalidades de las matemáticas a lo largo de la historia, podemos estar seguros de que está, aunque sea implícitamente, negando la existencia de un infinito actual.

El salto cuántico

Veamos ahora una manera de relacionar muy estrechamente lo infinitamente grande (la prolongación infinita) con lo infinitamente pequeño (el proceso de división infinito). Supongamos que tenemos dos rectas paralelas, *r* y *r'*.



En la primera de ellas fijamos un punto *P* que tomaremos como referencia. Tomemos ahora un punto *Q*, en la segunda, que esté situado, por ejemplo, en la perpendicular a *r* por el punto *P*. El ángulo *a* que forman el segmento *PQ* y *r'* es de

90° (es un ángulo recto). Movamos el punto *Q* que se encuentra sobre la recta *r'* hacia la derecha. Observamos que el ángulo *a* varía, y lo hace disminuyendo su abertura conforme el punto *Q* se aleja hacia la derecha. Está claro que cuanto más alejado esté el punto *Q*, más pequeño será el ángulo *a*. En este esquema tenemos un claro matrimonio entre la prolongación infinita inducida por el movimiento del punto *Q* y la disminución continua del ángulo, que se puede hacer tan pequeño como se quiera. Expresándolo en un lenguaje muy poco técnico podríamos decir que al mismo tiempo que una cosa se hace infinitamente grande, la otra se hace infinitamente pequeña. Lo importante de este esquema es lo siguiente: el punto *Q* se desplaza hacia la derecha de la recta *r'* de forma continua, al igual que el ángulo se va haciendo cada vez más pequeño de forma continua.

Hagamos ahora una lectura desde otro punto de vista. El mecanismo que seguimos es cerrar progresivamente el ángulo y ver cómo el punto *Q* se desplaza hacia el infinito. La distancia del punto *Q* a la recta *r* se mantiene constante, y es igual a la distancia que hay entre las dos rectas paralelas. La pregunta clave ahora es: ¿qué sucederá cuando el ángulo que forman *PQ* y la recta *r* valga cero? La respuesta es que el punto *Q* se habrá convertido en un punto del infinito y no en un punto cualquiera, sino en aquel en el que ambas rectas convergen. Hasta aquí todo iba bien, pero el salto al infinito ha sido, una vez más, un salto traumático. El infinito potencial que teníamos en mente pasa a ser un infinito actual, con un resultado sorprendente: la distancia del punto *Q* a la recta *r* ha pasado a valer cero de forma abrupta.

¿Se trata, como han ido postulando los grandes pensadores del infinito, de un proceso que sólo se puede considerar como válido dentro de un contexto puramente mental? Nosotros no vamos a ver nunca ese movimiento en el que el punto *Q* pasa a formar parte de la recta *r*, y damos por supuesto que en cuanto «actualicemos» ese movimiento continuo hacia el infinito en el escenario aparecerá una nueva situación. La cuestión ahora es que la física moderna nos proporciona un ejemplo en el que ese escenario mental se convierte en una realidad física. Planck, cuando estableció los fundamentos de la mecánica cuántica, nos planteó un escenario que, esquemáticamente, se parecía mucho al que acabamos de describir. En el modelo atómico de la física actual sabemos que un electrón que se mueve en una órbita de energía *r'* puede dar un salto cuántico para pasar a una órbita de energía *r*. Y, además, no lo hace de forma progresiva, sino que pasa de un estado a otro sin más. Podemos decir, haciendo un paralelismo con nuestro ejemplo, que el electrón va acumulando energía de forma continua, de la misma manera que nosotros íbamos

reduciendo la amplitud del ángulo *a*. En un momento dado, y nunca mejor empleada esta expresión coloquial, el electrón (nuestro punto Q) pasa de un nivel de energía a otro. En este sentido podríamos dar la razón a Zenón, sin que ello suponga una contradicción. No hay un movimiento, tal y como lo entendemos, que lleve al electrón de una órbita a otra, sino que simplemente hay dos estados físicos distintos, algo que, conceptualmente, sucede en esa misteriosa y fascinante naturaleza en la que el infinito potencial y el actual conviven en ausencia de espacio y tiempo.

Capítulo 3

Encuentros en el infinito

Los primeros que nos hicieron «ver» el infinito en las representaciones espaciales no fueron los filósofos ni los geómetras, sino los artistas del Renacimiento. Liberados de las fuertes restricciones que la Iglesia había impuesto a sus obras y gracias a la recuperación de los conocimientos matemáticos de los griegos, abrieron un nuevo camino a las matemáticas en las que el infinito dejó de quedar estigmatizado como representante del mal absoluto.

La pintura tridimensional

Cuando se menciona el Renacimiento acuden a nuestras mentes numerosas imágenes de obras artísticas, tanto de escultura, como de pintura y arquitectura, y también de algún que otro avance de tipo tecnológico, pero nada o muy poco que haga referencia a las matemáticas. Y es que la tarea más importante de aquel periodo fue la recuperación de lo ya sabido. La Edad Media había dejado en el olvido (o en las estanterías de las bibliotecas de unos pocos conventos) las obras de griegos y árabes, que constituían los pilares fundamentales de la geometría y el álgebra. Sin embargo, fue precisamente en el escenario de la geometría donde los artistas del Renacimiento desempeñaron una labor destacada, en especial los pintores. Un escenario en el que el concepto geométrico del infinito estaría presente.

En general, los renacentistas se vieron obligados a adquirir y desarrollar diferentes tipos de conocimientos y de habilidades, no sólo en el campo del arte, sino también en el de las ciencias. Era frecuente que sus obras fueran financiadas por mecenas o príncipes que podían requerir de ellos tanto pinturas como esculturas, obras musicales, edificios o fortificaciones para defender sus propiedades e incluso estudios detallados sobre las trayectorias de los proyectiles.

A las puertas del Renacimiento los artistas habían heredado una pintura de carácter básicamente religioso, marcada por unas reglas de juego bien definidas, tanto en colores como en formas. Las figuras que revistieran un carácter de santidad, que eran la mayoría, debían aparecer sobre fondos dorados, como símbolo de que se encontraban en terreno celestial, ya que la mayoría de colores tenían un

simbolismo que hacía referencia a la jerarquía de los personajes; la disposición y el tamaño de los mismos también actuaban en este sentido. Pero lo más importante era que todas estas representaciones tenían lugar en un inequívoco espacio bidimensional: se trataba de representaciones planas, siguiendo el más puro estilo del antiguo Egipto. Sin duda esto era algo totalmente intencionado y sometido a la propia simbología vigente: determinadas figuras sagradas no podían tener una representación realista, entendiendo por este término algo que tuviera connotaciones claramente terrenales.

EL ESPÍRITU RENACENTISTA

Leonardo da Vinci (1452-1519), ejemplo paradigmático del genio renacentista, escribió en el *Tratado de pintura* un párrafo en el que hace una reflexión sobre el concepto de continuidad de gran contenido filosófico, no sólo por la idea que expresa, sino también, como buen renacentista, por la cantidad de disciplinas que hace intervenir en la misma: «Si tú, músico, me dices que tan sólo las ciencias de la mente no son mecánicas, te replicaré que la pintura es de la mente, y que, así como la geometría y la música consideran las proporciones de las cantidades continuas y la aritmética, las de las discontinuas, aquélla considera todas las cantidades continuas y las cualidades de las proporciones, las sombras, la luz y las distancias, según perspectiva.»

Al no verse sometido a las restricciones propias de instituciones religiosas, el del Renacimiento era un artista liberado, y el primer uso que hizo de esta libertad fue el intentar representar la realidad de la manera más fiel posible. Dicho de otro modo, se situó en un escenario tridimensional. Para ello empezó a desarrollar nuevas técnicas de dibujo y pintura que permitieran al observador percibir una sensación de profundidad espacial mediante juegos de sombras y colores. Las sombras, por ejemplo, indicaban la posición de los objetos, mientras que los colores disminuían su intensidad conforme se encontraban más alejados de los primeros planos. Todas éstas eran técnicas que ayudaban a recrear una sensación espacial, pero el fundamento, lo imprescindible era que el dibujo original, el boceto, siguiera unas reglas geométricas precisas. No es de extrañar, por consiguiente, que fuera en la pintura donde los avances matemáticos se mostraron con mayor relevancia.

Pero lo más importante, en el contexto en que nos encontramos, fue que estos artistas situaron el infinito en el plano de sus representaciones, convirtiendo en ac-

tual lo que hasta entonces había sido en geometría algo meramente potencial. Recordemos que para Aristóteles una recta era sólo accesible en potencia. Ya Euclides se curó en salud definiendo una recta como un segmento que se podía prolongar tanto como se quisiera con el fin de realizar con él cualquier tipo de construcción o demostración geométrica, y así seguiría siendo para todos los geómetras hasta el siglo XVII.

Sin embargo, en los cuadros de pintores y planos de arquitectos del siglo XV aparece un punto que denominaron *punto de fuga central*, dando nacimiento a lo que acabó llamándose *perspectiva central*. Dicho punto, en el que concurren rectas paralelas, puede ser calificado como un punto del infinito actual. Gracias a este tipo de perspectiva, artistas como Leon Battista Alberti (1404-1472), Filippo Brunelleschi (1377-1446) o Piero della Francesca (1416-1492), que rescataron las obras de los geómetras griegos, consiguieron que el espectador tuviera una clara sensación de que en un plano se estaba representando un escenario tridimensional.

De la perspectiva a la proyectiva

«¿Alguien ha visto alguna vez dos rectas paralelas?» Ésta es una pregunta a la que se puede responder con toda seguridad: «No». En realidad es fácil responder porque hay una pregunta anterior a la que también se puede contestar categóricamente que no: «¿Alguien ha visto alguna vez una recta?». Nadie puede haberla visto, ya que una recta es infinita. Como mucho podemos aspirar a ver segmentos de recta, muy largos, tan largos como se quiera, pero no infinitos. En cuanto a las rectas paralelas, lo más próximo a esa visión es la perspectiva que se adquiere cuando se mira un tramo muy largo de, por ejemplo, una vía de tren. Pero entonces, lo que vemos, o nos parece ver, son dos rectas que concurren en un punto lejano, situado en el horizonte. El hecho de que nos parezca ver ese punto de encuentro lo podemos considerar como una ilusión óptica, ya que por mucho que avancemos a lo largo de la vía jamás lo alcanzaremos. Ésta es una experiencia cotidiana, es la que tiene el conductor de un tren de alta velocidad desde su cabina cuando se dirige hacia el infinito a trescientos kilómetros por hora. En este sentido, perseguir el punto del infinito tiene tanto sentido como intentar alcanzar nuestra propia sombra.

¿Qué pasa si en lugar de dos rectas paralelas tenemos tres o diez o veinte? De entrada pasa que tenemos lo que en geometría se llama haz de rectas, y lo que es más importante, tenemos una dirección. Imaginemos que en nuestro plano consi-

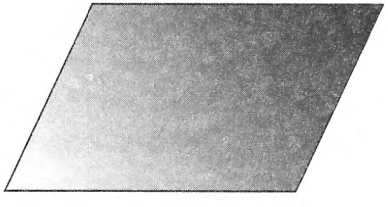
deramos un punto situado en el infinito (uno de esos puntos en el que convergían dos rectas paralelas); podríamos asignar a cada uno de esos puntos una dirección en el plano. En ese caso, todos los puntos del infinito representarían diferentes direcciones del plano. Y puestos a hacer, y ya que están tan lejos, esa recta podemos llamarla recta del infinito. Ésta sería una forma un tanto pedestre de introducirnos en uno de los parajes más interesantes y hermosos de las matemáticas, la llamada geometría proyectiva.

La idea básica reside en que dos rectas paralelas o dos planos paralelos (lo que en geometría afín recibe el nombre genérico de variedades) no tienen ningún punto en común; lo único que tienen en común es la dirección. Y de esto se dieron cuenta los geómetras del Renacimiento porque hacía ya tiempo que estaban trabajando con representaciones en el espacio tridimensional.

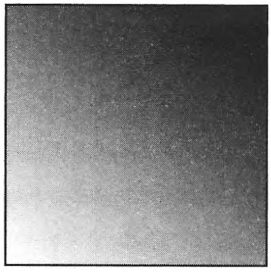
La idea original de utilizar un punto del infinito se debe a Johannes Kepler (1571-1630), que buscaba una teoría unificada de cónicas (el segundo foco de la parábola lo colocó en el infinito), pero fue desarrollado de forma más sistemática por Gérard Desargues (1591-1661), al que puede considerarse como uno de los padres de la geometría proyectiva, una materia que no se desarrollaría plenamente hasta el siglo XIX de la mano del matemático francés Gaspard Monge (1746-1818).

Transformaciones continuas

Lo infinitamente divisible es un concepto inseparable del de continuidad. Se trata de un asunto complejo y de cierta enjundia. En el capítulo anterior vimos lo que significaba continuo por contraposición a discreto. Ahora de lo que se trata es de poder caminar por lo continuo de forma continua, valga la redundancia. La manera más intuitiva de definir la continuidad es la siguiente: una línea es continua si podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel. En líneas generales, este término también se aplica al concepto de transformación. Supongamos que tenemos, por ejemplo, un paralelogramo como el de la figura:

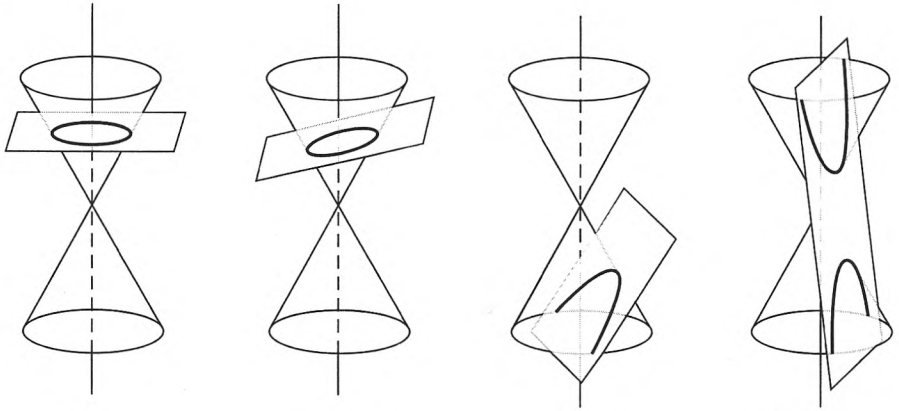


y lo queremos convertir mediante una transformación continua en un cuadrado:



Debemos imaginar que los lados están hechos con un material deformable, como si fueran de goma, de manera que podamos pasar de una a otra figura sin saltos ni roturas, es decir, de una manera continua.

En el año 1604, Kepler publicó un pequeño opúsculo, *Astronomiæ pars óptica (La parte óptica de la astronomía),* como complemento de un tratado de astronomía dedicado al desarrollo teórico necesario para la fabricación de instrumentos ópticos. Kepler estudiaba las cónicas y las posibles transformaciones continuas de unas en otras. Antes que nada recordemos que las cónicas son figuras geométricas planas que se obtienen como secciones de un cono, tal como se muestra en la figura siguiente:



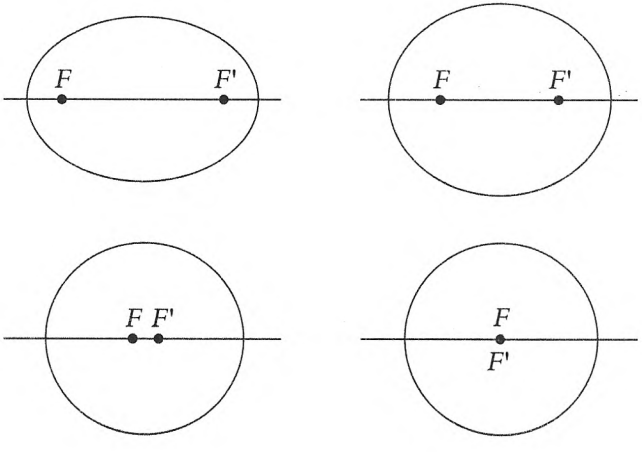
Círculo Elipse Parábola Hipérbola

Apolonio, en su obra *Las Cónicas*, define las cónicas como lugares geométricos del plano; se trata de un método preciso, pero que supone asumir ciertas destrezas geométricas. El método de Kepler, en cambio, es más intuitivo, y permite una visualización geométrica más clara. La definición se plantea de la siguiente forma: si

cortamos un cono de dos hojas (dos conos infinitamente largos, orientados en sentidos opuestos, de forma que tengan el mismo eje y que los vértices coincidan) con un plano perpendicular al eje, obtendremos una circunferencia. Si inclinamos ligeramente el plano, la circunferencia se convertirá en una elipse, que se irá haciendo mayor a medida que aumente la inclinación que demos al plano. Si continuamos inclinando el plano, llegará un momento en que éste será paralelo a la generatriz del cono, y la intersección de ambos será entonces una parábola. Cuando, por último, el plano sea paralelo al eje del cono, la intersección se convertirá en las dos ramas de una hipérbola. Todas estas curvas, elipse, parábola e hipérbola, son las que reciben el nombre de cónicas (generalmente se considera la circunferencia como un caso particular de la elipse). Existen también otras maneras de cortar un cono con un plano para obtener las llamadas cónicas degeneradas (dos rectas).

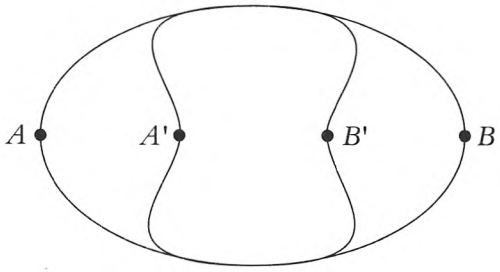
Podemos imaginar que el movimiento de ese plano que corta al cono se realiza de forma continua en el sentido de que no hay saltos. Si pudiéramos visualizar la transformación de la sección plana veríamos cómo una elipse se transforma, por ejemplo, en una circunferencia o en una hipérbola. Kepler se plantea estas transformaciones en el plano partiendo de una elipse.

Recordemos que una elipse es una cónica que puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Supongamos que los focos de la elipse que queremos transformar son F y F', que son dos puntos situados sobre el eje mayor de la elipse. Si, de forma continua, hacemos deslizar F a lo largo del eje mayor hacia F', la excentricidad de la elipse va disminuyendo hasta que se convierte en una circunferencia, momento en que F y F' coinciden.



Si lo que hacemos ahora es alejar el foco F de F', la excentricidad de la elipse irá aumentando, que es como decir que la figura se irá achatando (la excentricidad es un parámetro e que varía entre 0 y 1, y que nos indica precisamente lo mucho o poco que la elipse se aparta de ser una circunferencia). Llega un momento en que la figura deja de ser una elipse para transformase en un una parábola, una cónica con un solo foco que Apolonio definió como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

Si el largo camino del punto F no se detiene en el infinito y continúa, da la vuelta al espacio y aparece de nuevo a la izquierda de F'; se obtiene entonces una hipérbola. Dicho de una manera más gráfica, para pasar de una elipse a una hipérbola se toma la elipse con las manos por sus extremos, como si fueran dos asas, y se doblan hacia atrás, tal como se muestra en la ilustración:



Partiendo de una elipse se puede lograr una hipérbola. Para ello, podemos imaginar que la sujetamos por los puntos A *y* B *con ambas manos, como si fuera el volante de un coche, y la doblamos para traerla hacia delante. De este modo, el punto* A *pasará a ser* A', *y el* B *será* B'.

La persona que esté frente a nosotros verá las dos ramas de la hipérbola que sostienen nuestras manos. El único problema es que para hacerlo bien hay que dar una vuelta al espacio, pasando por el infinito, para volver adonde estábamos y mirar impasiblemente la elipse como si no hubiera pasado nada. ¿Cómo es posible que Kepler, firme defensor de un universo finito y contrario a cualquier corriente filosófica o matemática que defendiera el infinito actual, fuera capaz de plantear sin pestañear semejante tipo de transformación? En términos un tanto frívolos podríamos decir que Kepler estaba «chaqueteando» con las teorías vigentes del infinito para salvar ciertos intereses prácticos. Por supuesto, no nos estamos refiriendo a intereses mundanos, sino en el seno de la matemática aplicada.

Este concepto de aplicación continua que hemos esquematizado iba a ser una piedra angular en el futuro de la geometría proyectiva. La idea es la siguiente: supongamos que encontramos una propiedad geométrica de la elipse; si vamos moviendo uno de sus focos de la forma que hemos explicado antes, dicha propiedad debe conservarse. ¿Qué más da que la elipse se vaya haciendo más achatada o más alargada? Si la transformación es continua, llegará un momento que la misma propiedad se podrá aplicar a la circunferencia, a la parábola o a la hipérbole.

La técnica del cambio continuo fue empleada posteriormente por Blaise Pascal (1623-1662), pero aplicándolo a polígonos regulares, es decir, transformando, por ejemplo, un hexágono en un pentágono a base de desplazar de forma continua dos vértices contiguos hasta hacerlos coincidir.

¿Cómo resuelve Kepler el problema que le plantea el método en cuanto al paseo por el infinito? Simplemente lo razona de la siguiente forma: una recta se prolonga indefinidamente por ambos extremos hasta encontrarse en un punto común. Y es que para Kepler el universo era finito pero muy, muy, muy grande. Lo suficiente como para que cupiera todo lo necesario y más... pero, eso sí, finito.

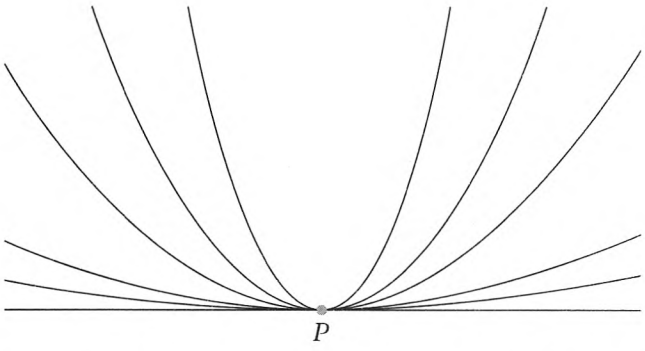
En cualquier caso, lo relevante no es sólo que el universo sea lo suficientemente grande como para albergar una recta que se curva y se encuentra a sí misma después de realizar una vuelta completa a todo lo existente (idea que de alguna forma sostuvo también Albert Einstein en su concepción del espacio-tiempo), sino también, e incluso más significativo, lo es el hecho de que Kepler caminara de puntillas sobre el concepto de transformación continua.

Cuadraturas

Hacer una cuadratura significa transformar una figura cualquiera en un cuadrado que tenga la misma área que la figura original. El área de un cuadrado es muy fácil de calcular, por eso afirmamos que algo «cuadra» cuando se adapta a un esquema conocido. Uno de los objetivos prácticos más perseguidos en el ámbito de la matemática aplicada fue siempre el del cálculo de áreas. Se sabían calcular sin demasiados problemas las áreas de figuras planas delimitadas por segmentos rectilíneos. El teorema de Pitágoras y la geometría de Euclides posibilitaban el cálculo del área de triángulos y de todo tipo de rectángulos. Figuras más complicadas podían descomponerse en estas dos. Era una cuestión de habilidad e ingenio, pero en la mayoría de los casos, un problema resoluble. El asunto se complicaba extremadamente en el momento en que algunos de los lados que delimitaban la figu-

ra fuera curvo, pues para este tipo de figuras se carecía de las técnicas adecuadas. Los griegos habían demostrado ser hábiles en este tipo de cálculos, pero siempre tenían a su lado un viajero incómodo que no conseguían quitarse de encima: el infinito actual.

¿Por qué en el momento en que las cosas dejan de ser rectas podemos asegurar que el infinito y todos sus problemas hacen acto de presencia? Pues porque el intento de resolver el problema pasa por hacer que una curva sea el resultado final de una aproximación a la misma mediante un número infinito de segmentos rectilíneos o, lo que viene a ser lo mismo, que una recta sea el resultado final de seguir un proceso de aproximación mediante curvas cada vez más abiertas, como se ilustra a continuación:



A medida que las curvas se van abriendo, la distancia entre ellas y la recta es cada vez más pequeña, especialmente en las proximidades del punto P. *En el infinito, recta y curva son una misma cosa.*

Imaginemos una recta, un punto *P* cualquiera de la misma y una serie de curvas tangentes en *P*, cada vez más abiertas (de menos curvatura) que se vayan aproximando a la recta. Está claro que por muchas curvas tangentes a la recta en el punto *P* que dibujemos, ninguna de ellas será idéntica a la recta original. Podemos imaginar que algo así sucede y que las infinitas curvas se acaban convirtiendo en la recta. Potencialmente esto es posible, pero actualmente (en el sentido del infinito actual) no disponemos de ningún mecanismo riguroso que lo garantice. Aquí vuelve a plantearse el paso al infinito cuando se materializa en un ente concreto y en el cambio de naturaleza que esto supone. El conjunto de curvas que se aproximan cada vez más a la recta tiene una característica común: se puede hablar en todas ellas de una cantidad que es mayor o menor cuando hacemos referencia a su

curvatura. En el paso al límite, cuando se convierten en una recta, dicha característica desaparece (podríamos hablar de curvatura cero), y ahí radica precisamente el cambio de naturaleza. Éste es uno de los motivos por el que el infinito se asocia con el misterio de la creación. En algún lugar del tiempo y del espacio al que no tenemos acceso se produce la transformación, y una de las curvas se convierte en recta. Aún siendo conscientes de que esta última expresión, cuando nos referimos a una de las curvas, es tan incoherente como inconsistente, pues no existe una última curva, ya que en este caso el concepto de lo infinitamente pequeño desaparecería, tendríamos un salto discreto entre la última curva y la recta, en vez de un proceso continuo. Este acto creativo ha tenido una gran influencia en el pensamiento científico debido a sus connotaciones tanto de carácter filosófico como religioso, estableciendo una zona de pensamiento prohibida, tanto por la filosofía, como por la religión. Tal vez sería más razonable pensar en una «mutación» que en una creación, lo que nos aproximaría más al razonamiento oriental, en el que el pensamiento religioso está más integrado al filosófico. En este sentido parecería, si no más correcto, por lo menos a nivel intelectual, más elegante decir que la curva «muta» en la recta.

Eudoxo

Eudoxo (ca. 408 a.C.-ca. 355 a.C.) es, junto con Arquímedes (ca. 287 a.C.-ca. 212 a.C.), Pitágoras (570 a.C.-500 a.C) y Euclides (ca. 325 a.C.-ca. 265 a.C.), una de las figuras más importantes de la matemática griega. Bajo el punto de vista de la matemática conceptual fue sin duda el más sagaz de todos.

En aquellos tiempos la matemática griega estaba todavía muy resentida por el varapalo que había significado el descubrimiento de magnitudes inconmensurables a raíz de la aparición de los números irracionales. No existía un criterio claro para comparar magnitudes de diferente naturaleza. Fue Eudoxo quien dio para ello una definición clara (definición 5 del Libro V de los *Elementos* de Euclides): «Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente».

Lo que traducido a un lenguaje más familiar significa que dos razones a/b y c/d son iguales si dados dos números naturales cualesquiera, como k y k', se cumple que:

Si $ka < k'b$, entonces $kc < k'd$;
si $ka = k'b$, entonces $kc = k'd$;
si $ka > k'b$, entonces $kc > k'd$.

Nos puede parecer una definición trivial, pero no lo es en absoluto. Hay que tener en cuenta que tal como la planteó Eudoxo puede aplicarse a razones que contengan raíces de números e incluso a figuras geométricas. Por ejemplo, las primeras razones pueden hacer referencia a esferas, y las segundas, a cubos construidos sobre los diámetros de las mismas. Es más, en estas reglas se encuentra la semilla de lo que sería la definición de número irracional que en el siglo XIX establecería Richard Dedekind por el método que él mismo denominó «de cortaduras».

EUDOXO Y LA ASTROLOGÍA

Eudoxo nació alrededor del año 408 a.C. en Cnido, ciudad de la antigua región de Caria, en la actual Turquía. Es poco conocido como astrónomo y geógrafo, ámbitos en los que llevó a cabo importantes descubrimientos. Determinó las trayectorias de diversos astros y llegó a determinar que el año solar tenía 6 horas más de los 365 días que entonces tenía asignados, y fue el primero que dividió la esfera celeste en grados de longitud y latitud. También dibujó un mapa del cielo y llevó estudios para la creación de calendarios, meteorología y cambios de estación en las orillas del Nilo. Sus conocimientos de astronomía le llevaron a enfrentarse a la clase sacerdotal, ya que ésta la utilizaba como herramienta para los cálculos astrológicos. Eudoxo, que era un claro detractor de la astrología, argumentó su enfrentamiento no en base a una cuestión de creencias, sobre las que poco se podía discutir, sino de metodología, aduciendo que: «Cuando se creen hacer previsiones acerca de la vida de un ciudadano con sus horóscopos basados en la fecha de su nacimiento no debemos dar crédito alguno, pues las influencias de los astros son tan complicadas de calcular que no existe hombre en la faz de la Tierra que lo pueda hacer».

La otra gran contribución de Eudoxo fue el llamado *axioma de continuidad*, también conocido como *lema de Arquímedes* (el mismo Arquímedes afirma que fue Eudoxo quien le dio a conocer el lema) y que dice: «Dadas dos magnitudes entre las que existe una razón, se puede encontrar una de ellas que exceda a la otra». La importancia capital de este lema estriba en que permite demostrar por reducción al absurdo una proposición considerada como una de las más importantes en la historia de las matemáticas, y que permitió a Eudoxo y a otros muchos matemáticos que le siguieron calcular áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. La proposición de Eudoxo dice lo siguiente:

«Si de cualquier magnitud se sustrae una parte superior o igual a su mitad, y si del resto se sustrae una parte superior o igual a su mitad, y si se continúa este procedimiento de subdivisión, quedará una magnitud más pequeña que cualquier magnitud dada de la misma especie».

En esta proposición también se encuentra la esencia de otro gran avance matemático que se llevaría a cabo en el siglo XIX, esta vez de la mano de Karl Weierstrass (1815-1897), y que será una definición precisa y consistente del concepto de límite.

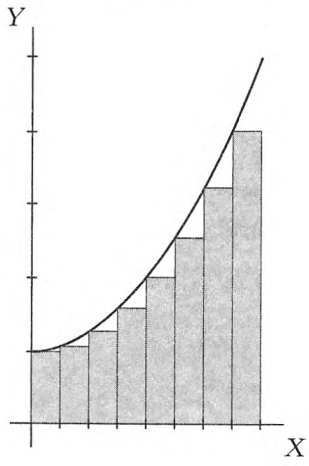
El método de Eudoxo basado en esta proposición para el cálculo de áreas y volúmenes fue conocido como *método de exhaución*. No es de extrañar que muchos historiadores consideren la época en que Platón fundó su escuela como un renacimiento de la matemática griega, ya que Eudoxo planteó las bases en las que se fundamentaría un largo proceso de cálculo que acabaría abocando en lo que más tarde se conocería como *cálculo infinitesimal*.

El método exhaustivo proporcionaba demostraciones correctas siempre y cuando se dieran por buenas las premisas en las que se basaba (que en general lo eran), pero tenía la desventaja de que no era un sistema que produjera nuevos resultados. Recordemos que estaba basado en el hecho de dar por cierto un resultado y analizar la forma en que se podía llegar a él. Se sabía, por ejemplo, que los resultados relativos a los volúmenes del cono y la pirámide en los que Eudoxo había llegado a conclusiones satisfactorias procedían de matemáticos anteriores, como Demócrito, que establecían los resultados sin más, como golpes de intuición o evidencias.

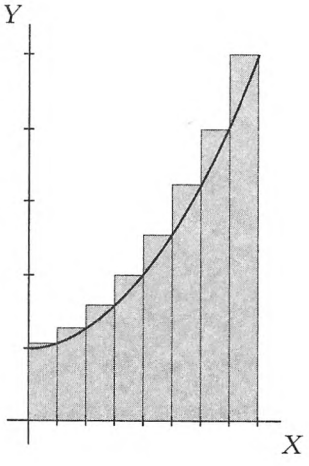
Actualmente tenemos un método de integración que nos permite realizar el cálculo mediante algoritmos bien definidos. Decir algo así es tanto como afirmar que el cálculo puede ser realizado por una máquina. Y así es. El método se basa en una idea que ya fue intuida claramente por los matemáticos griegos y que tiene una estrecha relación con lo que explicábamos antes refiriéndonos a la técnica de aproximar mediante rectángulos (hasta cierto punto, el método exhaustivo emplea-

do entonces se corresponde con lo que actualmente conocemos por descomposición en sumas de Riemann).

El método consiste en establecer una serie de rectángulos cuyas alturas no sobrepasen la altura de la curva; dicho de otra forma, rectángulos cuya base inferior esté sobre la recta, y la superior, por debajo de la curva:



La suma de las áreas de todos los rectángulos así construidos será, obviamente, inferior al área que buscamos. Conforme el número de rectángulos vaya aumentando, el área total de los mismos se irá aproximando cada vez más al área encerrada bajo la curva. Podemos repetir el proceso, pero esta vez haciendo que la base superior quede por encima de la curva:



INTEGRAR «A MANO»

Existe un sencillo dispositivo mecánico, un «integrador», que permite realizar de manera automática el cálculo de un área plana encerrada por una curva continua. Es muy parecido a los que se utilizan para calcular distancias en los mapas y que constan de una pequeña ruedecilla con un tacómetro que va marcando la distancia recorrida conforme seguimos el perfil de un camino o una carretera. El integrador tiene un aspecto similar. Cuando se recorre con él el contorno de una superficie cerrada, al llegar al punto inicial el dispositivo nos proporciona el valor del área encerrada en el interior de dicha curva. Es útil para los diseñadores de patrones, ya que les indica la cantidad de material necesario para llevar a cabo su proyecto.

De esta forma garantizamos que la suma de las áreas de los rectángulos será superior al área buscada. Ahora también podemos ir aumentando el número de rectángulos y el área se aproximará a la deseada, pero esta vez lo hará por exceso. Con este sistema tendremos una serie de áreas que se aproximan por debajo de la curva y otras que lo hacen por encima de la misma. Éste es, en síntesis y de forma muy esquemática, el modelo seguido para el cálculo de áreas. Un sistema similar se aplicaría para el cálculo de volúmenes.

Los resultados se comparan con el valor que se supone que debería tener dicha cantidad (recordemos que el método se basa en analizar un resultado ya obtenido) y a acotarlo por encima y por debajo, comprobando que si se sobrepasaran esas cantidades se llegaría a un absurdo. Es lo que más tarde, en el siglo XVII se denominó *método apagógico*.

En cualquiera de los casos el sistema nos aboca indefectiblemente a considerar la presencia ineludible del infinito actual, lo que en el análisis moderno se traduciría por *paso al límite*, un paso que si los griegos hubieran aplicado a éste y a otros problemas de la misma naturaleza habrían alcanzado resultados espectaculares.

Kepler

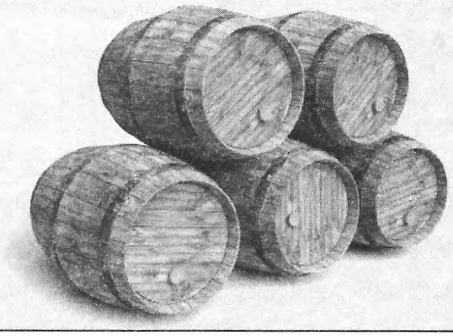
Kepler fue uno de los primeros matemáticos del Renacimiento que abordó el cálculo de volúmenes y, además, lo hizo en unas circunstancias un tanto especiales, concretamente el día que contrajo matrimonio en segundas nupcias (su primera mujer había fallecido el año anterior) con Susanne Reuttinger. Se trataba de un matrimonio de conveniencia, ya que Kepler necesitaba urgentemente una mujer

que se cuidara de él, de sus hijos y de las tareas domésticas. Alguien debió de advertir a Susanne del peculiar carácter de su futuro marido, ya que no se sorprendió cuando éste abandonó el banquete de bodas para estudiar detenidamente la operación que un bodeguero estaba realizando en los toneles que contenían el vino destinado a los comensales. No sólo la forma de los recipientes no era completamente cilíndrica, sino que, además, la medición se hacía introduciendo una varilla oblicuamente a través de la tapa. De la marca que el vino dejaba en la varilla el bodeguero deducía el volumen de vino que quedaba en el tonel. El resultado de esta reflexión fue un trabajo aparecido en 1615 con el nombre de «New stereometry of wine barrels» («Nuevo método de medición de barriles de vino»). Para resolver el problema, Kepler se basó en la técnica de los indivisibles que había desarrollado Arquímedes. Se podría decir que en aquella boda se crearon las simientes de lo que habría de ser el futuro cálculo infinitesimal.

Sin embargo, hay que resaltar que los trabajos de Kepler en esta área tenían un carácter de índole práctico más que de fundamentación teórica, y en este sentido se podrían calificar de algo toscos. Por ejemplo, para calcular el área de un círculo consideraba la suma de las áreas de infinitos triángulos, que se construían de manera que un vértice estuviera en el centro del círculo y una base en la circunferencia. De la misma manera, para el cálculo de volúmenes de esferas se remitía

LOS BARRILES DE KEPLER

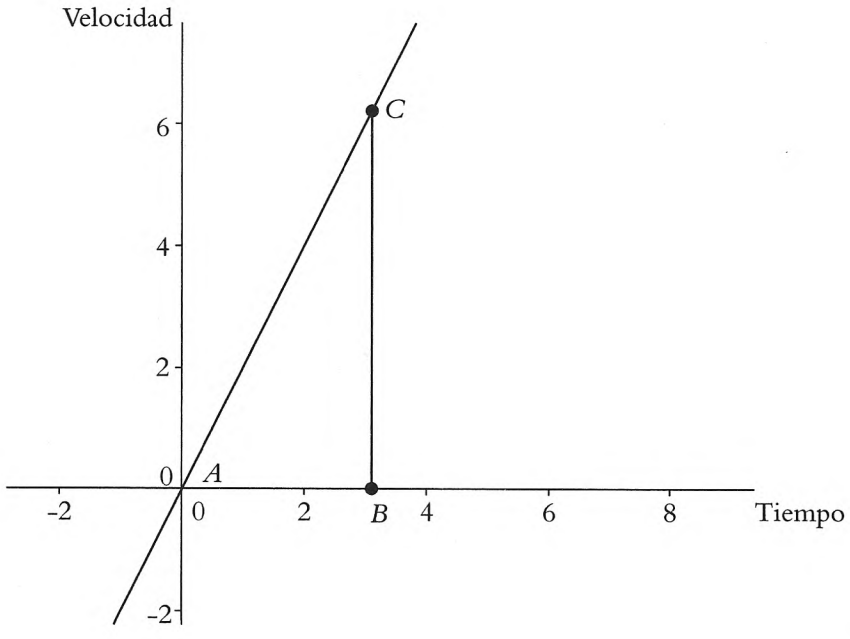
El problema que Kepler se planteó con los barriles es un clásico en la colección de problemas que se resuelven mediante el cálculo integral y que se generaliza al cálculo del volumen de un líquido contenido en un depósito de determinada forma geométrica. Es habitual en las gasolineras, cuando llega el camión cisterna, ver a un operario introducir una larga vara metálica que sirve para medir la altura de la gasolina en el depósito. Está claro que las marcas que hay en la vara deben hacerse «a medida», según la forma que tenga el depósito. Normalmente, el cuerpo de estos depósitos está formado por un cilindro en cuyos extremos se cierra por semiesferas o bien paraboloides de revolución. En algunos aeropuertos pueden verse depósitos de queroseno de estas características.

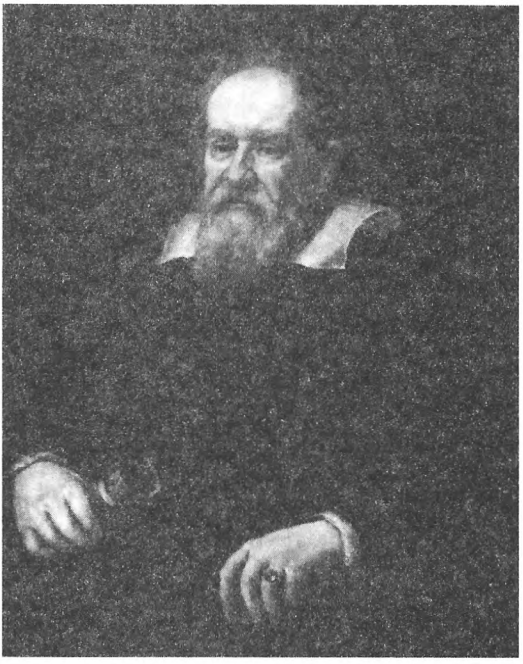


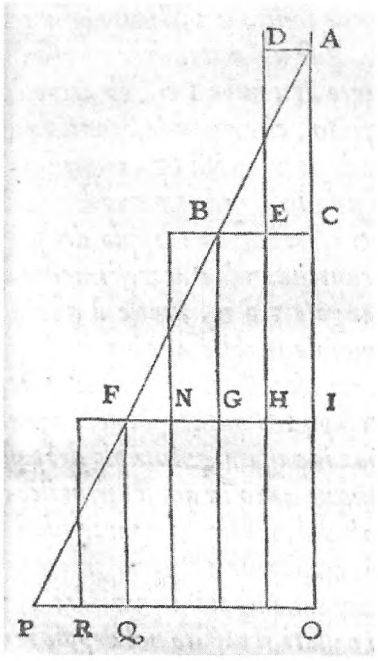
a la suma de los volúmenes de conos con el vértice en el centro de la esfera y la base en la superficie de la misma. Con este método llegó a la conclusión de que el volumen de una esfera era igual a un tercio del radio por la superficie. Todas estas operaciones estaban justificadas para Kepler por el principio de continuidad, algo que debía dar por hecho si quería seguir aplicando su método al cálculo de volúmenes.

Galileo

Galileo Galilei (1564-1642) fue un científico revolucionario en muchos aspectos, y aunque no vamos a analizar aquí su extensa obra ni la forma en que ésta influyó en la historia de la ciencia, sí vamos a detenernos, aunque sea muy someramente, en sus escarceos con el infinito. En primer lugar, Galileo se plantea el movimiento como algo que sucede sin pausas, es decir, aboga por lo continuo en detrimento de lo discreto, a sabiendas de que se trata de una posición arriesgada, ya que en algún momento deberá aceptar el salto del infinito potencial al actual. Y para ello lo que hace es «geometrizar» los problemas relativos al movimiento. Considera así que en un movimiento en el que la velocidad no sea constante se puede obtener una representación geométrica del siguiente tipo.







Retrato de Galileo Galilei, obra del pintor flamenco Justus Sustermans (1636) y gráfico para la demostración del movimiento de los cuerpos en caída.

En un eje horizontal toma la línea de tiempos, y en el vertical, la de las velocidades. Un movimiento no uniforme es del tipo $v = 2t$, por ejemplo. Esto significa que la velocidad va creciendo conforme pasa el tiempo: al cabo de un segundo es de 2; a los dos segundos, de 4, etc. Si tenemos un triángulo *ABC* en el que el segmento *AB* represente el tiempo transcurrido y el lado *BC*, la velocidad, concluye que el espacio recorrido será igual al área del triángulo *ABC*. Galileo estaba interesado en aplicar el método a movimientos más complicados, como es el caso de las trayectorias parabólicas, lo que le conducía inevitablemente a toparse con líneas curvas y las consiguientes áreas encerradas bajo ellas. Para su cálculo empleó métodos muy similares a los de Kepler. Pero, como veremos más adelante, sería Cavalieri, un discípulo suyo, el primero que estableció un método racional para el cálculo de este tipo de superficies.

Como decíamos, Galileo iba a enfrentarse inevitablemente con las paradojas del infinito, lo que le iba a llevar necesariamente a reflexionar sobre la naturaleza de éste. Y fue así como se encontró con una paradoja, que no iba a saber resolver, y que ni siquiera era, bajo un punto de vista formal, una verdadera paradoja, pero que

contenía, como podremos ver más adelante, una posible definición matemática del infinito.

Este problema-paradoja apareció en 1638 en sus diálogos y está planteado en los siguientes términos:

Partimos del conjunto de los números naturales:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,\ldots$$

A continuación escribimos la serie de los formados por sus cuadrados perfectos:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,\ldots$$

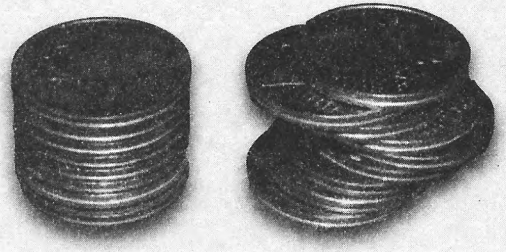
Está claro que ambos conjuntos son infinitos, en el sentido de que se pueden ir añadiendo términos sin que exista un límite para ello. Además, Galileo observa que por cada elemento del primer conjunto existe otro del segundo que es su cuadrado, pero, por otro lado, parece evidente que en la primera serie hay muchos más números que en la segunda. La pregunta que se hace Galileo entonces es si el primer infinito es más grande que el segundo, lo que le conduce a una aparente paradoja. O bien lo que dice no es cierto, o bien, razona el propio Galileo, la aritmética de comparación basada en los conceptos de mayor, menor e igual no es aplicable cuando se habla de infinito. Y en este sentido tenía razón, pues, como tres siglos más tarde establecería Georg Cantor, «la aritmética de los infinitos es distinta a la de los finitos».

Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), jesuita y profesor de matemáticas en un liceo de Bolonia, fue uno de los discípulos de Galileo que más se interesó por el cálculo de áreas y volúmenes. En 1635 publicó sobre este tema un trabajo titulado «Geometría superior mediante un método bastante desconocido, los indivisibles de los continuos». El título lo dice prácticamente todo: por un lado, acepta el principio de continuidad y, por otro, está dispuesto a considerar que los objetos continuos son susceptibles de ser divididos en partes elementales, en «mónadas», como átomos constitutivos que ya no pueden ser divididos en partes más pequeñas. Afirma para ello que una recta está formada por puntos, como las cuentas de un collar, y un volumen, por planos, de la misma manera que las hojas forman un libro. Es decir, los indivisibles de una recta son los puntos; los de un plano, las rectas, equidistantes entre sí, y los de un sólido, un conjunto de planos paralelos, todos a la misma dis-

EL TEOREMA DE CAVALIERI

El método que Cavalieri utiliza para el cálculo de volúmenes puede visualizarse de la siguiente forma: imaginemos que tenemos dos pilas de monedas o de fichas de casino que tengan cada una de ellas el mismo número de fichas. Formamos ahora dos torres iguales con cada uno de los conjuntos. Deformamos la segunda torre haciendo deslizar las monedas unas sobre las otras, de manera que deje de ser un cilindro. El problema de calcular el volumen de esta última torre, que no es una figura regular, sería complicado. Sin embargo, el teorema de Cavalieri nos asegura que el volumen de ambas torres es el mismo. En este ejemplo cada una de las monedas representaría un «indivisible».



Según el teorema de Cavalieri, el volumen de ambas pilas de monedas es el mismo, aunque en un caso se encuentren perfectamente apiladas y en el otro, no.

tancia. Cavalieri es consciente de que todos estos indivisibles tienen que figurar en número infinito, pero en realidad es otro de los matemáticos que pasa de puntillas sobre esta cuestión. Es más, a su método lo llama «método de las infinidades», pero a su trabajo lo titula «Tratado de los indivisibles».

Lo que actualmente conocemos como principio de Cavalieri se enuncia de la siguiente forma: Si dos cuerpos tienen la misma altura y, además, tienen la misma área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, entonces tienen el mismo volumen.

Mediante este método, Cavalieri llegó a demostrar que el volumen de un cono es 1/3 del volumen del cilindro circunscrito. Ni que decir tiene que su método fue ampliamente criticado por sus contemporáneos, críticas a las que Cavalieri no podía responder porque su método carecía de una justificación matemática consistente. En su favor cabe aducir que tampoco pretendía ser riguroso, sino simplemente

práctico, algo que consiguió si observamos que matemáticos como Fermat, Pascal o Roberval lo utilizaron sin demasiados miramientos, este último con buenos resultados, ya que llegó a encontrar el área encerrada bajo un arco de cicloide.

Descartes

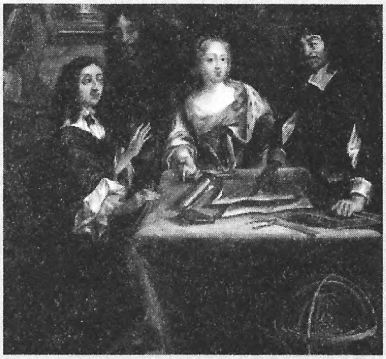
René Descartes (1596-1650) es el fundador y principal pensador del racionalismo; el *Discurso del método*, su obra más emblemática, y la frase «Pienso, luego existo», la más paradigmática, ya que es la única verdad con la que considera que puede iniciar su andadura a través de la duda sistemática. Su método es lo que su nombre indica, un conjunto de reglas que permiten razonar adecuadamente en cualquier ámbito del pensamiento humano. No hay duda, pues, de que Descartes fue filósofo antes que matemático, y que sus resultados en este ámbito se pueden considerar como uno de los frutos de su método.

El hecho de que actualmente las ciencias estén separadas de la filosofía no quiere decir que ésta no ejerza ninguna influencia sobre las mismas, sino que, en todo caso, hoy tenemos menos consciencia de dicha influencia.

Aparte de otras incursiones importantes, como la clasificación de curvas o la identificación de cónicas, es en la *Geometría* donde se encuentran sus hallazgos más relevantes. Descartes creía que resolver problemas geométricos exigía muchas veces un excesivo esfuerzo de imaginación para representar mentalmente las figuras. Esto le llevó a crear un sistema para concebirlas como un conjunto de puntos, a cada uno de los cuales se le podía asignar números. De esta forma el problema geométrico se convertía en un problema de álgebra, y muchas cuestiones algebraicas podían resolverse mediante métodos geométricos. Si a la luz de sus trabajos puede resultar exagerado hablar del nacimiento de la geometría analítica, no lo es en absoluto afirmar que sí había quedado establecida una «geometría cartesiana».

Descartes se plantea el problema de lo infinito en su obra *Principios de la filosofía*, pero a lo largo de toda la obra no lo llama infinito, sino lo «indefinido». No tiene reparos en dar carta de existencia a lo infinitamente grande, afirmando que las estrellas son en número indefinido, y a lo infinitamente pequeño, cuando asegura que la materia es indefinidamente divisible. Este cambio de un término por otro no es capricho, sino totalmente intencionado, y Descartes lo justifica diciendo que la palabra infinito debe reservase exclusivamente para hacer referencia a Dios. Sí acepta la posibilidad de que las cosas indefinidas puedan tener un límite que, en cualquier caso, nos es inaccesible. De esta forma, Descartes reduce la imposibilidad del

EL PELIGRO DE LAS CLASES PARTICULARES



Detalle del cuadro Descartes en la Corte de la reina Cristina de Suecia, *del pintor francés Pierre Louis Dumesnil. Museo nacional de Versailles.*

En 1649 la reina Cristina invitó a Descartes a pasar una larga temporada en Suecia: la reina había insistido mucho en que deseaba recibir instrucción filosófica del maestro. Descartes vio en ello una oportunidad para abandonar momentáneamente un ambiente en el que las discusiones filosóficas con los protestantes holandeses empezaban a tomar un cariz violento. La leyenda cuenta que la reina tenía querencia por los ambientes fríos, y solía recibir en audiencia a sus mandatarios en salones en los que todas las ventanas estaban abiertas, audiencias que el gélido ambiente hacía muy cortas. Descartes se vio obligado a impartir sus clases en esas condiciones, agravadas por un horario que, para sus arraigadas costumbres, era absolutamente nefasto: un carruaje lo recogía a las cuatro y media de la madrugada y le llevaba hasta palacio para impartir sus clases a la reina media hora más tarde. A los cinco meses, una pulmonía le llevó a la tumba; era el 11 de febrero de 1650.

infinito actual a la mera condición de seres humanos con todas las limitaciones que ello supone, lo cual no le impide afirmar la existencia de un infinito potencial, ya que, según su propio razonamiento, no podríamos pensar en lo finito si no existiera lo infinito: «No sería posible que mi naturaleza fuese tal cual es, esto es finita pero dotada de la idea de lo infinito, si el ser infinito no existiera. La idea de Dios es como la marca del artesano impresa en su obra y no es ni siquiera necesario que esta marca sea algo distinto de la misma obra», concluye Descartes.

Por lo tanto para Descartes la idea del infinito es innata.

Capítulo 4

Calculus

La historia del análisis matemático es una de las más fascinantes de las matemáticas, y su paulatino desarrollo es, sin duda, el que guarda más estrecha relación con los conflictos del infinito, más concretamente con los misterios de lo infinitamente pequeño, no en vano recibe también el nombre de análisis infinitesimal.

El análisis infinitesimal

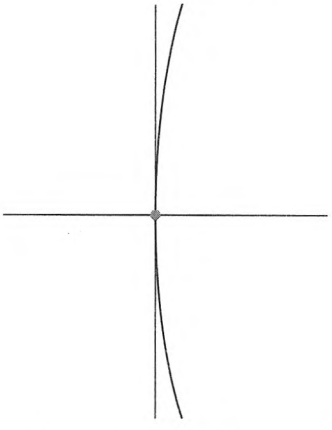
¿Por qué «análisis» y por qué «infinitesimal»? El primer término, análisis, indica una manera de trabajar que consiste en abordar un problema considerando su solución como hipótesis de trabajo, analizando entonces cuáles son las partes que han hecho posible llegar a la solución prevista. Descartes es, sin duda, la figura más destacada de este método, que adoptarían hasta sus propios detractores y que tiene sus orígenes en la llamada geometría sintética, que se remonta a Euclides.

En segundo lugar, es infinitesimal porque los conceptos que se manejan, básicamente magnitudes asociadas a elementos geométricos, son susceptibles de dividirse tantas veces como se quiera (la división infinita) para utilizarlos luego como elementos indivisibles y constituyentes de un todo. Este método, como ya vimos, se inicia con Eudoxo y su famoso método de exhaución, pero es tratado de forma sistemática por los matemáticos del siglo XVII, con figuras clave como Roberval, Barrow, Newton o Leibniz.

Se da también la coincidencia de dos hechos importantes. Por un lado, la matemática se convierte en una doctrina que se abastece a sí misma, en el sentido de que no trata de adaptarse a modelos de la naturaleza, sino que más bien la tendencia es adoptar una postura inversa: es la naturaleza la que debe adaptarse a la matemática, algo que no debe entenderse como una presunción, sino como una metodología que permite construir una sólida teoría que, por cierto, acabaría mostrándose muy práctica. Por ejemplo: mediante métodos analíticos puede llegar a establecerse que la trayectoria de un proyectil es una parábola. Es una figura geométrica (en términos analíticos de una función) claramente definida. Lo más probable es que el proyectil no describa a la perfección la curva prevista pero, parafraseando a Torricelli, «eso es problema del proyectil».

El otro hecho importante al que hacíamos referencia afecta al cuerpo teórico de la física al hacer acto de presencia dos nuevos conceptos: «cuerpo» y «punto material», el primero de ellos debido a Descartes, y el segundo, a Newton. La manzana que supuestamente impactó en la cabeza de este último no era una fruta sabrosa, de color rojo y de agradable textura, sino que era un «cuerpo» con unas dimensiones y una inercia concretas, es decir, una masa que, a efectos de análisis, podía ser reducida a un «punto» material.

También hay que tener en cuenta que en aquella época el desarrollo de la física adoptó una vertiente «aplicada»: los problemas que se planteaban venían dados por determinadas necesidades de tipo práctico. Por ejemplo, en óptica se sabía que el ángulo de incidencia y el de reflexión eran iguales, algo que en la construcción de instrumentos ópticos era y es esencial, pero éstos son ángulos que se calculan tomando como referencia la normal a una superficie en un punto. Si la superficie es recta no hay problema, basta con trazar la perpendicular a la superficie en el punto dado, pero cuando se trata de una superficie curva, como es el caso de la mayoría de instrumentos ópticos que encierran algún interés, aparece un problema geométrico de gran calado. Tal como se observa en la figura, la normal a una superficie curva en un punto es una recta perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto, y por aquel entonces nadie sabía cómo construir la tangente a una curva en un punto.



La recta tangente «toca» a la curva en un único punto. La perpendicular a dicha recta tangente en ese punto es lo que define la «normal» a la curva.

Otro ejemplo es el que se deriva del cálculo de máximos y mínimos. Volviendo al caso de los proyectiles, es obvia la necesidad de calcular el alcance máximo de un proyectil en función de la elevación del cañón (incluso en algunos casos, la altura máxima).

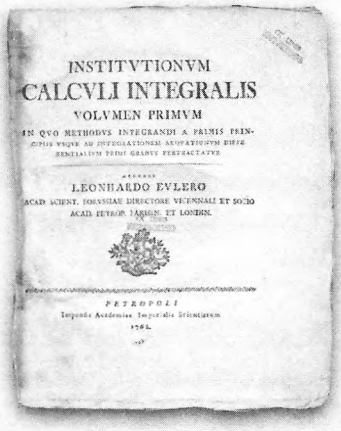
En resumen, los cuatro problemas que se tenían que resolver y que supusieron el nacimiento del cálculo o análisis infinitesimal fueron los siguientes:

- El cálculo de la tangente a una curva en un punto.
- El cálculo de máximos y mínimos de una función.
- El cálculo de cuadraturas, en el sentido de poder calcular el área encerrada por una o varias curvas.
- La rectificación de curvas, que consiste en el cálculo de la longitud de una curva entre dos puntos de la misma.

En todos ellos estaría presente el infinito en su versión «pequeña», de lo infinitamente pequeño.

Newton y Leibniz están considerados los científicos que supieron aunar el conocimiento de sus predecesores para empezar a dar cuerpo al análisis matemático.

EL CÁLCULO INTEGRAL DE EULER


INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQUATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERDUCTA EST.
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VETERNALI ET SOCIO ACAD. REGIAE PARISIN. ET LONDIN.
PETROPOLI

Portada del primer volumen del Cálculo integral *de Euler.*

Mediante integrales se puede calcular no sólo las áreas de figuras planas, sino también la longitud de una curva, el volumen encerrado bajo una superficie o volúmenes de cuerpos de revolución. En general, todo aquello que responda a una suma infinita de cantidades infinitesimales, que es casi todo. Las integrales tienen tantas aplicaciones prácticas que forman, por sí mismas, una rama de las matemáticas aplicadas. Independientemente de que su cálculo efectivo lo lleven a cabo pequeñas calculadoras o potentes programas de ordenador, sería difícil imaginar el despacho técnico de una ingeniería sin la aplicación práctica del cálculo integral. En 1770, el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) hizo una exposición en tres tomos del cálculo integral. En cierto sentido, los actuales textos de cálculo son sólo modificaciones o renovaciones de lenguaje del contenido de aquella obra, a la que, 150 años después de su publicación, nadie había podido encontrarle ni un solo «agujero». De hecho, el *Cálculo integral* de Euler está considerada la obra más importante que se haya escrito nunca sobre el cálculo.

Siguieron rutas diferentes, y ambos tuvieron que enfrentarse a los misterios del infinito, aunque también lo hicieron de distinta manera.

Newton

Isaac Newton (1643-1727), al que se le considera más un físico que un matemático, llevó a cabo aportaciones al análisis matemático que fueron extraordinariamente relevantes. Ideó un sistema original para abordar los temas relativos a cuadraturas y rectificaciones de curvas. Para ello trabajó con desarrollos infinitos, es decir, con expresiones que vienen dadas por una ecuación en cuyo primer término está la función que hay que estudiar, y en el segundo, una suma infinita de funciones de comportamiento conocido. Por ejemplo, en la siguiente ecuación aparece en el primer miembro una función logarítmica, y en el segundo, una suma de infinitos términos de funciones potenciales (parábolas) que tienen un comportamiento conocido

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

CIENCIA OCULTA

Los *Principios matemáticos de la filosofía natural* de Newton ha sido considerado siempre un libro difícil de entender, lo que no es de extrañar si tenemos en cuenta que su dificultad es intencionada. En una ocasión, Newton confesó a un amigo que lo había hecho así para «evitar ser atacado por pequeños charlatanes en matemáticas». Y es que Newton había quedado escarmentado por las incisivas y no siempre justas críticas que había recibido en sus anteriores trabajos sobre la naturaleza de la luz. Algunos de sus resultados llegó a escribirlos incluso en claves criptográficas. La siguiente serie de letras y números

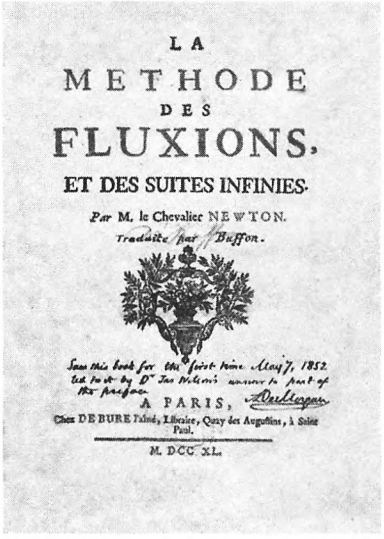
6a cc d ae 13eff7i 31 9n4o4q rr 4s 9t 12vx

no corresponde a ningún complicado *password* ni a los números de serie de un programa informático. Es lo que se llama un logogrifo, una forma de escritura secreta que empleó Newton para referirse a su método del cálculo de fluxiones, para que Leibniz no pudiera descifrarlo y atribuirse la autoría. Se dice que este último hubiera necesitado mucha más sagacidad para descubrir el anagrama que los secretos que encerraba sobre el cálculo infinitesimal.

Isaac Newton en un retrato de Godfrey Kneller.

A este tipo de expresiones las llama ecuaciones infinitas. La idea es que cuantos más sumandos se tomen del segundo miembro, más aproximado será el valor de la función. Si lo que se va a hacer es un mero cálculo, basta con conocer la magnitud del error cometido, pero si de lo que se trata es de analizar la función logaritmo, caracterizarla y estudiar su comportamiento, debemos aceptar, aunque sea implícitamente, el infinito actual como resultado de la suma de la serie. La única referencia que Newton hace al respecto podemos leerla en su obra *De analysi*: «...Porque los razonamientos en este campo no son menos ciertos que en el otro; tampoco las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyos poderes de razonamiento están confinados dentro de límites estrechos, no podemos expresar ni tampoco concebir todos los términos de estas ecuaciones, como para conocer exactamente de ellos las cantidades que queremos». Aquí podemos observar de nuevo una actitud pragmática, en tanto que se reconoce la limitación para aceptar un infinito actual amparándose en nuestra limitación como seres humanos, pero aceptando como válido el resultado final de dichas ecuaciones con términos infinitos.

Pero es en la segunda publicación, en 1736, de su obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (el original data de 1672) donde Newton emplea el método


LA
METHODE
DES
FLUXIONS,
ET DES SUITES INFINIES.
Par M. le Chevalier NEWTON.
Traduite par Buffon.
A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint Paul.
M. DCC. XL.

El método de las fluxiones
en una edición francesa de 1740.

conocido como *fluxiones*. Es interesante el giro que esto supuso, ya que dejó de considerar los elementos infinitamente pequeños como algo estático para dotarlos de movimiento. Considera una variable como un punto en movimiento continuo (también imprime esta cualidad a las rectas y a los planos), y llama *fluyente* a las variables dotadas de estas características y *fluxión*, al resultado de dicho movimiento, es decir, a la comparación entre dos estados diferentes. No entraremos aquí en detalle con respecto al método, sino que sólo haremos de nuevo hincapié en que Newton considera innecesario utilizar para sus cálculos cantidades infinitamente pequeñas con todas las contradicciones que ello pueda suponer. Considera estas cantidades clave «...no como consistentes en pequeñas partes, sino descritas como un movimiento continuo. Las líneas están descritas y, por tanto, generadas no por la yuxtaposición de partes, sino por el movimiento continuo de puntos...».

Con su método de las fluxiones, Newton consiguió calcular tangentes a curvas, áreas y longitudes e incluso máximos, mínimos y puntos de inflexión de varias curvas. Y, además, lo consiguió eludiendo sutilmente los problemas que planteaban las cantidades infinitamente pequeñas. Pero para ello tendría que pagar un cierto precio. El análisis construido bajo estas premisas acabó teniendo limitaciones importantes, y su futuro se abrió camino por otros senderos, por caminos en los que esos extraños objetos de lo infinitamente pequeño que eran los diferenciales iban a marcar la pauta. Y todo esto muy a pesar de que en ellos estuviera siempre presente el infinito actual.

Leibniz

Los primeros trabajos de matemáticas de Gottfried Leibniz (1646-1716) fueron sobre combinatoria, y aunque tenían el sello inconfundible del genio, arrastraban un modo de hacer anticuado y con ciertos tintes medievales del que todavía adolecían las universidades alemanas de la época. En 1672, y con motivo de una impor-

tante misión diplomática que se le había encomendado, Leibniz se estableció en París. Durante los cuatro años que pasó en esta ciudad se encontró a sí mismo como matemático, en parte gracias a la influencia de Christiaan Huygens, quien le hizo una necesaria puesta al día en las matemáticas de la época.

De aquel entonces datan sus primeros estudios sobre la suma de series infinitas, uno de cuyos resultados más notables es la de la serie que lleva su nombre y que establece una inesperada relación entre el número π y todos los números impares:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Pero sus investigaciones más relevantes fueron, sin duda, las que se desarrollaron en el escenario de la matemática infinitesimal, dando origen a una de las ramas más importantes de las matemáticas: el cálculo. Aquí la elección de una notación adecuada desempeñó una función trascendental, ya que tras signos como d o $\int$, introducidos por Leibniz para representar la diferencial y la integral, se encontraban sintetizados una gran cantidad de conceptos matemáticos hasta entonces dispersos y muy confusos, y eso que Leibniz no era el prototipo del matemático minucioso y perseverante, lo que motivó que muchos de sus resultados contuvieran errores. Él se describía a sí mismo como «el tigre que deja escapar todo aquello que no alcanza con el primer salto, con el segundo o con el tercero».

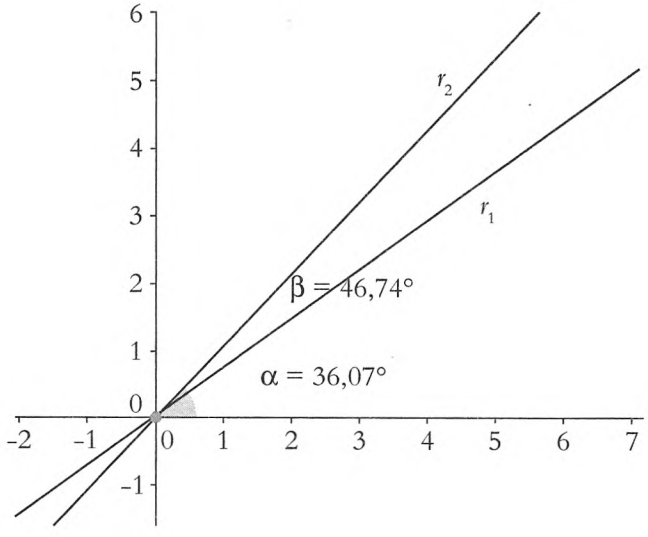
El gran salto que llevó a cabo Leibniz fue el paso de lo discreto a lo continuo. La combinatoria, en la que Leibniz demostró moverse con maestría, es un mundo discreto en el que todo sucede a saltos, pero el universo de las funciones, de las curvas, es continuo, y en el paso de uno a otro fue donde Leibniz puso de manifiesto su genio como matemático y grandes dosis de audacia, ya que fue capaz de convertir los indivisibles de Cavalieri en unas nuevas entidades matemáticas, los

FACILIDAD PARA LAS LENGUAS

Leibniz, hijo de un afamado jurista, quedó huérfano a los seis años, lo que le convirtió en un precoz autodidacta en lo que al dominio de las lenguas se refiere, ya que la mayoría de los libros de la biblioteca que heredó de su padre estaban escritos en latín, lengua a la que Leibniz dedicó todos sus esfuerzos. A los diez años ya leía a los clásicos en latín y griego, y a los trece era capaz de componer, en un tiempo récord, hexámetros en lengua latina. Esa facilidad para las lenguas es una cualidad muy común en la mayoría de los matemáticos de renombre.

infinitésimos, para los que llegó incluso a crear algoritmos específicos. Veamos, en un lenguaje moderno y muy simplificado, el elemento clave en el que Leibniz basó el naciente cálculo infinitesimal.

Sabemos que una recta viene determinada por dos puntos, pero también puede serlo por un punto por el que pasa y por un ángulo. Por ejemplo, las rectas r_1 y r_2 que pasan por el origen de coordenadas vienen determinadas por los ángulos α y β, respectivamente. Este ángulo recibe el nombre de *pendiente*, término, por otro lado, muy del lenguaje cotidiano: decimos que una carretera o una cuesta tiene una elevada pendiente cuando el ángulo que forma con la horizontal es grande.

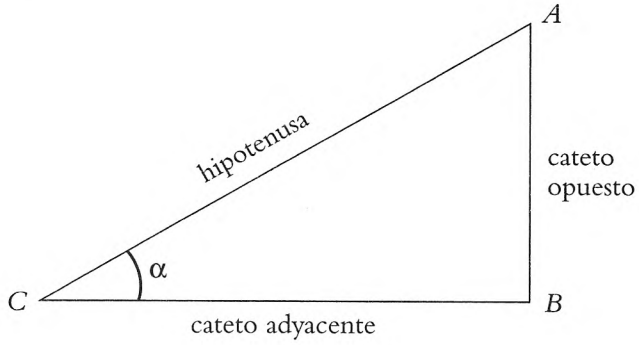


Una manera de medir un ángulo es mediante un transportador, lo que nos daría un valor concreto, como, por ejemplo, 24°. Otra manera es decir cuánto vale la

LAS SIMIENTES DEL DERECHO INTERNACIONAL

Leibniz comenzó sus estudios de leyes en la Universidad de Leipzig a los quince años, y aunque la mayor parte de su tiempo lo dedicó al estudio de la filosofía, a los veinte ya estaba en condiciones de obtener el doctorado en leyes, título que su facultad le negó aduciendo su corta edad. Se trasladó entonces a la Universidad de Altdorf, donde se doctoró con una célebre tesis sobre el carácter histórico de la ley, un trabajo que constituía las simientes de lo que más adelante sería el derecho internacional.

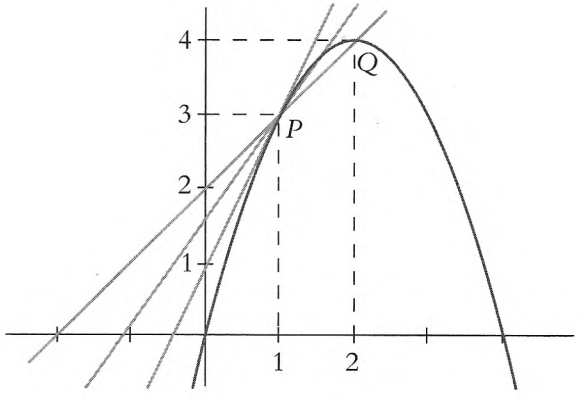
tangente de dicho ángulo. En un triángulo rectángulo, como el *ABC*, la tangente de un ángulo se obtiene haciendo la división de la longitud del cateto opuesto por el adyacente.



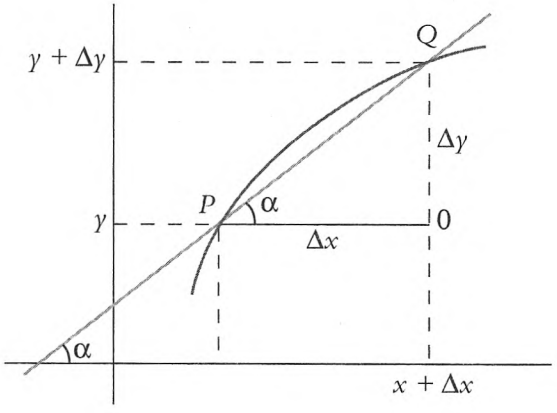
$$Tangente\ (\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Indicaremos la tangente con el símbolo tan, de manera que $\tan(\alpha) = AB/CB$.

Supongamos ahora que tenemos una curva continua (recordemos que esto quiere decir que la podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel) $y = f(x)$, y que queremos hallar la recta tangente a la misma en uno cualquiera de sus puntos, al que llamaremos *P*. Como hemos dicho antes, una recta queda determinada por un punto y un ángulo; como el punto ya lo conocemos, *P*, lo único que debemos hacer es hallar el valor de la pendiente. Leibniz basó todos sus cálculos en la construcción de un triángulo al que llamó *triángulo característico*. De hecho, ese triángulo acabó siendo el corazón del cálculo infinitesimal.



Llamemos x e y a las coordenadas del punto P. Tomemos ahora el punto Q de la curva, y llamemos $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ a sus respectivas coordenadas. Es fácil constatar que la pendiente de la recta que pasa por P y por Q viene dada por $\tan(\alpha)=\Delta y/\Delta x$. Si ahora hacemos que el punto Q se encuentre un poco más cerca del punto P, la estructura que teníamos se conservará. Simplemente será todo un poco más pequeño. Que el punto Q se aproxime al punto P se traduce en que la diferencia entre Δx se hace más pequeña. Lo mismo sucede con las ordenadas, la diferencia Δy también se hace más pequeña. Esta aproximación se puede llevar a cabo de forma continua, de manera que las diferencias que mencionábamos antes se puedan hacer tan pequeñas como se quiera. A partir de un momento dado serán lo suficientemente pequeñas como para que no sean significativas como sumando, es decir, al sumarlas o restarlas a una magnitud cualquiera el valor de ésta no se verá afectado. Son magnitudes infinitesimales a las que Leibniz denomina diferenciales, dx y dy, respectivamente.



En el proceso continuo en el que el punto Q se aproxima al punto P, la recta que une ambos puntos se aproxima a la tangente a la curva que pasa por P, de manera que la pendiente α que estamos buscando se obtendrá de

$$\tan(\alpha)=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

En el momento en que la distancia entre P y Q sea infinitamente pequeña se cumplirá que

$$\tan(\alpha)=\frac{dy}{dx}.$$

CARTAS A PRINCESAS

En muchos ámbitos intelectuales, Leibniz es conocido antes como filósofo que como matemático. A los veinte años ya había publicado su famosa *Dissertatio de arte combinatoria*. A pesar de que muchas de sus exposiciones fundamentales se hallan en publicaciones como el *Nuevo tratado sobre el entendimiento humano* (1703) o la *Monadología* (1714), una parte importante de su pensamiento filosófico se encuentra en forma epistolar, en cartas dirigidas a princesas, concretamente a tres: Sofía, Sofía Carlota y Carolina. Leibniz adopta en sus cartas un estilo que, además de poner de manifiesto su amor platónico, presupone en las destinatarias una importante preparación intelectual, al parecer totalmente justificada. Las princesas eran, en cierto modo, las únicas representantes del poder que tenían la posibilidad de crear comunidades científicas al margen de las universidades, centros estos últimos en los que los intelectuales de la época se sentían asfixiados por la ortodoxia religiosa que imperaba en ellas.

Retrato de Gottfried Leibniz cuando contaba alrededor de cincuenta y cuatro años de edad.

Este triángulo rectángulo cuyos catetos son dx y dy es el que antes hemos denominado triángulo característico. De hecho, estas longitudes infinitesimales se corresponden con los lados rectos que forman el polígono de infinitos lados en los que se puede descomponer la curva. La gran diferencia está ahora en que estas cantidades Leibniz las maneja como si fueran números, aunque bajo ciertas restricciones, y opera con ellas para obtener resultados concretos. Llega incluso a resolver el problema de las cuadraturas, es decir, el poder calcular el área encerrada bajo una curva. Dicho de un modo sencillo: si el área está formada por elementos diferenciales, basta con sumarlos todos para hallar el área buscada (en este sentido, la diferenciación y la integración son operaciones inversas).

LEIBNIZ Y LOS ROSACRUCES

A la edad de 20 años, Leibniz se introdujo en la secta mística de los Rosacruces, algo que no debe sorprendernos (Newton y Descartes también fueron miembros de ella) si tenemos en cuenta que, en aquella época, era difícil para los científicos obtener de las instituciones oficiales toda la información que buscaban. Los experimentos de alquimia eran un requerimiento básico para formar parte de esta sociedad secreta, y Leibniz, que llegó a ostentar el cargo de Secretario de la Hermandad, se hizo cargo, entre otras cosas, de transcribir en las actas dichos experimentos, traduciendo al latín la extensa obra alquímica de Basilio Valentín. A través de la hermandad conoció a H. Brand, el descubridor del fósforo, al que, para su explotación comercial, ayudó a obtener el elemento a partir de los orines de todo un regimiento de soldados. También participó activamente con F. Hoffman, catedrático de Medicina de la Universidad de Halle, en la elaboración de la famosa tintura curativa llamada gotas de Hoffman, que todavía puede encontrarse en algunas farmacias alemanas.

El Templo de la Rosa Cruz, *de Teófilus Schweighardt Constantiens, 1618.*

La aparición de los infinitésimos no tuvo, ni mucho menos, una aceptación inmediata entre los matemáticos de la época. El triángulo característico estaba ahí, pero nadie podía verlo en sentido estricto. Era una imagen, una representación de algo que, una vez más, ocurría en los oscuros e impenetrables parajes de lo infinitamente pequeño y que suponía, por mucho que se intentara eludir, la aceptación del infinito actual. Además, había que saltarse de alguna manera el principio arquimediano de comparación de magnitudes, algo que matemáticos como Pascal, L'Hopital, Bernoulli e incluso el mismo Leibniz acabaron por justificar como cantidades numéricas muy especiales, que en un momento determinado pueden llegar a desvanecerse. No es gratuito el título que Leibniz eligió para publicar estos trabajos: *Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles y de los infinitos.*

Epsilones

Cuando se habla de «epsilones» o de la técnica «épsilon-delta» no nos referimos a las siglas de un código secreto o de un plan de ataque del Ministerio de Defensa, sino a un complejo artilugio matemático que tiene una relación directa con el concepto de límite. Inicialmente, el concepto fue desarrollado por Bernard Bolzano (1781-1848), pero no se le reconoció, al menos en vida. El primero en utilizarlo de manera práctica fue Augustin Louis Cauchy (1789-1857), pero quien lo estableció, tal y como lo conocemos hoy en día, con total precisión matemática, fue Karl Weierstrass. La definición de límite mediante epsilones tiene una precisión quirúrgica en lo que atañe a lo infinitamente divisible que parece a todas luces insuperable. Se trata de una definición realmente difícil para quien no posea cierta práctica matemática. Incomprensiblemente, durante mucho tiempo, esta definición de límite figuraba en los textos de enseñanza secundaria. No pretendemos decir que un alumno de dieciséis o diecisiete años no esté capacitado intelectualmente para comprender los entresijos de los epsilones, sólo que parece totalmente inadecuado exi-

Karl Weierstrass en una litografía de 1895. El matemático alemán fue el primero que hizo un uso práctico de los epsilones.

DISPUTAS ENTRE GENIOS

La forma epistolar, fuente de planteamiento y resolución de problemas es sin duda la forma de comunicación científica más antigua de la historia y también la que más tiempo ha perdurado. Y es que frente a otras formas de plasmar un escrito en un papel, una carta tiene la ventaja de la privacidad. Va dirigida a una persona o a un grupo de personas. Muchas discusiones científicas se mantuvieron a través del vehículo epistolar, una de las más paradigmáticas de las cuales fue seguramente el acalorado enfrentamiento mantenido en torno al *calculus* entre Newton y Leibniz. Newton, con total independencia, había llegado a resultados análogos, y publicó sus trabajos antes que Leibniz, por lo que denunció a éste por un supuesto plagio, dando lugar a una de las más agrias, lamentables y absurdas disputas que han tenido lugar en la historia de la ciencia.

gir su cabal comprensión de manera indiscriminada a todos los alumnos. De todas maneras, en muchos textos aparecía como letra pequeña y muchos profesores se lo saltaban.

Vamos a intentar dar aquí, por tanto, una aproximación intuitiva a tan espinosa cuestión. El concepto, en esencia, tiene mucho que ver con la idea de acumulación. Imaginemos que frente a la entrada de un local empieza a formarse una cola de personas. Podemos observar que la distancia entre la gente y la puerta es cada vez menor, y la distancia entre los propios sujetos, también. Es una tendencia natural en la formación de colas: en un principio, cuando hay pocas personas, la tendencia natural es mantener entre ellas una distancia que podríamos llamar cómoda, pero a medida que su número aumenta, dicha distancia se va haciendo cada vez más pequeña. Es interesante resaltar que hablamos de dos distancias diferentes, aunque tienen una estrecha relación entre sí: una es la distancia que hay entre las personas y la puerta de entrada, y la otra es la distancia entre las personas. Esta última aumenta a medida que nos alejamos de la cola. Es lógico, ya que los que van llegando mantienen la distancia natural, pero conforme la cola avanza, se sienten presionados por los que hay detrás. Todo esto lo podríamos resumir diciendo que la gente se agolpa o acumula junto a la puerta de entrada.

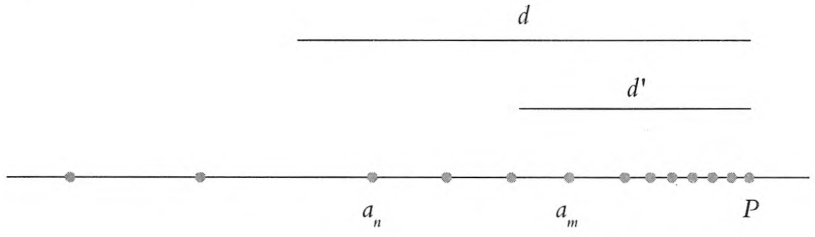
Podríamos establecer el grado de acumulación mediante un parámetro que midiera, por ejemplo, la variación de la distancia que hay entre personas contiguas a medida que nos vamos acercando a la cola. Lo normal es que observáramos que este parámetro se hace cada vez más pequeño.

En una cola como la que se forma, por ejemplo, a las puertas de un cine, la gente tiende a concentrarse en la puerta, guardando un mínimo espacio de separación entre personas. A medida que dicha cola se distancia de la puerta, en cambio, la dispersión se acentúa.

Mediante una «vara de medir», es posible definir el grado de acumulación partiendo de una distancia concreta, por ejemplo 50 cm. La forma de hacerlo sería la siguiente: desde la entrada ponemos nuestra medida; si hay gente a 50 cm de la entrada obtendremos cierto grado de acumulación. Según la longitud de nuestra vara podremos afirmar que hay más o menos gente. Esto es algo que también podríamos hacer con respecto a la acumulación de personas entre ellas. Aquí se plantea una primera cuestión interesante y es la siguiente: la acumulación de individuos entre sí, lo que coloquialmente llamamos «apretujamiento», induce a pensar en la presencia de algo que provoque dicha acumulación o, planteado en otros términos, si dicha acumulación tiene lugar por sí misma, sin más, o en torno a un objeto o situación determinados. Cuando paseamos por un camino y vemos en alguna parte una acumulación de hormigas, enseguida pensamos en la presencia de comida o en la entrada de un hormiguero. Otro ejemplo sería una acumulación de coches en una autopista, que nos induce a pensar en la presencia de un punto de peaje, pero también es cierto que se podría deber a un accidente. Esta insistencia en ejemplos sobre «acumulaciones» tiene su justificación en el hecho de que más adelante nos ayudarán a comprender uno de los hallazgos más interesantes que se han producido

en la historia de las matemáticas en torno a la existencia de determinados números, unos números que durante siglos se han escondido sigilosamente en lo infinitamente pequeño.

En los ejemplos anteriores hemos manejado conjuntos discretos, pero ahora vamos a entrar en el universo de los *continuum*, ya que éstos admiten la posibilidad de ser infinitamente divisibles. Dejemos, por tanto, las colas de personas y de coches y centrémonos en posibles conjuntos de puntos a lo largo de una recta. Supongamos que tenemos una sucesión de puntos a los que nombraremos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, que tienen la particularidad de que se van apretujando conforme avanzamos en la sucesión. Está claro que si se acumulan entre sí lo hacen alrededor de algún punto. Supongamos que se trata de un punto al que llamaremos *P*. Supongamos también que ahora nuestra vara de medir es un segmento de longitud *d*. Si la situamos con un extremo en el punto *P* vemos que hay puntos de la sucesión que quedan dentro del segmento de longitud *d*.



Es más, podemos encontrar un punto a_n a partir del cual todos los que le siguen estarán dentro del segmento *d*. Si hacemos que la longitud del segmento sea menor, $d' < d$, tendremos que partir de un punto más avanzado, llamémosle a_m, todo el resto quedará dentro de la nueva demarcación. Ésta es la técnica de los epsilones. Se trata de poder asegurar que para cada cantidad *d* hay siempre un *n* a partir del cual todos los elementos de la sucesión están dentro del segmento *d*. En este caso se dice que la sucesión converge hacia el punto *P*. Pero eso es tanto como decir dos cosas: primero, que la sucesión es infinita, y segundo, que la distancia entre el punto *P* y un término cualquiera de la sucesión se puede hacer tan pequeña como se quiera.

Cuando tratamos con conjuntos discretos, lo que acabamos de exponer tiene muy poca gracia. Por ejemplo, consideremos la sucesión formada por los números 100, 50, 25, 12, 6, 3, 1 (podemos imaginarlos como una cola de siete números y una puerta de entrada, que es el cero). Es cierto que la diferencia que hay entre cualquiera de ellos y el 0 es cada vez más pequeña, y también lo es la diferencia que hay

entre dos cualesquiera de ellos. Por ejemplo, entre el 100 y el 50 hay cuarenta y nueve números, en cambio entre el 6 y el 3 solamente hay dos. Sin embargo, no podemos decir que en torno al punto 0 se acumulen los términos de la sucesión. Está claro que si tomamos un segmento de longitud 1/2 no encontraremos junto al número 0 ningún término de la sucesión. En cambio, si consideramos la sucesión siguiente:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$$

junto al número 0 siempre encontraremos elementos de la sucesión, por muy pequeña que sea la distancia considerada.

En términos matemáticos hablaríamos de entornos. Un entorno es como una especie de paréntesis que se centra en el punto *P*. La idea es que, por pequeño que hagamos el paréntesis (el radio del entorno), siempre encontraremos elementos de la sucesión dentro de él. La técnica de los epsilones consiste, por tanto, en un juego entre dos números que son el ancho del paréntesis (radio del entorno al que se le suele llamar ε —épsilon—) y el número *n*, que determina el elemento a_n a partir del cual todos los restantes elementos de la sucesión quedan confinados en el interior del paréntesis. El juego entre ambos números se traduce en:

«Para cada épsilon existe un *n* tal que...».

Ésta es una manera de tratar el asunto de la división infinita que se acerca mucho a la definición matemática del concepto de límite. Cuando en las paradojas de Zenón dividíamos un intervalo por la mitad infinitas veces, estábamos estableciendo una sucesión numérica como la del ejemplo anterior. Ahora ya podemos aplicar la definición rigurosa del «paso al límite», afirmando que el último término de la sucesión es el punto 0. Esto no resuelve ni mucho menos la paradoja, simplemente la deja de lado, ya que siempre estamos con lo mismo: los puntos se van apretujando cerca del cero en una sucesión infinita y damos por hecho que existe un último punto, que es el 0, pero en realidad el 0 no es ningún elemento de esta sucesión. Este salto no está en realidad justificado, pero si está bien definido. Y es que, como decía Bertrand Russell, los matemáticos son gente que no saben nunca si lo que dicen es cierto o no; tampoco acaban de saber muy bien hacia donde se dirigen, pero eso sí, saben muy bien lo que se hacen.

En realidad, Cauchy no se planteó la definición de límite en el sentido de elementos que se acumulan en un punto dado, sino como elementos que se acumulan

entre sí. Es decir, no tenía un punto de peaje en la autopista, sino un montón de accidentes por aquí y por allá. Y es que las cosas no eran ni son tan sencillas debido a un factor importante, y es el hecho de que si trabajamos sólo con los números racionales, la recta sobre la que estamos situando los puntos no está llena, tiene unos cuantos agujeros. La situación es la siguiente: tenemos una sucesión de puntos (ahora asociamos puntos de la recta con números racionales) tal que cada vez está más apretujada. Esto es algo que puede definirse matemáticamente y que Cauchy estableció con claridad. El problema es que el apretujamiento o acumulación puede tener lugar en torno a un sitio o punto de la recta que esté vacío o, mejor dicho, que no se corresponda con ningún número racional. En el caso, por ejemplo, de la sucesión

$$1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}},\ldots$$

que definimos en el capítulo 2, ésta tiende hacia $\sqrt{2}$, que no es un número racional. Es cierto que mediante un triángulo rectángulo construido convenientemente podemos hacer que la hipotenusa caiga en el sitio adecuado, pero eso no deja de ser una construcción geométrica, en la época de Cauchy se trataba de poder definir los puntos, es decir, los números, de manera aritmética o analítica. El número racional no había sido definido correctamente; de hecho, no había sido definido como número de ninguna manera. Habría que esperar a Dedekind y más tarde a Cantor para llegar a tener una definición absolutamente consistente. Fue este último quien no sólo dio una definición correcta, sino que dejó la recta sin agujeros. Antes hemos dicho que tenía unos cuantos agujeros, pero en realidad tenía infinitos, ya que los números irracionales son, como los racionales, infinitos.

Pero Cantor requiere un capítulo aparte, ya que no sólo hizo «densa» la recta real, sino que se enfrentó cara a cara con el infinito como antes nadie había sido capaz de hacerlo.

Capítulo 5

El paraíso de Cantor

Quizá sería aventurado decir que hay unas matemáticas antes y otras después de Cantor, aunque hay quien lo sostiene. Lo que seguro que puede afirmarse, sin temor a equivocarse, es que hubo un infinito antes y otro después de Cantor.

Las series de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue un matemático visionario, uno de los pioneros que se adentró con audacia en el nuevo paradigma del análisis matemático, construyendo una de las teorías que más frutos ha dado en la historia de las matemáticas aplicadas. Entre sus obras destaca especialmente la *Teoría analítica del calor* (es, tal vez, la más importante de las que publicó), centrada en el problema de la propagación del calor, no sólo por su notable valor científico, sino también porque se considera el primer trabajo de física matemática de la historia.

Los desarrollos en serie de una función consisten en poder expresar una función cualquiera como suma infinita de otras funciones. La gracia estriba en que las funciones que forman parte de la suma sean más manejables que la función original. Los de Fourier no fueron los primeros desarrollos en serie de una función que se llevaron a cabo, sino que por aquel entonces ya se manejaba con cierta frecuencia el desarrollo en serie de potencias que había establecido Taylor, desarrollo en el que se exigía que la función en cuestión quedara completamente determinada por su comportamiento en un pequeño intervalo.

Las series de Taylor podían tener su origen en funciones mucho más generales, pero adolecían del inconveniente de que tenían un carácter excesivamente local, en el sentido de que, conocido el comportamiento de la serie en un pequeño entorno, poco o nada podía decirse de su comportamiento en cualquier otro entorno que fuera disjunto con aquél. Para ello Fourier estudió la representación de una función como superposición de otras más sencillas, en general de carácter sinusoidal, instaurando una nueva disciplina matemática conocida como *análisis armónico*. Las ondas en las que la función se descompone reciben el nombre de armónicos, de ahí el calificativo de este tipo de análisis.

La posibilidad de descomponer una función en una suma de funciones trigonométricas seno y coseno representa una enorme ventaja matemática, ya que se trata de funciones muy manejables que son fácilmente representables con derivadas e integrales sencillas. Fourier demostró que cualquier función periódica $f(x)$, sometida a ciertas restricciones, podía ser expresada como una suma infinita de funciones trigonométricas seno y coseno. Sin embargo, el desarrollo de Fourier planteaba dos cuestiones importantes y de difícil solución, ya que afectaban a los mismos fundamentos del análisis. Cuestiones que han sido y siguen siendo preguntas fundamentales en las matemáticas y que son aquellas que hacen referencia a los llamados teoremas de existencia y unicidad. Las preguntas concretas son: primero, ¿en qué condiciones se puede asegurar que existe una serie que converge realmente hacia la función dada?, y segundo, en caso de que dicha función exista, ¿se puede asegurar que sus coeficientes son únicos?

En 1870 Cantor enunció un teorema que proporcionaba un criterio para la convergencia de una serie de Fourier, y al año siguiente, un segundo teorema, como extensión del primero, relativo a la unicidad de dicha serie. Sin embargo, se encontró con un problema difícil de superar: el teorema no era general, tenía excepciones, puntos en los que no se cumplía. Y no se trataba de unos cuantos, sino que había conjuntos con infinidad de dichos puntos que se repartían de forma discontinua

Jean-Baptiste Joseph Fourier.

entre los que sí cumplían con el teorema. Había topado con los números irracionales, y esto le había llevado a plantearse una cuestión que iba mucho más allá de los desarrollos en serie y, hasta cierto punto, más allá también del concepto de infinitud, aunque estaba estrechamente relacionado con éste. Cantor se empezó a plantear seriamente la relación que había entre lo continuo y lo discreto en el conjunto de los números reales. Por un lado, tenía una recta en la que, por consideraciones puramente geométricas, los puntos se distribuían en ella de forma continua, mientras que, por otro, la aritmética le mostraba una distribución discreta. Había algo que no funcionaba y ese algo era ni más ni menos que la propia definición de número real, o, más concretamente, la de número irracional. (Véase en el anexo el apartado «Conjuntos de números»).

Sucesiones fundamentales

Cantor desarrolló su teoría sobre los números reales en dos etapas. En 1872, bajo el nombre «Sobre la extensión de un teorema relativo a la teoría de las series trigonométricas», se plantea el problema sobre la existencia de los números irracionales de una manera un tanto técnica, pero sin llegar a un desarrollo teórico completo. Sería mucho más tarde, en sus *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos (Grundlagen)*, aparecida en 1883, cuando el concepto de número real adoptaría un desarrollo matemático consistente, debido, según el propio Cantor, a una profunda reflexión filosófica sobre el sentido de los conceptos infinito y continuidad. Conocedor de los trabajos de Cauchy y Weierstrass, sabía que en el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) existían sucesiones infinitas de números que no convergían hacia ningún número racional. Se trataba de aquellas sucesiones que estableció Cauchy en las que los elementos se agrupaban entre sí, pero que no lo hacían en torno a un número racional. Ya vimos en el capítulo 2 una serie infinita que convergía hacia $\sqrt{2}$, que no es un número racional. También vimos que estas sucesiones de números se caracterizan porque sus elementos pueden llegar a estar tan próximos entre sí como se quiera. Cantor bautizó a este tipo de sucesiones con el nombre de *sucesiones fundamentales* (actualmente se las denomina sucesiones de Cauchy, aunque en algunos textos todavía se conserva la nomenclatura original).

Cantor intuyó que las sucesiones fundamentales debían converger hacia un número irracional, de manera que adoptó este criterio como definición de número irracional. Siguiendo con una analogía que empleamos en capítulos anteriores, Cantor observó que había acumulaciones de coches en las autopistas y apostó porque se

trataba de peajes o, dicho de otra manera, aquellos puntos en los que determinadas series de números se acumulaban y en los que no había un número racional (los agujeros en la regla que empleábamos para medir), tenía que haber un número irracional, como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ o el mismo π. El problema es que había que dotar a este tipo de números de una tarjeta de identidad, definirlos matemáticamente.

Hay ciertas propiedades que los conjuntos de números deben cumplir para que formen un sistema consistente o, dicho con otras palabras, para que sean realmente útiles y se comporten como se espera de ellos en las operaciones más elementales. La primera de ellas garantiza que forman un sistema cerrado para la suma, la resta, la multiplicación y la división. Esperamos que al sumar dos números enteros el resultado sea también un número entero. La segunda hace referencia a la ordenación y establece que dados dos números cualesquiera, se puede afirmar sin ambages que son iguales o que uno es mayor que el otro. La tercera propiedad, relativa a la densidad, es algo más sofisticada y no la cumplen todos los conjuntos de números. Afirma que entre dos números cualesquiera siempre hay otro; esta propiedad, como ya vimos, no se cumple ni en los números naturales ni en los enteros. Entre 5 y 6, por ejemplo, no hay ningún número entero. Sin embargo, como sabemos, los números racionales sí cumplen con la propiedad de densidad. Cantor sabía que estas tres propiedades debían cumplirse en el nuevo conjunto de números irracionales que iba a definir mediante las sucesiones fundamentales. Sin embargo, no llegó a demostrar estas propiedades con todo rigor. Era consciente de que los números que estaba definiendo eran una extensión de los racionales y suponía, en buena lógica, que las propiedades de éstos se transmitirían de forma natural a los irracionales. Había, además, un problema añadido, y era el de que diferentes sucesiones fundamentales podían dar lugar a un mismo número irracional. Éstas y otras objeciones fueron superadas más adelante con los conceptos de relación de equivalencia y conjunto cociente, que es una de las formas de definir en la actualidad dichos conjuntos de números.

Ahora queremos enfocar nuestra atención en el hecho de que Cantor estaba utilizando sin reparos el concepto de infinito actual para definir algo tan concreto como un número que, en el fondo, no era ni más ni menos que el límite de una sucesión infinita de números. En sus primeros trabajos ni siquiera empleó la palabra límite. Es más, tampoco habló de números, sino de magnitudes numéricas. Y es que Cantor era muy consciente de que se estaba adentrando en aguas pantanosas, y que para abordar el tema del infinito y el de la continuidad primero iba a tener que armarse con unas herramientas lógicas y matemáticas de las que no disponía, por lo que no le iba a quedar más remedio que crearlas.

Al ampliar el sistema de números racionales $\mathbb{Q}$ se pasó a un nuevo conjunto $\mathbb{R}$, que Cantor bautizó como el de los *números reales*. Hay quien opina que esta distinción se debe a la existencia de los números imaginarios, que ya eran conocidos en la época, pero hay bastantes razones para pensar que la elección de Cantor iba en otra dirección. En sus *Grundlagen*, Cantor utiliza la palabra «límite» y abandona los términos «magnitudes numéricas» para referirse a los nuevos elementos como números reales. Se trata de un detalle importante, ya que denota que está dispuesto a aceptar el infinito actual no como una mera especulación, sino como un objeto matemático «real», tan real como lo pueda ser un número entero u otro fraccionario.

La recta real

Una recta es un conjunto infinito de puntos alineados. Cantor se plantea lo que va a ser la recta real siguiendo los pasos que ya hemos detallado en capítulos anteriores, como marcar un origen y tomar una longitud como unidad de medida. En el origen sitúa al número 0; a la derecha, los números enteros positivos, y a la izquierda, los negativos. Añadimos ahora los racionales, es decir, las fracciones, tanto positivas, a la derecha, como negativas, a la izquierda. Recordemos que la introducción de los números racionales en la recta hace que ésta adquiera una propiedad que antes no tenía, y es la de densidad, que afirma que entre dos números racionales cualesquiera hay siempre un número racional.

Ya vimos cómo en el panorama de la matemática griega la aparición de la $\sqrt{2}$ acabó produciendo una crisis de gran calado. La raíz del problema residía en que ese número maldito tenía una construcción geométrica clara mediante un triángulo rectángulo cuyos catetos valían una unidad y en el que la longitud de la hipotenusa era un número irracional que no tenía cabida en el conjunto de puntos de la recta sobre la que se había establecido una unidad de medición. De este modo, la longitud de la hipotenusa tenía sentido como magnitud, pero no existía como número. Y en este sentido se podía afirmar que en la recta real había infinitos agujeros, puntos vacíos a los que no correspondía ningún número, y por lo tanto, no era continua.

En principio, con la introducción de los números irracionales, todos los puntos de la recta tienen asignado un número, bien sea racional o irracional, y es, por lo tanto, una recta densa, sin agujeros. Puede adoptar con pleno derecho el nombre de «recta real».

Por otro lado, la afirmación de que la recta, como entidad geométrica, se ha llenado completamente de números sin dejar ningún agujero no deja de ser una

afirmación cuanto menos aventurada. Reflexiones sobre este asunto fueron las que llevaron a Cantor a interesarse más en el concepto de continuo que en el de infinito, lo que le llevaría a definir un concepto clave, como primera alternativa al infinito, que es de numerabilidad.

Los números cardinales

Cantor se enfrentó al problema de poder «contar» el infinito. Hasta entonces, el infinito potencial estaba definido mediante la posibilidad de ir añadiendo elementos nuevos «sin límite», pero Cantor se había propuesto poner el infinito encima de la mesa, convertirlo en «acto», actualizarlo; en otras palabras, utilizarlo como un elemento matemático más. El simple ejercicio de contar una colección de objetos, el acto más primitivo de la aritmética, iba a ser revisado y formalizado totalmente, y para ello iban a ser necesarias dos cosas: primero definir bien de qué estábamos hablando cuando nos referíamos a una colección de objetos, y segundo, encontrar una definición matemática de eso que llamábamos contar objetos de una colección.

La solución para el primer punto sería la teoría de conjuntos, apuntada ya por Bolzano, pero que Cantor construyó como un sólido edificio, permitiéndonos hablar de los elementos de un conjunto de manera totalmente abstracta.

Son muchos los historiadores de la ciencia que consideran la teoría de conjuntos de Cantor como una de las obras más brillantes del pensamiento humano. No vamos a adentrarnos aquí en los pormenores de dicha teoría y todas sus complejidades, ya que en este contexto nos basta con unos pocos conceptos que son muy intuitivos. Sin embargo, señalemos que el concepto de conjunto es uno de los más fundamentales de las matemáticas, ya que todo su edificio teórico está prácticamente fundamentado en dicho concepto. Henri Poincaré (1854-1912) dijo en una ocasión que un matemático era una persona que se dedicaba a ponerle el mismo nombre a diferentes cosas. Es una forma sucinta y un tanto irónica de expresar una gran verdad, ya que el objetivo fundamental que persiguen las matemáticas es el de la generalización. Y si a algo puede aplicarse esta máxima de forma rotunda es precisamente a la teoría de conjuntos, ya que la palabra conjunto puede designar cualquier cosa que exista (y muchas que no existen). Y es esta generalización la que permitió a Cantor empezar a plantearse de forma racional el concepto de infinito actual.

El primer escollo con que se encuentra la teoría de conjuntos es la propia definición de conjunto, pues es muy difícil plantearla sin utilizar la misma palabra conjunto o alguno de sus sinónimos: agrupación, reunión, montón, etc. Una de las

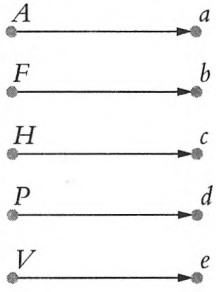
EL CÁLCULO CON PIEDRAS

Es interesante reparar en el hecho de que en la historia de la humanidad se aprendió a contar antes de que existieran los sistemas de numeración, por lo que podemos afirmar, en contra de muchas creencias populares, que el concepto de aplicación biyectiva es tanto o más primitivo que el de número. Por ejemplo, un pastor que quisiera tener un control sobre el número de cabezas de ganado que sacaba a pastorear debía estar provisto de una bolsa llena de piedrecillas. Por cada oveja que salía del corral tomaba una piedra de la bolsa. De esta manera al volver a casa establecía una correspondencia biunívoca entre cabezas de ganado y piedras para saber si se le había extraviado alguna oveja del rebaño (*calculus*, en latín, significa piedra, y de ahí proviene el término «calcular»).

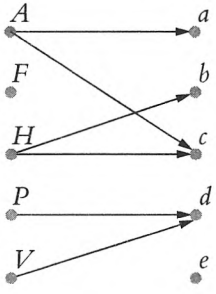
mejores definiciones, que no utiliza sinónimos (por lo menos de forma aparente) es la que dio Bertrand Russell: «Un conjunto es una consideración simultánea de entes». Es una definición interesante porque plantea el concepto como una actitud mental, lo que es síntoma de que se trata de un concepto primitivo.

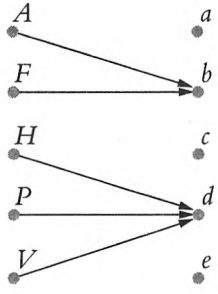
Como hemos dicho antes, también es un concepto primitivo el acto de contar los elementos que forman un conjunto. Cuando contamos, lo que hacemos es comparar los elementos de dos conjuntos. Por ejemplo, si queremos saber cuántas personas hay en un recinto (cuántos elementos tiene el conjunto formado por las personas de dicho recinto) lo que hacemos es partir de un conjunto conocido, el formado por la serie de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$ y asignar, de manera ordenada, un número a cada una de las personas, procurando no repetir números ni personas. Al acabar, miramos el último número asignado y si éste es, por ejemplo, 23, decimos que hay veintitrés personas en el recinto. Lo que hemos hecho es comparar dos conjuntos, el de las personas y el de los números $\{1, 2, 3, \ldots\ 22, 23\}$, estableciendo lo que se llama

correspondencia «uno a uno». Las correspondencias uno a uno pueden establecerse entre conjuntos de diferente naturaleza, lo importante es que se haga preservando las reglas del juego. Por ejemplo, si partimos de un conjunto de letras mayúsculas como $\{A, F, H, P, V\}$ y otro de letras minúsculas como $\{a, b, c, d, e\}$ podemos establecer una relación entre ambos conjuntos de la siguiente forma:



Cualquiera de los elementos del primer conjunto debe relacionarse con uno y sólo uno del segundo, y recíprocamente. Ésta es la única y sencilla regla que rige este tipo de relaciones, llamadas en matemáticas aplicaciones *biyectivas* o *biunívocas*. Correspondencias como las siguientes





no cumplirían la regla establecida.

De esta forma, Cantor retorna al concepto más primitivo del acto de contar y establece el concepto de cardinalidad de un conjunto.

Si observamos los conjuntos entre los que podemos establecer una aplicación biyectiva veremos que sólo es posible hacerlo entre aquellos que tienen el mismo número de elementos. Basta con probar, por ejemplo, de establecer una aplicación de estas características entre un conjunto con cuatro elementos y otro con tres, y ver que no es posible hacerlo sin dejar elementos sin asignar o asignando más de uno a algún otro.

Cantor define entonces una equivalencia entre conjuntos de la siguiente manera: «Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si se puede establecer una aplicación biyectiva (uno a uno) entre ellos». De ambos conjuntos se dice que tienen la misma cardinalidad o que son *equipotentes*, que viene a ser lo mismo que decir que tienen el mismo número de elementos.

Según esto, si tenemos un conjunto cualquiera, por ejemplo una caja de lápices de colores, al que llamaremos A, y podemos establecer una correspondencia uno a uno con el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, diremos que A y N tienen el mismo cardinal:

$$\text{Card}\,(A) = \text{Card}\,(N) = 6.$$

A alguien podría parecerle que estamos rizando el rizo para establecer lo que en el fondo es una obviedad, pero las apariencias engañan, ya que este nuevo armazón lógico permitió dar una definición rigurosa de lo que es un conjunto infinito.

Para ello, definamos primero lo que es un conjunto finito. Un conjunto A no vacío (es decir, que tenga al menos un elemento) se dice que es finito si para algún número n el conjunto A tiene el mismo cardinal que $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Por tanto, el número n es precisamente el número de elementos que tiene el conjunto A. En cualquier otro caso se dice que el conjunto A es infinito. Del mismo modo:

Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A con el mismo cardinal que A; en cualquier otro caso, A es finito.

Esto último requiere una explicación detallada porque en esta última definición se encierra el meollo de la cuestión. En primer lugar, qué entendemos por subconjunto propio. La idea es muy sencilla: si tenemos un conjunto A cualquiera, por ejemplo $\{a, b, c, d\}$, un subconjunto propio es cualquier otro conjunto que podamos formar con los elementos de A pero sin llegar a usarlos todos, pues al menos debe faltar uno. Ejemplos de subconjuntos propios de A serían:

$$\{a\} \quad \{a, b\} \quad \{a, b, c\} \quad \{a, c, d\} \quad \{d\} \quad \{b, c, d\}.$$

Según todo lo que hemos expuesto anteriormente, parece lógico que no podamos establecer una correspondencia uno a uno entre un conjunto y un subconjunto propio del mismo. Y esto es por una razón muy sencilla, y es que no tienen el mismo número de elementos, ya que el subconjunto propio tiene siempre menos elementos.

Veamos un caso en el que esto sí es posible. Consideremos $\mathbb{N}$, el conjunto de todos los números naturales, y un subconjunto propio, P, formado por todos los

números pares. Está claro que podemos establecer una aplicación uno a uno entre ambos conjuntos si a cada número natural n le hacemos corresponder dicho número multiplicado por 2.

$$n \rightarrow 2n$$

Según esto,

$$1 \rightarrow 2$$
$$2 \rightarrow 4$$
$$3 \rightarrow 6$$
$$\ldots$$

Es decir, que por cada número natural tenemos un número par y, de forma recíproca, por cada número par tenemos un número natural. Esto nos indica que el cardinal de ambos conjuntos es el mismo. La afirmación «hay tantos números naturales como números pares» no es una paradoja, aunque para nuestra intuición se plantee una aparente contradicción. Esto es una definición alternativa de conjunto infinito: un conjunto es infinito si se puede establecer una relación uno a uno entre dicho conjunto y alguna de sus partes (de sus subconjuntos propios).

En este escenario, la paradoja que se planteaba Galileo (véase el capítulo 3) ya no es tal paradoja, sino la constatación de que el conjunto de los números naturales es infinito.

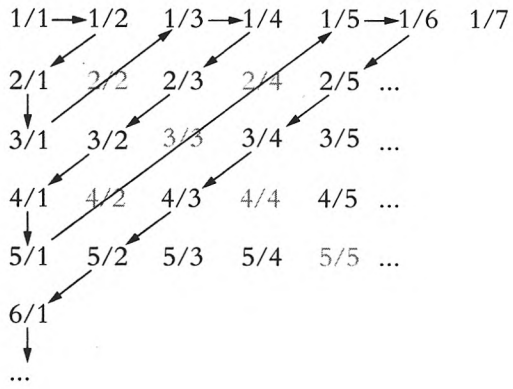
Mediante un razonamiento análogo podemos demostrar que el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, y el de los enteros, $\mathbb{Z}$, tienen la misma cardinalidad; para ello basta con establecer una correspondencia uno a uno entre ambos, haciendo que a todos los números positivos les correspondan los números pares, y a los negativos, los impares. De manera que podemos afirmar que existen tantos números enteros como naturales.

Conjuntos numerables

Mediante este procedimiento, Cantor había establecido un nuevo concepto muy importante, el de *numerabilidad* de un conjunto. Por definición, se dice que un conjunto A es numerable si se puede establecer una aplicación biyectiva entre A y un subconjunto de $\mathbb{N}$. En el fondo se trata de una idea simple que utilizamos con frecuencia en la vida cotidiana. Cuando decimos que una sesión de cine es numerada,

lo que hacemos es establecer una correspondencia biunívoca entre un subconjunto de los números naturales y las butacas, haciendo corresponder a cada una un número. En cierto modo podríamos decir que contable y numerable son sinónimos, porque contar los elementos de un conjunto no deja de ser una manera de asignar a cada elemento del conjunto en cuestión un número natural.

Ya había quedado demostrado que el conjunto de los números enteros era numerable. El paso siguiente iba a proporcionar un resultado realmente sorprendente: el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales también es numerable. Para ello Cantor demuestra que hay tantos números racionales como naturales. Para establecer una correspondencia entre naturales y racionales, Cantor acude a un esquema de una sencillez tan extraordinaria que obliga a pensar que no se le ocurrió a nadie antes porque ni siquiera imaginó que cupiera tal posibilidad, ya que es algo que atenta contra la más elemental de las intuiciones.



El esquema de las diagonales ideado por Cantor consiste en lo siguiente: se construye una tabla con los números racionales (recordemos que hablamos de fracciones) de la siguiente forma: en la primera fila colocamos las fracciones cuyo numerador es 1; en las siguientes, las de numerador 2; en la tercera, las de numerador 3, y así sucesivamente. En cada una de las filas suprimimos aquellas fracciones que se repiten. Por ejemplo, 2/2 es lo mismo que 1/1 o 3/3, y 2/4 es lo mismo que 1/2, etc. Una vez construida la tabla la recorremos de manera ordenada empezando por 1/1 y siguiendo el orden que indican las flechas. De esta forma tenemos garantizado que todos los números racionales son alcanzados una y sólo una vez por la ruta que hemos establecido. De esta manera la correspondencia uno a uno entre naturales y racionales queda establecida de la siguiente forma:

$$1 \rightarrow 1/1$$
$$2 \rightarrow 1/2$$
$$3 \rightarrow 2/1$$
$$4 \rightarrow 3/1$$
$$5 \rightarrow 1/3$$
$$\ldots$$

Lo más asombroso de este resultado es que se ha establecido una correspondencia uno a uno entre un conjunto discreto de números (el de los naturales) y otro denso (el de los racionales). Aquí el infinito empezaba a revelar sus fascinantes misterios. En principio es razonable, o mejor intuitivo, pensar que sólo los conjuntos discretos van a ser numerables. El hallazgo sorprendente fue ver que un conjunto denso como $\mathbb{Q}$ también era numerable. Intuitivamente asociamos la idea de numerar con la posibilidad de encontrar el elemento «siguiente» a uno dado, lo que en

PENSAR ES MÁS QUE HABLAR

Según la teoría de conjuntos de Cantor, el conjunto de palabras que podemos generar, ya sea hablando o escribiendo, es numerable. Si tenemos en cuenta que el conjunto de signos de que dispone un idioma es finito (letras, signos, etc.), es obvio que generará un conjunto numerable. Otra cosa diferente es el conjunto de cosas que podemos pensar; éste es, claramente, no numerable. Podemos pensar, por ejemplo, en el conjunto de circunferencias del plano que tiene la potencia del continuo. Extrapolando esta idea, lo que podemos decir se puede ordenar, lo que podemos pensar, no; por lo menos no en su totalidad. Debemos admitir, pues, que una parte de nuestro pensamiento admite una ordenación, pero que en su mayor parte se desenvuelve en el reino de lo caótico.

abcdefghijklm
nopqrstuvwxyz

Las letras de nuestro alfabeto constituyen un conjunto limitado y, por tanto, numerable.

un conjunto denso no es posible, ya que no existe el siguiente de ningún elemento. Si observamos la tabla anterior vemos, por ejemplo, que el 1/1 es el primer número y el siguiente es 1/2. Sin embargo sabemos que, por la propiedad de densidad, entre ambos hay infinitos números. Sabemos, por ejemplo, que 1/4 está comprendido entre 1 y 1/2, y en nuestra ordenación le corresponde el sexto lugar.

Por esta razón con Cantor el concepto de numerabilidad adquirió un protagonismo relevante en cuanto a la continuidad. La siguiente pregunta que se formuló era inevitable: cuando ampliamos el conjunto de los racionales con los irracionales ¿seguimos obteniendo un conjunto numerable? Es decir, ¿se puede afirmar que $\mathbb{R}$ es un conjunto numerable?

La respuesta es no. Cantor así lo demostró. Para ello empleó también un método similar al de la diagonal para demostrar la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, pero bastante más complejo; utilizándolo junto con el método de reducción al absurdo, demostró que el intervalo (0,1) de todos los números reales comprendidos entre 0 y 1 no era numerable y, por tanto, tampoco podría serlo $\mathbb{R}$. Con dicho método, Cantor instauró un serio precedente que tendría un papel determinante en las matemáticas del siglo XX; sin ir más lejos, forma parte del esquema que Gödel utilizó para demostrar su famoso teorema.

Más que infinito

Todos te conozcan, ninguno te abarque, que con esta treta lo moderado parecerá mucho, lo mucho infinito y lo infinito más.
El Héroe. Baltasar Gracián (1601-1658)

Cantor ya sabía que ni la recta real ni ninguno de sus segmentos eran numerables. El siguiente paso que dio fue un paso de gigante y en él fue donde se enfrentó al infinito cara a cara.

Recordemos que los números reales se obtienen cuando al conjunto de los racionales se le añade el de los irracionales, que son números del tipo $\sqrt{2}$ o π, es decir, cualquier número que no pueda obtenerse como cociente de dos enteros. También éste es un conjunto infinito y denso. Sin embargo, no se trata de un conjunto numerable, como lo eran los dos anteriores, es decir, no puede establecerse ninguna correspondencia con la serie de los números naturales $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Cantor se planteó entonces la siguiente cuestión: tenemos conjuntos infinitos con el mismo cardinal, que son equipotentes, o lo que es lo mismo, que tienen el

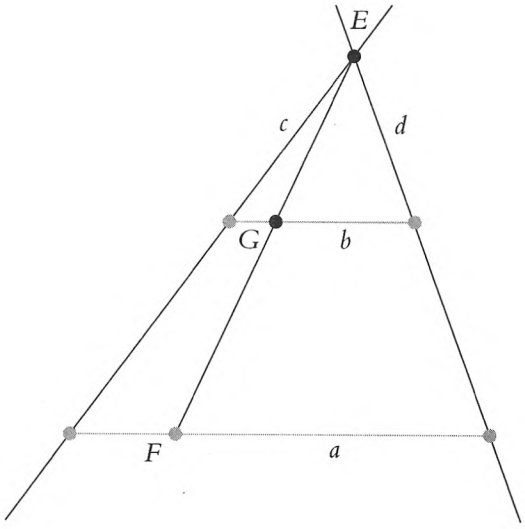
mismo número de elementos, como son los naturales, los números pares o los racionales. Pero en este escenario hace acto de presencia un nuevo conjunto, el de los números reales, que también es infinito, pero que parece tener más elementos que los tres anteriores. En este punto, Cantor se aventuró entonces en una de las ideas más revolucionarias de la historia de las matemáticas: ¿son todos los infinitos iguales o los hay más grandes y más pequeños? Como punto de partida tenía un infinito, el de los números naturales. Luego demostró que el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales no es numerable y que contiene más elementos que $\mathbb{N}$, que es más grande que el de los naturales y el de los racionales. Decidió llamar aleph-uno, simbolizado por $\aleph_1$, al cardinal de $\mathbb{R}$. A partir de ese momento habían nacido las matemáticas del transfinito.

UN VISIONARIO DEL SIGLO IX

Thabit ibn Qurra (ca. 836-901) fue un prestigioso científico árabe del siglo IX. Se sabe que era de Harrán, una región de Anatolia. Además de un gran número de textos de índole teológica y filosófica, fue artífice de una interesante obra matemática dedicada básicamente a la aritmética. En ella se plantea la posibilidad de que existan diferentes tipos de infinito, en el sentido de su ordenación, es decir, que unos pudieran ser más grandes que otros, mostrando así una audacia mental inusual para la época. En este sentido se le puede considerar como un auténtico precursor de las teorías de Cantor.

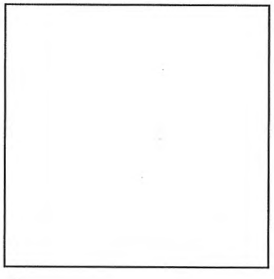
Cantor ya sabía que $\aleph_1$ es el número de puntos que hay en un segmento cualquiera de recta. Esto quiere decir que dos segmentos, independientemente de su tamaño, tienen el mismo número de puntos. Esto puede parecer sorprendente, pero la demostración es muy sencilla y, de hecho, ya era conocida por los griegos.

Dados dos segmentos a y b, para establecer una aplicación uno a uno entre cada uno de sus puntos basta con hacer lo siguiente: unimos los extremos de ambos segmentos mediante dos rectas, c y d, que se cortarán en un punto E.

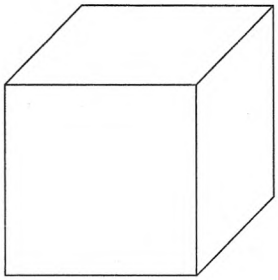


Entonces, dado un punto *F* cualquiera del segmento *a*, unimos mediante otro segmento dicho punto con el punto *E*, intersección de las rectas *c* y *d*. El punto *G* en el que corta al segmento *b* es la imagen buscada. Está claro que de esta forma por cada punto del segmento *a* obtendremos un punto del segmento *b* y viceversa. Esto prueba que el número de puntos contenidos en ambos segmentos es el mismo.

Es en este punto cuando Cantor hace un salto mortal. Con uno cualquiera de estos segmentos construye un cuadrado:



Y consigue demostrar que el número de puntos contenido en el cuadrado es también un conjunto cuyo cardinal es $\aleph_1$, es decir, que el número de puntos contenido en el cuadrado es el mismo que el que hay en uno cualquiera de sus lados. Da un paso más y, con el cuadrado como base, construye un cubo:



Y de nuevo demuestra que el número de puntos contenidos en el cubo es también $\aleph_1$.

«Lo veo, pero no lo creo», manifestó Cantor en una carta que le escribió a Dedekind en 1877 explicándole los resultados de estas correspondencias uno a uno entre figuras de diferentes dimensiones. Y es que lo que Cantor había demostrado iba en contra de cualquier idea intuitiva e incluso matemática que se pudiera tener sobre el mismísimo concepto de dimensión, ya que estaba trabajando con los infinitos puntos de objetos de una, dos y tres dimensiones, y todos tenían el mismo cardinal $\aleph_1$.

Este resultado es más que sorprendente. Lo que se está afirmando es que en un segmento cualquiera, por pequeño que sea (el lector puede aproximar sus dedos índice y pulgar como cuando se quiere decir de forma gestual que algo es muy pequeño) hay tantos puntos como hay en todo el Universo conocido. En el interior de lo infinitamente pequeño está lo infinitamente grande.

En realidad las cosas van bastante más allá, ya que $\aleph_1$ es el cardinal que corresponde al número de puntos de cualquier hiperespacio. Dicho de otra manera, para los aficionados a la ciencia ficción, en el caso de que se tuviera algún tipo de acceso a espacios de dimensión superior (cuatro, cinco o la dimensión que se quiera), $\aleph_1$ seguiría representado el número de puntos contenidos en él.

Números trascendentes

Hemos visto que los conjuntos $\mathbb{N}$ (naturales), $\mathbb{Z}$ (enteros) y $\mathbb{Q}$ (racionales) tienen el mismo número de elementos (son equipotentes), un número infinito que Cantor simbolizó como $\aleph_0$. El conjunto de los números reales se obtiene ampliando los racionales con los irracionales. La pregunta pertinente ahora sería: ¿hay tantos números irracionales como para que al añadirlos a los racionales el número total se dispare de tal manera que pase a ser $\aleph_1$? La respuesta a esta pregunta encierra una

curiosidad matemática no exenta de cierto misterio. Pero para comprenderla es necesario conocer primero algo de los números llamados *trascendentes*.

Una ecuación en x de grado n con coeficientes racionales es una igualdad como

$$C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \ldots + C_1 x + C_0 = 0.$$

A alguien que no esté familiarizado con este tipo de expresiones puede parecerle complicado, pero no lo es en absoluto. Una ecuación, tal y como la entendemos en este contexto, no es más que una igualdad en la que a la izquierda hay sumandos con la incógnita x elevada a algún exponente y multiplicada por números (que se llaman coeficientes), y a la derecha, el número 0. Resolver una ecuación consiste en encontrar un valor de la x que la haga cierta. Por ejemplo,

$$x - 2 = 0$$

es una ecuación en la que los coeficientes son 1 y –2, y cuya solución es $x = 2$.

Un número irracional, como por ejemplo $\sqrt{2}$, es el resultado de resolver una ecuación del tipo

$$x^2 - 2 = 0.$$

Por definición, se dice que un número x es *algebraico* cuando es raíz (solución) de una ecuación polinómica a coeficientes enteros. Aclaremos algunas cosas para hacer más inteligible esta definición. Una ecuación polinómica no es más que un polinomio igualado a cero, como por ejemplo

$$3x^2 + 5x - 1 = 0,$$

donde 3, 5 y –1 son los coeficientes. La expresión

$$\sqrt{3}x^5 - 5x^2 = 0$$

es también una ecuación, pero el primer coeficiente no es un número entero y, por lo tanto, no puede ser considerada una ecuación polinómica en el sentido que le estamos dando.

En cambio, el número 3 es un número algebraico, ya que es solución de la ecuación:

$$x - 3 = 0.$$

Está claro que cualquier número racional es un número algebraico, ya que siempre es posible construir una ecuación polinómica de la que dicho número sea una solución. Como hemos visto antes, $\sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ y, por tanto, es también un número algebraico.

Cuando un número no es algebraico se dice que es *trascendente*, término acuñado por Euler y que significa que el cálculo de dicho número «trasciende» de alguna forma las operaciones habituales. Demostrar que un número es trascendente puede llegar a ser una tarea realmente ardua. El matemático francés Joseph Liouville (1809-1882) demostró la existencia de números trascendentes y encontró un método para generar algunos casos particulares de dichos números. El primero que tuvo el honor de figurar en esta corta lista fue L (número de Liouville), que tiene una definición un tanto compleja para darla en este contexto. El número en cuestión tiene el siguiente aspecto:

$$L = 0{,}110001000000000000000010000...$$

En 1873, el matemático francés Charles Hermite (1822-1901), discípulo de Liouville, probó que *e* (la base de los logaritmos naturales cuyo valor aproximado es 2,7182818284 5904523536 0287471352...) no era un número algebraico. La prueba de que no resultó una tarea fácil es que el mismo Euler había fracasado en el intento.

Uno de los más famosos y populares números de la historia de las matemáticas es π (pi), que expresa la relación que existe entre el diámetro y la longitud de una circunferencia. Demostrar la trascendencia de *e* le supuso tal esfuerzo a Hermite que no se vio con ánimos de emprender la misma tarea para el número π, lo que manifestó en una carta que escribió a Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880): «No me he atrevido a intentar la demostración de la transcendencia de π. Si otros lo intentan nadie será más feliz que yo, pero créeme, mi querido amigo, no dejará de costarles algunos esfuerzos».

Así pues, la demostración de la trascendencia del número π tardó algo más de tiempo. La consiguió Lindemann en 1882, y marcó un hito en la historia de las matemáticas, ya que, como consecuencia de ello, también quedó demostrada la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

Se ha demostrado que son números trascendentes e, π, e^{π}, $2^{\sqrt{2}}$, sen(1), ln2, ln3/ln2, y algunos otros, pero actualmente quedan abiertas cuestiones importantes,

Charles Hermite en una fotografía tomada hacia el año 1887.
El matemático francés demostró que el número e no es algebraico.

como saber si son trascendentes números como e^e, π^π, o π^e. Se sabe, por ejemplo, que al menos uno de los dos números (probablemente los dos) π^e y π^{+e} es trascendente, pero no se ha conseguido probar la trascendencia individual de cada uno de ellos. Tal y como se presentan, los números trascendentes son bichos raros y difíciles de encontrar, lo que induce a pensar que deben de ser escasos, pero la realidad es muy distinta: hay muchos, muchísimos, infinitos y más.

En el infinito conjunto de los números reales tenemos, por un lado, los números racionales, que son todos algebraicos, y, por otro, los irracionales, entre los cuales nos las vemos y deseamos para encontrar y demostrar cuáles de ellos son trascendentes. Pero resulta que están en franca mayoría; para ser precisos, hay más números trascendentes que algebraicos.

Cantor, dando muestras de una genialidad sorprendente (él mismo llegó a asombrarse de sus propios resultados) demostró con absoluta sencillez la existencia de infinitos números trascendentes. Por un lado, sabía que el conjunto de los números

reales no es numerable; por otro, había demostrado que el conjunto de los números algebraicos sí es numerable. De ambas proposiciones se deduce de forma inmediata la existencia de números que no sean algebraicos. Cantor demostró, además, que dicho conjunto no era numerable.

La conclusión es que lo que convierte al conjunto de los números reales en un monstruo es precisamente la presencia de estos esquivos números trascendentes.

Números transfinitos

La aritmética de los números transfinitos es distinta a la de los finitos.
G. Cantor

Como vimos en el apartado anterior, si tenemos un conjunto como $A = \{a, b, c, d\}$, podemos formar una serie de subconjuntos

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\},$$

que eran lo que habíamos llamado subconjuntos *propios* de A. Reciben este nombre debido a que cuando se habla de los subconjuntos de un conjunto dado, es decir, de conjuntos que se forman con elementos del mismo, se considera que el conjunto total $\{a, b, c, d\}$ y el conjunto vacío son también subconjuntos de A. El conjunto vacío, que se simboliza con $\emptyset$, es el conjunto que carece de elementos, y se considera que es subconjunto de cualquier conjunto. Estos dos conjuntos, el original con todos sus elementos y el vacío, se consideran subconjuntos *impropios*. Pues bien, cuando a la colección anterior le añadimos estos dos conjuntos, se tiene la colección completa de todos los subconjuntos de A:

$$\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\},$$

que forman un total de 16 subconjuntos.

Tenemos que $2^4 = 16$, de manera que el número de subconjuntos de A es 2 elevado al número de elementos que tiene A. Se demuestra fácilmente que esto siempre es así, de manera que podemos afirmar que dado un conjunto cualquiera que tenga n elementos, su número de subconjuntos es siempre 2^n.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto A se llama *conjunto de las partes de A,* y se simboliza $\wp(A)$. Cantor demostró que, en general, dado un conjunto cualquiera, el conjunto de sus partes era mayor que éste, es decir, que contenía más elementos, lo que, expresado de forma correcta, equivale a afirmar que su cardinal es mayor. Para no hacer un abuso de paréntesis vamos a utilizar un símbolo alternativo para hacer referencia a un cardinal que es el de las barras verticales, de manera que, a partir de ahora, Card $(A) = |A|$. Es decir, el resultado anterior lo podemos expresar del siguiente modo:

$$|A| < |\wp(A)|.$$

Cantor demostró varios teoremas, pero cuando se habla del «teorema de Cantor», normalmente se hace referencia a este teorema en concreto.

Una forma alternativa de expresarlo sería:

$$|A| < 2^{|\wp(A)|}.$$

Este teorema posibilita «ordenar» los infinitos. Cantor considera que el infinito «más pequeño» es el que se corresponde con el cardinal de $\mathbb{N}$, del conjunto de los números naturales, al que llamó $\aleph_0$, de manera que, según la nomenclatura empleada antes se tiene que

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Aplicando el teorema de Cantor se obtiene:

$$|\aleph_0| < |\wp(\aleph_0)| < |\wp(\wp(\aleph_0))| < \ldots$$

A las series de cardinales que aparecen en esta serie ordenada Cantor los denominó números aleph, poniéndoles un número a cada uno de ellos, aleph-1, aleph-2, aleph-3, etc. Se leen alef uno, alef dos, etc., y se escriben poniendo el número de orden como subíndice de la letra hebrea aleph:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$$

Éstos constituyen los llamados números *transfinitos*.

CASI INFINITO

No sólo los infinitos o los transfinitos exceden nuestra finita naturaleza. Por ejemplo, un número como

$$10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}$$

resulta ser monstruosamente grande. Podría ser la respuesta a un cálculo matemático. Un procesador, mediante un lenguaje adecuado, podría obtenerlo como resultado después de un número razonable de pasos. Esto es debido a que, tanto en la simbología matemática como en el lenguaje de programación, contamos con las herramientas necesarias. De no ser así, si tuviéramos que escribir el número con todas sus cifras necesitaríamos un material (sin importar el soporte, ya fuera papel o cualquier otro) que superaría con mucho el número de partículas que hay en el universo. Además, tampoco dispondríamos del tiempo necesario para escribir este número, ya que también superaría con creces la edad del universo.

Cualquier número que pueda existir, incluso los que ni siquiera hemos imaginado, está en esta sucesión ordenada de números. Si antes de Cantor se afirmaba que nada podía ser más grande que infinito, después de sus teorías podemos estar seguros de que siempre existirá un infinito más grande que otro dado. Cantor había sobrepasado los límites de la creación: por grande que fuera todo lo que Dios pudiera crear, existiría siempre un infinito mayor, una idea que chocaba frontalmente con las profundas creencias religiosas del propio Cantor.

La hipótesis del continuo

Hasta ahora hemos hablado del concepto de cardinalidad de un conjunto. Sabemos que es un concepto que hace referencia al número de elementos que forman el conjunto. También hemos visto que cuando los conjuntos son finitos se pueden numerar, en el sentido de que se puede asignar un número natural a cada uno de ellos de forma consecutiva. Por otro lado, cuando se trata de conjuntos con infinitos elementos, la idea de numerar cada uno de ellos es posible mediante lo que hemos llamado correspondencia biunívoca, que es una correspondencia que asigna un número natural a cada uno de los elementos del conjunto. A los conjuntos en que esto era posible los hemos llamado numerables. Pero también hemos visto que había conjuntos que no eran numerables y, para hacer referencia, de alguna manera, a

la «cantidad» de elementos que tenían se recurría al concepto de cardinalidad. De manera que el cardinal de un conjunto no es exactamente un número, es más bien un concepto asociado a la idea de magnitud numérica. En el fondo es un truco extraordinariamente ingenioso para saber cuán grande es un conjunto. De hecho, el truco consiste en comparar conjuntos mediante unas reglas de juego muy bien definidas que nos permitan poder asegurar cuándo ambos conjuntos son igual de grandes y cuándo no, sin que importe si se trata de conjuntos finitos o infinitos.

LA LIBERTAD DE LAS MATEMÁTICAS

Si actualmente hay algo que se puede decir que se ha logrado plenamente es el deseo de Cantor de que existiera una matemática libre. Por lo menos en el sentido de que nadie ni nada (por lo menos en los llamados países civilizados) pone palos en las ruedas a una teoría matemática por razones filosóficas o religiosas. Y como muestra un botón: actualmente, los llamados «cardinales grandes» son conjuntos de tamaño tan monstruoso que los transfinitos de Cantor pueden parecer enanos a su lado. Su definición es altamente compleja, aunque la forma de construirlos guarda ciertas similitudes con la generación de los aleph a base de considerar la cadena de conjuntos, incluidos unos en otros, y tomar luego los correspondientes conjuntos de partes.

Así como Cantor llamó aleph-cero al cardinal de los números naturales, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, al de los números reales $\mathbb{R}$ le puso un nombre alternativo, lo llamó c, el *continuo*. El motivo es que los números reales «llenan» completamente la recta (llamada asimismo recta real), y como dicha recta es ahora una sucesión continua de números (ya no tiene agujeros) puede recibir el calificativo de continuo. Según esto,

$$|\mathbb{R}| = c = 2^{\aleph_0}.$$

Pero los números aleph forman una sucesión creciente en el sentido de que

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$$

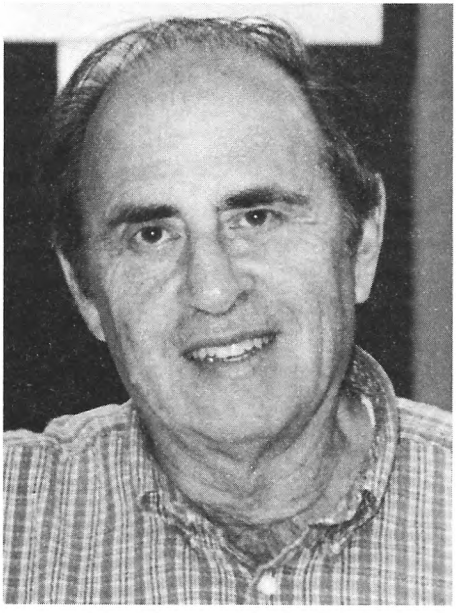
Es en este punto donde Cantor se formuló la siguiente cuestión: ¿Existe algún cardinal que esté comprendido entre el de los números naturales y el continuo? De alguna forma intuyó que se cumplía la igualdad

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Es decir, que no existen conjuntos cuyo «tamaño» se encuentre entre el del conjunto de los números naturales y el de los reales. A esta conjetura se la llama *hipótesis del continuo*. Cantor hizo grandes esfuerzos, al borde del agotamiento, para demostrar este resultado. En más de una ocasión creyó haberlo alcanzado, pero nunca consiguió una demostración totalmente satisfactoria.

Varios matemáticos contemporáneos de Cantor, como Hilbert, Russell o Zermelo, intentaron infructuosamente demostrar la hipótesis del continuo. El matemático húngaro G. Köning (1849-1913) en el congreso de Heidelberg de 1904 presentó una demostración de que dicha hipótesis era falsa. Cantor pensó siempre que la demostración no podía ser cierta, tenía una fe ciega en su intuición, pero no consiguió encontrar fallos en la demostración de Köning. Fue Zermelo quien encontró el fallo, y el problema siguió abierto. Hilbert lo incluyó en 1900 en su famosa lista de los veintitrés problemas sin resolver más importantes.

En 1963, el matemático estadounidense Paul J. Cohen (1934-2007) demostró, basándose en los resultados sobre la consistencia axiomática de Gödel, que la hipótesis del continuo podía ser cierta o falsa según el sistema de axiomas que se eligie-



El matemático estadounidense Paul J. Cohen demostró en 1963 que la hipótesis del continuo, una de las grandes cuestiones abiertas de las matemáticas, es indemostrable en el marco de los axiomas de la teoría de conjuntos.

ra para construir la teoría de conjuntos. Se llegó de esta forma a una situación bastante similar a la que se había planteado con el famoso quinto postulado de Euclides sobre las rectas paralelas (por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela): según en qué geometría, el postulado se cumple (geometrías euclideas) y según en cual, no (como en la geometría hiperbólica).

A pesar de todo, hay quien piensa que éste no es en absoluto un tema cerrado, ya que una nueva colección de axiomas que fortalezca la teoría de conjuntos podría hacer decidible la hipótesis del continuo. Es más, hasta que esto no suceda no podemos asegurar que tenemos una idea clara de lo que es un número real.

Capítulo 6

El infierno de Cantor

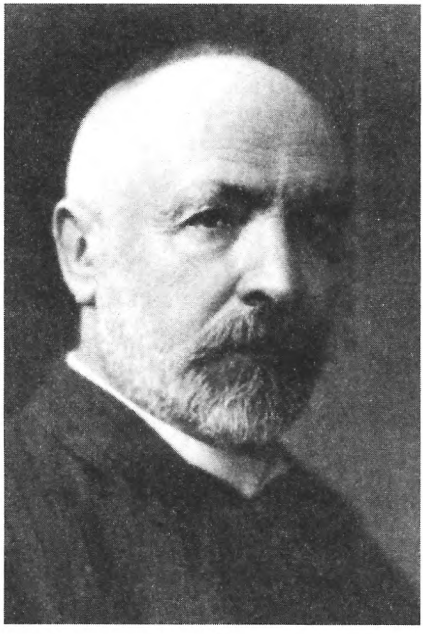
Cuando los hombres descubren nuevas tierras, nuevos parajes que habrán de quedar registrados en los mapas y en los libros de geografía, pagan un precio por ello. Ningún descubrimiento es gratuito. Algunos se ven recompensados por la gloria y el reconocimiento de su hazaña, mientras que otros se desvanecen en la soledad absoluta de la muerte sin tan siquiera alcanzar el consuelo de saber si aquello a lo que entregaron su vida valía o no la pena.

Los primeros años

Georg Cantor nació en San Petersburgo el 3 de marzo de 1845. Su padre, Georg Waldemar Cantor, era de origen danés, pero ya de muy joven se trasladó a San Petersburgo, donde montó un floreciente negocio de importación de productos textiles, que abandonó al cabo de un tiempo para dedicarse a la correduría de bolsa. Llegó a alcanzar una fortuna razonable, pero a base de sacrificios, voluntad y conocimientos, valores que en todo momento trató de inculcar a sus hijos, a los que educó en las reglas morales dictadas por el luteranismo, pues era un hombre de profundas convicciones religiosas. Se casó con Maria Anna Böhm, católica y de origen ruso, hija del director de orquesta de la Ópera de San Petersburgo. Georg Woldemar también procedía de una familia con una arraigada tradición musical, por lo que no es de extrañar que la formación en ese arte, junto con los valores religiosos, ocuparan un primer plano en la educación de sus hijos.

Cantor fue el primogénito de cuatro hermanos. En los primeros años de su infancia su educación corrió a cargo de tutores, hasta que en 1856 ingresó en la escuela primaria de San Petersburgo. Cantor siempre recordaría aquellos primeros años de su infancia en la ciudad rusa como los más felices de su vida.

En 1856, como consecuencia de una afección pulmonar, el padre de Cantor se vio obligado a abandonar los rigores del invierno ruso y a trasladarse con su familia a Alemania. Tras una breve estancia en Wiesbaden, se instalaron en Frankfurt definitivamente. Georg realizó sus primeros estudios como pensionista en un colegio privado situado en Darmstadt, pequeña localidad cercana a Frankfurt, donde se



Georg Cantor, creador de la teoría de conjuntos, está considerado uno de los matemáticos más insignes de la historia.

graduó en 1860. Por entonces ya había mostrado aptitudes excepcionales para las matemáticas, especialmente en el ámbito de la trigonometría. Sin embargo, su padre no acababa de ver claro cuál podía ser el futuro de alguien dedicado exclusivamente a las matemáticas, por lo que le sugirió a su hijo que cursara estudios de ingeniería. Cantor, como era habitual, accedió a los deseos de su padre, y a la edad de 15 años ingresó en el Instituto de Tiesbaden.

Muchas fueron las cartas que Cantor recibió de su padre, la mayoría de ellas destinadas a fomentar una fortaleza moral sustentada en principios religiosos. Entre todas ellas cabe destacar una que le mandó el 25 de mayo de 1862 en la que le decía, entre otras cosas:

> «[...] Con frecuencia los individuos más prometedores fracasan tras oponer una débil resistencia a las dificultades que siguen a su entrada en los asuntos prácticos. Una vez roto su coraje, se atrofian completamente e incluso, en el mejor de los casos, no llegarán a nada más que a ser genios arruinados... Créeme, mi querido hijo: tu más sincero, auténtico y experimentado amigo, ese corazón firme que debe vivir en tu interior, es un estado de ánimo de

verdadera religiosidad... Para prevenir todos los problemas y dificultades que inevitablemente se alzan contra nosotros por la envidia y la maledicencia de los enemigos abiertos o secretos en nuestra aspiración al éxito en la actividad de nuestra especialidad o negocio, para combatirlos con éxito necesitas ante todo adquirir la mayor cantidad posible de conocimientos y habilidades técnicas... Acabaré con estas palabras: tu padre, y en realidad tus padres y todos los demás miembros de la familia, tanto en Alemania como en Rusia y Dinamarca, tienen puestos sus ojos en ti, como el hijo mayor, y esperan que llegues a ser una estrella luminosa en el horizonte de la ciencia. Que Dios te dé fortaleza, salud, un carácter cabal y sus mejores bendiciones. Y que tú sigas siempre por sus sendas. ¡Amén!».

Esta carta tenía ciertos tintes premonitorios en cuanto a lo que iba a ser la agitada vida profesional de Cantor. Su padre debía de ser sin duda un hombre inteligente que intuyó no sólo la fuerte vocación de su hijo por las matemáticas, sino también su espíritu inquieto y creativo, y quiso prepararlo para lo que se podría encontrar. Una prueba de ello es que aquel mismo año autorizó a su hijo a iniciar los estudios de matemáticas. Como agradecimiento, Cantor le escribió la siguiente misiva:

«Mi querido padre, podréis daros cuenta del gran placer que me ha producido su carta. Ella establece mi futuro... Ahora soy feliz cuando veo que no se disgustará si sigo mis sentimientos preferidos. Espero que usted, querido padre, ha de vivir para encontrar un placer en mi conducta, dado que mi alma, todo mi ser, vive en mi vocación. Lo que un hombre desea hacer y a lo que su compulsión interna le empuja, lo cumplirá».

Estas palabras de agradecimiento, que más parecen las de un joven al que por fin su familia accede a que tome los hábitos, expresan el profundo agradecimiento que siente Cantor por el hecho de haber conseguido la autorización paterna para iniciar los estudios de matemáticas. Algunos biógrafos coinciden en opinar que la incondicional obediencia que Cantor profesaba a su padre fue una de las causas más importantes por las que arrastró siempre una gran inseguridad profesional en los ámbitos universitarios.

En 1862 inició sus estudios de matemáticas, filosofía y física en la Universidad de Zurich, pero fue un periodo relativamente corto, ya que, a raíz de la muerte de

su padre, en junio de 1863, se trasladó a la Universidad de Berlín. Es curioso señalar que, a partir de ese momento, Cantor no volvió a mencionar jamás a su padre.

Hasta comienzos del siglo XIX, Francia había sido el país de referencia para el universo de las matemáticas, pero en las fechas en que Cantor entró en la universidad de Berlín el feudo matemático se había trasladado a Alemania. Allí tuvo como profesores a matemáticos tan insignes como Kronecker, Kummer o Weierstrass. Este último sería el que mayor influencia ejerció en él, mientras que Kronecker, que le había introducido en la teoría de números, el que acabaría siendo su peor adversario.

La mayoría de los trabajos que siguieron a aquel periodo estuvieron dedicados a la aritmética y el álgebra. En el verano de 1866 Cantor tuvo ocasión de conocer el ambiente matemático de la Universidad de Gotinga, uno de los centros matemáticos más prestigiosos de Europa. A su vuelta a Berlín formó parte de un grupo de matemáticos jóvenes que se reunían semanalmente en un bar para hablar de matemáticas en un ambiente más relajado que el de las aulas universitarias. En 1867 Cantor se doctoró con una tesis en la que realizaba un profundo estudio sobre las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss. En el prólogo puede leerse una afirmación que preludia lo que sería la inquieta mente de uno de los matemáticos más importantes de la historia: «En matemáticas, el arte de proponer problemas es mucho más estimulante que el de resolverlos». Esta tesis doctoral le permitió obtener el grado de *Privatdozent* en la Universidad de Halle, una figura académica en la que la remuneración provenía directamente de los estudiantes, de manera que la cuantía dependía de la cantidad de estudiantes que acudieran a sus clases.

Halle era una pequeña población cercana a Leipzig. No tenía en absoluto el prestigio de universidades como la de Berlín o Gotinga, algo de lo que Cantor era muy consciente, pero a pesar de que nunca cejó en sus intentos de abandonar Halle, acabaría pasando allí el resto de su vida.

Fue en 1873 cuando Cantor se hizo un primer planteamiento sobre la posibilidad de que pudieran existir distintos tipos de infinitos. Intuyó que entre el conjunto de los números naturales y el de los reales podría haber diferencias no sólo cualitativas, sino también cuantitativas. Las primeras estaban claras: el conjunto de los naturales es numerable y el de los reales, no; el paso siguiente, llegar a demostrar que el infinito de los reales es mayor que el de los naturales, supondría un hito, no sólo en el pensamiento de Cantor, sino en la historia de las matemáticas. En 1874 apareció una primera demostración en el *Journal de Crelle*. Hay que tener en cuenta que en aquella época ni siquiera se podía hablar de conjuntos con la naturalidad que

Universidad de Halle,en la que Cantor dio clases desde 1872. El matemático residió en esta pequeña ciudad alemana hasta su muerte.

acabamos de hacerlo aquí. Su primer trabajo al respecto apareció en 1878 bajo el nombre de «Una contribución a la teoría de conjuntos», también publicado en el *Journal de Crelle*. Se trata de un ensayo que, además de contener un resultado absolutamente inesperado sobre los números algebraicos, iba a iniciar una nueva era en la historia de las matemáticas. En él se apuntaban ya las ideas, todavía incipientes, sobre cardinales transfinitos. Pero esto, antes que suponerle el reconocimiento académico, con la consiguiente facilidad para optar a un puesto digno que le permitiera seguir investigando, supuso el inicio de un vía crucis en el que algunos matemáticos, como su antiguo profesor Kronecker, valiéndose de su prestigio académico, acabarían derrotando profesionalmente a Cantor, una derrota con serias repercusiones psicológicas.

Las revistas científicas

En 1826, August Leopold Crelle (1780-1855) fundó el *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Revista para la matemática pura y aplicada)*. En el título se mani-

fiesta la voluntad de reafirmar una unidad temática de la matemática (ya no se quiere hablar de las matemáticas, en plural, como herencia medieval o renacentista), sino de una ciencia unificada, hija de la revolución, que tiene dos apartados claramente diferenciados en matemática aplicada y matemática pura. En cualquier caso, hay que tener en cuenta que las revistas de matemáticas hay que incluirlas en un marco más amplio, que es el de las revistas científicas.

La primera revista científica de la historia fue auspiciada por la Royal Society como signo de lo que iba a acabar por ser ineludible: la difusión e incluso el carácter de estas publicaciones permanecería bajo el paraguas de las sociedades científicas. En cuanto a las primeras publicaciones dedicadas exclusivamente a la matemática, como los *Annales de Gergonne* o el *Journal de Crelle*, hay varios aspectos interesantes que destacar. En primer lugar, la extensión de los trabajos, que se ve sensiblemente reducida si se compara con los publicados en libros. En segundo lugar, que no se publican textos antiguos. La novedad y originalidad es una condición expresa para la publicación. Otro aspecto interesante es que, por primera vez, aparecían publicaciones de trabajos conjuntos y no debidos a la mano de un solo individuo, como había sucedido hasta entonces.

MATEMÁTICA SICILIANA

Giovanni Battista Guccia.

Una de las primeras sociedades matemáticas nació, sorprendentemente, en la ciudad de Palermo, y fue gracias a la publicación *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, fundada por el matemático italiano Giovanni Battista Guccia (1855-1914), que basaba la fuerza de sus publicaciones en el hecho de situar a su sociedad matemática en uno de los países con mayor «pedigrí matemático» de la historia. El caso es que esta «buena crianza», junto a diversos premios que el propio Guccia instauró, llevó a destacados matemáticos a enviar sus trabajos a la asociación siciliana, que en poco tiempo tomó un renombre internacional insospechado, situándose entre los primeros puestos del elenco internacional de sociedades matemáticas.

El objetivo básico de las sociedades matemáticas era el de abarcar el máximo territorio posible y el de asegurar la permanencia en el tiempo de las revistas que publicaban, proveyéndolas para ello del material necesario para su difusión. Con el tiempo quedó demostrado que dicha supervivencia no era posible sin el soporte de determinadas instituciones oficiales. Era inevitable que todas estas corporaciones quedaran sometidas a una cierta influencia social y política, ya que se convirtieron en un signo de identidad cultural para los países que las sustentaban. Esto acabó siendo un arma de doble filo, ya que, si bien es cierto que por un lado suponían un respaldo importante, por otro tenían el inconveniente de que la potencial internacionalidad de la ciencia podía quedar restringida en una estrecha frontera. Además, los órganos de control para la admisión de publicaciones podían no ser todo lo objetivamente científicos que muchos hubieran deseado. A la larga, el tiempo ha demostrado que la presencia de las sociedades matemáticas es una barrera para ciertos trabajos innovadores que no entran dentro de ciertos cánones establecidos por una comunidad cerrada, que muchas veces se rige por otros intereses que no son los científicos. Como dato indicativo cabe señalar que dos tercios de todos los artículos de matemáticas publicados en el año 1900 lo hicieron en medios de comunicación que no eran de matemáticas.

De entre las primeras sociedades científicas, que ya empezaron a surgir a mediados del siglo XIX, las sociedades matemáticas más importantes fueron, por orden de aparición en escena: Sociedad Matemática de Moscú (1864); Sociedad Matemática de Londres (1865); Sociedad Matemática de Francia (1872); Círculo Matemático de Palermo (1884); Sociedad Matemática Americana (1888); Sociedad Matemática Alemana (1890). La Sociedad Matemática Española se fundó en 1911.

MATEMÁTICA INDISCRETA

La revista científica creada por Henry Oldenburg en el año 1665 se ha estado publicando desde su creación hasta nuestros días, con tan sólo dos interrupciones: una a causa de una epidemia de peste en Londres, y la otra por enfermedad de Oldenburg, trabajador incansable. Su entusiasmo era tal que llegó a escribir cinco cartas semanales, creyendo firmemente que la ciencia no tenía barreras ni fronteras, lo que le llevó a seguir publicando sus cartas incluso en tiempos de guerra. Esto fue considerado como una absoluta falta de discreción en tiempos políticamente delicados y fue encarcelado durante un verano en la Torre de Londres.

La controversia del infinito

Kronecker dijo en una ocasión: «Dios creó los diez primeros números; el resto es obra del hombre», afirmando así la visión que tenía del quehacer matemático. Todo debía ser construido con elementos conocidos, perfectamente definidos y en un proceso que sólo contemplara un número finito de pasos. En otras palabras, Kronecker no quería saber nada con el infinito actual. En una ocasión afirmó que debía rechazarse al infinito como «...futilidad perniciosa heredada de filosofías anticuadas y teologías confusas, pudiendo llegar sin él tan lejos como se quiera...».

Kronecker se define así como un claro seguidor del llamado *finitismo*. Y puestos a etiquetar con «-ismos» del también llamado *operacionismo*, que viene a ser una forma de rechazar cualquier razonamiento que no esté respaldado por una operación concreta bien definida. En este sentido proclamaba un control por parte de autoridades académicas reconocidas con el fin de conseguir que «La riqueza de su experiencia práctica con problemas sanos e interesantes, dará un nuevo sentido y un nuevo ímpetu a las matemáticas. La especulación matemática unilateral e introspectiva conduce a campos estériles», haciendo en la última frase una clara referencia a los trabajos de Cantor.

Hay que tener en cuenta que Kronecker era uno de los editores del *Journal de Crelle*, y no es de extrañar, por tanto, que en 1877 se opusiera a cualquier publicación en la revista de trabajos que estuvieran firmados por Cantor. La oposición a éste traspasó lo que pudiera calificarse como mero desacuerdo científico para llegar a convertirse en descalificaciones personales puras y duras, llegando a tachar a Cantor de renegado, charlatán o de corruptor de la juventud estudiosa.

No hay que olvidar que Cantor fue el mejor alumno que había tenido Kronecker, y es lógico suponer que esta actitud del que había sido su maestro le causara un profundo dolor y una carga psicológica de la que nunca llegaría a desprenderse.

Dedekind

Julius Richard Dedekind (1831-1916), que nació en Brunswick y fue el cuarto hijo de una familia acomodada, dedicó la mayor parte de su vida a la investigación matemática. Se le puede considerar un algebrista preocupado por la fundamentación del análisis, y para ello eligió como ladrillos los conjuntos y las aplicaciones entre ellos.

Weierstrass, Cantor y Dedekind trabajaron en los números reales de forma separada. La labor de los dos últimos ha quedado como las construcciones clásicas que

En este sello conmemorativo dedicado a la figura de Dedekind puede verse, a la derecha de la imagen, la fórmula que representa la descomposición de un número en factores primos.

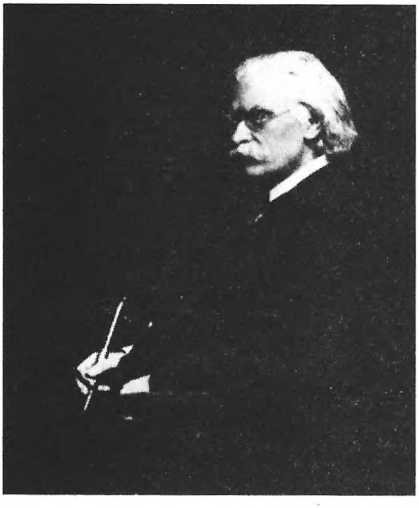
figuran en los libros de texto. La de Cantor, al adoptar un esquema conjuntístico, era la más próxima al pensamiento de Dedekind, especialmente por la forma en que ambos abordaban el gran tema, de cariz más filosófico que matemático, en torno a la continuidad del espacio. Tanto Cantor como Dedekind afirmaban que no existía ninguna probabilidad de demostrar dicha continuidad. A lo máximo que se podía aspirar era a adoptarla como postulado.

En 1872, en un viaje de vacaciones a Suiza, Cantor conoció a Dedekind, uno de los pocos matemáticos de su época, por no decir el único, con el que mantuvo una comunicación, básicamente epistolar, basada en la confianza y el respeto mutuos. Se puede asistir al nacimiento de la teoría de conjuntos leyendo la correspondencia que mantuvieron Cantor y Dedekind en el periodo 1874-1884. Es curioso, sin embargo, observar que en la mayoría de los escritos más importantes de este último apenas se menciona la palabra conjunto. Ello es debido a que Dedekind consideraba que el camino abierto en este aspecto por Cantor era ya un camino seguro por el que se podía transitar. Así, Dedekind hace hincapié sobre todo en el concepto de aplicación.

En 1881 quedó vacante una plaza en la cátedra de matemáticas de la Universidad de Halle y Cantor recomendó a Dedekind para el cargo. Lo hizo con entusiasmo a través de una carta para el Ministerio en la que elogiaba las aptitudes de su amigo para ocupar la plaza; sin embargo, y a pesar de las insistencias de Cantor, Dedekind acabó rechazando la plaza. Y es que Dedekind no destacaba precisamente por ningún tipo de ambición social en lo referente al ámbito académico. Estuvo impartiendo clases en el Collegium Carolinum durante treinta años, el mismo centro en el que lo habían hecho su padre y su abuelo. Para colmo, el ministerio acabó

concediendo la plaza a un recomendado de Kronecker. Esta anécdota acabó enfriando las relaciones entre Cantor y Dedekind, que dejaron de escribirse durante diecisiete años. Hasta 1899, por iniciativa de Cantor, no reanudaron sus relaciones.

Mittag-Leffler



Fotografía de Gösta Mittag-Leffler tomada en 1916.

En la misma época en que las relaciones de Cantor y Dedekind se acercaban al punto de congelación apareció en el horizonte un personaje que habría de alcanzar cierta relevancia social en el mundo científico y que le serviría de apoyo a Cantor en una de sus épocas más difíciles: Gösta Mittag-Leffler (1846-1927). Este matemático de origen sueco es más conocido por sus esfuerzos por difundir las obras de los grandes matemáticos que por sus propias aportaciones. Su matrimonio con una rica heredera le permitió emplear tiempo, esfuerzos y dinero en la fundación, en 1882, de una nueva revista, *Acta Mathematica*, que llegaría a adquirir un prestigio notable en la comunidad internacional. Cantor y Mittag-Leffler sintonizaron rápidamente, y éste último accedió a traducir la mayoría de los artículos que Cantor le propuso. De las traducciones al francés o de sus revisiones se encargaba un grupo de matemáticos liderados por Charles Hermite, al que se debe, como se apuntaba en el capítulo 5, la demostración de la trascendencia del número *e*, aunque en su versión final eran revisadas por el propio Cantor. Las publicaciones en las *Acta* iban a suponer un apoyo muy importante para la nueva teoría de los números transfinitos, pero un lamentable incidente surgido a raíz de la publicación de los *Principios de una teoría de tipos de orden*, daría al traste con este respaldo. Cantor había estado luchando con una demostración a la conjetura del continuo sin llegar a un resultado aceptable. En la obra antes mencionada se establecían unas bases firmes para lo que Cantor consideraba un empujón a la teoría de conjuntos que serviría para facilitar la demostración. Mittag-Leffler pospuso durante más de un año la publicación de este artículo, aduciendo que no sólo no se daba una demostración del teorema del continuo, sino

que, además, iba a poner en su contra a la comunidad científica debido a la utilización de números transfinitos en un lenguaje que todavía no había sido aceptado entre los matemáticos, además de contener, junto al desarrollo, conceptos filosóficos ajenos al razonamiento matemático. Cantor consideró esta negativa como una «auténtica catástrofe», según sus propias palabras, tanto para las matemáticas como para su persona. Asimismo, intuyó la presencia de la «mano negra», que era como él denominaba al grupo de matemáticos que en Berlín eran reacios a aceptar sus teorías, entre los que se encontraban en aquel momento Kummer, Weierstrass y Kronecker. Fue especialmente con este último, como ya hemos visto, con quien Cantor vivió una de las polémicas más agrias de la historia de las matemáticas.

El Cantor excéntrico

En marzo de 1874, en uno de los frecuentes viajes que Cantor hacía a Berlín, conoció a Vally Guttman, una amiga de su hermana Sophie. En agosto de aquel mismo año se casó con ella. Vally era una joven apasionada y amante de la música a la que Cantor trató siempre con suma ternura. Sin embargo, conocedor de sus debilidades, le hizo saber, antes de contraer matrimonio, que «deberás aprender que, sin causas aparentes, puedo ser vencido por el peso de la vida». En cualquier caso, se puede considerar que fue un matrimonio feliz. Tuvieron cuatro hijos y dos hijas. Cantor, que había heredado suficiente dinero como para no tener que preocuparse de cuestiones económicas, decidió construirse una casa en Halle. Hacía tiempo que ya se había resignado a quedarse en la universidad de aquella pequeña ciudad, y desistió de seguir intentando ocupar un puesto académico en la Universidad de Berlín.

En 1885 Cantor estaba cansado de sus estériles esfuerzos por demostrar la hipótesis del continuo y también profundamente desengañado y frustrado por el hecho de que la comunidad matemática le hubiera dado prácticamente de lado. Inició entonces una época en la que las investigaciones matemáticas pasaron a ocupar un segundo plano. En 1889, se consagró en el intento de demostrar que las obras de Shakespeare (1564-1616) habían sido en realidad escritas por Francis Bacon (1561-1626), un controvertido filósofo y político inglés que había intentado llevar a cabo una importante reforma científica. Llegó a dictar un curso, en 1898, en la Universidad de Halle, sobre «La vida y obra de Francis Bacon». Aquel mismo año fue expulsado de la Sociedad Shakesperiana. Cantor llegó a reunir una importante biblioteca de obras de autores ingleses de los siglos XVI y XVII, invirtiendo en ello parte de su fortuna. También dedicó varios años a la filosofía y dejó algunos escritos. Aquí

su interés se centró fundamentalmente en temas metafísicos y, sobre todo, en aquellos que hacían referencia o tenían relación con el concepto del infinito actual.

El 16 de diciembre 1899, cuando regresaba de Leipzig de dar una conferencia sobre Francis Bacon, se encontró con que su hijo Rudolf había muerto. Tenía 13 años y había sido un niño de salud frágil. Rudolf estaba convencido de que hasta entonces había podido superar su enfermedad gracias al estudio del violín, instrumento para el que estaba especialmente dotado, como la mayoría de los miembros de la familia de Cantor. En aquella ocasión, Cantor hizo una declaración sorprendente en la que manifestaba que se arrepentía de haber abandonado la música por las matemáticas, esa «extraña idea» que le había hecho abandonar su verdadera vocación.

La locura

Se ha escrito y se ha conjeturado mucho sobre la afección mental que aquejó a Cantor en los últimos años de su vida. La dificultad de establecer un diagnóstico es debida, en parte, a la falta de un historial clínico de la época. Todo apunta a que padecía lo que actualmente se conoce como trastorno afectivo bipolar, una enfermedad de carácter endógeno en la que se alternan estados de gran exaltación con fases depresivas, sin que aparentemente exista una causa externa que provoque las crisis. Éste es uno de los motivos por los que ha sido considerada exagerada la versión en la que se culpabiliza de la locura de Cantor a los despiadados ataques, especialmente por parte de Kronecker, que sus colegas llevaron a cabo contra sus teorías.

En cualquier caso, los últimos veinte años de la vida de Cantor transcurrieron entre sucesivas reclusiones en instituciones psiquiátricas, a las que él accedía voluntariamente. Esto no le impidió seguir trabajando y publicando sus teorías en los periodos entre internamientos, el último de los cuales se produjo en mayo de 1917. Alemania estaba entonces perdiendo la guerra, y con ella gran parte de su calidad de vida. Instituciones psiquiátricas como las de Halle vieron agravadas sus ya precarias condiciones por aquella circunstancia. Este último internamiento fue el único que se llevó a cabo contra la voluntad de Cantor, que en sucesivas cartas a amigos y familiares se quejó del frío, la soledad y la falta de alimentos. A pesar de que para entonces sus teorías ya habían conseguido un importante reconocimiento por parte de la comunidad científica, el 6 de enero de 1918 murió en soledad y en condiciones que sólo pueden ser calificadas de patéticas.

UNA MUERTE TRÁGICA

Además de la muerte de su hijo, uno de los incidentes que más afectó a la vida personal de Cantor fue la muerte de su hermano pequeño Ludwin. A pesar de estar muy unidos afectivamente y recorrer juntos los colegios de los primeros años de enseñanza, se parecían muy poco en lo que a resultados escolares se refiere. Ludwin no fue un buen estudiante y decidió dedicarse a los negocios en la misma época en que Georg ingresaba en la universidad. En 1863, Ludwin emigró a Estados Unidos, si bien apenas existen datos biográficos sobre aquella época. Lo único que se sabe con certeza es que en 1870 murió en un sanatorio mental en el que había ingresado aquejado por una fuerte depresión. Mucho se ha especulado con la posibilidad de que este antecedente fuera la prueba clara de una posible enfermedad mental de tipo hereditario.

Las teorías de Cantor sobre el infinito están consideradas como una de las contribuciones más revolucionarias que se han hecho a las matemáticas en los últimos veinticinco siglos, y son muchos los historiadores de la ciencia que consideran su teoría de conjuntos como una de las obras más brillantes del pensamiento humano.

Seguramente no tiene mucho sentido tratar de dilucidar si la locura de Cantor era endógena o fue provocada por las circunstancias. Es probable que, como en la mayoría de las locuras, ambos factores fueran decisivos. Pero, en cualquier caso, Cantor vivió intensamente la soledad de aquellos que ven destellos de luz en parajes oscuros. En uno de sus escritos, de carácter filosófico, aparecido en 1883, puede leerse un párrafo considerado como un canto a la libertad, pero que también puede interpretarse como un grito, como una dura reclamación a una sociedad asfixiada entre sus propios dogmatismos:

> «La matemática es completamente libre en su desarrollo, y sus conceptos sólo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios, y están coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante definiciones precisas. La esencia de la matemática es su libertad».

Cantor prefería utilizar la expresión «matemática libre», a la más generalizada «matemática pura».

Murió en la soledad de un asilo mental, pero jamás será olvidado. Sin duda fue Hilbert quien escribió su mejor epitafio: «Ya nadie puede expulsarnos del paraíso de los pensamientos de Cantor».

CONJUNTOS Y NAZISMO

La comunidad matemática decidió reconocer el trabajo de Cantor y, para ello, organizó, coincidiendo con la celebración de su 70.° aniversario, un acontecimiento de resonancia internacional, pero desgraciadamente los avatares de la Primera Guerra Mundial lo impidieron. Aún así, un grupo de matemáticos alemanes se reunieron en privado en su casa para entregarle como homenaje un busto suyo en mármol que actualmente se encuentra en la entrada de la Universidad de Halle. Durante la época del nazismo dicho busto fue retirado por considerar la teoría de conjuntos como matemática judía.

El infinito del siglo XXI

Hasta la aparición de la física moderna el infinito sólo había hecho acto de presencia en los foros de teología o filosofía. En matemáticas su presencia había tenido lugar de una forma, hasta cierto punto, natural, ya que lo «dado», como lo hubiera expresado Kronecker, eran los números naturales que forman una serie que se prolonga hasta el infinito. También la geometría, con el concepto de recta infinita, se veía obligada a incorporar las diatribas entre el infinito actual y el potencial. Pero fue el análisis infinitesimal, el *calculus*, el que lo incorporó hasta hacerlo suyo. Como dijo Hilbert: «En cierto sentido, el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito».

Pero los avances en física y astronomía han incorporado el infinito a nuestra realidad circundante. Hasta comienzos del siglo XX los astrónomos nos ofrecían un universo en el que estaban el Sol con sus planetas y las estrellas lejanas. Poco después, este Sistema Solar estaba ya inmerso en una galaxia con unos cuantos millones más de sistemas solares. El espacio se fue haciendo lo suficientemente grande como para poder dar cabida a unos cuantos miles de millones de galaxias más. ¿Y por qué iba a detenerse aquí? ¿Quién nos dice que no aparecerán nuevas estructuras de tamaño superior que obligue a considerar el tamaño del universo mucho más grande? ¿Es infinito el universo? Todavía no tenemos respuesta a esa cuestión y tal vez no lleguemos a tenerla nunca.

Por otro lado, al profundizar cada vez más en las estructuras subatómicas, lo infinitamente pequeño también ha entrado de manera repentina a formar parte del ámbito de la física. El átomo, como tal, dejó de ser el «indivisible» que fue para los griegos para pasar a ser un pequeño sistema planetario. Y no quedaron ahí las cosas:

la física nuclear nos descubrió partículas dentro del propio núcleo. Se trata de dimensiones por debajo de los 10^{-15} metros. Hasta aquí podríamos hablar de magnitudes inimaginablemente pequeñas, pero no de infinitamente pequeñas. Sin embargo, una de las teorías físicas que mejor ha resistido las pruebas experimentales, la electrodinámica cuántica, habla de partículas elementales, como los electrones o los quark, que tienen interacciones puntuales, lo que matemáticamente significa que son tratadas como puntos y que, por tanto, entran en el rango de los puntos de una recta o de los números reales, con todo lo que ello comporta.

Quizá la ciencia acabe algún día demostrando que en la naturaleza no existe ni ha existido nunca una diferencia clara entre el infinito potencial y el infinito actual, y que, en el fondo, no se trataba más que de una pura diatriba mental.

Anexo

La irracionalidad de $\sqrt{2}$

La primera demostración de la que se tiene noticia sobre la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 se debe a un filósofo presocrático de la escuela pitagórica llamado Hipaso de Metaponto (n. ca. 500 a.C.), quien, además de poner de manifiesto con ello su talento matemático, dio muestras de valor al tratar un tema tabú en su entorno cultural. No olvidemos que la leyenda nos habla de una posible pena de muerte, a manos de los pitagóricos, para aquellos que se atrevieran tan sólo a mencionar la existencia de números irracionales.

Como la mayoría de tales demostraciones, incluida la que se encuentra en algunos textos apócrifos de los *Elementos* de Euclides, la de Hipaso utiliza el método por reducción al absurdo. En un lenguaje moderno, se desarrolla como sigue:

Si $\sqrt{2}$ es un número racional, quiere decir que se puede expresar como cociente de dos enteros en la forma

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

siendo ésta una fracción irreducible, es decir, cuyo numerador y denominador no contienen factores comunes. Al elevar al cuadrado queda:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

y, por tanto,

$$p^2 = 2q^2.$$

Eso significa que p^2 es un número par, por lo que también lo es p. Esto nos permite expresar p como un múltiplo de 2, o sea, $p = 2n$, con lo que

$$2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2,$$

y simplificando,

$$q^2 = 2n^2.$$

Es decir, q^2 es un número par, por lo que también lo es q. Hemos llegado, pues, a la conclusión de que tanto p como q son números pares; o sea, que la fracción p/q contiene factores comunes, en contra de la hipótesis de la que habíamos partido. Esto quiere decir que $\sqrt{2}$ no puede ser igual al cociente de dos enteros.

Las primeras aproximaciones que se obtuvieron de $\sqrt{2}$ contenían apenas cuatro o cinco cifras decimales. Una buena aproximación, que consta de 65 cifras es: $\sqrt{2} =$ $= 1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799$.

Con los métodos informáticos modernos pueden obtenerse aproximaciones de varios millones de cifras decimales.

Conjuntos de números

La definición de los diferentes conjuntos de números es compleja y requiere conocimientos matemáticos que se salen del contexto de esta obra. Hay otra manera de comprenderlos, menos rigurosa pero más intuitiva, y que se basa en sus aplicaciones prácticas para resolver ecuaciones. El punto de partida son los llamados números naturales. Los números naturales, 1, 2, 3, ..., se simbolizan con la letra $\mathbb{N}$. Es un conjunto que se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Algunos autores no incluyen el 0 como número natural, algo perfectamente justificable si se tiene en cuenta que dicho número es el resultado de una profunda y larga reflexión matemática y que tiene, por tanto, muy poco de «natural».

En el conjunto de los números naturales pueden resolverse ecuaciones como:

$$x - 2 = 0.$$

Pero no una del tipo $x + 2 = 0$, ya que entre los naturales no figuran los negativos. Cuando a éstos se les añaden los negativos y el 0, se obtienen los enteros, que se simbolizan con la letra $\mathbb{Z}$.

Siguiendo el mismo proceso se introducen los restantes conjuntos de números. Por ejemplo, para resolver una ecuación del tipo

$$2x + 3 = 0,$$

que tiene como solución $x = -3/2$ es necesario introducir los números racionales $\mathbb{Q}$.

Para una ecuación como

$$x^2 - 2 = 0,$$

deben añadirse los irracionales. La unión de éstos con los racionales da lugar al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Por último, la ecuación

$$x^2 + 2 = 0$$

carece de solución real, ya que no existe ningún número real que sea la raíz cuadrada de un número negativo. El paso siguiente y último que permite resolver este tipo

de ecuaciones es la introducción de los números imaginarios o complejos, cuyo conjunto se representa con la letra $\mathbb{C}$. Decimos que éste es el último porque se demuestra que cualquier ecuación a coeficientes complejos tiene siempre una solución (teorema fundamental del álgebra).

Cada uno de los conjuntos que hemos establecido está incluido en el siguiente (es una extensión algebraica):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Bibliografía

BOYER, C.B., *Historia de la matemática*, Barcelona, Destino, 2009.

CANTOR, G., *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, Madrid, Alianza Universidad, 1986.

COLLETTE, J.P., *Historia de la matemática*, Madrid, Siglo XXI, 1985.

DEDEKIND, R., *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Madrid, Alianza, 1998.

GUTHRIE, CH., *Historia de la filosofía griega*, Madrid, Gredos, 2009.

KLINE, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Universidad, 1992.

MANKIEWICZ, R., *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Paidós, 2005.

MONNOYEUR, F., *El infinito de los matemáticos, el infinito de los filósofos*, París, Editions Belin, 1995.

MOSTERÍN, J., *Los lógicos*, Madrid, Espasa Calpe, 2000.

STEWART I., *De aquí al infinito*, Barcelona, Crítica (Grijalbo Mondadori), 1998.

ZELLINI, P., *Breve historia del infinito*, Madrid, Siruela, 2003.

Índice analítico

Alberti, Leon Battista 53
aleph 104, 111, 113
álgebra 51, 70, 120, 134
algebraico 107-110, 121
análisis
  armónico 91
  infinitesimal 73-76, 130
Annales de Gergonne 122
Antifón de Atenas 41
apeira 39
ápeiron 15-17, 39
aplicación 98, 124
  biyectiva 97-99
Apolonio 55, 57
Arenario 23
Aristóteles 16-18, 36-38, 53
Aritmética 23, 68, 93, 96, 104, 120
Arquímedes 23, 62, 65
arquimediano, principio de
  comparación de magnitudes 84
astronomía 55, 61, 130

Bacon, Francis 127, 128
Barrow, Isaac 73
Berlín 120, 127
Bernoulli, Jakob 13, 84
  lemniscata de 13
Böhm, Maria Anna 117
Bolzano, Bernard 85, 96
Borchardt, Carl Wilhelm 108
Brand, Hennig 84
Brunelleschi, Filippo 53
Bruno, Giordano 20

cálculo 21, 62, 75, 79, 97
  de volúmenes 64-66, 69
  infinitesimal 21, 62, 65, 76, 80, 81
  integral 65, 75
Calculus 73-90, 97, 130
Cantor, Georg 39, 68, 90-131
  teorema de 111
cardinal 96-100, 103-106, 111, 113
cardinales grandes 113
cateto 43-44, 81, 83, 95
Cauchy, Augustin Louis 85, 89, 90, 93
Cavalieri, Bonaventura 67-70, 79
Chuquet, Nicolás 23
cicloide 29-31, 70
Cohen, Paul J. 114
Collegium Carolinum 125
compás 39-42 45
cónicas 54-56 70
conjunto 22, 68, 69, 88, 92, 96-106
  A no vacío, 99
  de las partes, 111
  de números 93, 94, 134
cono 55-56, 62, 66, 69
construcciones con regla y compás
  39-42
contar 21, 23, 43, 96-98, 101
continuo 25-49, 54, 68, 112-115
  hipótesis del 112-115, 127
coordenadas 80, 82
Copérnico 16
correspondencia uno a uno 99-102
Crelle, August Leopold 121
cuadrado 41-43, 55, 58, 105

cuadrados perfectos 68
cuadrar 41-42
cuadratura 42, 58-60, 75, 76, 83
  del círculo 39-42, 108
curvas 56, 59-60, 67, 70, 75, 78

Da Vinci, Leonardo 52
Darmstadt 117
Dedekind, Julius Richard 61, 106, 124-126
Della Francesca, Piero 53
densidad 25-26, 94, 95, 103
Desargues, Gérard 54
desarrollo de Four 92
Descartes, René 70-71, 73, 74, 84
diferenciación 83
discreto 25-49, 54, 66, 79, 93, 102
Disquisitiones Arithmeticae 120
divisiones 15, 43

ecuaciones infinitas 77
Einstein, Albert 58
eleata, escuela 16
electrodinámica cuántica 131
Elementos 18, 22, 45, 60, 133
elipse 55-58
enteros 25, 45, 100, 107, 133, 134
Epiménides 33
epsilones 85-90
equimúltiplos 60
equipotentes 99, 103, 106
espacio 16-17, 32, 34, 38, 125
  euclideo 16
Euclides 18, 22, 58, 60, 115, 133
Eudoxo 60-64, 73
evoluta 30-31
excentricidad 56-57
exhaución, método de 62, 73

Fermat, Pierre de 70
física matemática 91
flujo continuo 32
fluxión 76, 78
fluyente 78
focos 56, 58
Fourier, Jean-Baptiste Joseph 91-93
función periódica 92
funciones potenciales 76
Fundamentos para una teoría general de los conjuntos véase *Grundlagen*

galaxias 130
Galilei, Galileo 66-68, 100
Gauss, Johann Carl Friedrich 120
generatriz 29, 56
geometría 43, 51-54, 68, 84, 115, 130
  analítica 70
  cartesiana 70
  proyectiva 54, 58
geometrizar 66
Gödel, Kurt 103, 114
Gotinga, Universidad de 120
Grünberg, Maty 42
Grundlagen 93, 95
Guccia, Giovanni Battista 122
Guttman, Vally 127

Hermite, Charles 108-109, 126
hexágono 41-42, 58
Hilbert, David 114, 129, 130
hipérbola 55-57
Huygens, Christiaan 30-31, 79

inconmensurable 45, 60
indivisible 32, 34-36, 65, 68, 69, 79, 84, 130
infinitamente pequeño 15, 31, 47, 60, 73, 78, 106
infinitesimales 75, 82, 83
infinito 7-23, 51-71, 103-106, 124, 130
  actual 17-23, 38, 59, 64, 77
integración, 83
integrador, 64
irracional/irracionales, 43-47, 61, 93-95, 103, 106-107, 133-134

Journal de Crelle, 120-122

kaos, 16
Kepler, Johannes, 54-58, 64-67
Köning, G. 114
Kronecker, Leopold 120-121, 124, 127, 128, 130
Kummer, Ernst 120, 127

Leibniz, Gottfried 75, 78-84, 86
L'Hopital, marqués de 84
límite 15-16, 62, 85, 89, 94-96
Lindemann, Ferdinand von 41, 108
lógica 22, 32, 33, 41, 94
  de enunciados 32

Mascheroni, Lorenzo 40
matemáticas discretas 28
mecánica cuántica 22, 28, 48
medición 43, 65, 95
método apagógico 64
mínimos 74, 75, 78
Mittag-Leffler, Gösta 126-127
Monadología 83
Monge, Gaspard 54
monismo 37
mutación 60

Newton, Isaac 73-78, 84, 86
numerabilidad 96, 100, 103
números 25-26, 68, 83, 88-90
  fraccionarios 25-26
  irracionales 45, 61, 93-95, 107
  naturales 12-15, 25, 99-104, 113, 134
  racionales 26, 45, 90, 93-95, 101-109, 134
  reales 93, 95, 103-114, 120, 131, 134
  transfinitos 110-112, 126, 127
  trascendentes 41, 106-110

Oldenburg, Henry 123
ondas 91
operacionismo 124

parábola 54-58, 73, 76
paradojas 7, 32, 33, 67
  de Zenón 27, 31-39, 89
paralelas 12, 18, 47, 48, 53-54, 115
Parménides 16, 32, 37
partículas elementales 131
Pascal, Blaise 58, 70, 84
pendiente 30, 80-82
péndulo 28-31
perspectiva central 53
pirámide 62
Pitágoras 43, 45, 58, 60
Plank, Max 48

polígono regular 41
prolongación infinita 15, 47-78
proporciones 25, 34, 52
proyectil 51, 73, 74
punto 12, 30, 48, 53-54, 57
  de fuga central 53,
  material 74
puntos 18, 26, 33, 40, 54, 56

Racionalismo 70
razones 60-61
recta real 90, 95-96, 103, 113
rectificación 75, 76
reducción al absurdo 32, 62, 103
Renacimiento 51-54, 64
Roberval, Gilles de 70, 73
Royal Society 122
Russell, Bertrand 37, 89, 97, 114

San Agustín 19
Santo Tomás de Aquino 19
secciones 55, 69
segmento/segmentos 15, 18, 26, 34, 40, 43-47, 58, 59, 88, 104, 105
series de Fourier 91-93
signo 11-13, 79, 102
subconjunto 99-100, 110-111
  impropio 110
  propio 99, 100, 110
sucesión 32, 46-47, 88-90, 94
  infinita 46, 47, 89, 93, 94
sucesiones
  de Cauchy 93
  fundamentales 93-95

tangente 59, 74-75, 78, 81, 82
tautócrona 30
Taylor, Brook 46, 91
teoría
  de conjuntos 96, 114-115, 118, 121, 125-130
  de números 120
  de tipos 126
Thabit ibn Qurra 104
tiempo 27-31, 34-38, 58, 67
Tiesbaden 118
Torricelli, Evangelista 73
transformación continua 55, 58
trayectorias 30, 51, 61, 67
triángulo característico 81, 83, 84

Universidad de Halle 84, 120, 121, 125, 127, 130
uno a uno 98-106

valores discretos 27

Wallis, John 13
Weierstrass, Karl 62, 85, 93, 120, 124, 127
Woldemar, Georg 117

Zenón 16, 32, 33, 36-39, 49
Zermelo, Ernst 114
Zurich 119