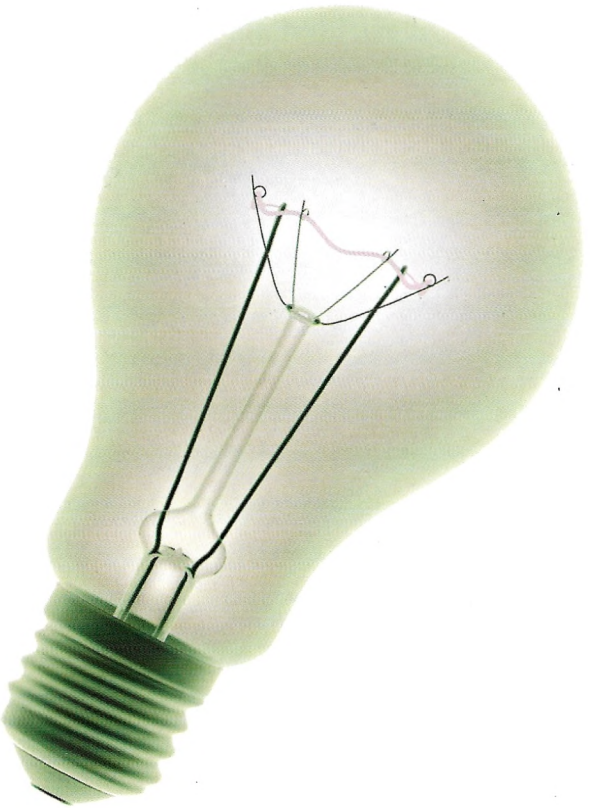
# La creatividad en matemáticas

## Cómo funciona una mente maravillosa

**Miquel Albertí**



*El mundo es matemático*

# La creatividad en matemáticas

## Cómo funciona una mente maravillosa

Este libro se ha escrito desde la convicción de que las matemáticas son una actividad democrática, es decir, que todo el mundo puede crear matemáticas. De la mano de ejemplos históricos y actuales, e incluso de valiosas lecciones aprendidas de sociedades no occidentales, el lector descubrirá que matemáticas hay muchas, y que el secreto de la creación es «vivir matemáticamente», cada día un poco.

# La creatividad en matemáticas

## Cómo funciona una mente maravillosa

**Miquel Albertí**

*El mundo es matemático*

© 2010, Miquel Albertí por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6967-6
Depósito legal: NA-1664-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

# Sumario

**Prefacio** ..... 9

**Capítulo 1. Los pilares de la creación matemática** ..... 13
La lógica no crea, pero no se puede crear sin ella ..... 15
La idea feliz ..... 17
Componentes humanístico, social y cultural de las matemáticas ..... 19
Las matemáticas ¿se crean o se descubren? ..... 21
En el baño con Arquímedes y Poincaré ..... 22
Psicología de la creatividad ..... 25
Heurística: crisol de la creación matemática ..... 27
Educación matemática y creatividad ..... 31
Fases de la creación ..... 32
- Observación ..... 32
- Intuición ..... 34
- Experimentación ..... 34
- Conjetura ..... 35
- Analogía ..... 35
- Verificación ..... 36

La lógica no crea, pero exige ..... 38
Vivir matemáticamente ..... 40

**Capítulo 2. Grandes ideas para grandes problemas** ..... 41
Contar ..... 41
Potencias poco naturales ..... 48
Del área del rectángulo a la de cualquier figura ..... 50
Cuantificar el cambio ..... 59
Un teorema que crea monstruos ..... 62
Cómo crear y domar un monstruo ..... 66
Simbiosis del álgebra con la geometría ..... 68
Nueva tecnología, nuevas curvas ..... 71

**Capítulo 3. Nuevas preguntas para situaciones corrientes** ..... 75
Todos los días frente al espejo ..... 76

Contemplando el horizonte ..... 77
Nudos cíclicos ..... 80
Una de jardinería: el triángulo equilátero
como caso particular de triángulo isósceles ..... 83
En auxilio de los auxiliares forestales: el tercio
de lo que vemos no es el tercio de lo que miramos ..... 85
Aviso de los contables: el redondeo de la suma
no es la suma de redondeos ..... 87
Tetris frigorífico ..... 88
Un libro infinito y un disco bidimensional ..... 90
Los barrios de Dorotea ..... 94
Orden en el caos: el teorema de Varignon ..... 97
Las potencias de dos no son la suma de naturales consecutivos ..... 101

**Capítulo 4. Interacción cultural y creatividad** ..... 105
El viaje intercultural ..... 106
Matemáticas extramuros ..... 106
Multiplicación digital en una playa ..... 108
Grabados toraja: ¿pueden hacerse sin matemáticas? ..... 110
Observación del proceso de elaboración de los grabados toraja ..... 112
¡Eureka! ..... 115
¿Lo piensan como yo lo pienso? ..... 117
División no euclidea de un segmento en partes iguales ..... 118
Un problema nuevo ..... 119
La circunferencia rectilínea ..... 121
Comunicación a los artesanos toraja ..... 122
Crónica de una vivencia matemática ..... 124

**Capítulo 5. Matemáticas para creativos** ..... 125
Las matemáticas como estrategia publicitaria ..... 126
Uso tendencioso de la proporcionalidad ..... 126
Probabilidad ..... 128
Álgebra extraordinaria ..... 129
Funciones lineales y exponenciales ..... 132
La regla de los tercios ..... 133
Matemáticas para la perfección ..... 134

Diseño con matemáticas ..... 134
Tiempo binario ..... 134
La banda de Möbius ..... 136
Espíritu geométrico ..... 138
¿Por qué los puzles de 2.000 piezas no tienen 2.000 piezas? ..... 139
Desmaquillarse con Pitágoras ..... 140
Temas con variaciones ..... 140

**Epílogo. Manual del creador matemático** ..... 143
Recapitulación ..... 144
Pautas para la creación matemática ..... 146

**Anexo. Paralelas que se cortan en el plano** ..... 149

**Bibliografía** ..... 153

**Índice analítico** ..... 155

# Prefacio

Con las mismas reglas que constriñen al principiante, el jugador de ajedrez avezado desarrolla estrategias que al primero le parecen increíbles. Y, sin embargo, cualquiera puede aprender a jugar al ajedrez. Y la única manera de aprender es jugando, porque jugar es mucho más que mover las piezas según las reglas. Cuando se juega, se crea.

Hace miles de años alguien tuvo la idea de hacer unas marcas en un hueso o una piedra, cada una de las cuales se correspondía con un elemento en su mente. El trazo o la forma de aquellas marcas era irrelevante; lo que importaba era la relación: un objeto en mi mente-una marca idéntica a las otras. Más adelante se puso nombre a cada señal y a cada grupo de señales. Eso permitió distinguir diferentes agrupaciones y saber cuál era mayor que otra. El número es, sin duda, la mayor creación matemática y, junto con la palabra, la mayor creación humana.

La otra gran creación matemática es su sistema productivo. Cada resultado es validado por una comunidad experta que lo examina detalladamente. Si tiene imperfecciones, se corrigen. Esa corrección se gobierna desde la lógica del entendimiento humano. Al final se obtiene un resultado demostrado, esto es, deducible por todos aquellos que deseen recorrer la cadena de enlaces elaborados por el autor. El resultado se llama teorema.

Tradicionalmente los matemáticos han mantenido un pacto tácito de no mostrar sus errores, desvaríos o intuiciones fallidas. Los productos matemáticos se hacen públicos sin mácula. También eso forma parte de la tradición. Los artesanos también exponen su obra a la venta, bien acabada, pero todo el mundo sabe que para lograr esa maravilla son necesarias muchas horas de trabajo. Esa labor, además, añade valor al producto. La talla no salió de la noche a la mañana; hubo multitud de ensayos y errores, correcciones y nuevos intentos.

A veces da la sensación de que en matemáticas los teoremas se obtienen combinando adecuadamente otros teoremas precedentes. El mérito está en tener la suficiente capacidad intelectual como para realizar buenas combinaciones y aplicar bien las reglas de la lógica. Pero la lógica por sí sola es yerma, no produce nada sin un agente que la active, y la activación del desarrollo matemático es cosa de intuiciones, analogías, pruebas y refutaciones. Ahí reside la creatividad matemática.

Crear significa producir algo nuevo y desconocido; por eso la creación está muy ligada al aprendizaje. Partiendo de la premisa que saber matemáticas es saber hacerlas, la creación matemática se basa en plantear buenas preguntas y resolver problemas. Eso hace el matemático profesional. Cada teorema demostrado no es el

punto final, sino un enlace que genera nuevos interrogantes o que permite resolver otros problemas y conjeturas. La creatividad se halla también en la capacidad para plantear nuevas preguntas.

La versión aquí propuesta de la creación matemática no está vetada a los no profesionales, pues cualquiera puede crear matemáticas. Es posible que lo creado por el aficionado no sea novedoso para el profesional, pero sí para su autor. Quizá no se inspire en los teoremas y problemas de aquél, pero puede inspirarse en su vida cotidiana, en lo que ve, en su trabajo, en sus tareas domésticas, en sus viajes. Para ello basta con mirar y ver de otra manera tanto las matemáticas como la realidad.

Sorprendentemente, las creaciones matemáticas no producen siempre toda la felicidad esperada. A lo largo de la historia ha habido creaciones traumáticas que han provocado grandes crisis. Si creemos que los números sirven para contar unidades y que la relación entre todas las cosas del Universo puede establecerse mediante proporciones entre números sencillos, ¿qué es la raíz cuadrada de dos? ¿Y un número negativo? ¿Y la raíz cuadrada de menos uno? La creatividad produce monstruos que hay que digerir y asimilar mediante cambios conceptuales. No nos miramos un Picasso de la misma forma que miramos un Velázquez. No escuchamos a Stravinski o a Miles Davis del mismo modo que escuchamos a Bach o a Händel.

¿Cómo crear? ¿Existen pautas para el proceso creativo? La creencia más extendida es que un creador matemático tiene ideas felices, momentos de inspiración extraordinarios que le permiten dar con la clave de un problema. Se diría que el auténtico matemático posee un don del que carecen otros y que se activa ante la dificultad. En su mente se produce un «clic» y se hace la luz. Como en cualquier otra disciplina, existen personas más dotadas que otras para las matemáticas. Sin embargo, nuestra pretensión aquí es hacer hincapié en las características y las pautas de la creación y ver cómo muchas de ellas son abordables para la mayoría.

Empezaremos viendo cómo algunas de las mayores creaciones matemáticas de la historia han estado relacionadas con periodos de crisis. Luego trataremos de esclarecer un poco el mito de la idea feliz en la resolución de problemas, y comprobaremos que está muy ligado con los procesos de aprendizaje. Más adelante se pondrán algunos ejemplos de creatividad matemática derivados de actividades propias de la vida cotidiana de cualquier persona, con lo cual se pretende enfatizar la idea de que «creamos cuando nos planteamos preguntas al vivir». A este aspecto vivencial del quehacer matemático dedicaremos un capítulo entero, en lo que será la crónica del desarrollo del conocimiento matemático por parte del autor a raíz de una experiencia intercultural y extra académica. Esa parte ilustra también una de las

tesis más importantes del libro: la cultura y la sociedad juegan un papel fundamental en la creatividad matemática y en las matemáticas que se crean.

En el penúltimo capítulo del libro invertiremos el enfoque y pasaremos de hablar de la creatividad en matemáticas a las matemáticas de la creatividad, según la entienden profesionales de ámbitos tradicionalmente creativos, como son el mundo del diseño y de la publicidad. Y concluiremos con una recapitulación de todo lo expuesto en busca de una caracterización única de la creación matemática con el fin de identificar las pautas fundamentales para conocerla y cultivarla.

Capítulo 1

# Los pilares de la creación matemática

La opinión más extendida de lo que son las matemáticas está todavía hoy muy cerca del calificativo de «ciencias exactas» con el que se las conocía hace unas cuantas décadas en las facultades de muchos países. El énfasis sobre el adjetivo era tal que a menudo se obviaba el sustantivo al que se refería. Cuando alguien entraba en la universidad para estudiar la carrera de matemático, simplemente estudiaba «exactas».

Éste es y ha sido el paradigma de lo matemático: la exactitud, la precisión, el rigor, el destierro del error y la indecisión, la ausencia de términos medios, el blanco o el negro sin matices, rectas o curvas, finito o infinito, abierto o cerrado, correcto o incorrecto, bien o mal. Todo ello a lo largo de un itinerario guiado y trazado, con irrefutable autoridad, por la lógica, aplicada a su vez a unos principios tan elementales y universales —o, al menos, eso parece— como la vida misma.

Ese modelo se erige sobre una obra milenaria que acabaría convirtiéndose en el libro por excelencia de las matemáticas, tanto por lo que respecta al contenido como a su forma de comunicación: los *Elementos* de Euclides. De unas verdades esenciales tomadas por ciertas (postulados) se deducen otras nuevas (teoremas), menos evidentes que las primeras y que, a su vez, pueden dar lugar a otras aún menos incuestionables. La cadena de resultados obtenida da cuerpo a un conocimiento fundamentalmente geométrico, cuya certeza está garantizada por la deducción lógica. Ningún resultado se obtiene por capricho, sino como consecuencia de un razonamiento lógico basado en los postulados primigenios.

Hasta hace poco, la obra de Euclides ha sido también el modelo que se seguía en la educación matemática. De ahí que la concepción más extendida acerca de lo que son las matemáticas se halle ligada a esa relación ideal de resultados exactos enlazados entre sí con arreglo al sempiterno patrón axioma-teorema-demostración-corolario-ejercicio. Eso eran las matemáticas, así se enseñaban, así se aprendían, así se percibían.

Sin embargo, y por muy riguroso e intelectualmente capaz que pudiese ser Euclides, ¿puede alguien imaginar que los *Elementos* se obtuvieran de un tirón una

## EUCLIDES, EL HOMBRE DEL MÉTODO

Poco se conoce del creador de los mayores paradigmas, tanto de libro como de método, de las matemáticas. Lo que es seguro es que vivió alrededor del año 300 a.C. y que enseñó en Alejandría. Su obra más conocida es, desde luego, *Elementos*, integrada por trece libros con más de cuatrocientas proposiciones que se deducen de cinco postulados, cinco nociones comunes o axiomas, y ciento treinta y dos definiciones. Ejemplos de estos distintos tipos de enunciado son:

Def. 1: Un punto es lo que no tiene partes.

Def. 2: Una línea es una longitud sin anchura.

Def. 3: Los extremos de una línea son puntos.

Pos. 1: Postúlese trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera.

Pos. 2: Y prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

Pos. 3: Y describir un círculo con cualquier centro y distancia.

NC. 1: Las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

NC. 2: Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.

*Papiro con un fragmento de la Proposición nº 5 del «Libro II».*

vez asentados los pilares de los postulados? ¿No hubo acaso errores en los enlaces? ¿Para qué ilustrar los argumentos con figuras? ¿No incluyen éstas supuestos no contemplados en los postulados? La verdad es que sí. Ya en el primer teorema,

Euclides da por supuesto que dos arcos de circunferencia se cortan en un punto, pero ¿qué postulado garantiza tal hecho? ¿Son las líneas continuas? Si ampliamos bajo el microscopio una línea trazada con lápiz ¿no aparecerán en ella intervalos vacíos? Por otra parte, ¿en qué piensa Euclides, en segmentos o en rectas?

Segmentos, rectas, triángulos, cuadrados, círculos... Las matemáticas versan sobre figuras tan perfectas que no pueden ser creación humana, sino divina. O, excluyendo esta última posibilidad, existentes por sí mismas en un mundo ideal de inmaculada perfección. Esta perspectiva, de indudable regusto platónico, ha cautivado a prácticamente todos los matemáticos desde la Antigüedad. Los que se han apartado de ella lo han hecho tras años de dedicación y de reflexión sobre la esencia de su actividad. Para los pitagóricos la proporción numérica regía las leyes de todo lo existente. Si lo perfecto debía acercarse al número, el número era lo más próximo a Dios. El círculo geométrico es una entidad ideal perfecta de cuyas propiedades se dice que son «descubiertas». De algún modo, sostiene esta visión, dicha figura geométrica existe en el imaginario compartido de todo el mundo y, al estudiarla, no hacemos sino descubrir sus propiedades y sus relaciones con otras figuras ideales. He aquí la idea tradicional del descubrimiento matemático que más adelante se va a cuestionar.

## La lógica no crea, pero no se puede crear sin ella

La lógica es imprescindible en matemáticas. La justificación de los resultados matemáticos se fundamenta en ella, juez determinante de su veracidad o falsedad. Pero las matemáticas no se reducen a ella: no todo lo matemático es lógico. Si los teoremas se obtuviesen tan sólo aplicando las reglas formales bastaría con encargar la tarea a un ordenador para que fuese produciéndolos sin cesar. Lo que ocurre es que lo que suele mostrarse del mundo matemático son siempre resultados ya acabados.

Mucho tiempo tuvo que pasar hasta que la disciplina se sincerase y reconociese que, de puertas adentro, las matemáticas son otra cosa. Los platos matemáticos se continúan sirviendo en lujosa vajilla, equilibrados y sin el menor defecto. Muchos cocineros de la comunidad de sabios los prueban una y otra vez antes de dar el visto bueno para servirlos al público. Buscan errores y, si los encuentran, los corrigen. Un plato con un error insalvable es rechazado de inmediato y devuelto a la cocina. Por tanto, el quehacer matemático no está en el salón del restaurante, sino en la cocina. Es ahí donde se cuecen los axiomas, los teoremas, las demostraciones. Es ahí donde se cometen errores, donde se hacen pruebas y se refutan ideas y de-

mostraciones. Los cocineros se pringan de grasa, se manchan, se desesperan cuando la lógica no cede a los deseos de su intuición. Entonces maldicen mil veces esa actividad que muchos tienen por divina.

Pero no es el fuego de la lógica, o no solamente él, el que alimenta la cocina matemática; lo hace la intuición, la analogía, la experimentación, la conjetura, es decir, el pensamiento humano. Y puesto que en muchos aspectos no todo el mundo piensa igual ni se mueve por los mismos intereses, también la sociedad y la cultura del matemático influyen en sus actividades y recursos. ¿Qué hace que un teorema sea más valioso que otro? ¿Por qué intentar probar unos y rechazar otros? La lógica produce infinidad de trivialidades que no interesan. El desarrollo del conocimiento matemático responde al interés del ser humano por resolver problemas, ya sean teóricos o prácticos, útiles o inútiles, inspirados tanto por el ansia de conocimiento como por el reto personal o la creatividad.

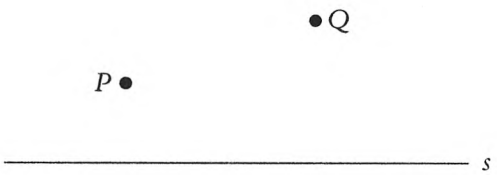
Este retrato más complejo y preciso de la naturaleza tanto de las matemáticas como de la actividad matemática está expuesto en una serie de clásicos de la divulgación científica como *¿Qué son las matemáticas?* (varias ediciones, la primera de 1941), de los estadounidenses Richard Courant y Herbert Robbins; en la posterior *Experiencia matemática* (1999) de sus compatriotas Philip J. Davis y Reuben Hersh, o en el libro de este último *¿Qué son las matemáticas realmente?* (1997). En él Hersh hace una observación sencilla y clara: «La fórmula $2+2=4$ se puede demostrar como un teorema de un sistema axiomático, pero su fuerza y convicción derivan de un modelo físico como es coleccionar monedas o guijarros». Es más, la lógica que facilita esa demostración formal a la que se refiere Hersh es muy posterior a la recolección de guijarros. Courant y Robbins, por su parte, inciden en el importantísimo rol que, en el desarrollo del conocimiento matemático, desempeñan la experimentación, la intuición y la analogía:

> «...Aunque el principio de inducción matemática es suficiente para demostrar esta fórmula, una vez escrita la demostración no proporciona indicación alguna de cómo se llegó a ella... El hecho de que la demostración de un teorema consista en la aplicación de ciertas reglas lógicas y sencillas no elimina el elemento creativo en matemáticas, el cual subyace en la elección de las posibilidades a examinar. La cuestión del origen de la hipótesis pertenece a un dominio en el que no pueden darse reglas verdaderamente generales; y es aquí donde la experimentación, la analogía y la intuición constructiva juegan su papel».

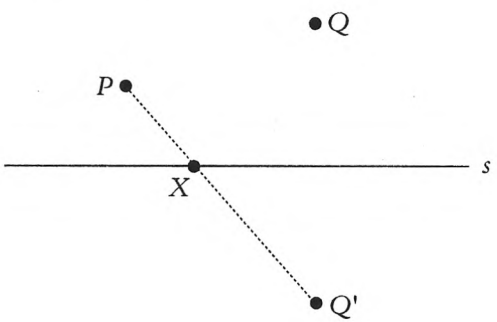
En matemáticas la lógica juega un papel fundamental, pero menos relacionado con el descubrimiento o la invención de lo que parece. La lógica no escoge caminos ni determina el modo de buscar una solución. La experimentación, la analogía y la intuición abren los caminos que luego la lógica acabará asfaltando y convirtiendo en carreteras por las que todo aquel que quiera podrá transitar. Se muestra a continuación un ejemplo de ello. Se trata de un célebre problema geométrico resuelto de forma elegante con una idea feliz.

## La idea feliz

Tenemos dos puntos, $P$ y $Q$, y un segmento $s$, tal como se muestra en la figura. Se quiere ir desde $P$ hasta $Q$ pasando por un punto de $s$. ¿Qué punto de $s$ determina el trayecto más breve?

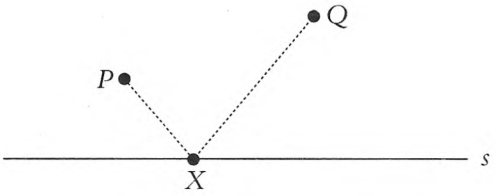



Para resolver la cuestión imaginemos el segmento $s$ como si fuese un espejo. Tracemos el reflejo de $Q$ con respecto a él y llamémosle $Q'$. Tracemos el segmento que une $P$ con $Q'$ y que intercepta a $s$ en un punto $X$:




El segmento $PQ'$ determina el camino más corto entre $P$ y $Q'$, y su intersección con $s$, el punto $X$, es por donde habría que pasar para recorrerlo. Ahora ya sólo queda usar de nuevo la simetría reflejando el segmento $XQ'$ en el espejo $s$ y ver que

el segmento $XQ$ tiene la misma longitud que $XQ'$. Así se obtiene la solución, la línea quebrada $PXQ$, de longitud idéntica a la del segmento $PQ'$:




Por tanto, el camino más corto para ir desde $P$ hasta $Q$ pasando por $s$ es dirigirse hacia el punto $X$.

La idea anterior, basada en la simetría, ¿es una idea feliz? Cualquier idea eficaz que no se nos haya ocurrido puede merecer esa consideración. Sin embargo, y ése es uno de los puntos centrales de esta obra, la generación de ideas felices, esto es la creación matemática, puede educarse.

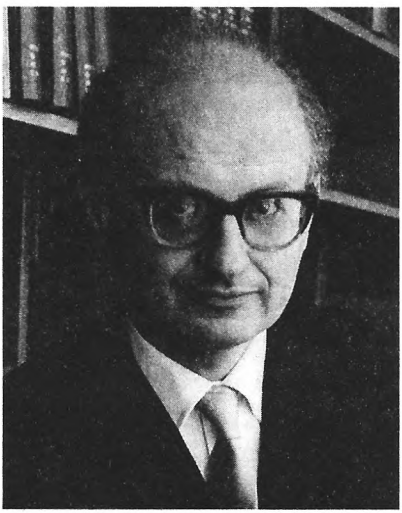
Una exposición argumentada y lógica de dicha resolución se basa en el hecho de que la simetría conserva las distancias y que el segmento es la línea más corta entre dos puntos del plano. Incluso es posible que la resolución parezca sencilla y trivial una vez desarrollada, pero difícilmente imaginable para quien se enfrenta al problema por primera vez. Estamos ante un ejemplo de creatividad. La lógica, por sí sola, no conduce al resultado. Éste se logra mediante la perspicacia de imaginar líneas adicionales no trazadas en la figura del enunciado y de crear con ellas relaciones entre los diversos elementos de la figura. La lógica posibilita muchas acciones, pero no nos provee de argumentos para seleccionar la acción apropiada.

Esa capacidad creativa en matemáticas no es universal, como tampoco lo son la creatividad artística, musical, arquitectónica o científica. Pero es la que mucha gente ha venido llamando «idea feliz», una especie de truco o de iluminación súbita y mágica que no figuraba en los datos ni en el enunciado del problema y que el contexto en el que se había planteado difícilmente induce a pensar.

Las ideas felices existen, pero ni están restringidas a los genios ni todos los problemas se resuelven con ellas. Como se verá más adelante, su producción es fruto del trabajo intenso y continuado, así como de la búsqueda de relaciones entre los elementos de un problema. De las casi innumerables relaciones que pueden expresarse entre los datos o elementos de un problema, ¿cómo podemos escoger aquella o una de aquellas que lo resuelven? En la elección de las «buenas posibilidades» reside, precisamente, la creatividad matemática.

## Componentes humanístico, social y cultural de las matemáticas

La visión más humanista de las matemáticas las considera un producto histórico, social y cultural. Efectivamente, muchos de los resultados preparados por el matemático en su «cocina» son elaborados del mismo modo que las teorías científicas. Mediante «pruebas y refutaciones», en palabras de Imre Lakatos, el matemático se abre camino en la jungla, sortea obstáculos y concreta, paso a paso, contraejemplo a contraejemplo, sus teoremas. Lo que ocurre es que las teorías matemáticas se presentan y justifican por medio de razonamientos lógicos impecables, conformando lo que a los ojos de todo el mundo parece una autopista lisa y segura hacia la conclusión.



*El matemático y filósofo de la ciencia de origen húngaro Imre Lakatos.*

En el trazado de esa carretera, sin embargo, intervinieron otros factores que se ocultan, como la experimentación, la intuición o la analogía. Hersh de nuevo:

> «La demostración en la vida real es informal, ya sea en su totalidad o en parte. Un fragmento de argumentación formal —un cálculo— adquiere sentido sólo para completar o verificar algún razonamiento informal. La imagen lógico-formal de la demostración es tema de estudio en lógica más que una imagen de las matemáticas de la vida real...»

Por medio de la revisión y crítica de los resultados presentados por sus miembros, la comunidad matemática valida este conocimiento, cuyo origen, sin embargo, reside en la práctica empírica y en experiencias perceptivas en todo similares a las de cualquier otro individuo que se relaciona con su entorno. Esta visión «naturalista» admite, como veremos a lo largo del libro, la posibilidad de hallar conocimiento matemático en actividades no directamente ligadas al ámbito académico.

Se conoce como «constructivismo social» la interpretación de la naturaleza de las matemáticas como un producto cultural, falible como cualquier otro, las bases de cuya justificación son de carácter empírico; una perspectiva cercana a autores ya mencionados, tales como Lakatos, Davis y Hersh. En palabras de uno de los más destacados representantes de esta escuela de pensamiento, el estadounidense Paul Ernest:

> «En resumen, la tesis del constructivismo social es que el conocimiento objetivo de las matemáticas existe en, y a través de, el mundo social de la acción humana, con sus reglas e interacciones, apoyándose en un conocimiento matemático subjetivo de los individuos que precisa de constante re-creación. Así, el conocimiento subjetivo recrea el objetivo sin que el último sea reducible al anterior».

Estamos ante una visión de las matemáticas donde ciencia y educación caminan de la mano, y en la que el aprendizaje de la disciplina está determinado por el sujeto y la sociedad o cultura a la que pertenece. Tradicionalmente, los únicos entornos sociales y culturales no occidentales mencionados por los historiadores de las matemáticas han sido siempre los del mundo antiguo: la antigua Mesopotamia, el antiguo Egipto, la antigua Grecia, el mundo árabe antiguo, el mundo indio antiguo y el mundo chino antiguo. Siempre mundos muertos, nunca mundos, sociedades o culturas vivas.

Paradójicamente, los historiadores coinciden en que la existencia de conocimiento matemático se remonta a épocas tan remotas como los orígenes del lenguaje en las que no había lo que hoy en día conocemos como civilización y, menos aún, cultura occidental. Luego, si consideramos que los esfuerzos de la especie humana para el establecimiento de sistemas de numeración constituyeron los inicios de la actividad matemática y, de acuerdo con los más destacados historiadores de la ciencia, que los orígenes de esta actividad son más antiguos que la escritura, deberemos concluir que no sólo se han creado matemáticas fuera de nuestra cultura, sino mucho antes de su nacimiento.

## Las matemáticas ¿se crean o se descubren?

Lo majestuoso de algunos resultados matemáticos y la herencia platónica han inspirado la idea de descubrimiento, pero las matemáticas no se descubren, se crean. En palabras del lógico español Josep Pla:

> «...La matemática, casi como el lenguaje, es un *constructo* de la mente humana con una vitalidad propia que nos hace pensar que existe con independencia de su conocimiento y de su creación. Esto, permitidme ser rotundo, es erróneo».

Un ejemplo puede ilustrar esa afirmación. Supongamos que en una charca se congregan varios animales para beber. Si una persona los contemplara podría describirlos de muchas formas y formular un montón de preguntas sobre ellos. Sin embargo, todas ellas estarían inspiradas por su cultura. Algunos matemáticos formalistas argumentarían que hay siete animales bebiendo y que son siete independientemente del observador. La perspectiva defendida aquí replicaría que ese siete se determina por cuestiones culturales, porque quien observa sabe contar, porque sabe discernir entre pocos y muchos, porque le interesa dilucidar cuántos pocos o cuántos muchos son. Sin embargo, a esa persona que cuenta siete animales quizá se le pase por alto un hecho primordial y que está ahí, delante de sus ojos o de sus sentidos, pero que no logra ver porque su escasa o distinta cultura le impide formularse otras preguntas que las que balbucea en su lenguaje. ¿Cómo saber si esas otras preguntas no son también de índole matemática y tan relevantes o más que la cantidad de seres vivos sedientos?

Por lo tanto, es razonable afirmar, con Hersh y Ernest, que las matemáticas que conocemos son un producto sociocultural humano y, por tanto, que diferentes culturas pueden crear matemáticas distintas. De hecho, esto ha ocurrido ya. ¿Acaso las geometrías no euclideas, desarrolladas en la Europa burguesa del siglo XVIII, no son distintas a las que la Grecia clásica de Euclides ideó hace 2.500 años?

Toda la matemática euclidea tiene un carácter finito. No hay en ella ni procedimientos iterativos ni ningún concepto de límite. En un contexto semejante, el cálculo diferencial no habría sido considerado como algo matemático. Hoy en día la globalización matemática es tal que ya ha engullido la práctica totalidad de las diferencias. Las geometrías euclidea, proyectiva, esférica, fractal, las resoluciones por métodos finitos, recurrentes, el uso de tecnología elemental (regla, compás) o avanzada (software), a todo eso y a mucho más nos referimos con un mismo nombre: matemáticas. Ahora son una sola cosa, pero antes no lo fueron.

## En el baño con Arquímedes y Poincaré

Cuenta la leyenda que fue ahí, en remojo, en el transcurso de una actividad tan corriente como es el baño, donde el gran sabio y matemático Arquímedes gritó «¡Eureka!» al dar con la idea (¿feliz?) de que el volumen de un cuerpo sumergido (no necesariamente humano) equivale al del agua que desaloja. Esta idea de la inspiración feliz y espontánea ha sido y continúa siendo el paradigma de la creación matemática. Sin embargo, su espontaneidad es tan sólo aparente. Grandes matemáticos como el francés Henri Poincaré han vivido también experiencias similares, y han hablado del cómo y del cuándo de esa inspiración creativa, clarividente.

¿Cómo se gesta esa idea extraordinaria en la mente de una persona? ¿Qué actividades la provocan? Las respuestas a estas cuestiones no hay que buscarlas en las matemáticas, sino en la psicología. Fue Poincaré quien ofreció una descripción de cómo trabaja la mente de un matemático, y lo hizo ante la Sociedad Psicológica de París a principios del siglo pasado.

Poincaré comenzó su exposición planteando dos cuestiones paradójicas: «¿Cómo puede haber quien no comprenda o se resista a las matemáticas? ¿Cómo es posible el error en matemáticas?».

### ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287-212 A.C.)

Murió a manos de un soldado romano, pese a las órdenes del general Marcelo de que se respetase su vida. Según la leyenda, su verdugo no tuvo compasión de quien continuaba absorto en tareas matemáticas mientras su casa era invadida por las tropas que asediaban la ciudad. Entre sus obras destacan: la ley de la palanca, el principio hidrostático, la aproximación al área del círculo, la trisección del ángulo, el área de los segmentos parabólico y esférico, y el libro sobre la esfera y el cilindro.

*El busto de Arquímedes figura en la medalla Fields que se otorga cada cuatrienio a uno o varios matemáticos de edades inferiores a los cuarenta años. Está considerada como el Premio Nobel de las matemáticas.*

La primera surge al señalar que las matemáticas se fundamentan en una lógica aceptada por todo el mundo y en principios tan elementales y comunes que sólo un loco rechazaría. La segunda aparece cuando uno piensa que un matemático es alguien inteligente que trabaja siguiendo las reglas de la lógica y que, por lo tanto, no debería cometer errores. Aplicando las reglas de juego se llega al destino. Además, hay personas que se desenvuelven muy bien en la lógica de los actos ordinarios y que son incapaces de seguir el hilo de una demostración matemática hecha de pequeños razonamientos lógicos más breves. ¡El propio Poincaré confesaba su incapacidad para sumar sin errores!

Una observación crucial es que una demostración matemática no es una yuxtaposición de silogismos, sino de silogismos colocados en un cierto orden, y el orden en el que se colocan es mucho más importante que los propios elementos (Poincaré, 1974: 14). Si se tiene la intuición de ese orden, ya no hay que temer olvidar ninguno de sus elementos, pues para ellos bastarán la memoria y la atención. Pero esa sensación o intuición de percibir relaciones o armonías ocultas o compartidas por cosas aparentemente diferentes parece no ser algo común a todo el mundo. Y es esta capacidad la que distingue, según Poincaré, a quienes pueden crear matemáticas de quienes pueden aprenderlas, entenderlas y aplicarlas.

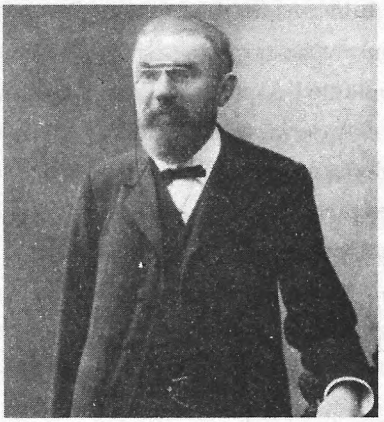
La creación matemática no consiste en combinar conocimientos previos. Un ordenador podría hacerlo, pero muchas de esas combinaciones carecerían de interés. Para Poincaré crear es escoger las combinaciones útiles, muy escasas, de entre las inútiles, abundantes en demasía.

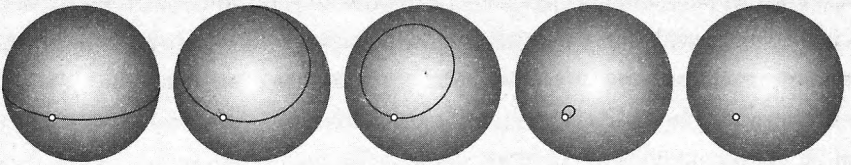
El proceso creativo de Poincaré se resume en fases. Se inicia con un arduo y prolongado trabajo sobre el tema (un par de semanas). Después, un hecho desacostumbrado (tomar café negro) le impide dormir, y las ideas se le agolpan durante la vigilia. Entonces dos ideas se enlazan y se establecen. Luego se redactan los resultados. Sigue a esto una idea consciente y deliberada guiada por una analogía. Entra en otra fase en la que realiza una actividad ajena a las matemáticas (excursión geológica) y en la que se olvida del trabajo matemático. Justo en medio de la realización de un acto cotidiano (subirse a un autobús) da con una relación clave entre elementos aparentemente dispares (las funciones fuchsianas y las de la geometría no euclidea). De nuevo en casa, comprueba que el resultado es satisfactorio.

La iluminación súbita de Poincaré responde a un largo periodo de intensa actividad mental, consciente e inconsciente. Y ese trabajo inconsciente, a veces más productivo que el consciente, parece sólo activarse tras un tiempo de intenso trabajo consciente, como si hubiésemos dejado el ordenador en *stand by* o minimizado

## HENRI POINCARÉ (1854-1912)

Matemático francés, célebre, entre otras cosas, por la conjetura topológica que lleva su nombre y que acabó siendo demostrada, al menos en sus líneas principales, por el matemático ruso Grigori Perelman en el año 2002. Un hilo puede cerrarse continuamente hasta un punto sobre la superficie bidimensional de una esfera. La conjetura de Poincaré afirma que existe una situación análoga para caracterizar la esfera de «superficie» tridimensional en el espacio de cuatro dimensiones.





*La ilustración muestra un lazo cerrándose en torno a un punto situado sobre la esfera.*

una ventana del ordenador para abrir otro programa y trabajar en otras. Pero el programa en espera, el de la ventana minimizada, continúa trabajando y da con una solución de la que sólo seremos conscientes al reactivarlo de nuevo, al desplegarla otra vez, ya sea con un clic voluntario o, simplemente, cerrando todos los demás programas y ventanas. Poincaré destacaba el papel de los periodos de esfuerzo voluntario, aunque fuesen estériles, pues sin ellos nada ocurría.

No conocemos qué procesos mentales condujeron a los grandes resultados de Arquímedes, pero probablemente fue algo similar a lo sentido por Poincaré. Quienes hayan trabajado en matemáticas, como profesionales o aficionados, también podrán referir experiencias parecidas.

Ésta es la perspectiva psicológica tradicional de la creación matemática. Pero hay algunas cosas más que destacar en la experiencia creativa del gran matemático francés. Una es el hecho de que su clarividencia estuviese centrada en relacionar cosas aparentemente distintas. Ese aspecto fue fundamental en su vida, hasta el punto de

afirmar que las matemáticas consisten en dar el mismo nombre a cosas diferentes. Dicha capacidad no sólo es proverbial en la creación matemática, sino característica de todo creador. El otro hecho, en el que se basa el anterior y que destacan tanto Poincaré como Courant y Robbins (1996), Pólya (1988) o Lakatos (1994), es el papel que desempeña la analogía en la creación matemática.

Hemos identificado así un aspecto determinante de la creación matemática: la analogía. Llegados a este punto podríamos decir: «¿Quiere usted crear matemáticas? Pues piense en analogías y posponga la lógica. ¿Qué otros activadores inciden en la creatividad?».

## Psicología de la creatividad

La perspectiva psicológica sobre el pensamiento se hace eco también de la divergencia entre el pensamiento lógico y el pensamiento creador, pues constata la existencia de una actividad mental diferente de la capacidad de deducir conclusiones a partir de principios y reglas bien definidos. Otra cosa es precisar con claridad en qué consiste exactamente la creación que conduce a una innovación valiosa y original. Ya Platón, en boca de Sócrates, se planteaba dicha paradoja:

> «¿Cómo vas a buscar una cosa cuya naturaleza te es del todo desconocida? ¿Cuál de entre las cosas que desconoces es la que te propones buscar? Y si por azar dieras con ella, ¿cómo sabrías que es la que buscas, siendo así que la desconoces?».

No debemos renunciar a la posibilidad de que el azar resuelva la búsqueda. Esa iluminación súbita referida antes podría ser la respuesta al hecho de ser conscientes de una conexión entre ideas. El enlace que resuelve el problema, la buena combinación de entre todas las innumerables a las que se refería Poincaré. Sin embargo, algo nos dice que no es el azar el responsable de la idea. Al menos, no solamente él.

Los psicólogos distinguen cuatro fases en el proceso creativo:

1. Preparación.
2. Incubación.
3. Iluminación.
4. Verificación.

En la primera nos hacemos con el problema concretando la pregunta, recolectando los datos, redactando el enunciado y tanteando posibles salidas, estrategias, relaciones. La segunda fase, la incubación, es inconsciente. En ella se producen asociaciones imprevistas que pueden apartarnos de los caminos más trillados y corrientes. Ahí se gesta la iluminación, que brota, aparentemente, de forma espontánea como una inspiración divina. Se enciende una luz que alumbra la «idea feliz» que resuelve el problema, se produce la revelación. Un éxtasis como los de Arquímedes, Poincaré o Darwin, quien cayó en la cuenta de que la selección natural era la clave de su problema durante un paseo en coche.

La creatividad equivale a fluidez mental, y son muchos los psicólogos que destacan el papel de las asociaciones o combinaciones de ideas en el curso de dicha fluidez. Ahora bien, la esencia creativa no reside en la producción de asociaciones, sino en el «criterio para diferenciar las triviales de las genuinamente buenas» (Pinillos, 1981: 469). Los psicólogos están de acuerdo con Poincaré. Según éstos, la actividad creadora consiste en una forma especial de solución de problemas caracterizada por su novedad, falta de convencionalismo, persistencia y esfuerzo del proceso resolutório. Hay quienes opinan, además, que esa novedad debe ser insólita, poco relacionada con lo previo y sus aportaciones agudas.

Las características de la creatividad son tan variadas que se dirían inagotables. La originalidad y la innovación están sujetas a criterios históricos, nunca son absolutos y su aprecio cambia con el tiempo y la cultura. Su marcada subjetividad impide establecer un criterio preciso de originalidad que va en detrimento de su investigación. «La lógica, la experiencia y el ensayo experimental son, desde luego, elementos esenciales del pensamiento creador. Pero la creatividad es algo más» (Matussek, 1977). Hallamos aquí nuevos elementos relacionados con la creación: lógica, experimentación y práctica.

El creador no cesa de pensar, mientras que el no creador se aferra a lo que acaba de pensar y se siente satisfecho por no tener que seguir pensando. Le cuesta pasar de una representación a otra. En un creador las ideas pasan fácilmente de un campo a otro y se pueden seguir varios planteamientos a la vez sin aferrarse demasiado a ninguno de ellos. La capacidad de crear nuevas definiciones es fundamental para la comprensión de las cosas, pues sólo cuando se ha comprendido bien una idea podemos hablar de auténtico conocimiento. Muchas cosas atisbadas, vividas y experimentadas continúan siendo desconocidas porque no han sido comprendidas aún. Los creadores pueden «problematizar» las cosas y los nexos causales con mayor facilidad que los no creadores, se los pueden presentar como problema e iniciar así las soluciones.

Vemos que aparece un nuevo factor, la comprensión, que, en el caso de las matemáticas, puede resultar primordial. Quien no comprende un problema no puede resolverlo, y tal vez la iluminación súbita de la que hablamos antes responda a ese instante de lucidez por el que acabamos comprendiendo el fenómeno que nos ocupa. De este modo, expresiones como «eureka» o «lo veo, lo veo» reemplazarían a otra más profunda: «lo entiendo». Se han sentado así las bases para el ámbito en el que se sitúan la analogía, la experimentación, la práctica, la lógica, la comprensión y el planteamiento de problemas. Éstos son los componentes fundamentales de la heurística; a ella remite el análisis del proceso creativo.

## Heurística: crisol de la creación matemática

Con práctica puede desarrollarse la capacidad de entrever relaciones adecuadas. Lo primero que hay que hacer es probar diversas alternativas, ensayar y equivocarse, volver a empezar y probar otras vías; es decir, experimentar. Así se aprende a seleccionar caminos útiles y a descartar los inútiles sin necesidad de recorrerlos exhaustivamente todos. Este arte de la invención, de crear vías de solución a un problema matemático se conoce con el nombre de «heurística».

Su principal defensor y quien la rescató del olvido como técnica de desarrollo matemático fue el húngaro George Pólya en la primera mitad del siglo XX: «Sí, la matemática tiene dos caras; es la ciencia rigurosa de Euclides, pero es también algo más. La matemática presentada a la manera euclidea parece una ciencia sistemática, deductiva; pero la matemática en proceso parece una ciencia experimental, inductiva. Ambos aspectos son tan viejos como la misma ciencia matemática». Precisamente es este «algo más» el que tiene mucho que ver, como se pondrá de manifiesto más adelante, con la creatividad matemática. En *Cómo resolverlo*, Pólya da cuatro pasos fundamentales para solventar un problema matemático:

1. Comprender el problema.
2. Elaborar un plan para resolverlo.
3. Llevar a cabo el plan.
4. Examinar la solución obtenida y revisar el proceso.

Pólya distingue entre problemas para demostrar y problemas para hallar. El problema tratado en el apartado anterior era del segundo tipo. Al final de este capítulo se expone la resolución heurística de un problema del primer tipo.

## GEORGE PÓLYA (1887-1985)

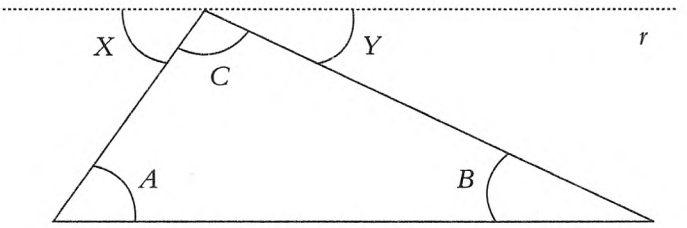
Este matemático húngaro desarrolló las técnicas fundamentales para la resolución de problemas. La conjetura de Pólya, planteada en 1919, dice que la mayoría de los números naturales menores que otro dado tienen una cantidad impar de factores primos. Dicha conjetura fue resuelta negativamente en 1950, aunque el contraejemplo más pequeño fue hallado en 1980; se trata del número 906.150.257.

El carácter creativo del método heurístico ha sido destacado por Davis y Hersh: «El ejemplo heurístico de demostraciones y refutaciones propuesto por Lakatos... puede ser aplicado por el individuo en sus esfuerzos por crear nuevas matemáticas» (Davis y Hersh, 1989, p. 216). Lo que ocurre es que para llevar a cabo tal aplicación, y puesto que la idea arraigada de lo que son y de cómo funcionan las matemáticas difiere mucho de su propia realidad, se requiere un cambio de enfoque y una buena dosis de coraje.

Veamos un ejemplo con uno de los teoremas fundamentales de la geometría plana: los tres ángulos de un triángulo suman un ángulo llano. Es decir, en cualquier triángulo de ángulos $A$, $B$ y $C$ se verifica que $A+B+C=180°$, siendo 180° la medida del ángulo llano.

Para ello habría que reunir los tres ángulos en un vértice y ver que su unión produce un ángulo llano. Experimentalmente puede comprobarse este hecho cortando con tijeras las tres esquinas de un triángulo de papel y reorganizando las tres piezas en un punto común. Pero esto no prueba el fenómeno, tan sólo lo valida en ese caso particular.

La demostración más conocida de este fenómeno se basa en trazar por un vértice del triángulo, por ejemplo $C$, una recta $r$ paralela a su lado opuesto. Se crean así dos ángulos exteriores al triángulo en el vértice $C$. Llamémosles $X$ e $Y$:

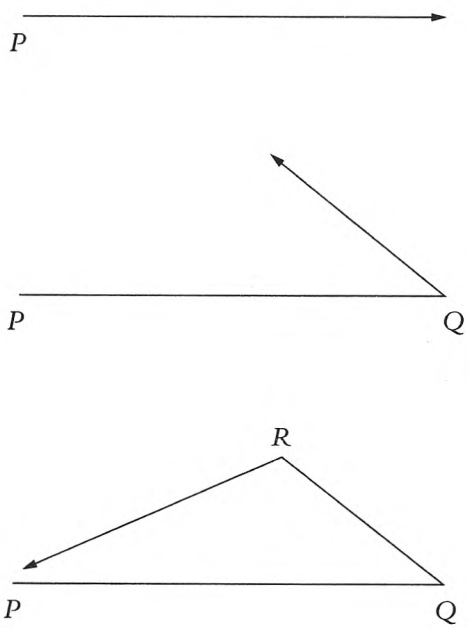


Pero dado el paralelismo de $r$ con el lado $AB$, el ángulo $X$ es igual al ángulo $A$. Lo mismo vale para $B$ e $Y$. Pero, evidentemente, los tres ángulos en el vértice $C$ suman el ángulo llano de la recta $r$. Por tanto, $180° = X + C + Y = A + C + B$, y los tres ángulos del triángulo suman un ángulo llano: $A + B + C = 180°$.

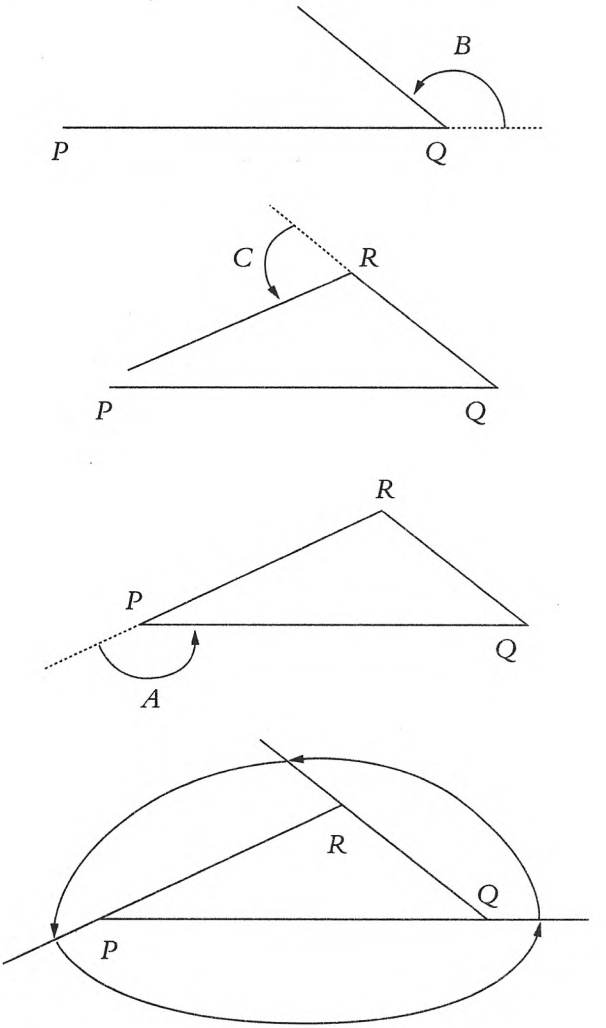
Esta demostración se basa en el trazo de una línea adicional que sirve de apoyo a la argumentación. Se nos pueden ocurrir muchas cosas y añadir puntos y líneas a la figura, pero ni todos ni todas resultarán útiles. También influye en la resolución del problema la forma y la posición del triángulo dibujado, es decir, la situación que aparece ante nuestros ojos.

A quienes no se les ocurra esa idea feliz que puede parecer el trazado de una paralela por otro vértice pueden tratar de enfocar la demostración de otra manera. Para ello reflexionemos un poco en lo que hacemos al trazar un triángulo.

Trazar un triángulo significa dibujar una línea cerrada con tres esquinas. Para hacerlo ponemos la punta del lápiz en un punto $P$ del papel y lo deslizamos en línea recta, pongamos hacia la derecha. El extremo $Q$ de dicho segmento viene determinado por un cambio de dirección en el trazado que se repetirá de nuevo en el tercer vértice $R$. Desde ahí giramos de nuevo para enfilar el punto de partida $P$:



Enraicemos ahora nuestra demostración en esta construcción. El triángulo se compone del trazo de tres segmentos. El segundo de ellos se inicia en $Q$ con un giro de ángulo $B$. Luego continuamos hasta $R$ para girar de nuevo ahí un ángulo $C$ con el que enfilamos el punto de inicio $P$. Finalmente, al llegar a $P$ giramos un ángulo $A$ para situarnos en la misma dirección con la que comenzamos el dibujo:




Puesto que hemos vuelto a la misma dirección (la del segmento $PQ$) con la que empezamos, los tres cambios de dirección suman un giro completo de 360°:

$$A+B+C=360°.$$

Pero cada uno de esos tres ángulos es el suplementario del ángulo interior de cada vértice, es decir, lo que les falta a $A$, $B$ y $C$ para llegar a 180°. Llamando $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ a esos ángulos interiores, tenemos que:

$$(180°-\alpha)+(180°-\beta)+(180°-\gamma)=A+B+C=360°.$$
$$540°-(\alpha+\beta+\gamma)=360°.$$
$$180°=\alpha+\beta+\gamma.$$

Y los tres ángulos del triángulo suman un ángulo llano.

Esta demostración podría llamarse «situada», pues se basa directamente en el modo en que se traza la figura, es decir, en la situación. No requiere nada adicional que no sea otra cosa que la reflexión sobre la acción que se realiza.

El método heurístico de Pólya y Lakatos es el modo en que realmente se ha desarrollado la mayor parte del conocimiento matemático a lo largo de la historia y que casi siempre se ha mantenido oculto. La demostración de un teorema se gesta mediante la crítica y contraejemplos, de tipo local o global, que no sólo tienen el objetivo de refinarla, sino de reformular el enunciado hasta el punto de crear nuevas definiciones y categorías. La finalidad del proceso consiste en alcanzar un enunciado más preciso o general y una demostración definitiva que facilite la comprensión del teorema.

## Educación matemática y creatividad

La educación matemática constructivista intenta mostrar que con algo que ya sabemos, con alguna ayuda y con una buena gestión de la información disponible somos capaces de resolver problemas. En el ínterin, aprendemos creando matemáticas, las que serán nuestras matemáticas. Tal vez no se trate de un conocimiento novedoso a nivel mundial, pero habremos llevado a cabo un proceso prácticamente idéntico al del matemático profesional. Sin duda merecemos sentirnos tan dichosos como él. La experiencia educativa demuestra que así es.

Entonces, si todo el mundo puede crear algo de matemáticas, ¿dónde está la dificultad? En el compromiso. Aprender es buscar respuestas, pero para ello hacen falta las preguntas. ¿Quién se formula cuestiones matemáticas sobre lo que ve, escucha, hace o vive? Casi nadie; eso distingue a los matemáticos de los que no lo son. Sin embargo, no se comprende el mundo sin matemáticas. A mirar matemáticamente, a plantear problemas y a resolverlos también se aprende.

Es imposible determinar lo que hace el cerebro en la fase de incubación para resolver un problema o crear algo nuevo. Tampoco podemos gobernar ese instante revelador que supone la iluminación, pues se produce espontáneamente, sin aviso previo ni consciente. Donde sí podemos incidir es en los dos periodos restantes.

En cuanto al periodo de verificación, no hay mucho que decir, pues en matemáticas es bastante rutinario y consiste en comprobar si el resultado obtenido en la iluminación verifica, resuelve o se adapta al problema en cuestión. Ahí es donde la lógica juega un papel destacado. La iluminación debe pasar por ese cedazo para ser finalmente aceptada.

La fase para la que podemos educarnos es la de preparación. Ésta es la fase de trabajo consciente, que se inicia con el planteamiento y comprensión del problema. La idea sería trabajar lo suficientemente bien como para dar pie al alumbramiento. El trabajo tiene que acabar fecundando nuestra mente para que, al cabo de cierto tiempo, nazca la creación. ¿Cómo trabajar? ¿Qué hacer para fecundar nuestro pensamiento?

## Fases de la creación

Investigadores del ámbito matemático y científico (Courant y Robbins, 1996; Pólya, 1988; Davis y Hersh, 1989, Lakatos, 1994) coinciden en señalar muchos de los aspectos que intervienen en la investigación creativa: imaginación, observación, experimentación, intuición, analogía, generalización, razón, estrategia, suerte. De entre todos ellos destacamos seis como fundamentales: observación, intuición, experimentación, conjetura, analogía y verificación.

A continuación vamos a tratar un sencillo fenómeno desde estos seis puntos de vista para ver cómo intervienen en su resolución. El fenómeno del que nos vamos a ocupar es:

*Los cuadrados de los números naturales.*

### Observación

La observación depende de quien la lleva a cabo. Sólo podemos reconocer lo que ya conocemos. Si queremos percibir algo desconocido en un fenómeno debemos estar atentos a las cosas que nos sorprendan de él, lo que no impide, sino favorece, que dos observadores distintos vean cosas distintas. Suele ocurrir también que un

observador perciba un cambio en una escena familiar sin saber decir de qué se trata. En cualquier caso y circunstancia, la observación no consiste en mirar, sino que es un proceso mental cuya conclusión acostumbra a ser una descripción o interpretación de lo observado.

En matemáticas, las observaciones más corrientes se encaminan hacia la identificación de pautas. ¿Qué pauta podemos observar en los cuadrados de los primeros números naturales?

| Número | Cuadrado | |
|---|---|---|
| 0 | $0^2$ | 0 |
| 1 | $1^2$ | 1 |
| 2 | $2^2$ | 4 |
| 3 | $3^2$ | 9 |
| 4 | $4^2$ | 16 |
| 5 | $5^2$ | 25 |

A partir de la serie 1, 2, 3, 4, 5,... hemos creado la serie 1, 4, 9, 16, 25,... ¿Qué tiene de particular esta última? No está hecha de números consecutivos. Parece una serie de números aleatorios, aunque se hayan obtenido de manera bien determinada.

Para poder observar mejor el fenómeno volvamos la atención a la serie primigenia. ¿Por qué razón decimos que los números 1, 2, 3, 4, 5,... son consecutivos? Porque la diferencia entre cada número y sus vecinos es siempre 1. Trasladamos esta observación a la segunda serie. ¿Cuáles son las diferencias entre los números cuadrados?

| Número | Cuadrado | Diferencia |
|---|---|---|
| 0 | 0 | — |
| 1 | 1 | 1−0=1 |
| 2 | 4 | 4−1=3 |
| 3 | 9 | 9−4=5 |
| 4 | 16 | 16−9=7 |
| 5 | 25 | 25−16=9 |

¡Eureka! Las diferencias entre los cuadrados son los números impares: 1, 3, 5, 7, 9.

## OBSERVACIÓN DE PAUTAS

La observación de pautas en series numéricas tiene sus riesgos. A la pregunta de qué número sigue al 5 en la serie 1, 2, 3, 4, 5,... podemos dar varias respuestas:

- El 6, porque la serie es la de los números naturales:

  1, 2, 3, 4, 5, 6,...

- El 1, pues se trata de repetir las cinco cifras:

  1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5,...

- El 8, ya que se intercalan los impares entre las potencias de 2:

  $1, 2, 3, 4, 5, 8, ... = 1, 2^1, 3, 2^2, 5, 2^3, ...$

La respuesta quizá sea, como dijo Wittgenstein, cualquier número, pues los puntos suspensivos ocultan lo que no se ve y permiten imaginar lo uno desee o le convenga.

## Intuición

La observación invita a intuir un patrón de formación que la experimentación puede confirmar.

## Experimentación

Uno de los requisitos de la experimentación es gobernar su control y que sea reproducible. En matemáticas esto no acostumbra a ser un obstáculo. Nada impide reproducir los cálculos para sucesivos cuadrados de la serie:

| Número | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cuadrado | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 |
| Diferencia | — | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 |

La experimentación confirma la pauta observada. Al calcular las diferencias entre los cuadrados de los 13 primeros números naturales (incluido el 0) obtenemos los 12 primeros números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

## Conjetura

La conjetura es que el fenómeno se propaga a toda la sucesión de números naturales. Saltamos así de lo finito a lo infinito, de lo particular a lo general. Ésta es la formulación de nuestra conjetura, el teorema:

*La sucesión de diferencias de los cuadrados de los números naturales es la sucesión de números impares.*

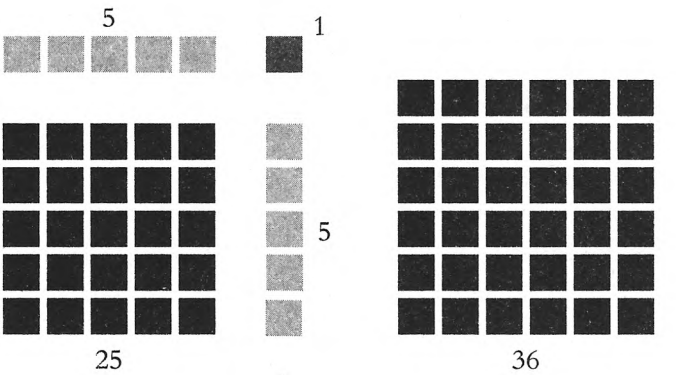
Pero, ¿cómo podemos confirmarlo? Es imposible seguir adelante con una experimentación exhaustiva que alcance toda la infinidad de los números naturales.

## Analogía

Por otra parte, surge otra cuestión: ¿comprendemos realmente este fenómeno? Los cálculos nos dicen que la realidad numérica parece obedecer a una pauta. Pero ¿la comprendemos? ¿Entendemos por qué la diferencia entre los cuadrados es siempre un número impar? Con eso no pretendemos afirmar o demostrar la conjetura; lo que queremos es tener la sensación de comprenderla. Los números y los cálculos hablan, pero hablan en el lenguaje de la lógica. Aceptamos los resultados, pero a pesar de lo que dicen quizá no acabemos de ver el trasfondo profundo de esa realidad.

La analogía puede servirnos para esclarecer las causas del suceso. ¿Y si nos liberamos de la idea de número para quedarnos con la de cuadrado? Nada nos impide considerar esas figuras geométricas. De hecho, la segunda potencia, elevada al cuadrado, procede del símil geométrico. Los números cuadrados se llaman así porque tales cantidades de unidades pueden disponerse de esa forma:

¿Y qué ocurre entre dos cuadrados «consecutivos»? Dado un cuadrado, por ejemplo, el de $25 = 5 \cdot 5$, ¿qué hay que añadirle para convertirlo en el «siguiente», el cuadrado de $36 = 6 \cdot 6$? Veámoslo:




Se obtiene añadiendo al de 25 dos tiras de 5 unidades más otra unidad que completa la esquina. Es decir, $36 = 25 + 2 \cdot 5 + 1$. De igual modo se aprecia que:

$$6^2 = 36 = 25 + 2 \cdot 5 + 1.$$
$$5^2 = 25 = 16 + 2 \cdot 4 + 1.$$
$$4^2 = 16 = 9 + 2 \cdot 3 + 1.$$
$$3^2 = 9 = 4 + 2 \cdot 2 + 1.$$
$$2^2 = 4 = 1 + 2 \cdot 1 + 1.$$

He aquí la clave. Lo impar de las diferencias se halla en la esquina necesaria para completar el cuadrado. Esta analogía ayuda a comprender el fenómeno.

## Verificación

Queremos dar una prueba definitiva de nuestra conjetura que ni la experimentación numérica sobre cada número natural ni la experimentación analógica sobre las figuras cuadradas ofrecen. Ambas sirven para plantear el teorema, para comprender el fenómeno y convencernos de él. Sin embargo, no podemos deducir de ellas la veracidad del resultado para todos los números cuadrados.

Quizá sea bueno volver a la observación para tratar de encontrar un argumento lo suficientemente convincente. En la última tabla se observa otra cosa. A saber, que la alternancia entre par e impar propia de los números naturales se propaga también a sus cuadrados. Dicho de otro modo:

$$\text{par}^2 = \text{par}.$$
$$\text{impar}^2 = \text{impar}.$$

Y puesto que la diferencia entre par e impar es siempre impar:

$$\text{par} - \text{impar} = \text{impar}.$$
$$\text{impar} - \text{par} = \text{impar}.$$

Podemos concluir que la diferencia entre cuadrados consecutivos será siempre impar. ¿Deberíamos dar ya por bueno el resultado? Sin duda estamos ya absolutamente convencidos de él. Pero ¿es esto una demostración en toda regla? Muchos pensarán que una versión algebraica es más poderosa e independiente que la intuición.

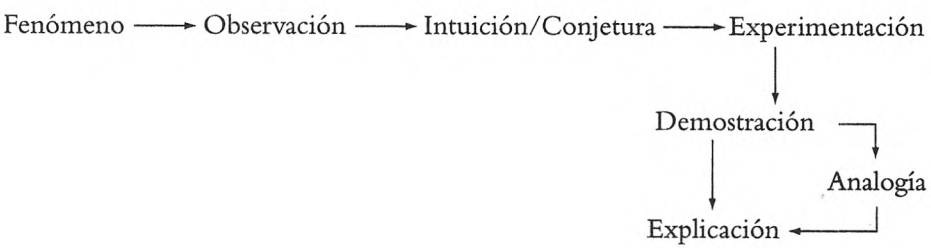
Sea $n$ un número natural cualquiera. Entonces, su consecutivo es, por definición, $n+1$. Efectuemos los cuadrados y calculemos la diferencia:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Este número, $2n+1$, siempre es impar porque $2n$ es par para cualquiera que sea $n$. Luego, la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos es siempre un número impar. Además, las sucesivas diferencias también son impares consecutivos de acuerdo con la sucesión $2n+1$.

Quien crea que este argumento es más poderoso y que se aproxima a la que podríamos tomar por demostración definitiva del teorema debería revisar el proceso desarrollado y ver que se trata de una versión sinónima del argumento analógico relativo a las figuras cuadradas. El comodín que supone $n$ como representación de cualquier número natural esconde y evita el aspecto intuitivo geométrico por el que pudimos comprender la esencia del problema.

Que el resultado de calcular la diferencia entre $(n+1)^2$ y $n^2$ sea $2n+1$ demuestra la veracidad del fenómeno. Mediante la versión analógica (geométrica) lo comprendemos y nos convencemos de ello. Ya lo decía Hersh: uno puede deducir que dos y dos son cuatro aplicando la axiomática y las reglas de un sistema lógico formal, pero la convicción del resultado proviene de recolectar guijarros. El esquema siguiente resume el proceso que se debe seguir e ilustra el propósito último de la creación matemática: explicar el fenómeno.



## La lógica no crea, pero exige

La lógica se rige por axiomas y reglas explicitadas desde hace tiempo. Tiene su base en el modo de pensar de los humanos. Para los formalistas, las matemáticas se reducen a series de símbolos gobernados por dichas reglas. Pero no es ésa la perspectiva filosófica de las matemáticas defendida en estas páginas. Es verdad que en la lógica se fundamenta la argumentación y verificación de los resultados matemáticos, pero no basta con ella para producirlos. La creación matemática trasciende a la lógica. Un ejemplo de ello es el siguiente teorema:

*Toda potencia de dos es par.*

Un resultado semejante podrá ser lógico, pero no aporta nada nuevo debido a su obviedad. No puede ser tomado como creativo. Aplicar las reglas de la lógica para producir nuevos resultados verdaderos a partir de los precedentes no es una actividad creativa. Podría hacerlo un ordenador. El acto creativo implica seleccionar o buscar resultados significativos. Responde a preguntas e intereses formulados dentro de un contexto social y cultural del que carecen las máquinas. Incluso los formalistas constituyen un ámbito de este tipo. Las máquinas no producen enunciados, sino las personas. La lógica es industrial, funciona como una cadena de montaje programada para hacer lo que hace. Las matemáticas son mucho más que una industria. Por otra parte, existen teoremas humanos con los que una máquina quizá no daría nunca.

Tampoco debemos pasar por alto la responsabilidad del acto creativo. Toda creación conlleva consecuencias, como sucede cuando responde a la conservación de la coherencia de un sistema o una estructura, es decir, que el deseo de coherencia de ese sistema o estructura sea la que la inspire. Eso fue lo que ocurrió con la regla de los signos:

$$-\times-=+$$

Esta regla se establece para preservar la coherencia de la multiplicación con enteros negativos y es consecuencia del deseo de conservación de la propiedad distributiva para dichos números. En efecto, la propiedad distributiva dice que para tres números cualesquiera $a$, $b$ y $c$, se verifica que:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

## PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LA ARITMÉTICA ORDINARIA

Para un conjunto $C$ en el que hay definidas dos operaciones binarias que expresamos con los símbolos «+» y «·»:

- Conmutativa: $a+b=b+a$.
  $a\cdot b=b\cdot a$.
- Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
  $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.
- Distributiva de «·» con relación a «+»: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Entonces, sería deseable que también se cumpliese esa igualdad para $a=-1$, $b=1$ y $c=-1$:

$$-1\cdot(1-1)=-1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=-1+(-1)\cdot(-1)$$
$$-1\cdot(1-1)=-1\cdot 0=0.$$

Luego, debe ser:

$$-1+(-1)\cdot(-1)=0\Rightarrow(-1)\cdot(-1)=+1.$$

Los matemáticos tardaron mucho en comprender que la «regla de los signos», junto con otras definiciones que rigen los números enteros y las fracciones, no podían «demostrarse». Nosotros las «creamos» con el fin de conseguir libertad operativa mientras se preservan las leyes fundamentales de la aritmética. Estamos de acuerdo con Courant y Robbins cuando afirman que lo único que puede —y debe— probarse es que se conservan las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la aritmética en base a estas definiciones.

Así que la lógica nos conduce a resultados sorprendentes y, a veces, difícilmente admisibles. Aceptando que menos por menos da más, somos coherentes no sólo con la lógica operativa, sino con nosotros mismos, porque fue nuestro pensamiento el que elaboró las leyes de la lógica. Lógico es aceptar sus consecuencias, aunque no nos gusten o parezcan insólitas. Llegados a este punto, los matemáticos podrían haber rechazado los números negativos tomándolos por monstruosidades que impedían el desarrollo del conocimiento. También podrían haberlos tomado como signo de locura y prueba de lo ilógicos que eran los puntos de partida. Sin embargo,

asumieron responsabilidades que permitieron ampliar el sistema previo, logrando coherencia y desarrollo.

Courant y Robbins enfatizan el aspecto creativo de dicha decisión destacando con cursiva el término *creados*. Aceptar resultados insólitos al que nos conducen propiedades y teoremas para introducir nuevos elementos es una forma de creación corriente en matemáticas. Los resultados se antojan tanto más insólitos cuanto más lejos se hallan del cálculo más elemental, con el que contamos los cantos rodados de un riachuelo o cuando atacan los esquemas asentados a lo largo del tiempo.

## Vivir matemáticamente

Hacer matemáticas significa vivir experiencias matemáticas. Y para tener experiencias matemáticas hacen falta deseos de comprender y explicar las cosas de cierto modo, según el enfoque matemático, que pasa por un cuestionamiento bastante objetivo sobre aspectos del mundo en base a la cuantificación.

Es éste un aspecto nuevo con relación a la heurística de Pólya, pues los problemas que se plantean pueden trascender el ámbito académico en el que se situó la heurística más tradicional.

Plantearse cuestiones matemáticas relacionadas con los fenómenos que uno vive o experimenta, dentro o fuera del ámbito académico y cultural a los que pertenecemos, tiene como objeto aprehender la realidad y el entorno (social, cultural, tecnológico) en el que se desarrollan nuestras vidas. No hay nada más creativo que eso, y regresaremos a este mismo tema en el capítulo 3.

Capítulo 2

# Grandes ideas para grandes problemas

Muchas de las grandes creaciones matemáticas han estado ligadas a grandes crisis en el desarrollo del conocimiento matemático. En ocasiones, la nueva creación o teorema responde a un problema; en otras, crea un conflicto con las ideas predominantes hasta ese momento. Por eso, algunas de las mayores creaciones matemáticas han supuesto verdaderos retos para la mente. Lo que hasta cierto momento se tomaba como irracional y carente de sentido acabó teniéndolo y resolvió problemas mucho más reales y prácticos de lo imaginado. El caso más extraordinario de todos probablemente sea el de los números complejos: ¿cómo aceptar que el cuadrado de un número sea negativo? ¿Cómo crear un sentido racional para semejante monstruo?

El desarrollo del conocimiento matemático ¿es lineal? Aunque algunos así lo consideran, se trata de una opinión por lo menos discutible. La linealidad del conocimiento matemático posiblemente sea sólo una apariencia, una consecuencia, como ocurre con los axiomas y teoremas, del modo en que las matemáticas se han expuesto y se exponen aún ante el público.

## Contar

Contar consiste en determinar el número de elementos que forman una agrupación. Un vistazo nos basta para ser conscientes de cantidades pequeñas, y no nos hace falta contar para saber que grupos de dos, tres o cuatro unidades son distintos. Sin embargo, resulta difícil discernir cantidades de grupos formados por más de cuatro o cinco cosas; necesitamos contarlas.

Entre las primeras formas de contar está la de asociar una cantidad con diferentes puntos del cuerpo humano. Tribus de distintas partes del mundo han usado, y usan todavía, itinerarios anatómicos para determinar el número de cosas de un conjunto, lo que técnicamente se llama «cardinal» de dicho conjunto. Un rebaño y un saco lleno de arroz son conjuntos cuyo cardinal es finito. Los números naturales también forman un conjunto, pero de cardinal infinito. Distinguir dos conjuntos finitos es

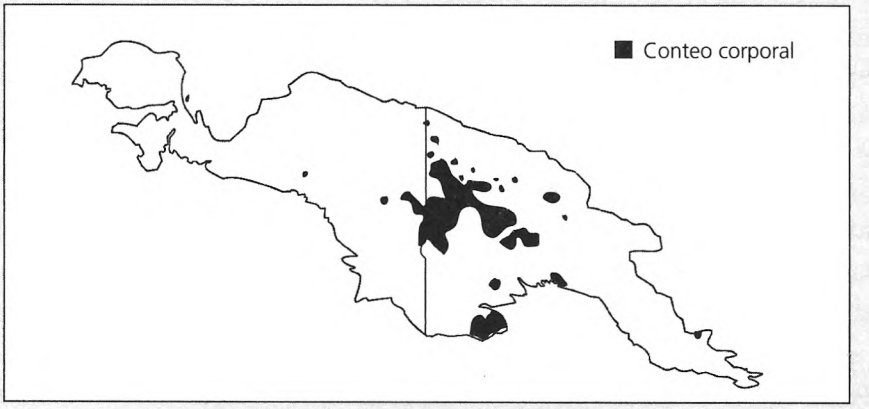
sencillo: basta con contarlos. La diferencia está en el número que determina su cardinal. Más adelante veremos que no sucede lo mismo con los conjuntos infinitos.

El acto de contar adquiere sentido cuando se cuenta algo finito. Se produce cuando nos liberamos de los referentes tangibles y asociamos un símbolo (verbal o escrito) a cada cantidad. Como en el caso corporal, el recorrido es necesario para el recuento, pero a diferencia de aquél, un signo denota, por sí mismo, una cantidad determinada. Éste es el papel de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0 con las que designamos las cantidades elementales.

Pero la gran creación es la del establecimiento de una base. El recuento de grandes cantidades utilizando un símbolo y un término verbal distinto para cada una de ellas no sólo se haría tedioso, sino prácticamente imposible, pues tarde o temprano los términos y los símbolos se agotan y nuestra memoria tiene un límite. La invención de una base numérica y de un sistema de notación posicional que transforma el recuento en una actividad recurrente es extraordinaria. Un sistema posicional de base 10 como el nuestro utiliza sólo diez símbolos para representar cualquier número, por grande que éste sea. Los términos verbales con los que nos referimos a una

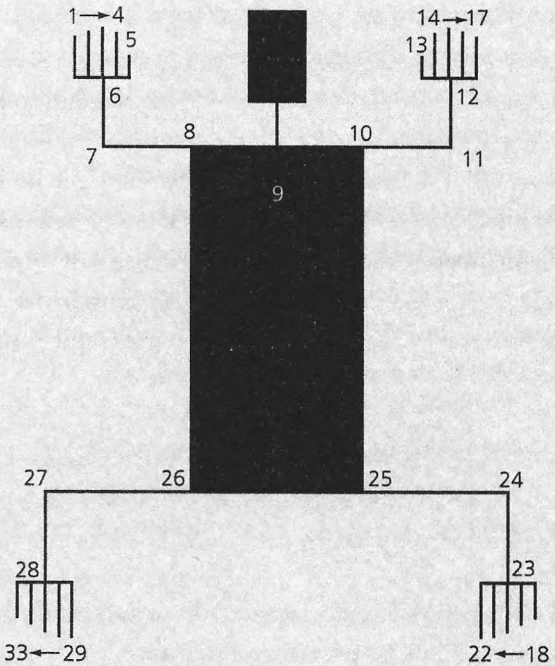
## CONTAR

Todas las culturas han desarrollado sistemas para contar, y la mayoría lo ha hecho utilizando partes del cuerpo que se han relacionado con un número. Es el denominado «conteo anatómico» o «corporal». En 1992, el investigador Glen Lean identificó más de quinientos sistemas distintos de contar en la isla de Nueva Guinea. Las zonas señaladas en el mapa corresponden a aquellas donde el conteo es corporal.



## RECUENTO CORPORAL

Ejemplo de recuento corporal de los nativos del estrecho de Torres (que separa Australia de la isla de Nueva Guinea), según George Ifrah (1994). Obsérvese la asimetría del proceso con respecto al cuerpo humano. El itinerario recorre las extremidades y sus articulaciones de forma circular.




cantidad también van acordes con la base y el sistema posicional; son veinte. Aquellos con los que nombramos el 0, el 1, el 2, ..., el 15 y los correspondientes a 100, 1.000, 1.000.000. Todos los demás son compuestos a partir de éstos.

Aún así, en la práctica suele recurrirse a estrategias que faciliten el recuento sin errores y a instrumentos que nos ayuden a llevarlo a cabo. El riesgo de equivocación al contar es mayor cuanto mayor es la cantidad. Entonces suele contarse a saltos, de 2 en 2, de 5 en 5, por decenas o docenas.

¿Por qué resulta más cómodo contar de 2 en 2 que de 3 en 3 o que de 7 en 7? Para contar de 2 en 2 basta con repetir la secuencia 2, 4, 6, 8, 10, añadiendo tras cada ciclo una unidad más a la izquierda, o sea, una decena:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
| 30 | 32 | 34 | 36 | ... |

No vale la pena contar de 4 en 4 ni de 8 en 8, pues 4 y 8 son múltiplos de 2 y, aunque dan lugar a las mismas terminaciones, éstas se suceden de forma desordenada con relación a las del recuento por pares. Además, la adición de una decena se alterna cada dos y tres números:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, ...
8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, ...

Mucho peor resulta contar de 3 en 3, de 7 en 7 o de 9 en 9. Las terminaciones no se adaptan a patrones fáciles de retener en la memoria:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, ...
7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 70, 77, 84, 91, 98, ...
9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, ...

Si contar de 3 en 3 no es cómodo, tampoco lo es hacerlo de 6 en 6, pues conlleva el desorden secuencial de las terminaciones pares:

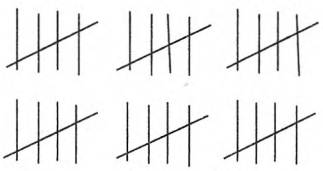
6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, ...

En cambio, sí resulta fácil contar de 5 en 5 o de 10 en 10:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, ...
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, ...

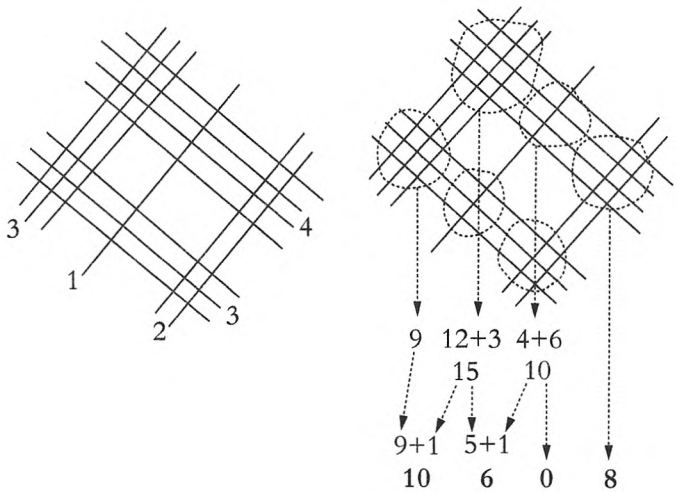
Pero eso suele hacerse después de haber organizado los elementos que deben contarse en grupos de cinco o en decenas. En el primer caso, se añade una unidad a la izquierda (decena) en cada ciclo (formado por un 0 y un 5). En el segundo, se trata simplemente de contar unidades poniendo un 0 detrás.

A la hora de contar cantidades numerosas, lo mejor es distribuirlas en un rectángulo. Eso da lugar al producto, un cálculo mediante el cual conocemos el resultado del recuento sin realizarlo exhaustivamente:



$$5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$$

El sistema de multiplicación maya se basa en este principio. Para multiplicar 312 por 34, se utilizan grupos separados de rayas paralelas que representan las centenas, las decenas y las unidades de cada número. Las líneas del segundo se distribuyen de manera que corten todas las del primero para poder contar luego las intersecciones correspondientes. Se trata de una representación visual de la multiplicación corriente:




Sin embargo, dicho procedimiento se hace impracticable con cifras o números grandes, pues las intersecciones acaban siendo demasiado numerosas.

¿Y qué sucede cuando lo que se quiere contar son cantidades infinitas? En el lenguaje corriente todos utilizamos el término infinito; con él se quiere destacar la magnitud ingente de una cosa, ya se trate de un proceso inacabable o de un objeto inabarcable. Contrariamente a lo que se cree, de infinito no hay sólo uno, sino que,

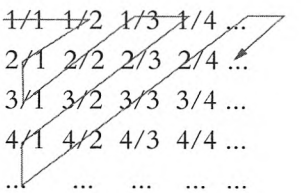
en matemáticas, al menos se distinguen dos tipos de infinitos. Uno es el infinito usual derivado de los números naturales, con los que contamos o numeramos los objetos: 1, 2, 3, 4, ... El otro es el infinito no numerable con el que contaríamos los puntos de un segmento.

Los infinitos conllevan paradojas. Por ejemplo, cuesta creer que los números naturales tengan el mismo cardinal (infinito) que una parte de sí mismos, como es el conjunto de los números pares. ¿Cómo es ello posible si hay el doble de números naturales que de pares? Por fuerza existen el doble de los primeros que de los segundos, pero es que el doble de infinito es infinito.

La cuestión no plantea dudas si precisamos qué se entiende por conjunto infinito. Se dice que un conjunto es numerable, que se puede contar, si sus elementos pueden ponerse en correspondencia con los números naturales. Entonces, está claro que los pares se pueden contar y que la relación establecida por el recuento determina su cardinal:

| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ... |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ... |

Más sorprendente resulte, quizá, que todos los números racionales tengan también el mismo cardinal que los naturales. El modo de contarlos es expresarlos primero como una fracción, distribuirlos de forma apropiada y establecer el orden del recuento:




El de los números naturales es el cardinal infinito «elemental», y se simboliza mediante el signo $\aleph_0$. Se simboliza con $\aleph_1$ el cardinal de un conjunto infinito de números que, a diferencia del anterior, no es numerable, es decir, no es contable con los números enteros. Otro modo de verlo es afirmar que sus elementos no pueden ponerse en correspondencia con los números naturales. Su infinitud es, en definitiva, de otra naturaleza.

Un ejemplo muy próximo de un conjunto de números no numerable es el de los reales comprendidos entre 0 y 1 (están incluidos aquí los irracionales que, como la raíz cuadrada de 2, no son el cociente de dos números enteros). La prueba que reproducimos a continuación, una de las más asombrosas de la matemática, fue ideada por el gran Georg Cantor.

Imaginemos que hubiésemos conseguido contar todos los reales entre 0 y 1. Entonces podríamos ponerlos en una lista como la siguiente:

1 0,**0**37563856636663...
2 0,9**1**9688568847383...
3 0,15**5**382300008691...
4 0,000**0**00033433002...
5 0,9999**9**5885994382...
6 0,10100**1**000100001...
7 0,774647**7**46477464...
...

Bien, pues puede construirse un número real infinito 0,... que no estará en esta lista. Se construye del modo siguiente: si el primer decimal del primer número de la lista es 1, escribimos 0; si no es 1, escribimos 1. De acuerdo con esa premisa y según la lista anterior, nuestro número comenzaría por 0,1...

A continuación miramos el segundo decimal del segundo número de la lista y aplicamos el mismo argumento que antes. Si dicho decimal es 1, escribimos 0; de lo contrario, escribimos 1. Nuestro número ya tiene dos decimales: 0,10...

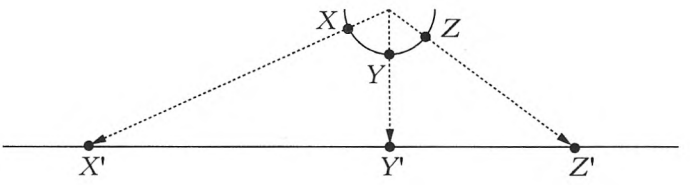
De nuevo repetimos el mismo razonamiento para escribir más decimales del número. De acuerdo con la lista anterior, nuestro número sería:

$$\Psi = 0{,}1011101...$$

Resulta que este número es distinto de todos los que figuran en la lista, ya que por lo menos difiere en un decimal. Luego, no está en ella. De hecho, es la propia lista la que facilita la posibilidad de su creación. Por lo tanto, la lista es imposible y los números reales comprendidos entre 0 y 1 no pueden contarse.

Esta argucia se conoce como «argumento diagonal» de Cantor, y nos muestra que el infinito de los números reales cualesquiera no es de la misma naturaleza que el de los naturales. También aquí se producen algunas paradojas. Por ejemplo, aunque difieren en longitud, tantos puntos hay en una semicircunferencia, con in-

dependencia de su tamaño, como en toda la recta real. Un gráfico muy sencillo hace evidente este aparente sinsentido: si desde el centro de la circunferencia en cuestión trazamos todos los radios que atraviesan la semicircunferencia, acabaremos estableciendo una correspondencia uno a uno entre los puntos de la semicircunferencia $(X, Y, Z,\ldots)$ y los de la recta real $(X', Y', Z',\ldots)$.




## Potencias poco naturales

Una persona se enfrenta a nuevas ideas con el bagaje cultural que posee. Cuando las novedades no encajan en los esquemas previos es imprescindible realizar una readaptación, un cambio de enfoque. En el proceso de asimilación el estudiante puede hallar un conflicto entre las propias razones internas y las externas.

Así ocurre con el sentido y el significado de las potencias de exponente negativo, decimal e irracional, pues suponen un reto a la comprensión tradicional asentada sobre operaciones elementales como son los productos y los cocientes.

Elevar un número a un exponente es multiplicarlo por sí mismo tantas veces como indica el exponente:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Al multiplicar potencias, se suman los exponentes, y al dividir, se restan:

$$2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8.$$

$$\frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \not{2} \cdot \not{2} \cdot \not{2} \cdot \not{2}}{\not{2} \cdot \not{2} \cdot \not{2} \cdot \not{2}} = 2^3.$$

Pero si dividimos potencias de igual exponente, por ejemplo $2^3$ entre $2^3$, llegamos a un resultado sorprendente. Por una parte el resultado es 1, ya que $8/8 = 1$. Pero, según la propiedad anterior, los exponentes deben restarse y obtenemos:

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0.$$

Esto significa que la coherencia sólo se conserva si $2^0 = 1$. ¿Cómo es posible que un número multiplicado por sí mismo cero veces dé 1? La cosa no acaba aquí. Si en una división de potencias el exponente mayor está en el denominador, el resultado es una potencia de exponente negativo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2^2}{2^4} &= \frac{2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^2} \\ \frac{2^2}{2^4} &= 2^{2-4} = 2^{-2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2} = 2^{-2}.$$

Elevar un número a otro era multiplicarlo por sí mismo varias veces. A partir de ahí hemos creado operaciones y expresiones que chocan con nuestro modo de entender las anteriores. Elevar un número a un negativo significa dividir la unidad por el número tantas veces como indica el exponente. ¿Es esto lógico? ¿Tiene sentido? Lógico es, desde luego; el sentido hay que cambiarlo. La concepción de exponente como indicador del número de factores del producto debe ser modificada. Además, un exponente negativo significa un exponente positivo en el denominador de una fracción. He aquí la transición de los exponentes negativos a los positivos:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2},\quad a^{-1} = \frac{1}{a},\quad a^0 = 1,\quad a^1 = a,\quad a^2 = a\cdot a.$$

Un proceso similar rige las potencias de exponentes decimales o fraccionarios. Si la raíz cuadrada de un número se eleva al cuadrado, el resultado es dicho número:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

¿Qué exponente corresponde a un número como la raíz cuadrada de *a*?

$$\left.\begin{aligned} \left(\sqrt{a}\right)^2 &= a \\ \left(\sqrt{a}\right)^2 &= \left(a^x\right)^2 = a^{2x} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Llegados a este punto, ¿por qué no plantearnos el sentido de expresiones como éstas?

$$2^{\pi},\ 2^{\sqrt{2}}.$$

Su sentido proviene del hecho de que todo número irracional (aquellos que no son fracción de dos enteros) es el límite de una sucesión de números reales finitos, como ocurre con la raíz de 2 y el número pi:

$$1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}411; 1{,}4142; 1{,}41421, \ldots \sqrt{2}.$$
$$3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; 3{,}14159, \ldots \pi.$$

Puesto que sabemos lo que significa elevar un número a un decimal, podemos definir ahora la potencia de exponente irracional:

$$2^{\sqrt{2}} = \text{límite de } \{2^1; 2^{1{,}4}; 2^{1{,}41}; 2^{1{,}414}; 2^{1{,}4142}; \ldots\}.$$

¡Cuánto nos hemos alejado de los orígenes de la definición de potencia! Estamos ante creaciones matemáticas extraordinarias, pues con las operaciones elementales hemos creado otras nuevas a las que hemos ido dando nuevos significados. Su sentido choca con concepciones previas, pero está guiado por la lógica del cálculo y el deseo de coherencia. Las potencias comenzaron teniendo exponente natural. Pero ahora, las de exponente natural se perciben como un mero caso particular de una construcción muchísimo mayor. Los exponentes pueden ser negativos, decimales e, incluso, irracionales.

Asimilar una creación supone un cambio de perspectiva. Ya no vale pensar que un número elevado a otro consiste en multiplicarlo por sí mismo tantas veces como dicta el exponente, porque carece de sentido multiplicar un número por sí mismo $-0{,}12$ veces o $\pi$ veces. Nos hemos liberado de ese enfoque tan elemental. Lo elemental sirvió de trampolín para elaborar una creación muchísimo más amplia y general desde la cual aquélla se ve como un mero caso particular. La creación nos ha cambiado.

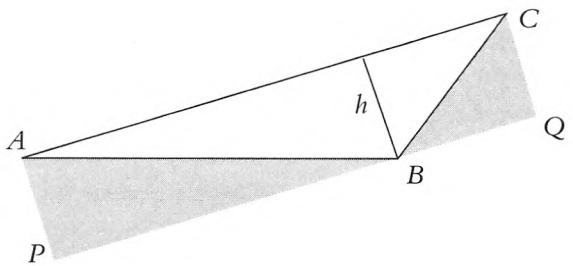
## Del área del rectángulo a la de cualquier figura

El segmento y el triángulo son las dos figuras fundamentales de las matemáticas y de todo el conocimiento humano. El primero sólo posee una única magnitud: lon-

gitud. De hecho, y puesto que no existe objeto tangible capaz de representarlo fielmente, puede decirse que el segmento está hecho de longitud. El triángulo, en cambio, posee longitud (perímetro) y área, es decir, la cantidad de espacio cercado por sus tres lados.

El cálculo de áreas ha sido desde tiempos remotos un problema fundamental del ser humano. Incluso la leyenda más extendida sobre el origen de las matemáticas tiene por escenario el Nilo, y por objeto, la medición de la superficie de las zonas inundadas en sus crecidas.

Dado un rectángulo de lados $a$ y $b$ se define el área $A$ encerrada entre sus cuatro lados como el producto de la longitud por su anchura: $A = a \cdot b$. Puesto que todo triángulo es la mitad de un rectángulo, su área es la mitad del área de dicho rectángulo. Efectivamente, en la figura siguiente el área del triángulo $ABC$ es la mitad del rectángulo $APQC$, que tiene por base el lado $AC$ del triángulo y por anchura, la altura $h$ de éste sobre AC:



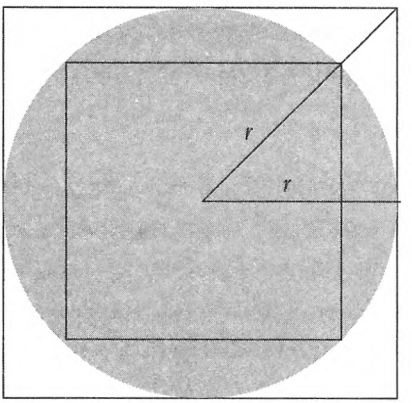

Por tanto, el área del triángulo es la mitad del producto de la base multiplicada por la altura:

$$A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h .$$

Cualquier figura plana poligonal se descompone en una serie de triángulos. Calcular su área se traduce en calcular la suma de las áreas de los triángulos que la componen. Pero ¿qué ocurre si el perfil de la figura no está hecho de segmentos, sino de curvas?

La figura curva más simple es el círculo. El problema del cálculo del área de un círculo es muy antiguo, y la cuestión de si es posible construir un cuadrado con regla y compás cuya área sea la de un círculo dado es uno de los tres problemas clásicos de la geometría.

¿Qué relación existe entre el área del círculo y la de un cuadrado? Una primera aproximación al área del círculo de radio $r$ puede ser la que se obtiene al inscribirlo en un cuadrado y circunscribirlo en otro:




El área del círculo $A_C$ está comprendida entre la del cuadrado de diagonal $2r$ y la del cuadrado de lado $2r$. Su promedio proporciona una primera estimación del área $A$ del círculo:

$$2r^2 < A_C < 4r^2 \quad \Rightarrow \quad A_C \approx \frac{2r^2 + 4r^2}{2} = 3r^2.$$

Hoy sabemos que este resultado es incorrecto, puesto que el área del círculo no es $3r^2$, sino $\pi r^2$. Pero en el antiguo Egipto se utilizó el valor 3 como proporción entre el perímetro y el diámetro de un círculo, aunque se puede comprobar con facilidad que si se hace dar un giro completo a una rueda de radio $r$, la longitud descrita supera en más de tres veces el diámetro. Pero no es el valor de $\pi$ lo que nos interesa ahora, sino cómo pasar del área de un rectángulo o un triángulo al área de un círculo.

Podemos intentar hacer con un triángulo equilátero lo que hemos hecho con un cuadrado e inscribir y circunscribir el círculo, pero entonces el problema se complica sobremanera y el resultado no es mejor que el anterior. Siguiendo ese modelo vemos que inscribiendo y circunscribiendo el círculo entre dos polígonos regulares de muchos lados lograríamos una aproximación del área mucho mejor. El resultado sería tanto más preciso cuantos más lados tuviesen los polígonos regulares.

Al final, en el caso límite, si es que existe tal situación, tendríamos dos polígonos de infinitos lados cuyas áreas deberían coincidir con el área del círculo. Luego, bas-

ta trabajar con el polígono inscrito o el circunscrito porque en la situación límite se confunden.

Esto fue lo que hizo Arquímedes, convertir el cálculo en un proceso. En lugar de tomar polígonos de $n$ lados, lo que hizo fue comenzar con el hexágono regular y duplicar a partir de él el número de lados. Así obtuvo las medidas correspondientes al polígono de 96 lados y una excelente aproximación del número $\pi$ y del área del círculo:

$$\frac{223}{71}r^2 < A_C < \frac{22}{7}r^2 \quad \Rightarrow \quad A_C \approx \frac{3123}{994}r^2 = 3{,}14185\ldots r^2.$$

El mérito de Arquímedes en este caso no está en realizar los tediosos cálculos pertinentes, sino en otros dos aspectos. Por un lado, en ahorrarse precisamente gran parte del cálculo al demostrar que conociendo los perímetros o áreas inscritos y circunscritos de una etapa del proceso pueden obtenerse los del siguiente mediante las medias armónica y geométrica. Por otro lado, elaborar un método iterativo por el que a cada paso se obtiene un resultado más preciso. Esto supone crear un camino hacia el infinito. Nunca se llegará hasta el final, pero podemos averiguar cómo es éste, cómo termina.

## ARQUÍMEDES EN EL SIGLO XXI

La trigonometría y la tecnología actual permiten realizar una variante del procedimiento arquimediano creando un método recurrente basado en los polígonos regulares de $2^n$ lados. El área del $2^n$-ágono inscrito en un círculo de radio 1 es:

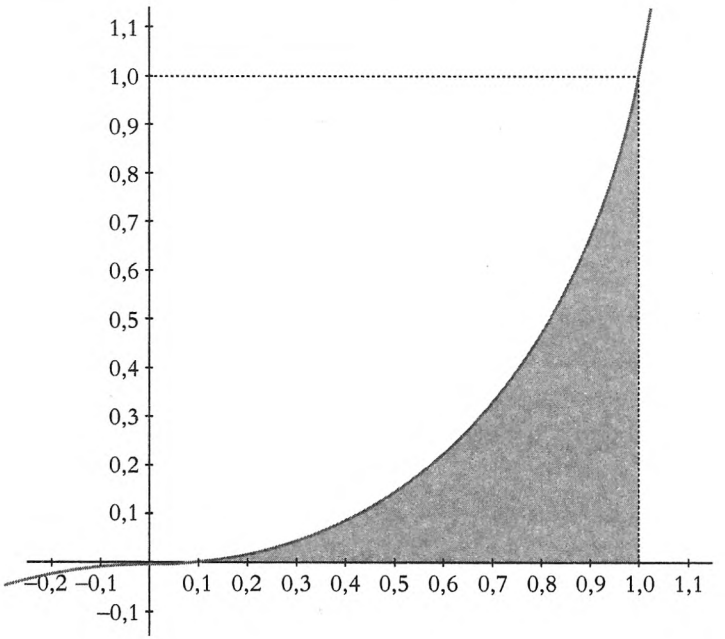
$$A_n = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right).$$

Mediante el análisis trigonométrico se aprecia qué ley de formación subyace en los senos de los ángulos del tipo $\pi/(2^n)$. Esta ley conduce al área del círculo $A_C$:

$$A_C = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}_{n}}.$$

El software disponible hoy día facilita el cálculo del área del polígono de $1.024 = 2^{10}$ lados con la fórmula anterior, y muestra que se aproxima mucho al esperado: $A_{1024} = 3{,}1415923\ldots$

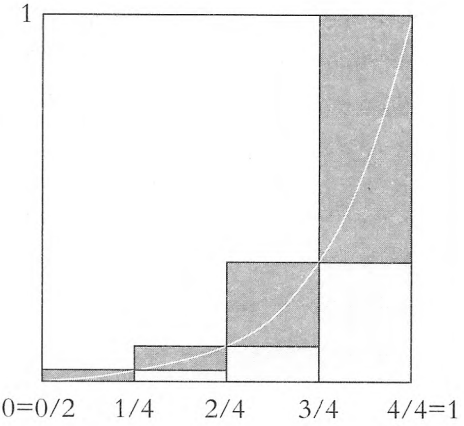
El círculo es la más sencilla de las figuras curvilíneas. ¿Cómo calcular el área de cualquier otra figura? Conociendo la fórmula correspondiente a la parte curva de una figura, los matemáticos resuelven el problema mediante un método similar al empleado por Arquímedes. Supongamos que se quiere determinar el área encerrada entre el eje de abscisas y la curva $y=x^3$ desde el origen de coordenadas (0,0) hasta el punto (1,0), la que se encuentra sombreada en la imagen:




Una primera aproximación de dicha área sería la del triángulo rectángulo de vértices (0,0), (1,0) y (1,1), que es 1/2. Sin embargo, el error por exceso cometido en esta aproximación es extraordinariamente grande.

El método que se va a describir a continuación, llamado «método de exhaución», ya fue empleado por Arquímedes hace más de 2.000 años para aproximar un segmento de parábola. Si nuestra primera aproximación se basó en el área de un triángulo parecido al de la figura, lo que haremos ahora es basarnos en el área del rectángulo.

Dividimos el intervalo [0,1] en cuatro intervalos iguales y levantamos dos rectángulos sobre cada uno de ellos, uno con la altura de la función en el extremo izquierdo y el otro con ella en el extremo derecho. Puesto que $f(0) = 0^3 = 0$, la altura del primer rectángulo inferior es 0:

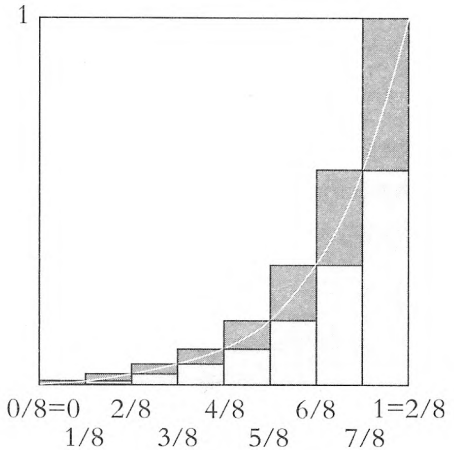



El área buscada, $A$, estará comprendida entre las áreas inferior $A_I$ (gris claro) y superior $A_S$ (gris oscuro). En concreto, será mayor que la primera y menor que la segunda. Vamos a calcular una y otra teniendo en cuenta que todos los rectángulos tienen la misma base, 1/4, y que sólo cambian las alturas:

$$A > A_I = \frac{1}{4}\left[(0)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{4^4} = 0{,}140625.$$

$$A < A_S = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{4}{4}\right)^3\right] = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{4^4} = 0{,}390625.$$

El promedio de ambas áreas es: $A \approx (A_I + A_S)/2 = 0{,}265625$. Mejoramos la estimación afinando la partición:



Ahora cada rectángulo tiene base 1/8. De nuevo, la suma de las áreas de los rectángulos oscuros ($A_S$) es mayor que la buscada. Y ésta es mayor que la suma de las áreas de los rectángulos claros ($A_I$):

$$A > A_I = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{0}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{7}{8}\right)^3\right] = \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + 7^3}{8^4} = 0{,}1914\ldots$$

$$A < A_S = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{2}{8}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{8}{8}\right)^3\right] = \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + 8^3}{8^4} = 0{,}3164\ldots$$

El promedio es:

$$A \approx \frac{1}{2}\left(A_S + A_I\right) = 0{,}2539\ldots$$

Si el proceso se continúa realizando particiones cada vez más finas del intervalo [0,1], es decir, con un número mucho mayor de partes, se intuye que en el caso extremo el número de partes y rectángulos sería infinito, y que la suma de sus áreas proporcionaría exactamente la de la zona situada bajo la curva. La cuestión es cómo obtener el valor definitivo del área de esos infinitos rectángulos. Con lo hecho hasta el momento se diría que el valor buscado debe de estar en torno a 0,25, ya que así parecen indicarlo las aproximaciones obtenidas: 0,2656... y 0,2539...

Para dar una respuesta firme a la cuestión observemos cómo se han gestado los dos valores anteriores. Sean ocho, cien, mil o $n$ los rectángulos, el cálculo de la suma de sus áreas se efectuará de la misma forma. El valor del área $A_S$ para una partición de [0,1] en $n$ partes iguales, sería la siguiente:

$$A_S = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^3\right] = \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4}.$$

Por tanto, el problema se reduce a averiguar hacia qué número se aproxima este último cociente cuando $n$ se hace tan grande que tiende a infinito. Fijémonos en los resultados del numerador, la suma de los cubos de los números naturales:

$$1^3 = 1$$
$$1^3 + 2^3 = 9$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100.$$

Los resultados son 1, 9, 36, 100, ..., es decir, los cuadrados de 1, 3, 6, 10, ... Parece que al sumar los cubos de los números naturales se obtienen los cuadrados de... ¿qué números? ¿Qué serie forman 1, 3, 6, 10, ...? Observemos lo siguiente:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Al parecer, hemos dado con un teorema:

*La suma de los cubos de los* n *primeros números naturales es el cuadrado de su suma.*

Desde el punto de vista experimental puede comprobarse la validez de ese enunciado para sumas muy extensas de los primeros números naturales. Se trata de algo que el ordenador puede hacer en pocos instantes. Pero la observación experimental de resultados concretos y la inducción a partir de ellos de un principio general, que es el modo en que habitualmente opera el físico o el biólogo, no son suficientes para el matemático. Este último necesita probar la veracidad del fenómeno observado en todos y cada uno de los casos posibles.

Así pues, ¿cómo comprobar la veracidad del teorema para cada uno de los casos posibles? Empezaremos calculando la suma de los $n$ primeros números naturales con un procedimiento similar al ya empleado por el ilustre matemático alemán Carl Friedrich Gauss cuando contaba apenas diez años de edad. Relatan los biógrafos que un profesor, para tener a sus alumnos ocupados, les ordenó calcular la suma de los números naturales desde 1 hasta 100. Entre los alumnos estaba Gauss, que a los pocos segundos, y para sorpresa del tutor, le entregó un pizarrín con el resultado correcto. El precoz genio había dispuesto las dos series una encima de la otra y las había sumado por columnas. Así:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & +2 & +3 & +... & +98 & +99 & +100 \\ 100 & +99 & +98 & +... & +3 & +2 & +1 \\ \hline 101 & +101 & +101 & +... & +101 & +101 & +101 \end{array}$$

La suma de la fila inferior es $100 \cdot 101 = 10.100$, que corresponde a dos veces la suma pedida. El valor correcto de la suma es, en consecuencia:

$$1+2+3+...+99+100 = \frac{10.100}{2} = 5.050.$$

Aplicando la estrategia a nuestro caso y de forma más general:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & +2 & +3 & +\ldots & +(n-2) & +(n-1) & +n \\ n & +(n-2) & +(n-1) & +\ldots & +3 & +2 & +1 \\ \hline (n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1) & = & n\cdot(n+1) \end{array}$$

Se observa que la fórmula para sumar los $n$ primeros números naturales es la siguiente:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \quad [\star]$$

Volviendo al teorema, escribimos este resultado en la fórmula hallada:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(1+2+3+\ldots+n\right)^2=\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^2=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}. \quad [\star\star]$$

Tenemos ahora dos fórmulas sobre los $n$ primeros números naturales. El matemático no se empecina en llevar a cabo observaciones exhaustivas sobre conjuntos infinitos, tales como el de los números naturales, puesto que es a todas luces imposible. Lo que hace es idear estrategias rigurosas que le eviten ese problema. Piensa del siguiente modo: «Muy bien, tenemos que la fórmula es cierta hasta el enésimo número natural. Puesto que todos los números naturales se obtienen añadiendo una unidad al precedente, si de la veracidad de la fórmula para el enésimo número demuestro su cumplimiento para el siguiente número natural, esto es, si de la fórmula válida para $n$ pruebo que la fórmula para $n+1$ también es válida, entonces habré probado que la certeza de la fórmula se propaga automáticamente a todos los números naturales».

Esto es lo que vamos a hacer. Primero, probaremos que de la validez de [$\star$] para $n$ se deduce su validez para $n+1$. Luego haremos lo mismo con [$\star\star$]. Demostremos, por tanto, que:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}\Rightarrow 1+2+3+\ldots+n+\left(n+1\right)=\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}.$$

Tan sólo hay que probar que la diferencia entre las dos expresiones situadas a la izquierda de la igualdad, cuyo valor es $n+1$, es la misma que la diferencia entre las expresiones de la derecha:

$$n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Basta ahora con realizar los cálculos de la derecha del signo de igualdad para ver que, efectivamente, así es. Lo mismo sucede con [**]. Ahora ya podemos concluir nuestro problema del área:

$$A_S=\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}=\frac{\left(1+2+3+\ldots+n\right)^2}{n^4}=$$

$$=\frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{4}+0+0=\frac{1}{4}.$$

El último paso se justifica porque a medida que $n$ crece, los cocientes $1/2n$ y $1/4n^2$ se hacen más y más pequeños: *En el límite del crecimiento teórico de* n, *infinito, el valor de ambos cocientes es 0.* En consecuencia, el área bajo la curva $y=x^3$ es $1/4=0{,}25$.

De todo este proceso, la creación matemática más descollante es la de inscribir recintos aproximativos que, por ser rectangulares, tienen una superficie fácil de calcular en el interior del recinto curvilíneo cuya área buscamos. A medida que afinamos la partición vamos «colmando» dicho recinto con mayor precisión. Puesto que los valores de las áreas de los recintos aproximativos se aproximan, «en el límite», a un número concreto —y podemos demostrar que esto es efectivamente así—, podemos atribuir ese valor concreto al área del recinto curvilíneo. De un paralelismo geométrico pasamos a otro numérico, y al revés. Estamos resolviendo un problema más asequible que el planteado y nos apoyamos en él para derivar la solución.

El uso de límites en la resolución de problemas es una de las mayores creaciones matemáticas de toda la historia. A finales del siglo XVII, Newton y Leibniz se sirvieron de ella para desarrollar el cálculo infinitesimal. Siglo y medio después, el francés Cauchy y el alemán Wierstrass refinaron el concepto de «límite» para el caso de funciones continuas como la que nos ha ocupado en el ejemplo anterior.

## Cuantificar el cambio

La invención del cálculo infinitesimal favoreció enormemente el desarrollo de las matemáticas, de la física y de la ciencia en general. Newton y Leibniz lo desarrolla-

ron, según relatan los historiadores, de forma independiente. Esencialmente, la aportación de Newton y Leibniz es la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cómo cuantificar el cambio instantáneo de un fenómeno?

Cuantificar el cambio entre dos instantes no supone ningún problema. Basta con restar los valores en cada uno de los dos momentos. Por ejemplo, si la función que describe el fenómeno es $f(t)=t^2$, donde $t$ expresa el tiempo en segundos, la magnitud del cambio entre los instantes $t=0$ y $t=1{,}5$ será de 2,25 unidades:

$$f(1{,}5)-f(0)=1{,}5^2-0^2=2{,}25.$$

Pero este modo de cuantificar el cambio no sirve, porque en un intervalo de tiempo mucho más breve, como entre $t=4{,}77$ y $t=5$, el cambio es prácticamente el mismo:

$$f(5)-f(4{,}77)=5^2-4{,}77^2\approx 2{,}25.$$

El valor obtenido con la diferencia no indica realmente lo que sucede. Queremos que el número que indique la magnitud del cambio contemple el intervalo en el que se produce. El mismo cambio en un intervalo de tiempo muy breve es más significativo que en un intervalo de tiempo muy largo. Por tanto, la magnitud del cambio debe contemplar la proporción con respecto al tiempo en el que se desarrolla, lo que se llama «tasa de variación»:

$$\frac{f(1{,}5)-f(0)}{1{,}5-0}=\frac{1{,}5^2-0^2}{1{,}5}=1{,}5.$$

$$\frac{f(5)-f(4{,}77)}{5-4{,}77}=\frac{5^2-4{,}77^2}{0{,}23}=9{,}77.$$

Esto ya está mejor. La tasa de variación refleja lo que queríamos, pues 9,77 es mucho mayor que 1,5. Sin embargo, el problema era hallar un modo de responder a la pregunta no en un intervalo, sino en un instante. ¿Cómo cuantificar el cambio en un instante de, por ejemplo, 1 segundo?

La estrategia matemática consiste en calcular tasas de variación para intervalos cada vez más pequeños y próximos al instante $t=1$ y ver hacia qué valor numérico se aproximan los resultados:

Entre $t=1$ y $t=5$: $\dfrac{5^2-1^2}{5-1}=\dfrac{24}{4}=6.$

Entre $t=1$ y $t=2$: $\dfrac{2^2-1^2}{2-1}=\dfrac{3}{1}=3.$

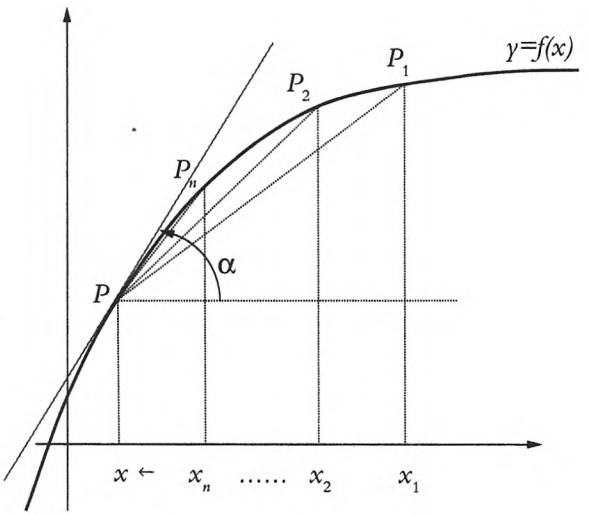
Entre $t=1$ y $t=1{,}05$: $\dfrac{1{,}05^2-1^2}{1{,}05-1}=\dfrac{0{,}1025}{0{,}05}=2{,}05.$

Entre $t=1$ y $t=1{,}003$: $\dfrac{1{,}003^2-1^2}{1{,}003-1}=\dfrac{0{,}006009}{0{,}003}=2{,}0003.$

Vemos con claridad que los valores obtenidos se acercan hacia el valor 2. Éste será el valor de cambio que asignaremos al instante $t=1$. Recibe el nombre de «tasa instantánea de variación».

Desde el punto de vista gráfico, la tasa de variación equivale al valor de la pendiente de la curva en un punto de la misma, puesto que dicha pendiente se calcula precisamente dividiendo la diferencia de los dos valores de la función en cada extremo del intervalo entre la longitud misma de éste.

A medida que los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$, se aproximan a $x$, los puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ se aproximan a $P$ (véase la figura siguiente). Entonces atribuimos al punto $P$ una pendiente igual al valor al que se aproximan las pendientes en cada uno de los puntos precedentes.



## Un teorema que crea monstruos

Pitágoras, el más famoso de los matemáticos, creó el teorema más popular y uno de los más utilizados a diario en todo el mundo, dentro y fuera del ámbito académico. Las demostraciones que de él se hacen en la educación secundaria son de tipo rompecabezas, muy distintas de la que ofrece Euclides. Éste da una demostración también basada en el cálculo de áreas que, de hecho, tal como enuncia el teorema, hace referencia a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo. Pero como sucede con otro teorema famoso, el de Tales, las áreas sólo sirven para la demostración. Los usos del teorema se restringen al cálculo de longitudes.

Del teorema suele demostrarse la implicación necesaria:

*Si* a, b, c *son los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces* $a^2+b^2=c^2$.

La implicación recíproca, la suficiente, no se demuestra prácticamente nunca:

*Si* $a^2+b^2=c^2$, *entonces* a, b, c *son los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.*

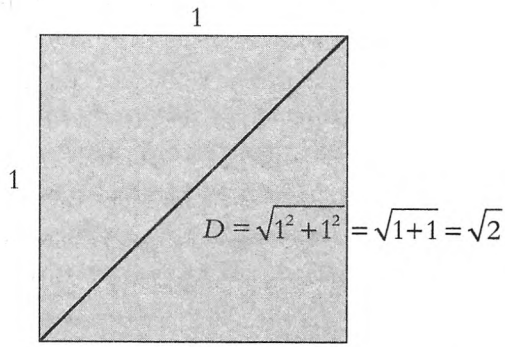
Esta implicación tiene una enorme importancia práctica, puesto que de ella se deriva la construcción efectiva de superficies en ángulo recto, tales como las paredes de un edificio. Las bases del método son las mismas que las empleadas por los egipcios para el caso de triángulos con un ángulo recto de lados 3 m, 4 m y 5 m. Esta relación entre los lados de un triángulo rectángulo ha sido descubierta en rincones muy apartados del mundo y en épocas muy diferentes, aunque los valores difieran en el grado de los empleados por los egipcios, como en el caso de los triángulos de lados 60 cm, 80 cm y 1 m.

Mucho antes de Pitágoras, en el antiguo Egipto y en Mesopotamia, se conocían ternas de números, que luego se llamarían pitagóricas, en las que el cuadrado de un entero se descomponía como suma de otros dos cuadrados de enteros.

Lo que se desconocía en cualquier caso era una demostración del fenómeno. Uno puede encontrarse con curiosidades numéricas, como, por ejemplo, que $5^2+12^2=13^2$, pero si no sabe qué las provoca ni qué implicaciones tienen, no se trata más que de un hecho anecdótico. La demostración concreta del teorema está ligada a la primera gran crisis del conocimiento matemático.

El lema del pensamiento pitagórico era «todo es número», y giraba en torno a un misticismo numérico por el que las relaciones entre las cosas estaban determi-

nadas por las proporciones que guardaban entre sí los números naturales. La sorpresa se produjo al aplicar el teorema de Pitágoras a la diagonal de un cuadrado:




Según la concepción pitagórica, esa longitud $D$ (la raíz cuadrada de 2) debía ser una longitud conmensurable con el lado del cuadrado, esto es, una fracción entera del lado. Dividiendo el lado del cuadrado en un número suficiente de partes, pongamos por caso un millón de partes, la longitud de la diagonal debería corresponder a un número exacto de ellas. ¿Tal vez 1.414.213? Pues no, porque no existía forma de expresar la raíz cuadrada de dos como un cociente de números naturales, lo que impedía hallar una medida común para el lado de un cuadrado y para su diagonal.

El teorema había creado un monstruo que contradecía las concepciones más arraigadas. No todo era reducible a la proporción entre dos enteros. Algo tan simple como la diagonal de un cuadrado no era proporcional con su lado. Así nacieron las magnitudes llamadas inconmensurables. Por entonces no se disponía de los conocimientos suficientes para demostrar que también el perímetro de un círculo es inconmensurable con su diámetro, es decir, que el número $\pi$ era también inconmensurable.

Veamos por qué la raíz cuadrada de 2 no es cociente de dos números naturales. Todo número natural $n$ puede descomponerse como producto de factores primos. Por ejemplo:

$$12 = 2^2 \cdot 3.$$
$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Observemos ahora que la descomposición factorial de un número al cuadrado contiene todos sus factores un número par de veces:

$$12^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 2^4 \cdot 3^2.$$
$$315^2 = (3^2 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2.$$

Que el cociente de dos números naturales $m$ y $n$ sea la raíz cuadrada de 2 significa que:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Y ahora, tanto la descomposición en factores de $m^2$ como la de $n^2$ tendrán una cantidad par de factores primos. Por ese motivo, e independientemente de que haya o no algún 2 en la descomposición de $n^2$, la cantidad de 2 en la descomposición de $2n^2$ será impar. Si $n^2$ no contiene ningún 2, en $2n^2$ habrá uno (ese que anda suelto); si $n^2$ contiene algún 2, lo tendrá en cantidad par y, por tanto, en $2n^2$ existirá en cantidad impar. Esto hace imposible que $m^2$ y $n^2$ sean iguales, ya que el número de 2 en uno es par, y en el otro, impar. Por tanto, $\sqrt{2}$ no puede ser cociente de dos números naturales, y no existe medida común para la diagonal y el lado del cuadrado.

Los números naturales están tan próximos a nuestro pensamiento que más que creación humana han sido considerados como una creación divina. Se diría que

## NÚMEROS TRASCENDENTES

Un polinomio es una fórmula cuya variable aparece elevada a potencias naturales. Los números que multiplican dichas potencias se llaman coeficientes. Por ejemplo, el polinomio siguiente,

$$P(x) = x^5 - 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6,$$

presenta coeficientes racionales, en concreto: 1, –4, 3/2 y –6. Se dice que un número $a$ es «raíz de un polinomio» si al sustituirlo en la variable el resultado da cero: $P(a)=0$. El número $a=2$ es raíz del polinomio anterior. Un número se dice que es «trascendente» si no es la raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Es decir, que no puede escribirse una ecuación con potencias naturales de la que el número en cuestión sea la solución. La irracionalidad de $\sqrt{2}$ fue demostrada ya en la Grecia clásica; la del número $\pi$, aunque intuida, tardó mucho más: Lambert la demostró en 1761. En 1882, Lindemann probó que era trascendente. Como consecuencia, la imposibilidad de la cuadratura del círculo quedó zanjada definitivamente. El número $e$ ($e=2{,}71828182845904...$) lleva por nombre la inicial de uno de los más grandes matemáticos de la historia, el suizo Leonhard Euler (1707-1783). Al igual que $\pi$, $e$ es irracional. Y trascendente.

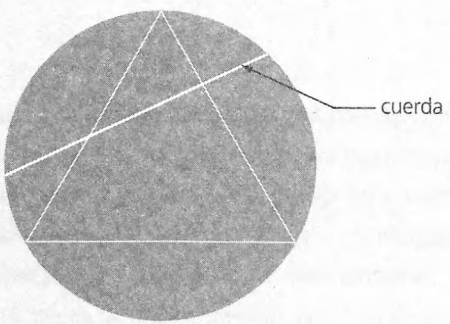
algo tan perfecto no puede tener fisuras y que cualquier teorema basado en los números naturales tiene que acabar siendo demostrado, afirmativa o negativamente. Toda afirmación arraigada en dicho sistema tiene que poder aseverarse que es cierta o falsa.

Sin embargo, el matemático Kurt Gödel (1906-1978) demostró que las cosas no son así, y que los números naturales pueden producir teoremas indecidibles, esto es, de los que no puede concluirse una de las dos opciones de la dicotomía. El llamado «teorema de completitud» de Gödel venía a decir que los números naturales también conllevan paradojas.

## PARADOJAS

La paradoja es la manifestación de una contradicción cuyos términos incompatibles resultan verdaderos. La recurrencia en el lenguaje crea paradojas, como en los dos primeros casos siguientes. El tercero es un caso extraordinario de problema matemático con tres soluciones distintas.

1. El barbero de una localidad afeita sólo a aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?
2. Se dice que un adjetivo es tautológico cuando se define a sí mismo. Por ejemplo, «breve» es tautológico, pues es un adjetivo breve. Los adjetivos que no son tautológicos se llaman heterológicos. ¿De qué tipo es el adjetivo «heterológico»?
3. Paradoja de Bertrand. Se traza una cuerda al azar en un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que su longitud exceda la longitud del lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo? Dicha probabilidad puede calcularse de tres maneras distintas, que conducen a tres resultados diferentes: 1/2, 1/3 y 1/4.



## Cómo crear y domar un monstruo

Hallar un sentido y un significado para los elementos que producen las matemáticas ha sido siempre un foco de creatividad. Existen muchas ecuaciones sencillas de las que se dice que no tienen solución porque el número que las resolvería carece de sentido en el más corriente de los sistemas numéricos.

En el campo de los números naturales, los que sirven para contar cosas, la siguiente ecuación no tiene solución, pues la única solución posible no es un número natural:

$$2x = 1.$$

Pero sí la tiene en el campo de las proporciones o de la medida, es decir, en el de los números decimales:

$$2x = 1 \iff x = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Del mismo modo, una ecuación tan sencilla como

$$x^2 = 2$$

carece de solución en el campo de los números racionales. Éste fue el problema con el que se encontraron los griegos de la Antigüedad. Sin embargo, tuvieron que aceptar tal monstruo porque la resolución de uno de los más sencillos problemas geométricos, esto es hallar la longitud de la diagonal del cuadrado de lado unidad, pasaba por ahí.

La solución a esa ecuación y a dicho problema amplía el campo numérico, extendiéndolo a los llamados números reales:

$$x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}.$$

A partir de este punto, la mente matemática reacciona pensando que no es que las ecuaciones no tengan solución porque los números que deberían expresar dicha solución no existan, sino que toda ecuación tiene solución. El problema reside en si dicha solución pertenece al campo numérico conocido o asimilado hasta ese momento. Llevemos las cosas más lejos: decimos que la ecuación

$$x^2 = -1$$

no tiene solución. Pero no la tiene porque tomamos la $x$ por un número real, un decimal finito o infinito, periódico o no periódico. El valor de $x$ que verifica la ecuación nos parece monstruoso:

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt{-1}.$$

A mediados del siglo XVI, Gerolamo Cardano halló la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas. Pero al aplicarla a la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$ se encontró con una sorpresa. Es fácil comprobar que $x = 4$ es una solución de dicha ecuación. Sin embargo, la solución que proporcionaba su fórmula parecía muy diferente:

$$x = \left(2 + \sqrt{-121}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-2 + \sqrt{-121}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Nos topamos con otro monstruo. ¿Qué sentido tiene aquí la raíz cuadrada de un número negativo? ¿Cómo se relaciona semejante número con la solución conocida $x = 4$? Si hay que aceptar las raíces cuadradas de números negativos como números, ¿con qué criterio y significado podemos hacerlo?

Hasta principios del siglo XIX las raíces de los números negativos no hallaron su pleno sentido y significado como puntos de un plano de coordenadas cartesiano, y de ahí, como parte integrante de los denominados números complejos. Representado con el símbolo $\mathbb{C}$, el conjunto de los números complejos amplía el campo de los números reales. Un número complejo es un número compuesto de dos partes, una real y otra imaginaria. La parte imaginaria es el producto de un número real multiplicado por $i$, la raíz de menos uno, también llamada «raíz imaginaria unidad». Tomemos dos números complejos, $a$ y $b$:

$$i = \sqrt{-1}$$
$$a = 2 + 3i$$
$$b = \frac{1}{2} - i\sqrt{5}.$$

Un número como $a = 2 + 3i$ se representa en el plano cartesiano tomando dos unidades sobre el eje de abscisas y tres sobre el de ordenadas; el punto obtenido tiene coordenadas (2,3). Pero no es sólo un punto lo que hemos representado porque, a diferencia de los puntos y de los vectores en el plano, con los números com-

plejos se pueden efectuar todas las operaciones algebraicas conocidas: suma, resta, cociente, producto, potencia... Además, al calcular con complejos las cosas funcionan de modo similar a como lo hacen los números reales. Y como colofón, se trata de un sistema completo, ya que cualquier ecuación planteada en el campo complejo tiene solución en él, algo que no sucedía con los otros sistemas de números.

Desde que los complejos hallaron su lugar en el plano han sido cruciales para resolver problemas que con el sistema numérico real eran irresolubles.

## Simbiosis del álgebra con la geometría

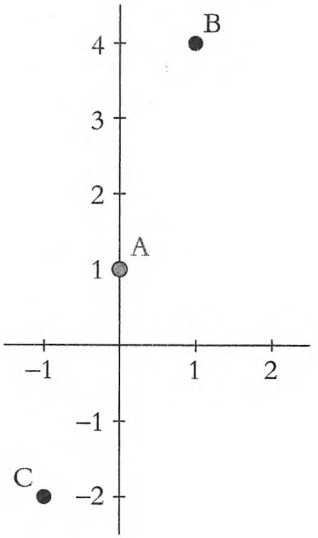
Si lo anterior fue posible es merced a otra gran creación: la simbiosis del álgebra con la geometría mediante la geometría analítica impulsada por Descartes y Fermat. En la Antigüedad ya había habido algunos intentos que podrían interpretarse como indicios de sistemas de representación geométrica de fórmulas. Pero fue con Descartes cuando el álgebra y la geometría se dieron la mano definitivamente para no separarse nunca más.

El mundo del álgebra trata de fórmulas y ecuaciones. La geometría se centra en la forma y el espacio. En la geometría analítica se funden una y otra: para cada figura existe una fórmula que la describe; para cada fórmula hay un conjunto de puntos del plano que la verifican. Eso da un sentido visual y espacial a las ecuaciones, facilitando su visualización.

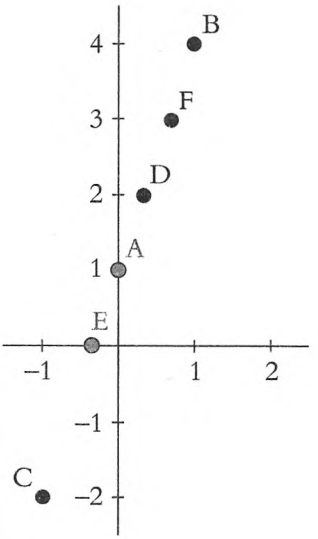
La ventaja de la geometría analítica reside en que localiza las soluciones de las ecuaciones y las ubica en el mapa matemático que es un sistema de coordenadas. Su valor no proviene de la capacidad para desarrollar demostraciones, pues algunos teoremas geométricos se expresan con mayor elegancia, brevedad y claridad con la demostración euclidea que con la analítica.

La ecuación $3x-y+1=0$ es un elemento algebraico cuyo sentido y significado primigenio se refiere a dos números, $x$ e $y$, que satisfacen dicha igualdad. Hay varias parejas que cumplen esa ecuación: $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=4$; $x=-1$; $y=-2$.

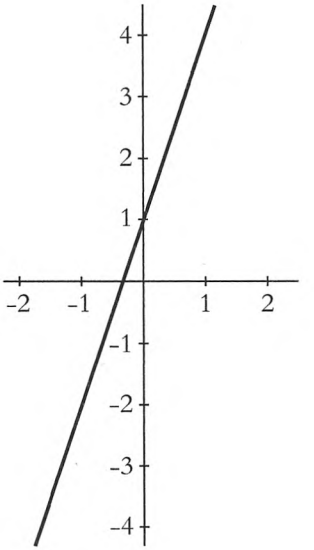
La geometría analítica proporciona un nuevo sentido para esa situación, y esto se logra cuantificando el espacio. Si el espacio es el plano de dos dimensiones, se toman dos rectas sobre las que se representan números reales, una correspondiente a cada dimensión. Por comodidad se trazan perpendiculares, aunque no es imprescindible. La creación continúa asociando los valores de la variable $x$ con los de un eje, y los de la variable $y$, con los del otro. Así, marcamos en el plano los puntos $A$, $B$ y $C$ correspondientes a las tres parejas de soluciones anteriores:




Añadiendo más parejas que cumplen la ecuación se aprecia qué forma va tomando el conjunto de soluciones:

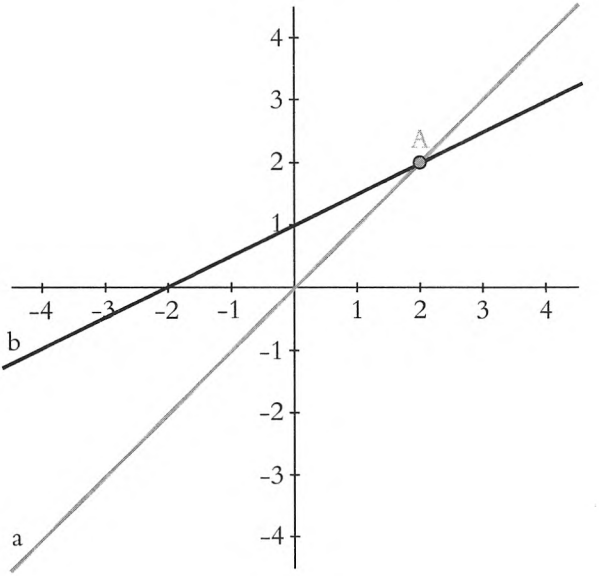



Basta aislar una de las dos variables para ver que para cada uno de sus valores existen otros de la segunda variable que satisfacen la ecuación. La infinidad de posibilidades de una implica una infinidad de posibilidades para la otra. El resultado es que la ecuación algebraica $3x-y+1=0$ se corresponde con una recta del plano:




En consecuencia, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se convierte en un problema geométrico, como es el de hallar el punto de intersección de dos rectas:

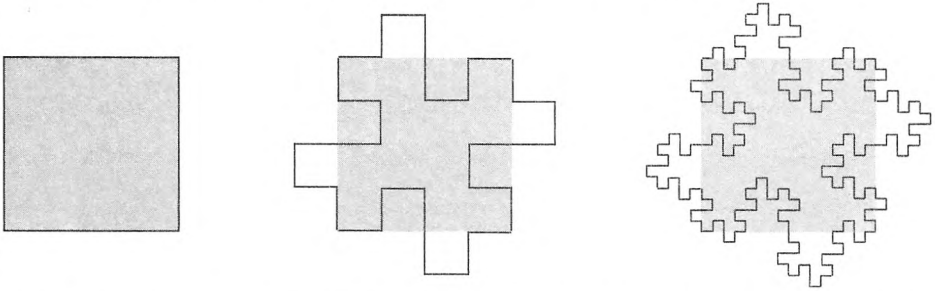
$$\left.\begin{aligned} -x+2y-2=0 \\ -x+y=0 \end{aligned}\right\}$$



## Nueva tecnología, nuevas curvas

La creación matemática se ha visto muy influida por el desarrollo tecnológico experimentado en las últimas décadas. El ordenador permite realizar tareas interminables que al hombre le llevarían siglos de trabajo. Ello, unido a la cada vez más potente capacidad de representación visual característica del software, ha hecho del ordenador un banco de pruebas y un microscopio matemático.

Gracias a la tecnología hemos conocido las curvas fractales, invisibles y apenas imaginables hace cincuenta años. No es que los fractales no se conocieran, pero su interés, la posibilidad de visualización y sus aplicaciones han ido aumentando a medida que lo hacía el desarrollo tecnológico. Los orígenes de los fractales se hallan en la «curva de Von Koch», llamada también «copo de nieve». A diferencia de las curvas tradicionales construidas asignando valores a una función, el copo de nieve de Von Koch se crea por recursividad, mediante un algoritmo. Se empieza por un cuadrado, un triángulo o cualquier otra figura cuyos lados se reemplazan por una línea poligonal. Luego se repite el proceso aplicando el mismo cambio a cada segmento de la poligonal para crear una figura de perfil cada vez más irregular:



El primer estudio profundo de los fractales se debe al francés de origen polaco Benoît Mandelbrot en la década de 1980. Una de las ideas clave del concepto de fractal es el de «órbita de un punto dado». Para toda función, como, por ejemplo, $f(x)=x^2$, puede estudiarse la órbita de un punto dado o la serie de resultados que se obtienen al sustituir la variable por dicho punto de forma recurrente:

$$x = 0,5$$
$$f(0,5) = 0,5^2 = 0,25$$
$$f(0,25) = 0,25^2 = 0,0625$$
$$f(0,0625) = 0,0625^2 = 0,0039$$
$$\Rightarrow \text{Órbita de } 0,5 = \{0,5; 0,25; 0,0625; 0,0039; ...\} \to 0.$$

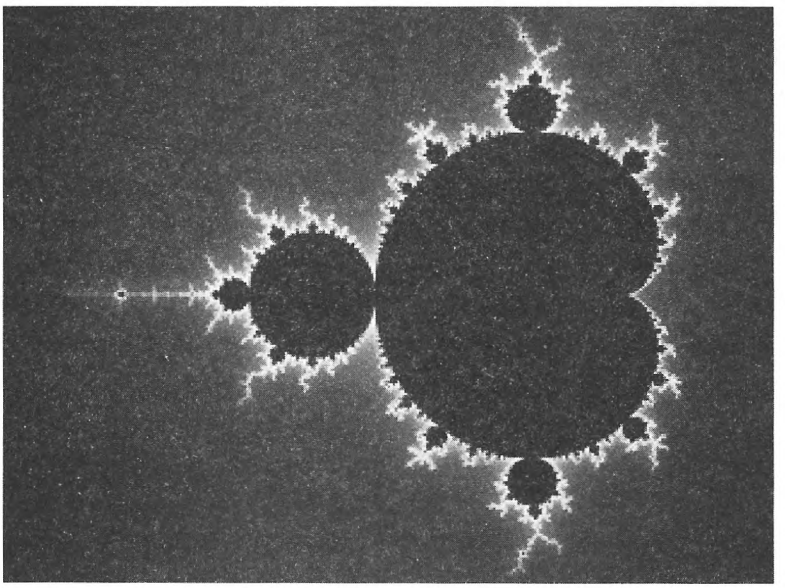
La órbita del punto $x=0{,}5$ está formada por una sucesión decreciente y acotada que tiende a 0. Hay órbitas fijas, como las de $x=0$ y $x=1$. Y las hay que se escapan hacia el infinito, como la de $x=2$:

$$x=2$$
$$f(2)=2^2=4$$
$$f(4)=4^2=16$$
$$f(16)=16^2=256$$
$$\Rightarrow \text{Órbita de } 2=\{2,\ 4,\ 16,\ 256,\ ...\}\to\infty.$$

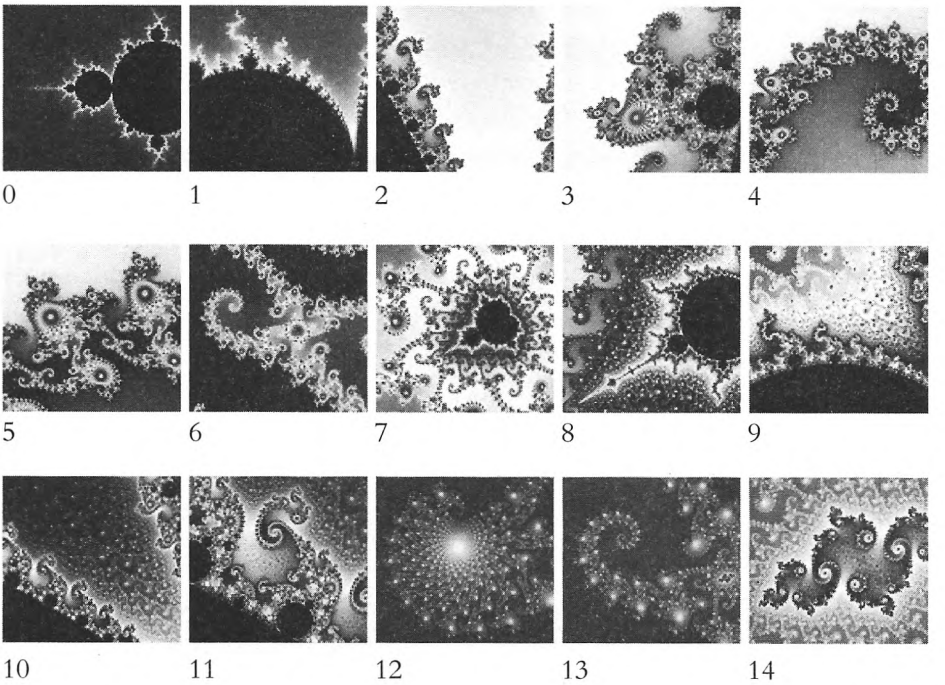
El ordenador permitió ver lo que ocurría con una función similar a ésta, pero en el campo de los números complejos:

$$f(z)=z^2+c\ \text{, siendo } z,c\in\mathbb{C}.$$

El resultado fue inesperado desde el punto de vista matemático y estético, pues las formas adoptadas por los conjuntos de puntos que no escapaban al infinito según los distintos valores de $c$ eran tan variadas como sorprendentes. Estos puntos forman el llamado «conjunto de Julia» o «clausura de Julia». Los valores complejos $c$ para los cuales la clausura de Julia es un conjunto conexo, esto es, hecho de una sola pieza, sin fragmentos, forman el conjunto M de Mandelbrot, cuyo singular aspecto es el siguiente:



El conjunto de Mandelbrot no fue visible hasta 1980. No existe objeto en matemáticas tan complejo como éste. Aparte de su carácter fractal, por el que cada ampliación de una de sus partes se asemeja al todo, goza de una variación sin límites. En efecto, si nos aproximamos a una zona cualquiera del conjunto y observamos la nueva imagen resultante del aumento de escala, veremos reproducirse las mismas figuras una y otra vez:



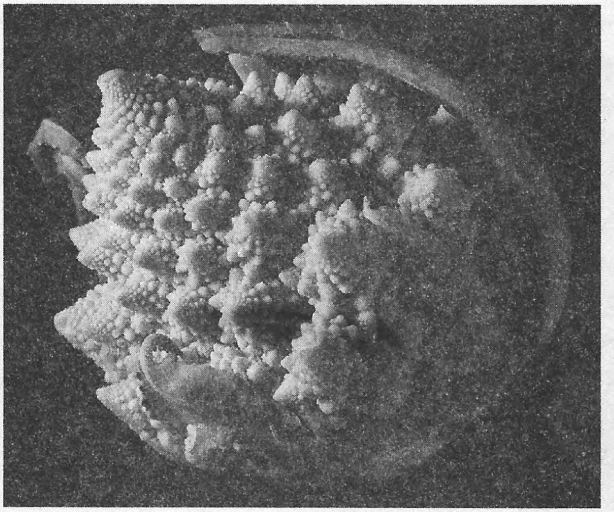

El conjunto M combina la autosemejanza y el cambio en una espiral infinita; todo un ejemplo de creatividad.

Desde el punto de vista topológico, una curva fractal es distinta de las curvas tradicionales. La diferencia principal reside precisamente en su autosemejanza infinita: la ampliación de una curva tradicional alrededor de un punto acaba viéndose como un segmento, mientras que, por el contrario, cualquier fragmento ampliado de un fractal tiene el mismo aspecto que el fragmento de partida. Esto se traduce en que la dimensión de un objeto fractal no es un número entero comprendido entre el uno y el tres, como en los objetos «tradicionales». La dimensión de la curva de Von Koch, por ejemplo, es 1,26186... De hecho, y pese a que el ordenador permite ver los diferentes estadios de los objetos fractales, nunca llegaremos a ver la totalidad

de un proceso, puesto que consta de infinitos niveles. La realidad fractal impide ver con nitidez los perfiles. En cuanto tratamos de enfocarlos nos damos cuenta de que han cambiado, y ya no son lo que parecían antes.

## FRACTAL COMESTIBLE

Las formas fractales son tan frecuentes en el mundo real que se puede hablar de geometría fractal de la naturaleza. Sin embargo, no suelen superarse los cuatro niveles de autosemejanza. Así ocurre con las ramificaciones vegetales, nerviosas o acuíferas. La dimensión fractal es una característica que sirve para diagnosticar patologías óseas y para caracterizar encefalogramas. La coliflor que se muestra en la imagen es en realidad un híbrido que fue identificado por primera vez en Italia en el siglo XVI. Su estructura constituye un ejemplo extraordinario de geometría fractal en la naturaleza. La pieza entera (nivel 1) está formada por copias reducidas de sí misma (nivel 2) alineadas en espiral. Cada una de ellas está compuesta a su vez de otras copias reducidas dispuestas también en espiral (nivel 3). Lo mismo se repite de nuevo en otro nivel aún superior (nivel 4).



Capítulo 3

# Nuevas preguntas para situaciones corrientes

En el capítulo anterior hemos hecho un recorrido por las grandes creaciones matemáticas a lo largo de la historia. Hoy en día la tarea del desarrollo del conocimiento matemático corre a cargo de los matemáticos profesionales, pero no son los únicos. Crear matemáticas no es sólo producir los grandes teoremas que pasarán a la historia, sino también plantear problemas, ofrecer explicaciones matemáticas de los fenómenos, desarrollar métodos prácticos para llevar las matemáticas a la realidad, utilizar la tecnología para crear matemáticas y para crear soluciones matemáticas y, por encima de todo, darse cuenta de que la respuesta matemática a una pregunta es necesaria y suficiente. Muchas personas son capaces de crear matemáticas. Puede que sus resultados y las conclusiones a las que llegarán no resulten una novedad para el profesional, pero, en esencia, su labor viene a ser la misma.

En este capítulo se muestran creaciones matemáticas relacionadas con diversos ámbitos, la mayoría de ellos ajenos al mundo profesional universitario, y que son el resultado de plantear nuevas preguntas, de buscar resoluciones diferentes, de establecer otros significados de conceptos ya arraigados y de aportar ideas matemáticas a nuevos contextos. Creando se vive. Si nos preguntamos cuestiones de tipo matemático, viviremos y crearemos matemáticas.

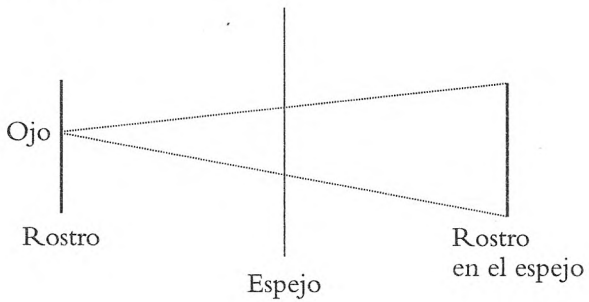
¿Cómo empezar? ¿Cómo ser creativo en matemáticas? Las primeras incursiones se harán en el ámbito cotidiano. Estudiaremos unos fenómenos que todos hemos experimentado alguna vez y sobre los que pocos se han planteado cuestiones de tipo matemático. A partir de ahí, nos iremos alejando de la realidad para terminar en el ámbito puramente matemático.

Lo primero que debemos hacer es ponernos en situación, contemplar el fenómeno (objeto, ser, proceso, experiencia) que va a captar nuestra atención con perspectiva matemática. Esto significa plantearse cuestiones objetivas cuyas respuestas no dependerán de nuestro gusto, conveniencia o apetito, sino que deberán ser argumentadas en base a cualidades espaciales o relaciones de un modo u otro cuantificables. Así, la primera selección, por lo que al punto de vista se refiere, ya está hecha.

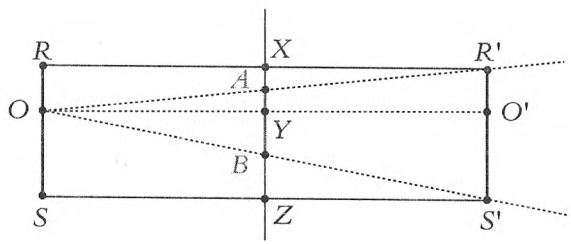
## Todos los días frente al espejo

Nada más despertar lo primero que solemos hacer es ir al baño para asearnos. Ante el espejo nos lavamos la cara, nos afeitamos, nos maquillamos, nos peinamos... Así lo hacemos todos los días de nuestras vidas. ¿Y qué le pedimos al espejo? Poca cosa. Sólo que nos devuelva nuestra propia cara, completa. Tras el desayuno, y justo antes de cerrar la puerta de casa, quizás echemos un vistazo al espejo de cuerpo entero que tenemos en el recibidor para ver qué pinta tenemos. ¿La condición de éste? Que también muestre nuestro cuerpo, completo.

¿Cuántas veces hemos hecho esto y cuántas nos habremos preguntado por las dimensiones mínimas que debe tener un espejo de cara o de cuerpo entero para que cumplan su función? Poquísimas, si es que lo hemos hecho alguna vez. Imaginemos que nos hallamos ante un espejo en el que vemos nuestro rostro entero. ¿Qué altura mínima debe tener? Comencemos dibujando un esquema geométrico de la situación, reduciendo a la mínima expresión (puntos y segmentos) los elementos que intervienen en ella:




El gráfico ya nos indica cuál es la dimensión mínima del espejo. Hay que averiguar qué relación tiene con el rostro reflejado en él. Para ello reducimos aún más el esquema trazando las líneas adicionales fundamentales del problema e introduciendo notación para los puntos principales de la situación:



Puesto que el reflejo $R'S'$ es simétrico de su original $RS$ y la imagen virtual se crea a la misma distancia, pero al otro lado del espejo, tenemos que $RX = XR'$. Y también, que $RX = RR'/2$.

Además, los triángulos $OAY$ y $OR'O'$ son semejantes por tener los lados paralelos. Lo mismo pasa con $OYB$ y $OO'S'$. Siendo $RX = RR'/2$, la razón de semejanza entre estos triángulos es 2, por lo que $AY = R'O'/2 = RO/2$ y también $YB = O'S'/2 = OS/2$.

Es decir, $AB = AY + YB = RO/2 + OS/2 = (RO + OS)/2 = RS/2$, por lo que el espejo debe ser, como mínimo, igual a la mitad del rostro. La altura a la que hay que colocarlo es $BZ = YZ/2$, es decir, la mitad de la distancia entre los ojos y la barbilla. De modo similar, un espejo de cuerpo entero deberá tener una altura igual a la mitad de nuestra estatura ocular, y habrá que colocarlo a la mitad de la altura de nuestros ojos.

## Contemplando el horizonte

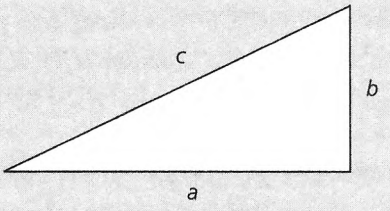
Al salir de casa quizá tengamos la suerte de poder ir a la playa y contemplar el horizonte del mar allí donde alcanza nuestra vista, en los confines de la superficie del planeta. ¿Quién se ha preguntado alguna vez cuestiones matemáticas mientras contemplaba el horizonte? En general, la contemplación de un amanecer o de un ocaso inspira cuestiones de otro tipo: sobre el pasado y el futuro, sobre lo hermosa que es la naturaleza, sobre los pescadores que regresan a puerto con las capturas de la jornada, sobre lo que hay detrás de esa línea tras la que se oculta, más deprisa de lo esperado, el fuego que alumbra nuestras vidas...

Pero si adoptamos un enfoque matemático, las preguntas y observaciones que acuden a nuestra mente alcanzan otra naturaleza. Si me agacho, el horizonte se acerca; si me levanto, se aleja. Si doy un giro completo sobre mis pies veo que el horizonte es circular; por eso los navegantes y pescadores intuían que la tierra era esférica, porque cuando se alejaban de la orilla hasta el punto de no ver tierra, veían un horizonte circular que los rodeaba. ¿Qué distancia me separa del horizonte? ¿Cuál es su radio? ¿Qué distancia me separa de otra embarcación que asoma por él?

Éste es el primer paso que es preciso dar para llevar a cabo la creación matemática: preguntarse cosas sobre lo que vivimos, vemos o hacemos cuyas respuestas trascienden lo personal y se orientan hacia lo objetivo. Se trata, en suma, de la perspectiva científica.

## EL TEOREMA DE PITÁGORAS

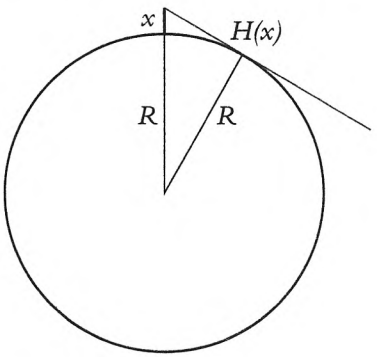
El triángulo *abc* es rectángulo $\Leftrightarrow c^2=a^2+b^2$.




Éste es el teorema más popular de las matemáticas, citado y demostrado a diario en centros educativos de todo el mundo. Pero la demostración usual no es la euclidiana (Proposición nº 47 del «Libro I» de los *Elementos*), sino que se basa en la descomposición de un cuadrado como si de un rompecabezas se tratase.

El teorema se refiere a áreas, aunque su utilidad haya sido siempre el cálculo de longitudes. Siempre se demuestra la implicación necesaria ($\Rightarrow$); nunca la suficiente ($\Leftarrow$), aunque se aplique a veces. En los *Elementos*, ésta sigue a la anterior (Proposición nº 48).

Desde el enfoque matemático, la Tierra es una esfera ingente con un radio de unos 6.370 km. El horizonte visible por un ser humano es el punto más alejado de la superficie del planeta alcanzable por la vista. Suponiendo que la luz se desplaza en línea recta, creamos un modelo geométrico de esa situación ideal. En él, el horizonte se determina por la tangente a una circunferencia.




Siendo $H(x)$ la distancia que nos separa del horizonte visible, $x$, nuestra estatura ocular, y $R$, el radio de la Tierra, tenemos un triángulo rectángulo en el que puede aplicarse el teorema de Pitágoras:

$$H(x)=\sqrt{(R+x)^2-R^2}=\sqrt{R^2+2Rx+x^2-R^2}=\sqrt{2Rx+x^2}.$$

El horizonte que contempla una persona con estatura ocular de $x=1{,}7$ m y que se encuentra de pie, justo en la orilla de una playa, se sitúa a una distancia de $H=4.653{,}8$ m ($R=6.370$ km).

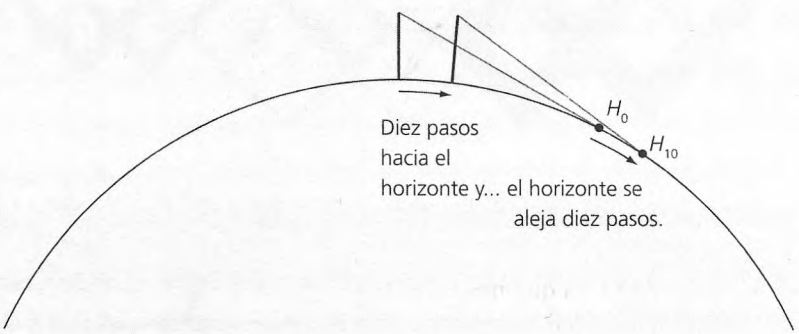
¿Dónde está aquí la creación matemática? ¿Hemos creado nuevas matemáticas? Hemos aplicado un poderoso teorema para obtener una fórmula que antes no existía, desconocida. He aquí la primera creación matemática relacionada con este fenómeno. Pero no es la única ni la más importante. La creación principal está en la pregunta: ¿Cuántas veces hemos contemplado el horizonte sin preguntarnos jamás por la distancia que nos separa de él? En segundo lugar se encuentra la elaboración del modelo geométrico que permite la aplicación de un resultado matemático. Es el enfoque matemático el que nos hace pensar en la Tierra como esfera; en la visual, como línea recta, y en nuestro cuerpo, como una brevísima prolongación del radio de dicha esfera. Además, formulamos una reducción al plano bidimensional de una realidad en tres dimensiones, pues reducimos la esfera a una circunferencia.

## ACERCA DEL HORIZONTE

En su obra *Ciclos*, el escritor español F.M. ve en el horizonte un buen lugar donde situar la utopía:

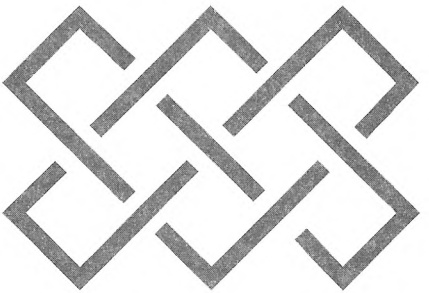
> «¿Para qué sirve la utopía? Ella está en el horizonte. Si yo me acerco diez pasos, el horizonte se marcha diez pasos más allá. Para esto sirve, para aprender a caminar».

La afirmación es cierta, pues los pasos se cuentan sobre una esfera:

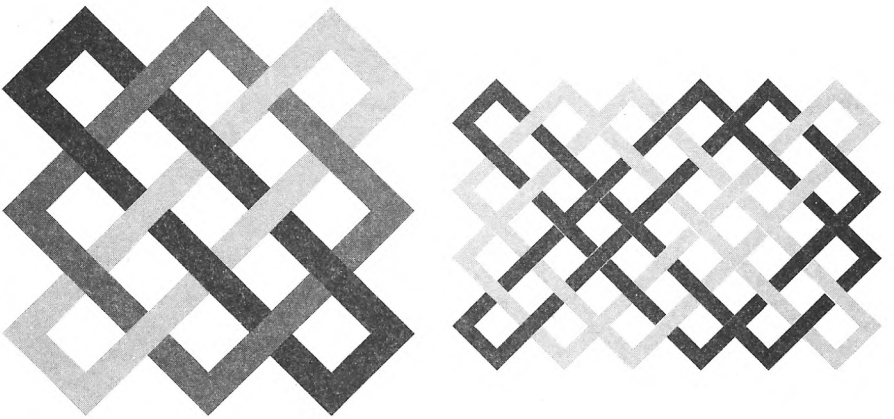


## Nudos cíclicos

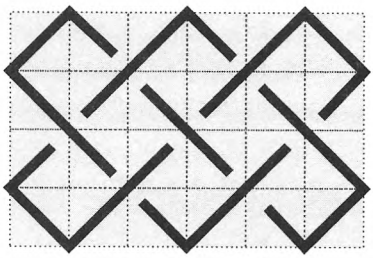
En su obra *El sentido del orden*, el historiador de arte austriaco Ernst Gombrich informa de cómo se trazan los nudos celtas. Su característica es la de recorrer una cuadrícula de manera que, pasando por todos los puntos destacados de cada lado, regresemos al punto de partida. Es decir, el nudo infinito es el que no tiene fin porque traza un itinerario que acaba justo donde empezó:



Los nudos de este tipo no son siempre infinitos o cíclicos:



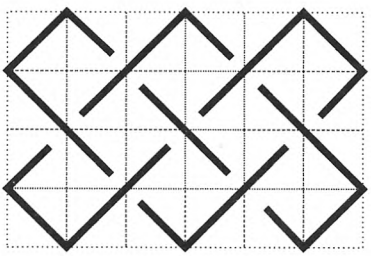
La pregunta que surge es: ¿por qué algunos nudos son infinitos y otros no? Antes de plantear posibles respuestas convendría saber cómo se construyen. La construcción se basa en una cuadrícula de cuyos lados se escogen una serie de puntos en los que se enganchará el nudo, es decir, como si el nudo estuviese cosido a la retícula por esos puntos:

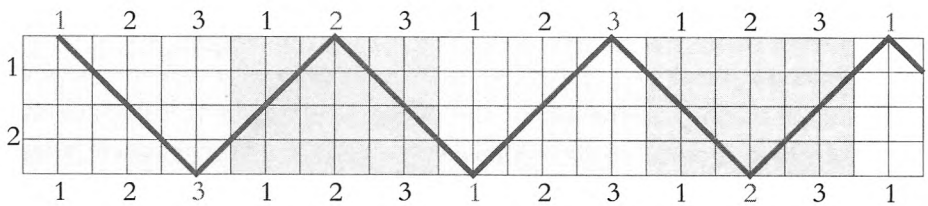


Esto permite caracterizar los nudos en función del número de vértices que tengan en cada uno de los lados de la cuadrícula que les sirven de referente. El primero sería un nudo $3\times2$; el segundo, $3\times3$, y el último, $6\times4$. El nudo $3\times2$ se cose en una cuadrícula $6\times4$ de cuyos lados se toman los vértices 1-3-5 horizontales y 1-3 verticales. La cuadrícula $6\times4$ se interpreta como $(1+2\cdot2+1)\times(1+2+1)$. Con las demás ocurre lo mismo. El nudo $3\times3$ está sobre una cuadrícula $6\times6=(1+2\cdot2+1)\times$ $\times(1+2\cdot2+1)$, y el $6\times4$, sobre una $12\times8=(1+2\cdot5+1)\times(1+2\cdot3+1)$.

Se diría que el resultado depende del número de vértices del nudo en cada lado de la cuadrícula. El nudo $3\times2$ es infinito porque está hecho de un único lazo. El nudo $3\times3$ no es infinito, consta de tres lazos. El nudo $6\times4$ tampoco es infinito, consta de dos lazos.

¿Dónde está la clave? El hilo se desplaza a izquierda y derecha y arriba y abajo. Si en lugar de ceñirnos al rectángulo tuviésemos la posibilidad de continuar adelante, en vertical u horizontal, veríamos el trasfondo de la cuestión. Hagámoslo así para una retícula (3,2):

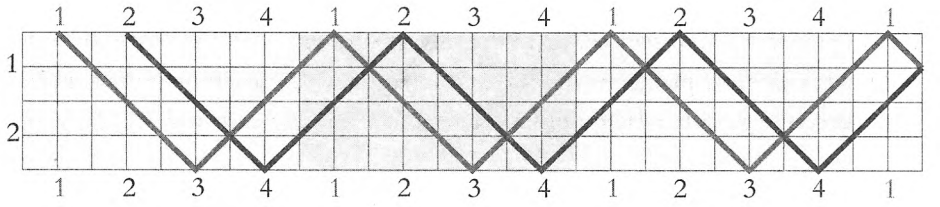




Partiendo del 1, y a pasos de 2 unidades hacia la derecha, llegamos al 3, luego al 2 y, finalmente, de nuevo al 1. Se crea un ciclo numérico que se va repitiendo *ad infinitum*:

$$[\,1,3,2\,] = 1,3,2,1,3,2,1,3,2,1,\ldots$$

Si la retícula es (4,2), son necesarios dos ciclos:




$$[\,1,3\,] = 1,3,1,3,1,3,1,\ldots$$
$$[\,2,4\,] = 2,4,2,4,2,4,2,\ldots$$

Vamos saltando, en el primer caso, de 2 en 2 sobre 3. Se completa el ciclo al cabo de 6 pasos, cuando regresamos al punto 1 de partida. Entonces hemos pasado por todas las cifras 1, 2 y 3. En el segundo caso hacen falta dos ciclos para recorrer todas las cifras:

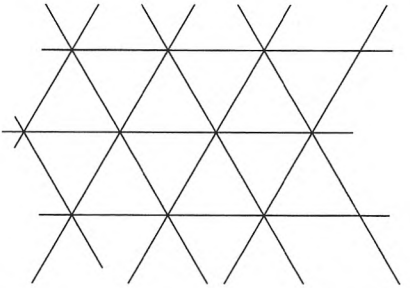
| Cuadrícula | | | | | | | | | | Ciclos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3,2) | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | |
| | * | | * | | * | | * | | | [1,3,2] |
| (4,2) | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | |
| | * | | * | | * | | * | | * | [1,3] |
| | | * | | * | | * | | * | | [2,4] |

¿Por qué? Pues porque aquí 2 divide a 4. Si comenzamos en 1 y saltamos de 2 en 2, pasamos por el 1 y el 3, nunca por el 2 ni el 4. Para ello hay que iniciar un nuevo recorrido desde el 2. En el caso anterior, el ciclo se completa al cabo de $6 = \text{mcm}(3,2)$ tramos y con un único ciclo, ya que $\text{mcd}(3,2) = 1$. Lo mismo ocurría en el ejemplo de la retícula $6 \times 4$, con $\text{mcd}(6,4) = 2$ ciclos, y en la retícula (3,3), que contenía $3 = \text{mcd}(3,3)$. Concluyendo:

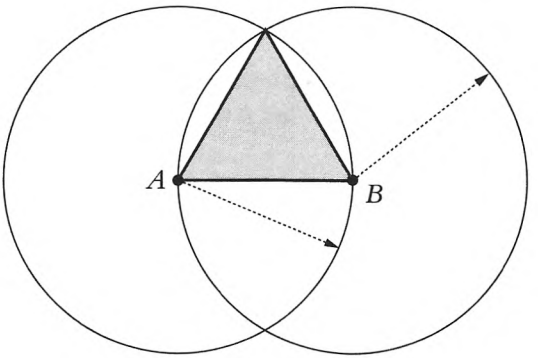
Teorema: *En una retícula de* (m,n) *vértices, el número de ciclos es el* mcd(m,n).
Corolario 1: *Si* m *y* n *son primos entre sí, la retícula* (m,n) *tiene un único ciclo infinito.*
Corolario 2: *En una retícula de* (m, n) *vértices, el número de tramos es* $2\cdot(m+n)$ .

## Una de jardinería: el triángulo equilátero como caso particular de triángulo isósceles

En ocasiones los métodos académicos del matemático no resultan lo suficientemente prácticos como para ser aplicados en situaciones reales. La plantación a tresbolillo consiste en plantar un árbol en los vértices de una retícula triangular y equilátera que garantiza la equidistancia entre los árboles plantados:



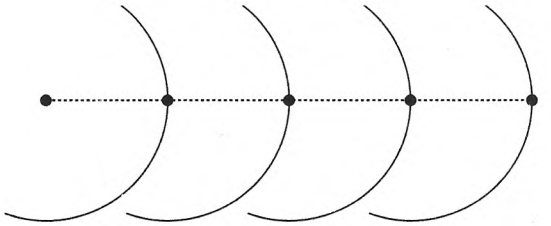
Si un matemático se plantea cómo trazar dicha retícula, lo habitual es que piense en una forma práctica de trazar triángulos equiláteros. Casi con toda seguridad pensará en una solución euclidiana, como es el método de construcción del triángulo equilátero de la Proposición nº 1 del «Libro I» de los *Elementos*.



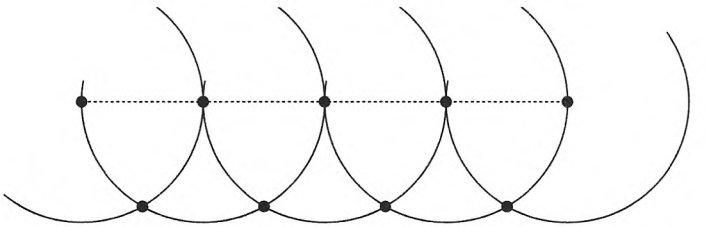

*Proposición nº 1 de los* Elementos *de Euclides: construcción del triángulo equilátero sobre un segmento dado de extremos A y B.*

Para llevarla a la práctica cambiará el compás de dos brazos por un cordel de longitud igual al lado del triángulo equilátero deseado. El matemático imaginará al agricultor paseándose por el terreno trazando arcos circulares cuyas intersecciones le darán la distribución deseada.

Primero señalará una serie de puntos equidistantes y alineados:



Luego, con centro en cada uno de ellos, trazará arcos circulares lo suficientemente grandes para que se corten en los vértices de triángulos equiláteros:



Y así sucesivamente, aplicando de nuevo a la última hilera el mismo procedimiento, completará la retícula.

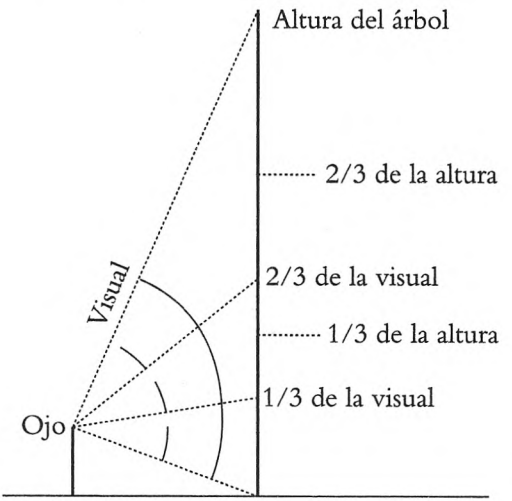
Eso haría el matemático, pero no es así como lo hace el profesional. Según Gil-Albert (1999, p. 84), el horticultor crea esa misma retícula de otro modo:

> «En el caso de las plantaciones al "tresbolillo" [...]. Para realizar el relleno completo, basta que un peón coloque el punto 0 m de la cinta en la primera caña de la alineación principal; otro peón hace coincidir con la caña siguiente el punto de la cinta equivalente al doble del marco (si éste es de 5 m, el punto señalado, 10 m). El tercer peón tensa la cinta tirando del punto de ésta marcado con la cifra equivalente al marco de plantación, y señala este vértice del triángulo equilátero con otra caña».

Se concibe el triángulo equilátero como caso particular de un triángulo isósceles. En el mundo profesional prima la práctica. Ahí es donde se pone de manifiesto la célebre frase de que la solución teórica de un problema práctico no suele ser la mejor solución práctica del problema. La solución del matemático profesional no es la que se aplica en la práctica. Desde la perspectiva matemática, no importa la práctica. Como tampoco importa que la solución práctica implique un cambio de concepción del triángulo equilátero; eso ya lo sabía el matemático. Sin embargo, la creación de la solución práctica del problema no corre a su cargo, sino a cargo del horticultor. Y crear una solución práctica del problema de tipo matemático es como una creación matemática.

## En auxilio de los auxiliares forestales: el tercio de lo que vemos no es el tercio de lo que miramos

La poda más profunda de un árbol se realiza en las ramas bajas del tercio inferior del mismo. Puesto que el auxiliar forestal necesita estimar visualmente ese tercio inferior, se crea un problema matemático. El tercio de lo que vemos ¿es el tercio de lo que miramos? En general, la respuesta es negativa:

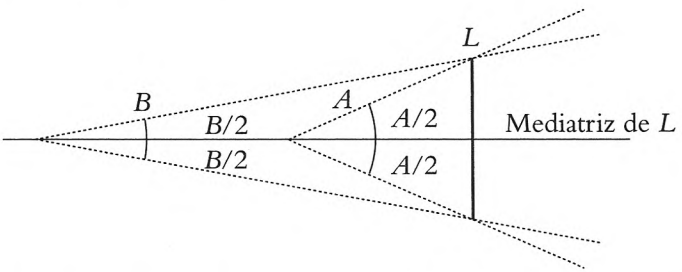



Sólo si miramos un arco circular desde su centro hallaremos la coincidencia entre el tercio de lo que percibimos visualmente y el tercio del objeto que contemplamos. Entonces, ante una situación como la del auxiliar forestal, ¿qué hacer? ¿Cómo determinar visualmente el tercio de lo que miramos?

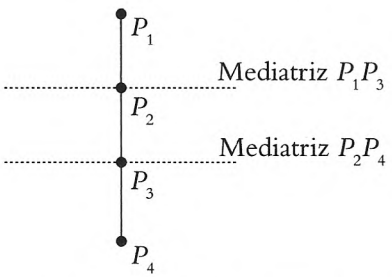
Lo más corriente es que desconozcamos la altura del árbol por su inaccesibilidad. Si $A_1$ es el ángulo de visión con el que se le percibe entero (se precisaría la ayuda de un teodolito); $a$, la altura desde la que se dirige la mirada, y $d$, la distancia al pie del árbol, entonces el ángulo $A_3$ que determina el tercio inferior de su altura es:

$$A_3 = \arctan\left(\frac{d \cdot \tan(A_1) - 2a}{3d}\right).$$

¿Dónde está el quid de la cuestión? La mirada ve ángulos. Sólo desde un punto de su mediatriz la mitad del segmento que miramos se corresponde con la mitad del segmento que vemos:




No ocurre lo mismo con el tercio. Si fuese posible existiría un punto $X$ del plano desde el cual los tercios $P_1P_2$, $P_2P_3$ y $P_3P_4$ del segmento $P_1P_4$ se verían con el mismo ángulo (véase la figura siguiente). Entonces, como desde $X$ se verían con ese mismo ángulo las dos mitades de $P_1P_3$, $X$ debería estar en la mediatriz de $P_1P_3$ (recta por $P_2$ perpendicular a $P_1P_3$). Lo mismo valdría para la mediatriz de $P_2P_4$ (recta por $P_3$ perpendicular a $P_2P_4$). Luego $X$ estaría en las dos mediatrices, que serían paralelas al ser perpendiculares al mismo segmento $P_1P_4$. Imposible:




Aparte del caso en que se contempla un arco circular desde su centro, el tercio de lo que vemos no es el tercio de lo que miramos.

## Aviso de los contables: el redondeo de la suma no es la suma de redondeos

El redondeo establece que si la última cifra decimal de un número es menor que 5, ese decimal se convierte en 0, y si es mayor que 5, la anterior aumenta en una unidad:

$$2{,}34 \approx 2{,}3.$$
$$2{,}37 \approx 2{,}4.$$

Errores de aproximación tan pequeños como décimas, centésimas o milésimas pueden tener mucha importancia cuando se manejan grandes cantidades. Un error de un céntimo de euro en una cuenta corriente puede tomarse por insignificante, pero cuando se multiplica por 300 millones de personas o de cuentas se convierte en 3 millones de euros. Un ámbito no matemático donde errores así no pueden pasarse por alto es en contabilidad. En la realización de balances, los céntimos de euro pueden bailar, es decir, caer de un lado o del otro. Y ocurre así porque, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3 \approx 0 \\ 0{,}4 \approx 0 \end{array}\right\} 0+0=0.$$
$$0{,}3+0{,}4=0{,}7 \approx 1.$$

Tenemos un teorema: *El redondeo de la suma no es la suma de redondeos.*

Esta afirmación queda plasmada gráficamente en las siguientes tablas:

| Redondeo de la suma | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| Suma de redondeos | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Obsérvese con qué frecuencia aparecen en las tablas los resultados 0, 1 y 2:

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Redondeo de la suma | 15% | 70% | 15% |
| Suma de redondeos | 25% | 50% | 25% |

¿Por qué no corregir esas diferencias y determinar un redondeo que proporcione una distribución más equitativa de 0, 1 y 2? Por ejemplo, podría acercarse al 33,3% para cada uno de los resultados, lo que supondría repartir ceros, unos y dos en las cien casillas respetando la simetría. Esto queda reflejado en la siguiente tabla, en la que las cifras 0, 1 y 2 aparecen 33, 34 y 33 veces, respectivamente:

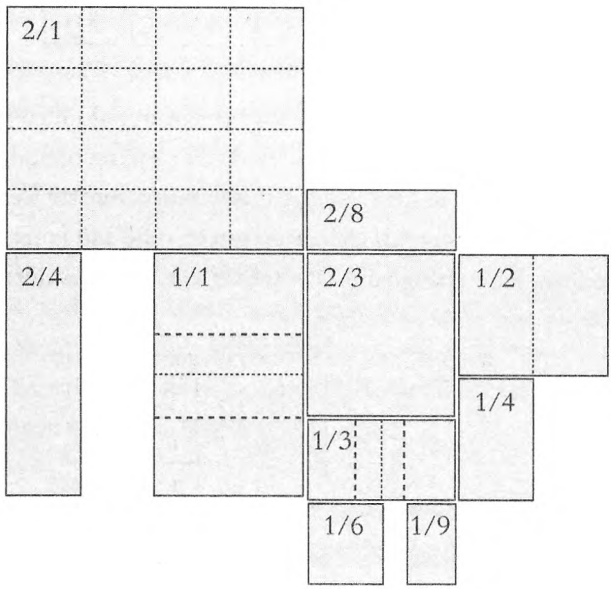
| Redondeo (Suma) = Suma (Redondeo) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

## Tetris frigorífico

El almacenamiento en cámaras frigoríficas en el ámbito europeo se optimiza gracias a un formato estandarizado de bandejas llamado Gastronorm EN 631. Todas las bandejas diseñadas acorde con este estándar son rectangulares y se identifican mediante un código numérico que expresa la relación de sus dimensiones con la bandeja original de la que se derivan las demás. Esos códigos son:

2/1 2/3 2/4 2/8 y 1/1 1/2 1/3 1/4 1/6 1/9.

La bandeja original es la 1/1, cuyas dimensiones son 530 mm × 265 mm. Las bandejas restantes se obtienen de ella por duplicación y división del modo ilustrado en la figura (Albertí, 2009: 43).




Esto significa que la nomenclatura de cada recipiente expresa su relación de tamaño con la bandeja 1/1:

2/1 = doble de 1/1.
2/4 = cuarta parte de 2/1 = mitad de 1/1.
2/8 = octava parte de 2/1 = cuarta parte de 1/1.
2/3 = dos terceras partes de 1/1.
1/2 = mitad de 1/1.
1/3 = tercio de 1/1.
1/4 = cuarta parte de 1/1.
1/6 = mitad de 1/3.
1/9 = tercio de 1/3.

Pero estas igualdades no sólo son ciertas verbalmente, sino que también lo son en cuanto a los cálculos que expresan:

$$\frac{2}{1} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2.$$
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{2}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}.$$
$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, los códigos de las bandejas Gastronorm son, de hecho, fracciones numéricas, y constituyen un sistema de representación fiel con la relación de tamaño entre las bandejas. Para averiguar, por ejemplo, a cuántas bandejas 1/6 equivale la bandeja 2/3, basta con efectuar la división:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 3} = \frac{12}{3} = 4.$$

El sistema Gastronorm viene a ser como un tetris geométrico que permite optimizar un espacio rectangular determinado (la repisa de un frigorífico) de antemano, encajando bandejas como si de las piezas de un puzle se tratase.

## Un libro infinito y un disco bidimensional

En el mundo de la literatura ha habido y hay escritores capaces de captar, definir e ilustrar ideas matemáticas con gran claridad, lo que contribuye a la comprensión de conceptos matemáticos y a disponer de otra perspectiva para concebirlos. Para ilustrar este punto comentaremos matemáticamente dos relatos, uno de Jorge Luis Borges y otro de Italo Calvino.

Gran parte de la obra de Borges se desarrolla en torno a situaciones y objetos paradójicos, pero tan lógicos que parecen reales. El desierto como laberinto sin puertas ni pasillos, el laberinto de los de laberintos. Una biblioteca de configuración espacial tremendamente compleja. Es en las explicaciones de esos objetos e ideas donde el relato remite a ideas matemáticas.

En *El libro de arena*, el escritor argentino habla de un libro de infinitas páginas del que, además, no puede determinarse la primera ni la última. Del texto se diría

que Borges piensa en el infinito potencial y contable, es decir, numerable, pues todas las páginas de las que habla poseen numeración natural. Tantas hay que se constata la imposibilidad de volver a abrirlo exactamente por la misma ya contemplada, detalle por el que se pone de manifiesto una distinción primordial entre lo finito y lo infinito:

«Lo abrí al azar... Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. La volví, el dorso estaba numerado con ocho cifras. Llevaba una pequeña ilustración, como es de uso en los diccionarios: un ancla dibujada a la pluma, como por la torpe mano de un niño.

Fue entonces cuando el desconocido me dijo:

—Mírela bien. Ya no la verá nunca más.

Había una amenaza en la afirmación, pero no en la voz.

Me fijé en el lugar y cerré el volumen. Inmediatamente lo abrí. En vano busqué la figura del ancla, hoja tras hoja...

[...]

—...Su poseedor no sabía leer... Me dijo que su libro se llamaba el Libro de Arena porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin».

Si el libro fuese finito, por muchas páginas que tuviese (por ejemplo, $N$), la probabilidad de volver a abrirlo por una página determinada sería pequeña, pero positiva. En cambio, en un libro infinito, esa probabilidad se reduce a cero:

$$P(1) = \frac{1}{N} > 0. \qquad P(1) = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Cabe pensar que el Libro de Arena podría numerarse con los números naturales: 1, 2, 3, ... Una numeración así impediría cerrar el volumen con una última página, pero sí iniciarlo con una primera; sin embargo, el libro carece de ambas. Cuando se buscan, siempre se interponen otras, tanto al principio como al final del volumen:

«Me pidió que buscara la primera hoja.

—Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.

—Ahora busque el final.

También fracasé...

—Esto no puede ser.

[...]

—No puede ser, pero es. El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última. No sé por qué están numeradas de este modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita admiten cualquier número.

[...]

—Si el espacio es infinito estamos en cualquier punto del espacio. Si el tiempo es infinito estamos en cualquier punto del tiempo».

Esa ausencia de primera página invalida nuestro modelo de los números naturales. ¿Qué conjunto de números cumple la propiedad de que no existe un primer elemento? Los números racionales positivos, es decir, las fracciones, los decimales finitos o periódicos. Además de ser infinitos y numerables (pueden contarse), carecen de primer y de último número. En efecto, ¿cuál es el primer número decimal positivo después del cero? No lo hay. Si lo hubiese, llamémosle $A$, podríamos dividirlo por la mitad para obtener $A/2$, un número positivo, racional y todavía menor que $A$:

$$0 < \frac{A}{2} < A.$$

Así que el primero debería ser $A/2$. Pero tampoco, porque $A/4$ estaría antes. Y $A/8$, aún antes. Así que, dado un número racional (una página del Libro de Arena), pueden interponerse tantos números racionales (páginas del libro) como se quiera entre él y el 0 (la portada del libro). Así que podemos numerar las páginas del Libro de Arena con los números racionales comprendidos entre 0 y 1. No habrá una página que sea la primera, ni ninguna que sea la última.

¿Qué quiere decir Borges al afirmar que en un espacio y tiempo infinitos nos hallamos en uno cualquiera de sus puntos o instantes? Tal vez que entonces perdemos los referentes con sus límites o extremos. En un espacio y tiempo finitos podemos hablar de mitades, tercios, proporciones y distancias a los extremos. En el caso infinito esas ideas pierden sentido.

Que Borges tiene en mente una clara idea del infinito y de su relación con las diferentes dimensiones espaciales se hace evidente nada más comenzar el relato:

## JORGE LUIS BORGES (1899-1986)

Se trata de uno de los escritores más destacados del siglo XX, cuya obra es de difícil clasificación y abarca géneros como el cuento, el ensayo, la poesía y la fantasía. La fantasía de Borges no está exenta de lógica. En sus cuentos hay buenas y asequibles ilustraciones de ideas de ámbito científico y matemático que expone de forma comprensible y clara para el público en general. Así ocurre en *La biblioteca de Babel, Funes el memorioso, El idioma analítico de John Wilkins* o *El jardín de los senderos que se bifurcan.* En esta obra hay quienes han vislumbrado resultados de mecánica cuántica.

*En el dorso de la moneda de dos pesos argentinos con la que se conmemoró en 1999 el centenario del nacimiento del escritor bonaerense se reproduce un laberinto, una idea recurrente y fundamental en sus cuentos.*

«La línea consta de un número infinito de puntos; el plano, de un número infinito de líneas; el volumen, de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes...».

Y es precisamente en otro relato donde la dimensión y no el cardinal toma protagonismo. *El disco* es un relato muy breve en el que un leñador codicioso y asesino lleva años buscando un objeto extraordinario que su víctima perdió de un golpe de hacha. Es el disco de Odín, que tiene una sola cara:

«—Ando por los caminos del destierro pero aún soy el rey porque tengo el disco. ¿Quieres verlo?

Abrió la palma de la mano, que era huesuda. No había nada en la mano. Estaba vacía. Fue sólo entonces que advertí que siempre la había tenido cerrada.

—Puedes tocarlo.

Ya con algún recelo puse la punta de los dedos sobre la palma. Sentí una cosa fría y vi un brillo. La mano se cerró bruscamente. No dije nada. El otro continuó como si hablara con un niño:

—Es el disco de Odín. Tiene un solo lado. En la tierra no hay otra cosa que tenga un solo lado. Mientras esté en mi mano seré el rey.

—¿Es de oro? —le dije.

—No sé. Es el disco de Odín y tiene un solo lado».

Un disco tridimensional tiene tres caras. Dos son circulares, y la tercera es la banda que las une y que podemos imaginar desplegada en un rectángulo. Los objetos de dos dimensiones no tienen espesor. La creación matemática de Borges está en probar que el disco de Odín carece de espesor por carecer de una de sus caras. El leñador no cesa en su búsqueda porque el disco debió de caer boca abajo, es decir, dejando a la vista su cara invisible.

## Los barrios de Dorotea

Son varias las obras de Italo Calvino en las que hallamos referencias matemáticas: *Las cosmicómicas*, *El vizconde demediado*, *Las ciudades invisibles.* Esta última no es ni pretende tener carácter matemático, aunque el texto contiene muchas expresiones relacionables con ideas matemáticas. Trata de un imaginario Marco Polo que describe al emperador Kublai Kan las ciudades de su imperio. Cada ciudad posee nombre de mujer y escogemos como motivo para la creación matemática una frase de la ciudad de Dorotea:

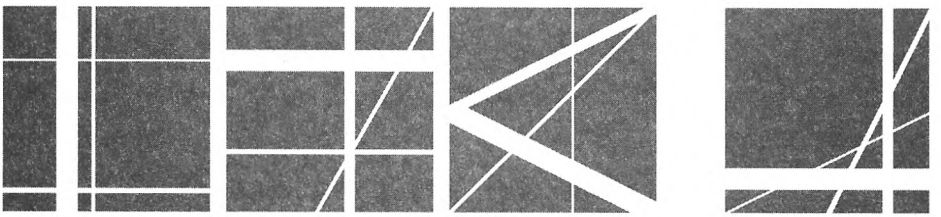
«De la ciudad de Dorotea se puede hablar de dos maneras: decir que cuatro torres de aluminio se elevan en sus murallas flanqueando siete puertas del puente levadizo de resorte que franquea el foso, cuyas aguas alimentan cuatro verdes canales que atraviesan la ciudad y la dividen en nueve barrios, cada uno de trescientas casas y setecientas chimeneas [...]».

Calvino utiliza cantidades específicas para describir algunos elementos arquitectónicos de la ciudad de Dorotea: 4 torres, 7 puertas, 4 verdes canales, 9 barrios, 300

casas y 700 chimeneas. Esas cifras invitan a un primer cálculo sobre la ciudad. De Dorotea puede decirse que hay $9 \cdot 300 = 2.700$ casas y $9 \cdot 700 = 6.300$ chimeneas, lo que significa que muchas casas tienen más de dos chimeneas.

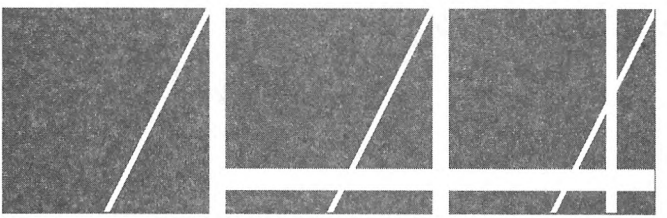
Pero no vamos a centrar nuestra creación alrededor de estos cálculos, sino de un aspecto topológico como es el hecho de que las aguas del foso estén alimentadas por «cuatro verdes canales que atraviesan la ciudad y la dividen en nueve barrios».

Supongamos que los canales son rectilíneos. Hay varias formas de crear nueve barrios con cuatro canales, aunque pueden crearse hasta once, tal como muestran las siguientes figuras:



Surge la pregunta: ¿cuál es el número máximo de barrios que pueden crearse con una serie de canales o calles rectilíneas en una ciudad? Dicho de otro modo: ¿cuál es el número máximo de recintos que pueden crear $n$ segmentos en una región del plano?

Para responder a la cuestión observemos que la primera calle crea, como máximo, dos barrios y que la máxima cantidad de éstos se obtiene cuando la nueva calle rectilínea corta a todas las anteriores:



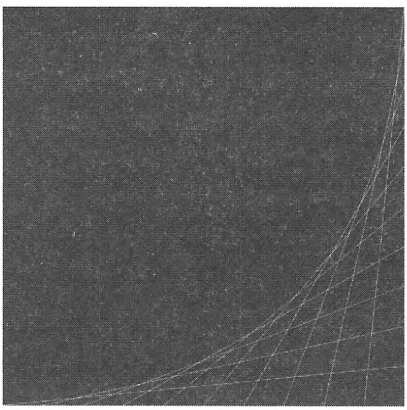
La primera calle crea un nuevo barrio; la segunda, dos; la tercera, tres, y así sucesivamente. De este modo, la enésima calle añadida creará $n$ barrios nuevos. Por lo tanto:

| Calle añadida | Barrios viejos | Barrios nuevos | Total barrios |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1ª | 1 | 1 | 2 |
| 2ª | 2 | 2 | 4 |
| 3ª | 4 | 3 | 7 |
| 4ª | 7 | 4 | 11 |
| 5ª | 11 | 5 | 16 |

Es decir, el número máximo de barrios $B(n)$ se obtiene sumando $n$ a los barrios $B(n-1)$ precedentes:

$$1.$$
$$1+1=2.$$
$$1+1+2=4.$$
$$1+1+2+3=7.$$
$$1+1+2+3+4=11.$$
$$1+1+2+3+4+5=16 \Rightarrow B(n)=1+\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

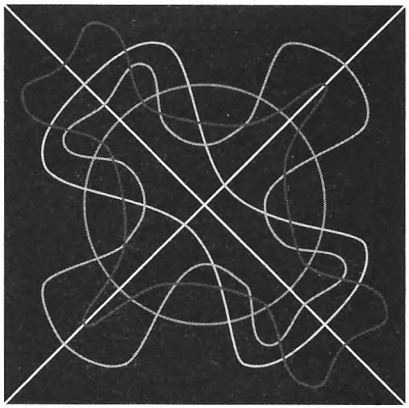
Véase la configuración geométrica que va adoptando una ciudad semejante:



La curva sugerida es la llamada envolvente de $B(n)$ para $n \to \infty$. Se trata de la hipérbola de ecuación:

$$x^2+y^2+2xy-4y=0.$$

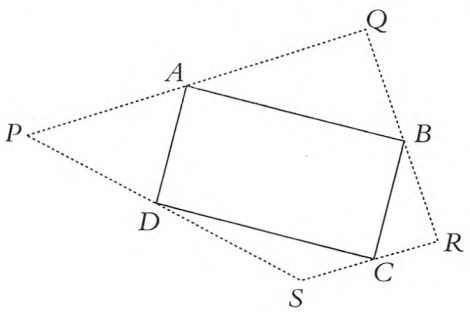
Suponiendo el caso de calles no necesariamente rectilíneas, puede verse fácilmente que el número máximo de barrios posible se convierte en $B(n) = 2^n$. La figura siguiente muestra una ciudad con media docena de calles dando lugar a 64 barrios:



## Orden en el caos: el teorema de Varignon

El teorema de Varignon es un célebre teorema de geometría plana que llama la atención por el sorprendente fenómeno que manifiesta. «Un problema matemático para demostrar», como diría George Pólya. Si se incluye aquí es para revelar dos principios fundamentales, a saber: el primero, que una demostración que no logra explicar el fenómeno no es suficiente, y el segundo, que lo que persigue el matemático creativo, a diferencia del lógico-formal, es comprender el fenómeno, por lo que una justificación comprensiva se hace imprescindible. O, lo que es lo mismo, que a veces demostrar no es explicar.

Escójanse cuatro puntos arbitrarios $P$, $Q$, $R$, $S$ en el plano y únanse con segmentos para formar un cuadrilátero. Señálense los puntos medios $A$, $B$, $C$, $D$ de los cuatro lados y únanse para formar otro cuadrilátero dentro del primero. ¿Qué se observa?



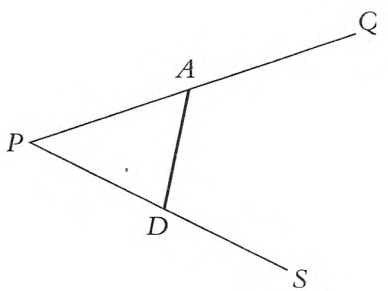
Repítase el proceso con otros cuatro puntos distintos y se llegará a la misma observación. Estamos ante un fenómeno insólito. Parece ser que la naturaleza geométrica no atiende a razones. Por muy caprichoso que sea el cuadrilátero original la conclusión es siempre la misma:

*El cuadrilátero con vértices en los puntos medios de otro cuadrilátero es un paralelogramo.*

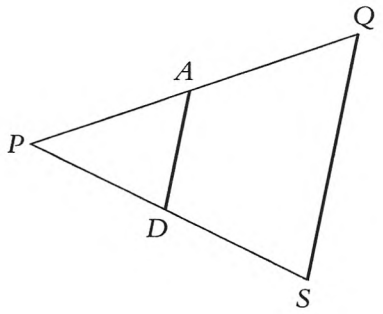
Orden en el caos. Ante una situación así, el objetivo primordial es explicar el fenómeno. Tal vez una demostración lo explique... o tal vez no. Comencemos viendo una demostración vectorial y algebraica de la cuestión. Hay que demostrar que los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ situados en medio de los lados del cuadrilátero $PQRS$ determinan un paralelogramo. Esto equivale a decir que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales, es decir, que tienen las mismas componentes. Siendo $P(p_1,p_2)$, $Q(q_1,q_2)$, $R(r_1,r_2)$ y $S(s_1,s_2)$, podemos hallar las componentes del primero de estos vectores, que resultan idénticas a las del segundo:

$$\overrightarrow{AB} = \left( \frac{r_1 - p_1}{2}, \frac{r_2 - p_2}{2} \right) = \overrightarrow{DC}.$$

Por tanto, hemos demostrado el teorema. Pero, esta demostración ¿explica el misterio del fenómeno? No. Estamos ante un ejemplo de cómo la lógica prueba, pero no explica. Y no explica porque tras la demostración no comprendemos por qué las cosas son así. Volvamos al punto de partida y detengámonos en la observación de una parte de la figura:



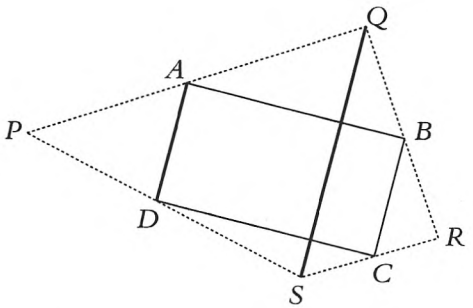

Quizás este diseño nos resulte familiar, aunque en otro contexto distinto al de la geometría analítica. Una ayuda reveladora puede ser el trazo de alguna línea auxiliar, la única que podemos añadir para completar el dibujo:



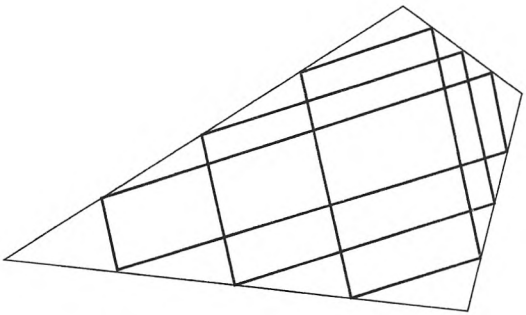

Vemos que aparecen dos triángulos *APD* y *QPS*. Puesto que *A* y *D* se escogieron en medio de *PQ* y *PS*, respectivamente, podemos asegurar que *AD* es paralelo a *QS* y tiene exactamente la mitad de su longitud. Esta última conclusión se conoce con el nombre de teorema de la paralela media, y merece una especial atención, pues no es tan evidente como aparenta.

Un razonamiento similar con relación al vértice *R* de la figura original nos llevaría a decir que *BC* también es paralelo a *QS*. Puesto que *AD* y *BC* son ambos paralelos a *QS*, la conclusión es que son paralelos entre sí, y el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo.

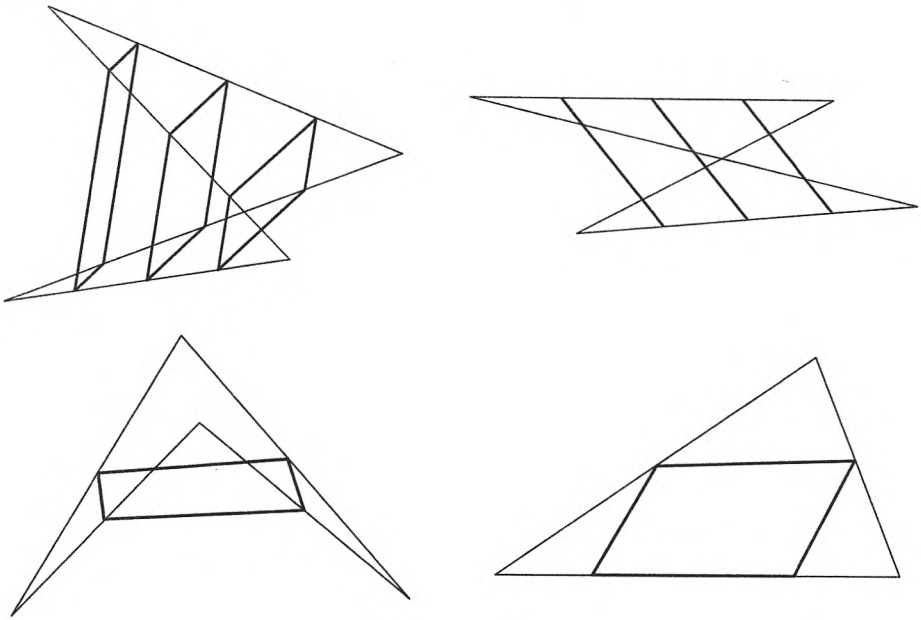
Sin duda es en el contexto geométrico donde el teorema toma pleno sentido y la demostración directamente relacionada con el teorema de Tales manifiesta aquello que debe ser revelado, lo que explica la situación.




Como creativos matemáticos, no deberíamos detenernos aquí. Ya decía Paul Matussek, citado en el primer capítulo, que la mente creativa no para de pensar. Por ejemplo, una consecuencia directa es que los ángulos de los vértices del paralelogramo *ABCD* son los que forman las diagonales del cuadrilátero *PQRS*. Pueden plantearse otras preguntas: ¿y si en lugar de tomar los puntos medios, dividimos los lados en tres, cuatro, o incluso más partes?



A partir de ese momento entra en juego el uso de software, en este caso de dibujo y tratamiento de formas geométricas. Lejos de ser una simple herramienta, el tratamiento informático no sólo facilita la visualización del fenómeno, sino que además puede inspirar nuevas preguntas y situaciones. Las siguientes figuras se han realizado con un programa dinámico de geometría que permite el movimiento de un vértice cualquiera del cuadrilátero original. Al hacerlo aparecen cuadriláteros y paralelogramos extraordinarios que atacan las concepciones más conservadoras:



No podemos dejar de percibir algunas de estas figuras como representaciones en el plano de poliedros tridimensionales. El teorema de Varignon abandona el plano y se va al espacio. Con un clic y un arrastre la tecnología contemporánea

ha roto la frontera implícita en el planteamiento inicial. Como consecuencia de ello nacen nuevas cuestiones: ¿continúa vigente el teorema si los lados del cuadrilátero inicial se cortan? ¿Qué ocurre si uno de los vértices del cuadrilátero original está sobre uno de los otros tres y el cuadrilátero se ha convertido en un triángulo? ¿Cómo es ese triángulo y qué relación guarda con él el paralelogramo de su interior? ¿Bajo que condiciones puede generalizarse el teorema al espacio sustituyendo los términos cuadrilátero y paralelogramo por poliedro y paralelepípedo, respectivamente?

## Las potencias de dos no son la suma de naturales consecutivos

El año 2000 fue el Año Internacional de las Matemáticas. Se llevaron a cabo numerosos congresos por doquier y en los centros académicos y de enseñanza se realizaron multitud de actividades matemáticas. Ese año tan redondo fue el que inspiró una pregunta que el autor de este libro nunca antes se había planteado:

*¿Es 2.000 suma de números naturales consecutivos?*

Eso dio lugar a un teorema sobre números desconocido por el autor y sus colegas de trabajo de entonces. El año de publicación original del presente libro es 2010, y constituye un número lo suficientemente redondo como para replantear la cuestión:

*¿Es 2.010 suma de números naturales consecutivos?*

No es suma de dos consecutivos:

$$2.010 = 1.005 + 1.005 = 1.004 + 1.006.$$

Pero sí de tres y de cuatro:

$$2.010 = 669 + 670 + 671.$$
$$2.010 = 501 + 502 + 503 + 504.$$

¿Acaso todo número natural puede expresarse como suma de otros números naturales consecutivos? Evidentemente, todo número natural es la suma de un número consecutivo: él mismo. Escribamos la suma de $k$ naturales consecutivos:

$$(n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k) = k \cdot n + (1 + 2 + \ldots + k).$$

La suma entre paréntesis ya fue calculada en el capítulo anterior:

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Volviendo a nuestro caso:

$$(n+1)+(n+2)+...+(n+k)=\left(n+n+...^{k,veces}...+n\right)+\left(1+2+...+k\right)=$$
$$=kn+\frac{(1+k)k}{2}=\frac{k\cdot\left(2n+k+1\right)}{2}.$$

Por una parte, si $k$ es par, $2n+k$ también lo es, y $2n+k+1$ será impar. Por otra, si $k$ es impar, $k+1$ es par, y $2n+k+1$ también será par.

En cualquier caso, tanto en un caso como en otro, en el numerador hay algún factor impar. Por lo tanto, la suma de consecutivos tiene al menos un divisor impar. Esto significa que sólo aquellos números naturales con algún divisor impar podrán expresarse como suma de consecutivos. Dado que las potencias de 2 carecen de divisores impares, hemos llegado al siguiente teorema:

*Sólo las potencias de 2 no pueden expresarse como suma de naturales consecutivos.*

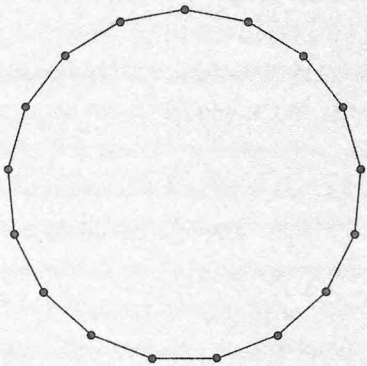
Detallando las sumas de consecutivos vemos de dónde sale ese factor impar:

| Sumandos | | Número |
|---|---|---|
| 2 | $(n)+(n+1)$ | $2n+1$ |
| 3 | $(n-1)+(n)+(n+1)$ | $3n$ |
| 4 | $(n-1)+(n)+(n+1)+(n+2)$ | $2(2n+1)$ |
| 5 | $(n-2)+(n-1)+(n)+(n+1)+(n+2)$ | $5n$ |
| 6 | $(n-2)+(n-1)+(n)+(n+1)+(n+2)+(n+3)$ | $3(2n+1)$ |
| 7 | $(n-3)+(n-2)+(n-1)+(n)+(n+1)+(n+2)+(n+3)$ | $7n$ |

Si el número de sumandos $n$ es impar, dicho factor es $n$; si el número de sumandos $n$ es par, el factor es $2n+1$. Un factor impar, en cualquier caso.

## CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Este matemático alemán nacido en Brunswick y fallecido en Gotinga fue un niño prodigio. Pero si el Gauss niño acabó recibiendo una educación refinada no fue gracias a su padre, sino a su madre. Gauss dudó entre estudiar filología y matemáticas. A principios de la primavera de 1796 optó por la segunda opción. Los matemáticos le están muy agradecidos, pues acabó convirtiéndose en uno de los más grandes de la historia. Sin duda en su decisión influyó el hecho de que aquel mismo día de primavera lograse construir, siguiendo las normas euclidianas, el polígono regular de diecisiete lados. Como matemático, Gauss lograría muchos más éxitos, aunque de ninguno estuvo tan orgulloso como de aquél. Tanto que quiso que se tallara sobre su tumba dicho polígono, a lo que el cantero se opuso argumentando la dificultad de la tarea y la escasa diferencia, apenas perceptible, entre éste y la circunferencia.



*A la izquierda, un retrato de Gauss. El matemático alemán demostró que el polígono regular de diecisiete lados podía ser construido con regla y compás.*

Capítulo 4

# Interacción cultural y creatividad

Hasta ahora se ha tratado el aspecto más corriente de la actividad matemática: un individuo que ante los fenómenos y experiencias de la vida se interroga sobre las explicaciones de los mismos y ofrece justificaciones de carácter matemático. No se ha profundizado en los aspectos culturales y sociales, a pesar de que en el primer capítulo éstos se declararon fundamentales en el desarrollo del conocimiento matemático.

Las matemáticas se desarrollan dentro de una sociedad y cultura determinadas y es ese contexto el que determina en buena parte su avance en una u otra dirección, tanto dentro como fuera del ámbito académico. Por tanto, los factores socioculturales influyen en el aspecto creativo al dar más importancia a unos problemas que a otros, e incluso al no dar importancia alguna a otros que en otra cultura pueden resultar fundamentales. Las etnomatemáticas son una rama de la ciencia que estudia el desarrollo del conocimiento matemático vernáculo, es decir, las ideas matemáticas de un grupo cultural determinado. Por ellas conocemos que en diferentes partes del mundo se cuenta, se calcula, se conciben figuras geométricas de forma distinta y se resuelven problemas mediante diferentes procedimientos. Por una parte, esto prueba el carácter creativo de cada cultura; por otra, facilita un nuevo aspecto creativo como es el de la interacción cultural.

La siguiente es una crónica de la identificación y gestación del conocimiento matemático experimentado por el autor fuera de su ámbito académico y fuera de su cultura occidental. Confiamos en que el lector sea indulgente con el tono abiertamente personal que conlleva toda crónica.

Hasta aquí hemos hablado siempre de heurística en el seno de la propia cultura, ya fuese dentro o fuera del ámbito matemático. Ahora trascendemos nuestro ámbito cultural para ver de qué modo la creación matemática puede inspirarse y gestarse sobre aspectos sociales y culturales. Si ya dijimos que el primer paso para la creación matemática era formularse preguntas sobre los fenómenos, ¿qué mejor que salir de casa para ver, observar y vivir fenómenos nuevos?

## El viaje intercultural

Los matemáticos no viajan demasiado. No nos referimos a viajar por cuestiones laborales en las que uno se traslada llevándose como equipaje el contexto propio de su trabajo. Hablamos de viajar con el objetivo de conocer otras cosas, otra gente, otras culturas y costumbres, otros modos de vivir y de pensar. Una actividad en la que no caben los viajes organizados, pues también en ellos el turista se lleva gran parte de su contexto cotidiano al asegurarse unas comodidades mínimas, un transporte privado, un guía intérprete del idioma local y una compañía de su propia sociedad y cultura.

Un viaje intercultural no es nada de eso. En un viaje así, cambiamos de contexto, de sociedad y de cultura. Vivimos, temporalmente, eso sí, del modo más parecido posible al de la gente del lugar que visitamos, nos movemos como lo hacen los nativos, comemos lo mismo y en los mismos sitios que ellos, y nos alojamos en hoteles donde ellos se alojan cuando abandonan temporalmente su hogar.

Durante viajes semejantes nos damos cuenta de que cada cultura ha desarrollado lo que llamamos una forma de vida particular: cada país tiene su propia lengua, sus creencias y ritos, su sistema de clases, sus organizaciones sociales y políticas, sus valores, su gastronomía, arquitectura, arte, música, literatura y muchas otras cosas que constituyen su saber, su cultura en definitiva. Lo que busca el viajero es compartir y contrastar sus puntos de vista con los de los otros. De este modo no sólo conocerá a quienes visita, sino que también se conocerá mejor a sí mismo y, por ende, su cultura.

## Matemáticas extramuros

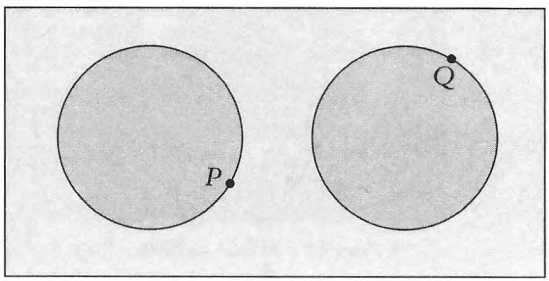
¿A quién se le ocurriría pensar en matemáticas estando de viaje? La barca que nos lleva se desliza aguas abajo por el Ganges mientras contemplamos las columnas de humo emanando de los cadáveres incinerados en la orilla. Tumbados en la arena vemos a contraluz la silueta estrellada de la copa de un cocotero meciéndose al viento en un vaivén susurrante. Sentados en el suelo del templo nos extasiamos con la incontable secuencia de acontecimientos: el sacerdote que bendice las ofrendas entre vapores de sándalo, los colores de las vestimentas de los asistentes, la música con motivos reiterativos del gamelán, las esculturas que rodean el recinto, las decoraciones temporales hechas de bambú y hojas entrelazadas, las cestas de frutas exóticas. ¿Puede alguien pensar en matemáticas mientras vive todo eso?

La respuesta es no. Sin embargo, cuando uno lleva el tiempo suficiente en el país ajeno acaba acostumbrándose a lo exótico y novedoso. Lo que antes le parecía extraño se convierte ahora en corriente. En ese momento uno puede hacer fuera lo que hacía en casa. Superada la primera fase, y si el viaje va a ser largo, uno puede llevarse algo de su contexto sobre lo que pensar en los ratos de aburrimiento y de espera.

La primera vez en mi vida que trabé una conversación matemática en un viaje de este tipo fue en la ciudad de Baños (Ecuador). Allí me entretuve un rato con un alemán preocupado por los teoremas de valores propios.

La segunda fue años después, cuando me llevé a Indonesia apuntes y un libro de matemáticas para preparar mis clases. El viaje iba a ser largo, y preveía una estancia de varias semanas en un punto fijo. Además, varias obras de literatura y de música ayudaron a recrear un entorno de trabajo muy similar al que tenía en Occidente. Se me hizo extraño al principio, pero al final me acostumbré a hacer matemáticas en el trópico. Fue entonces cuando se me ocurrió el planteamiento del siguiente problema de optimización inspirado por la casi perfecta circularidad de la isla de Ternate y la cercana Tidore, separadas por un estrecho de tan sólo dos kilómetros, en el archipiélago de las Molucas.

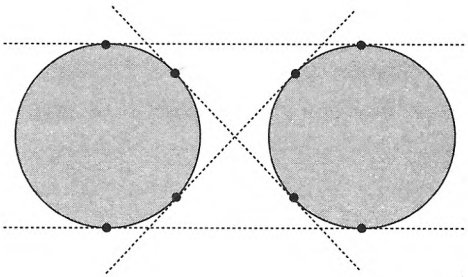
Tenemos dos islas circulares. En cada una de ellas sólo hay una carretera, que las circunda por completo siguiendo la costa. Una persona se halla en un punto $P$ de la carretera de una de ellas y tiene que ir a un punto $Q$ de la carretera de la otra, como se ilustra en la figura. ¿Qué trayectoria es la más corta?



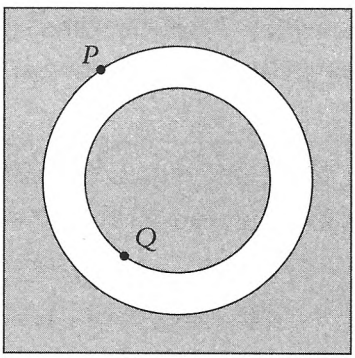

Los únicos trayectos posibles en cada una de las islas son circulares, es decir, arcos circulares. En cambio, se puede ir de una isla a la otra navegando en línea recta. Un buen modo de comenzar es recordar a Pólya y reducir el problema a casos más sencillos para, a partir de ahí, aproximarnos al problema, acrecentando la dificultad e incluso sobrepasándola en el caso más general:

1. Ambas islas son puntos.
2. Una de las islas es un punto.
3. Tienen el mismo radio.
4. Tienen radios distintos.

La resolución del problema pasa por cuatro puntos fundamentales, los determinados por las tangentes comunes a ambos círculos, como se muestra en la figura.



Al tratar de resolverlo, surge una cuestión primordial: ¿Qué puntos quedan más cerca siguiendo un trayecto exclusivamente marino? ¿Y si una isla fuese interior a la otra, separadas por un lago con forma de corona circular?

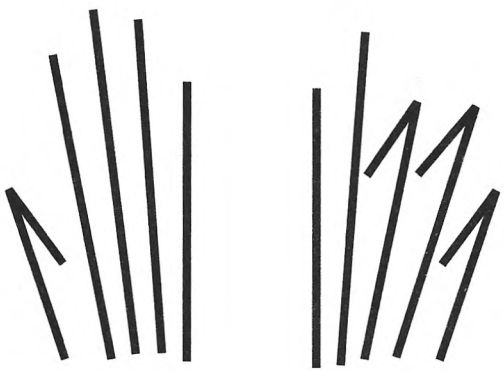



## Multiplicación digital en una playa

Mi tercera experiencia matemática fuera de mi cultura fue en la playa de Padangbai, en Bali. Nos habíamos reunido allí con un maestro de la escuela de un pequeño pueblo cercano y con su hija de siete años de edad. Él escribía con el dedo en la arena cálculos que la niña debía resolver. Lo que me sorprendió fue que utilizase los

dedos para multiplicar. Recordé una obra de Georges Ifrah que estaba en un estante de casa, a trece mil kilómetros de distancia, en la que se hablaba de la multiplicación digital localizada en diferentes partes del mundo, pero no pude recordar si se mencionaba Indonesia y, concretamente, la isla de Bali.

Para multiplicar, por ejemplo, 6 por 8, la niña contaba hasta 6 en su mano izquierda cerrada, por lo que al final le quedaba un dedo doblado, y los 4 restantes, estirados. Luego hacía lo mismo con la mano derecha, con la que contaba hasta 8, quedándole 3 dedos doblados y 2 estirados, como se muestra en el siguiente esquema.



Obtuvo el resultado sumando una decena por cada dedo doblado, $10 \cdot (1+3) = 40$ con el producto de los dedos estirados, $4 \cdot 2 = 8$. El total era $40 + 8 = 48$.

¿A quién se le habría ocurrido este sistema? ¿Por qué funcionaba y qué se conseguía con ello? Imposible responder a la primera pregunta, pues su rastro se pierde en el tiempo y se extiende en el espacio. Una explicación del fenómeno para responder a la segunda es la siguiente:

$$\begin{aligned}(10-a)(10-b) &= \\ = 100-10a-10b+ab &= \\ = 100-10(a+b)+ab &= \\ = 10[10-(a+b)]+ab.&\end{aligned}$$

Es decir, $a+b$ es la cantidad de dedos estirados, y $10-(a+b)$, la de dedos doblados. Éstos hay que tomarlos como decenas, puesto que aparecen multiplicados por 10. Por último, $a$ y $b$ son los dedos doblados en cada mano. El caso $6 \times 7$ se corresponde con $a=4$ y $b=3$. Para $8 \times 8$, tendremos 3 dedos doblados en cada mano, es

decir, 6 decenas (60), y 2 estirados en cada mano, o sea, $2 \cdot 2 = 4$ unidades. Por tanto, el resultado es $60 + 4 = 64$.

¿Qué se consigue con ello? Pues reducir la multiplicación de dos números mayores que 5 a productos con números inferiores a 5. Mediante este cálculo digital no es necesario conocer las tablas de multiplicar hasta 10; con sabérselas hasta el 5 ya es suficiente.

Cuando volví a casa busqué en el libro sobre la historia de las cifras. Ifrah citaba varias partes del mundo donde se hacían multiplicaciones digitales: «Todavía hoy encontramos vestigios de este tipo de técnica en la India, Irán, Siria, Serbia, Besarabia, Valaquia, Auvernia y norte de África». Entre los lugares que cita se encuentra la India, pero no Indonesia. Era la primera vez en mi vida que hallaba algo que no estuviera documentado en un libro. La gente de Bali es de religión hinduista; seguramente el cálculo digital del maestro y de su hija era herencia de la cultura india.

### MULTIPLICACIÓN DIGITAL CON NÚMEROS MAYORES QUE 10

El truco de la multiplicación digital está en el resto de dividir por 5. Para multiplicar de este modo se utilizan los dedos; puesto que disponemos de cinco en cada mano, al final nos quedan tantos dedos abiertos o cerrados como el resto de la división del número en cuestión por 5. Para multiplicar 13 por 14 vamos contando unidades en cada mano. Por fin, vemos en una 3 dedos cerrados y 4 en la otra, que corresponden a los restos de las divisiones de 13 y 14 entre 5: $13 = 5 \cdot 2 + 3$; $14 = 5 \cdot 2 + 4$. ¿Qué hay que hacer con ellos para obtener el resultado de la operación? El álgebra nos da la respuesta:

$$(10 + a)(10 + b) = 100 + (a + b) \cdot 10 + ab.$$

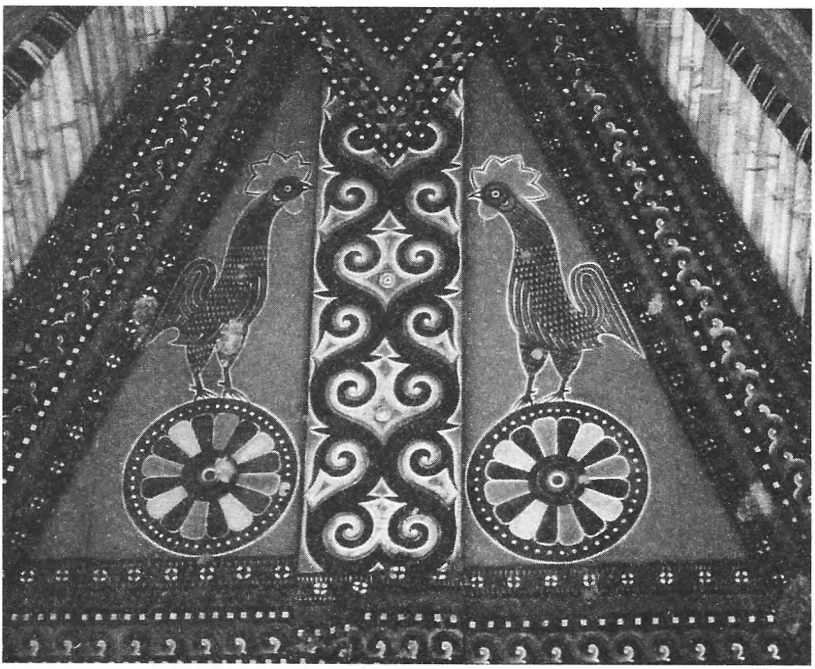
Es decir, sumar a 100 tantas decenas como dedos cerrados $(3 + 4)$ y el producto de éstos:

$$13 \cdot 14 = 100 + (3 + 4) \cdot 10 + 3 \cdot 4 = 100 + 70 + 12 = 182.$$

## Grabados toraja: ¿pueden hacerse sin matemáticas?

Este suceso cambio mi perspectiva. A partir de entonces comencé a mirar las cosas de otro modo. Y entre ellas había una muy especial: los grabados ornamentales de la arquitectura toraja de la isla de Sulawesi, también en Indonesia. La primera vez

que los había contemplado sólo me había fijado en ellos como obra de arte y como elemento simbólico de su cultura. La arquitectura tradicional es a la vez característica y símbolo del pueblo toraja. Las casas y los graneros para guardar el arroz están hechos de madera y se levantan sobre gruesos pilares. En la parte inferior suelen guardarse diversos enseres y el ganado. Encima se sitúa el habitáculo cuyas paredes se conforman mediante el ensamblaje de paneles de madera. El tejado que cubre la construcción tiene forma de silla de montar.

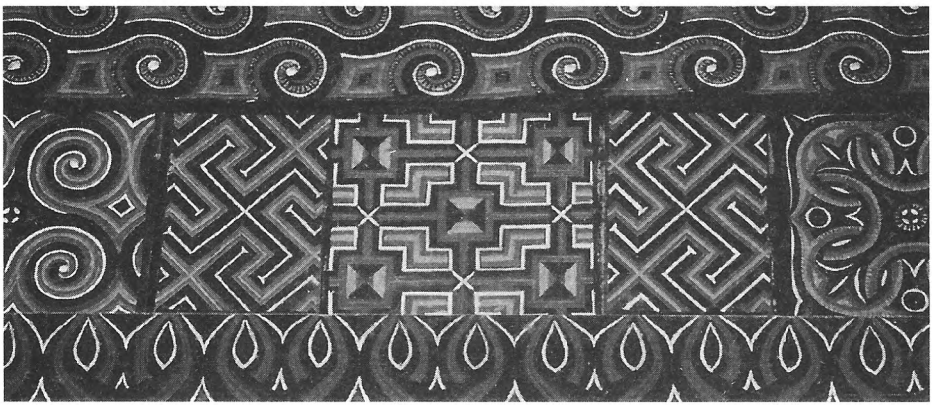


*Repeticiones idénticas y equidistantes de motivos geométricos y división del círculo en dieciséis sectores iguales.*

En las cuatro fachadas se tallan multitud de grabados cuya distribución y significado expresan la concepción que tienen los toraja del mundo, del cosmos y de la sociedad. Los diseños se inspiran en formas naturales del entorno que se concretan en abstracciones geométricas.

Tras la experiencia matemática vivida en la playa de Padangbai y tras la constatación de que ese lugar no aparecía en el libro de Georges Ifrah, revisé algunas fotografías de la arquitectura toraja. Continuaba viendo en ellas el arte y el simbolis-

mo que las caracterizaba, pero constaté el trazo riguroso de rectas, paralelas, perpendiculares, círculos, espirales, traslaciones, reflexiones, simetrías y otros elementos geométricos. ¿Era todo aquello posible sin matemáticas?

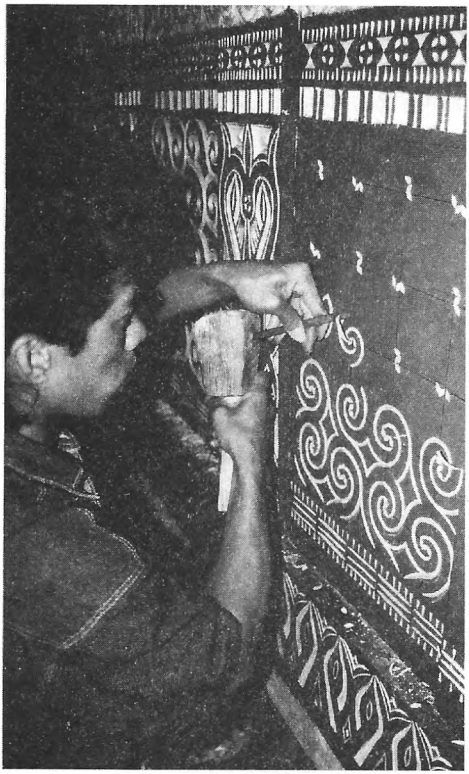


*La geometría está siempre presente en el arte y la ornamentación del pueblo toraja, en Sulawesi.*

## Observación del proceso de elaboración de los grabados toraja

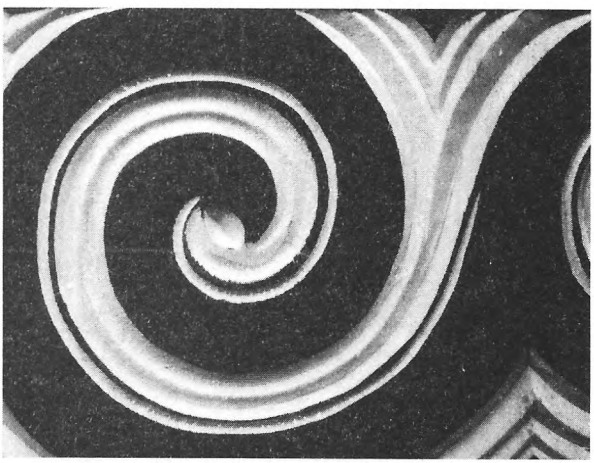
Contemplando los grabados, el matemático occidental los relaciona con la geometría euclidea y estima como muy posible su elaboración basada en conceptos y procedimientos euclideos. Se trata de una interpretación ya implícita en la descripción de los elementos geométricos observados. La terminología con la que el matemático describe las figuras talladas procede de su propia cultura matemática; sin embargo, ninguno de aquellos términos ha sido pronunciado por los artesanos autores de los grabados.

En cuanto los matemáticos tuvieron la oportunidad de ver el proceso de talla y establecieron los primeros contactos con los artesanos, observaron que algunos procedimientos y herramientas no eran euclideos. Los grabadores realizaban sus diseños con gran rigor: en la gran mayoría de los casos cada talla se realizaba sobre una retícula, y en algunos diseños, sobre un esquema geométrico. En ambos casos los diseños estaban bien definidos: sus líneas, dibujadas con todo rigor, servían de referente a las formas que posteriormente iban a ser talladas.



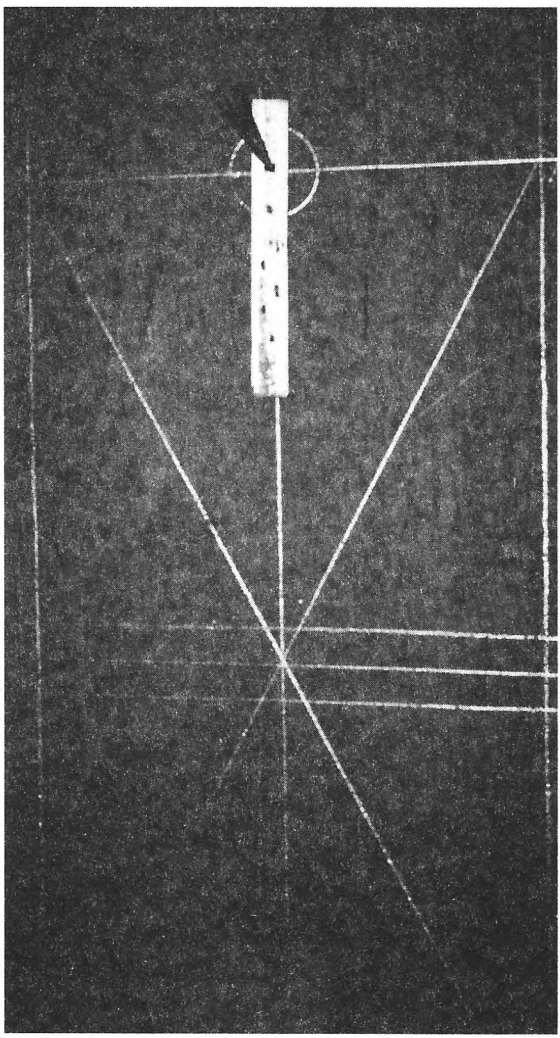
*Artesano toraja tallando espirales autoparalelas.*

En el proceso de trazado de las retículas se hizo evidente que las paralelas y perpendiculares que las conformaban no se dibujaban siguiendo las proposiciones de los *Elementos* de Euclides, sino conforme a métodos de estimación visual que parecían mucho menos rigurosos de lo que su aspecto final hacía suponer. Lo que se llevaba a cabo con gran rigor eran las paralelas y los círculos. Éstos se trazaban con compases iguales a los occidentales, aunque de dos puntas, para rayar la madera, y también con compases de bambú en los que el radio era visible. No se tomaba ninguna medida ni se realizaba cálculo explícito alguno. Un listón de bambú servía tanto para tomar medidas y trasladarlas a cualquier punto del panel de talla como para trazar segmentos rectilíneos.



*Espiral hecha a mano con su ojo en una esquina de la retícula.*

Un problema destacaba por encima de los demás: antes de dibujar las líneas de la retícula en el espacio rectangular destinado a un diseño concreto, el artesano debía señalar en los lados del rectángulo los extremos de las líneas. Los dos, tres, cuatro, seis u ocho puntos equidistantes se señalaban tras un procedimiento de ensayo y error que unos artesanos aplicaban con el listón de bambú y otros, con el compás. De manera sorprendente, los artesanos daban con el punto correcto con gran precisión y una celeridad pasmosa.



*Compás de bambú.*

## ¡Eureka!

Mi primera interpretación de este fenómeno fue pensar que los artesanos querían dividir el lado del recinto en dos, tres, cuatro, seis u ocho partes iguales y que eran esos puntos los que tomarían como extremos de las líneas que conformarían la retícula del grabado. Su resolución no era la que yo habría hecho: yo habría tomado la medida del lado del recinto y habría dividido su valor entre el número de partes para marcar después en el lado los puntos correspondientes. Los grabadores disponían de reglas milimetradas y calculadoras, pero no las utilizaban. Y, sin embrago, su resolución era todo lo eficaz y precisa que necesitaban. A la vista estaba.

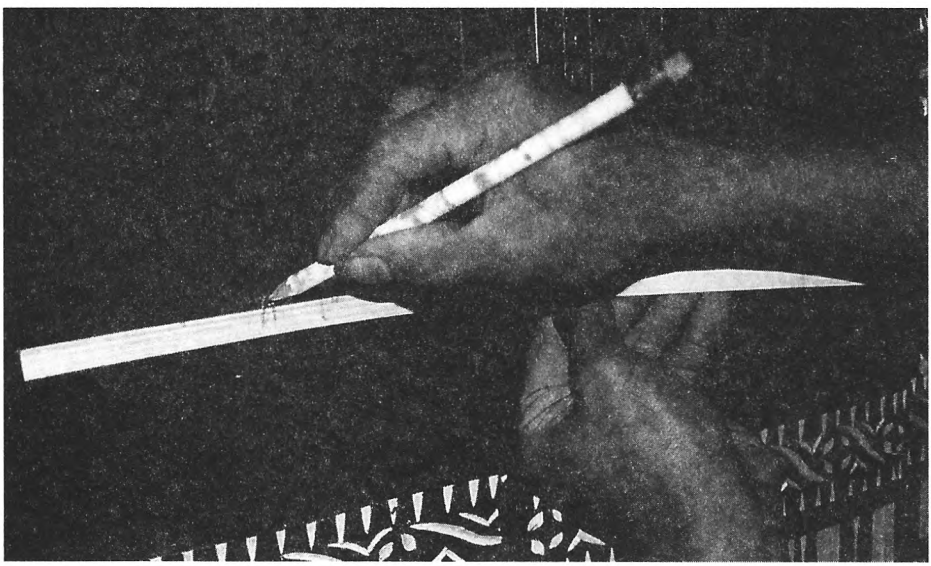
Entonces me pregunté: «¿Cómo lo haría yo si usara sus herramientas?». Me imaginé tomando una primera estimación visual de la mitad, de un tercio o de la cuarta parte del segmento que había que dividir en dos, tres o cuatro partes iguales. Marcaría esa mitad estimada en el listón de bambú y luego su réplica en el lado del rectángulo que se había de dividir. Luego movería el listón hasta que su extremo coincidiese con la marca practicada en el lado del recinto. Si la estimación de la mitad era correcta, el punto del listón señalado con esa marca debería coincidir con el extremo del lado del recinto.

Eso parecía que hacían los artesanos. Pero la clave del asunto estaba justo ahí: si no había coincidencia significaba que la estimación era incorrecta. Entonces, ¿cómo corregir el error? Ellos actuaban de forma tan rápida que era difícil de ver cuáles eran sus referentes. Se diría que obraban ensayando varias veces hasta que daban, por fin, con el resultado deseado. ¿Era el azar el que resolvía el problema? De ser así, ¿cómo justificar la rapidez con la que se obtenía la solución? O tal vez había menospreciado al azar y resultaba mucho más productivo de lo que imaginaba.

A la mañana siguiente tomamos un autobús. El camino que teníamos por delante era largo, y el día, radiante. Así que durante aquellos primeros instantes del trayecto me dediqué a contemplar cómo se iba animando la vida en los arrozales y en las localidades que atravesábamos. Me sentía muy bien y mi mente alternaba entre la realidad y la ficción. Ahora veía lo que miraba, ahora veía lo que imaginaba. De repente, la pregunta me vino a la mente: ¿cómo corregir el error para dar con el resultado exacto?

Me imaginé de nuevo en la situación del artesano: el listón de bambú en una mano y el lápiz preparado para marcar el punto adecuado en la otra. Hice una primera estimación de la mitad, la marqué en el listón y la copié en el lado del recinto. Luego deslicé el bambú hacia el extremo. No había coincidencia, la estimación era

errónea, pero... ¡Eureka! ¿Cómo no se me había ocurrido antes? Para corregirla lo que tenía que hacer era estimar la mitad del error cometido y restarla de la primera estimación, o bien añadirla a ella, según el error fuera por exceso o por defecto. Esto me daría la solución porque esa suma o diferencia de mitades sería la mitad del lado del recinto. Y si dividía en tres partes, también: tenía que corregir el error buscando el tercio del error cometido. Si al realizar el proceso dos veces no obtenía un resultado satisfactorio, lo repetía otra vez.



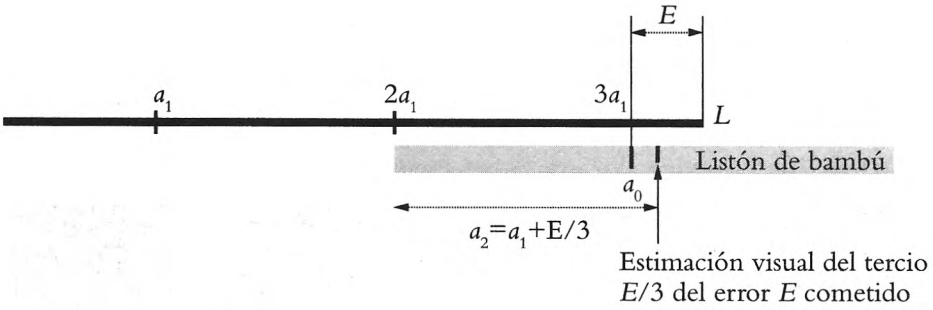
*Artesano corrigiendo el error cometido en una estimación.*

Sea $L$ la longitud de un segmento que se quiere dividir en tres partes. Realizamos una primera estimación visual $a_1$ de lo que nos parece el tercio del segmento. Marcamos sobre él tres puntos consecutivos correspondientes a las longitudes $a_1$, $2 \cdot a_1$ y $3 \cdot a_1$ (véase la figura siguiente).

Si la última señal coincide con el extremo del segmento, la partición es correcta, y el problema está resuelto. De lo contrario, hay que corregir el error $E$ cometido. ¿Cómo? Pues simplemente buscando su tercio $E/3$ y añadiéndoselo o quitándoselo a la primera estimación $a_1$, según el error sea por defecto o por exceso:

$$a_1 \pm E/3.$$

El resultado será la nueva estimación $a_2$ con la que iniciaremos de nuevo el proceso:




Sin duda, las estimaciones formarían una sucesión convergente hacia la solución, pues estimar la mitad o el tercio de un segmento muy pequeño como el del error cometido es mucho más fácil que hacerlo sobre un segmento largo como el original. Este proceso y la aguda percepción visual humana me conducirían al resultado deseado. Y así fue.

## ¿Lo piensan como yo lo pienso?

El análisis matemático del procedimiento confirmó mis expectativas, la convergencia de la serie hacia la solución (Albertí, 2007, pp. 175-179). Esto provocó el planteamiento de una pregunta quizás aún más difícil, pero fundamental en mi investigación sobre las matemáticas de los artesanos toraja: ¿lo piensan como yo lo pienso? No podía ir y preguntarles directamente una cuestión así. Era imprescindible hacerles explicar a ellos mismos qué pensaban cuando resolvían el problema.

Algunos hablaban un poco de indonesio, pero la mayoría se comunicaban en la lengua local toraja. Hasta entonces yo había utilizado intérpretes de inglés, pero ya había visto que a veces, en lugar de traducirme lo que pensaba o decía un artesano, me ofrecían una interpretación personal de las palabras de aquél. En una cuestión así no me podía arriesgar a no saber la verdad. Puesto que ya conocía algo de indonesio, decidí aprender un poco más y entablar conversación directa con los autores de los grabados. El hecho de que ya conociese a algunos de ellos podría facilitarme un poco la interacción social. La interacción cultural ya estaba en marcha.

## División no euclidea de un segmento en partes iguales

Fue un arduo trabajo obtener una expresión de alguno de los artesanos que me confirmase que ellos consideraban la división del segmento en partes iguales, tal y como yo la imaginaba. Su modo de proceder así lo indicaba, pero puesto que deseaba una manifestación verbal de sus pensamientos acabé actuando como un aprendiz con el fin de que se me explicase de qué modo proceder. Así que me dispuse a realizar la tarea in situ, por lo que tomé las herramientas con las que ellos trabajaban y me dispuse a realizar la división sobre un panel de madera. Consideré que había alcanzado mi objetivo cuando, al interrogar a un artesano sobre qué hacer ante el error cometido en la estimación de la mitad, éste respondió: «Lo que sobra dividido en dos partes». Luego insistí sobre qué hacer si se dividía en tres: «Igual, dividido en tres».

A este procedimiento lo llamé «método kira-kira», ya que *kira-kira* es el término indonesio para decir «aproximadamente». La división es aproximada, pero no de cualquier manera: consiste en la construcción de una sucesión convergente hacia la solución que se da por buena cuando es menor que el grosor del lápiz con el que se practican las marcas o cuando el error es visualmente indistinguible. Se trata de una resolución recurrente, no euclidea y practicable en superficies situadas en cualquier plano, ya sea horizontal, vertical o invertido. Éstas son situaciones en las que se hace impracticable la resolución euclidea del problema, que es la que se enseña en los institutos occidentales e indonesios. Los artesanos aprenden de otros más expertos o viejos, y muchos de ellos apenas han ido a la escuela elemental. Estamos ante una resolución matemática nueva, al menos para el matemático occidental, de uno de los problemas más antiguos; una creación etnomatemática.

El método kira-kira no es otra cosa que dividir, y se trata de un procedimiento más literal de lo que de entrada pueda parecer. Tanto es así que es posible aplicarlo a la división numérica y ver que, en el fondo, se trata de procesos equivalentes.

¿Cómo dividimos dos números? Se comienza viendo cuántas veces enteras cabe el divisor en el dividendo. Si ese valor no es exacto, se genera un resto, la diferencia entre uno y otro. Por ejemplo, para dividir 13 entre 5 decimos que el 5 cabe 2 veces en 13, y el resto de la división es $13-2\cdot 5=13-10=3$. ¿Y qué se hace a continuación? Pues se divide el resto, esa diferencia de 3, entre el mismo divisor, el 5. Sólo que para facilitar el cálculo, en lugar de tomar el 3 y dividirlo entre 5, lo multiplicamos por 10 y dividimos 30 entre 5. El resultado es exacto y da 6. Pero hay que

dividirlo por 10, lo que da 0,6, y añadirlo al cociente entero anterior: $2+0{,}6=2{,}6$. Y ya tenemos la división.

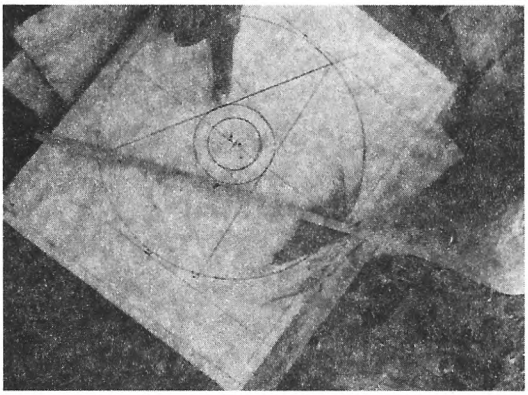
Esto es exactamente lo que hacen los artesanos toraja con el listón de bambú. Sólo que ellos no calculan de forma explícita y comienzan con una estimación visual. También podríamos actuar como ellos, pero con números. Por ejemplo, para dividir 2.345 entre 3 haríamos lo siguiente:

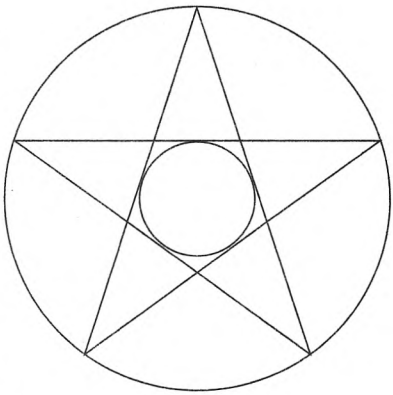
| | |
|---|---|
| $2.345/3 \approx 700$ | Primera estimación a ojo: $a_1 = 700$ |
| $700 \cdot 3 = 2.100 < 2.345$ | Primera estimación por defecto |
| $2.345 - 2.100 = 245$ | Resto o error cometido |
| $245/3 \approx 100$ | Estimación a ojo del tercio del error cometido que proporciona la segunda estimación: $a_2 = a_1 + 100 = 800$ |
| $800 \cdot 3 = 2{,}400 > 2{,}345$ | Segunda estimación por exceso |
| $2{,}345 - 2{,}400 = -55$ | Resto o error cometido |
| $55/3 \approx 20$ | Estimación a ojo del tercio del error cometido que proporciona la tercera estimación: $a_3 = a_2 - 20 = 780$ |
| $780 \cdot 3 = 2{,}340 < 2{,}345$ | Tercera estimación por defecto |

El error cometido en la tercera estimación ($2.345 / 3 = 780$) es ya muy pequeño, del orden del 0,2%, en comparación con el resultado exacto de 781,666... Pese a ello y pese a ser un método eficaz para realizar divisiones geométricas en un contexto práctico, no resulta adecuado en el contexto numérico.

## Un problema nuevo

Tiempo después volví a establecer contacto con alguno de los artesanos. Me sorprendió la presencia en una de sus tallas de una figura geométrica insólita, como es un pentagrama regular. Al interrogar a mi ya casi amigo artesano sobre el método de trazado replicó que la de seis puntas era fácil, pero que la de cinco resultaba mucho más difícil.





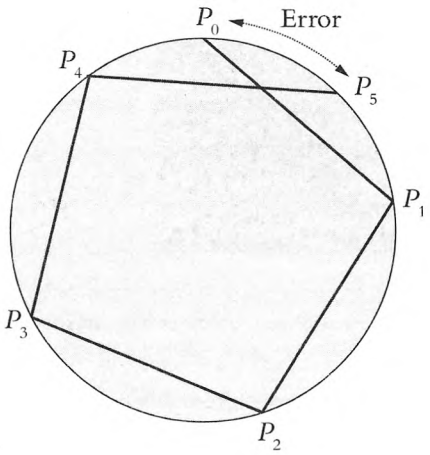
*Un artesano señala la imprecisión de las tangentes en el trazado del pentagrama regular.*

Ciertamente, lo es. Los artesanos la inscriben en una corona circular cuyos radios se determinan visualmente. Si las cosas no salen como se esperaban, se corrige el error, pero no como en el método kira-kira, sino visualmente y sin un plan predeterminado, riguroso y cuantificado que lleve a la solución.

Estuve pensando cómo podría ayudarles a realizar la tarea más fácilmente. Estaba claro que el problema era determinar los cinco puntos equidistantes sobre una circunferencia que había que unir alternativamente para crear el pentagrama. El problema era, por lo tanto, equivalente al trazado del pentágono regular. La resolución euclidea de este problema quedaba del todo descartada por dos motivos. Primero, porque me pareció una locura trazar un pentágono en un panel vertical de una casa tradicional toraja con un procedimiento tan largo y que a mí mismo me cuesta recordar. Segundo, porque era poco ético exportar a otra cultura un procedimiento semejante. Entonces... ¡Eureka! ¿Por qué no intentar resolver el problema en los términos que ofrece la propia cultura en la que se plantea? Es decir, ¿podría aplicarse el método kira-kira a la construcción de los polígonos regulares? La respuesta es afirmativa, pero no exactamente como el matemático occidental pensó de buenas a primeras.

Partimos de una circunferencia en la que queremos inscribir un pentágono regular. Apliquemos el método kira-kira tomando sobre un listón una primera estimación de la quinta parte de la circunferencia. Con esta primera estimación damos cinco pasos $P_0P_1$, $P_1P_2$, ..., $P_4P_5$ sobre ella. Si el último paso termina en $P_0$, es decir, si el último punto marcado coincide con el de partida y se cierra el ciclo, ya tenemos señalados los cinco vértices del pentágono regular. Las cuerdas de los cinco

arcos circulares correspondientes a esos cinco pasos son los lados de dicho pentágono. Ya sólo resta unirlos de forma no consecutiva para obtener el pentagrama:

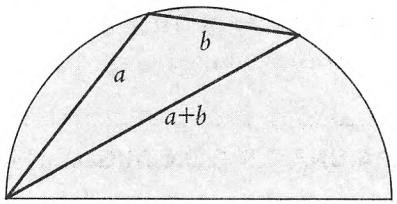



Si el ciclo no se cierra, o sea, si $P_5$ no coincide con $P_0$, hemos cometido un error en la estimación. Al principio pensé que debía corregir ese error buscando su tercio en el listón de bambú para luego añadirlo a la primera estimación o restarlo. Sin embargo, al hacerlo así el resultado no mejoraba. ¿Cómo resolverlo? ¡Eureka! Yo estaba sobre la circunferencia y seguía pensando en segmentos. Lo que tenía que corregir era un error en el arco. No tenía que centrar mi atención en el listón, sino en el arco correspondiente al error. El listón marcaba las cuerdas, y lo que había que hacer era añadir o quitar un tercio del arco circular, aunque para ello sólo dispusiera de las cuerdas circulares proporcionadas por el listón de bambú.

## La circunferencia rectilínea

La cuestión estaba en pensar en la circunferencia como si de un segmento se tratase. Manteniendo fijo un extremo del listón en el segundo punto sobre la circunferencia llevé su otro extremo hacia la estimación visual del tercio del arco correspondiente al error cometido. La distancia o cuerda resultante en el listón sería la nueva estimación. La clave estaba en que toda estimación marcada en el listón de bambú era una cuerda circular y... ¡Eureka! El arco de la suma tiene que ser la suma de los arcos. Pero esto no funciona sumando las cuerdas como si de segmentos se tratase, pues entonces el arco resultante no es igual a la suma de los otros dos. Es

decir, la suma de cuerdas no es la cuerda de la suma, a no ser que se defina la suma de cuerdas como aquella que cierra el triángulo determinado por las otras dos:




Había creado una construcción recurrente y no euclidea de los polígonos regulares, pues el procedimiento es aplicable a la división de la circunferencia en *n* partes. Además, estaba ante un nuevo grupo aditivo que llamaría «grupo de las cuerdas circulares». Sumar cuerdas tenía sentido cerrando el triángulo definido por las dos primeras, ya que así el arco de la suma se correspondía con la suma de los arcos. El método kira-kira era lo suficientemente poderoso como para utilizarse en la resolución de problemas para los que no fue creado.

### UNA EXPLICACIÓN PARA LOS NONÁGONOS REGULARES DE LA ALHAMBRA DE GRANADA

Una de las aplicaciones occidentales del método kira-kira es que puede explicar la «trampa» a la que se refieren Pérez, Gutiérrez y Ruiz (2007) cuando hablan de la construcción de un polígono regular de nueve lados en la Alhambra de Granada. Dicha figura merece el calificativo de trampa porque, gracias a Gauss, sabemos que un polígono regular semejante no es construible con regla y compás. Desconocemos cómo lo hicieron los artesanos árabes, pero el método kira-kira circular proporciona una solución plausible a este problema. Se trataría de dividir primero la circunferencia en tres arcos iguales y luego dividir uno de ellos en otras tres partes, siempre mediante el método toraja. El último arco obtenido sería el tercio del tercio de la circunferencia, es decir, una novena parte de ella. Su cuerda corresponde al lado del nonágono regular inscrito.

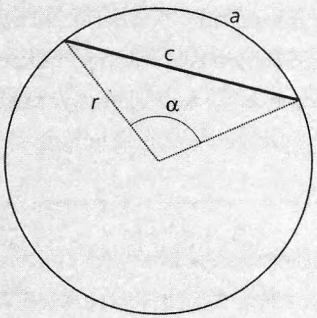
## Comunicación a los artesanos toraja

Dudé entre si comentar o no a los artesanos toraja la ampliación del método kira-kira al círculo. Antes de plantearse el trazado del pentagrama regular, el sistema de resolución de dichos artesanos era un sistema cerrado, puesto que era capaz de re-

solver todos los problemas que se planteaban. Sin embargo, su sistema era incapaz de resolver ese problema nuevo. Temía que hablarles de que el sistema podía ampliarse significara poner de manifiesto sus carencias. Sin embargo, lo que me animó finalmente a hacerlo fue pensar que el nuevo problema que ponía a prueba su sistema había sido planteado por ellos mismos.

## UN CONTEXTO PARA UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA EXTRAORDINARIA

¿Qué error se comete al tomar una cuerda circular como aproximación de su arco? Sean $a$ y $c$ las longitudes de un arco y su cuerda, respectivamente, determinados por un ángulo $\alpha$ en una circunferencia de radio r:




Teniendo en cuenta que $a = \alpha r$ y $\frac{c}{2} = r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, se deduce que: $\frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}$.

Luego, la función $f(x) = \sin(x)/x$ mide la proporción entre la cuerda y su arco correspondiente sobre la circunferencia. Hemos creado así un nuevo contexto para una función trigonométrica cuya popularidad residía hasta ahora en que era empleada como ejemplo de un cálculo de límites extraordinario. Pese a no ser continua cuando $x = 0$, el límite en ese punto existe y vale 1. Precisamente la existencia de dicho límite se demuestra comparando arcos y cuerdas.

Cuando un año y medio después volví a la región, los artesanos continuaban haciendo los pentagramas como antes. Mientras les comentaba sobre una circunferencia trazada en un tablón de madera la versión circular de su método, iban dándose cuenta de mis propósitos y anticipaban los resultados. Lo aceptaron y aprobaron de buena gana.

## Crónica de una vivencia matemática

El título original de la obra *Experiencia matemática*, de Davis y Hersh, fue *The Mathematical Experience*. En inglés, el significado del término *experience* va más allá del sentido experimental y práctico que tiene la palabra experiencia en castellano. El filósofo José Ortega y Gasset (1883-1955) creó un término castellano nuevo para traducir del alemán el significado de *Erlebnis*. La vivencia es algo más que experiencia, alude a la psicología por ser una experiencia que contribuye a formar la propia personalidad. Y el hecho de vivir es un acto psíquico, personal. El título castellano de la obra de Davis y Hersh podría haber sido *Vivencia matemática*.

La vivencia matemática, por ser personal, es independiente y trasciende ámbitos y culturas. No se restringe al mundo académico ni extra académico, puede ser teórica o práctica, occidental o no. Las experiencias expuestas en el capítulo anterior responden a la idea de experiencia matemática. Por su carácter intercultural, académico y extra académico, psicológico y personal, lo expuesto en este capítulo trasciende la idea de experiencia matemática. Ésta ha sido la crónica de una auténtica *vivencia matemática*.

Capítulo 5

# Matemáticas para creativos

Hasta aquí se ha hablado de cómo se crea en matemáticas. Ahora vamos a realizar un cambio de perspectiva para ver cómo las matemáticas se han utilizado en dos ámbitos que constituyen hoy en día el paradigma de la creatividad al margen del mundo artístico: el diseño y la publicidad.

No hay duda del papel preponderante que juega y ha jugado siempre la geometría en el diseño. Ahí donde se trata de construir algo tangible y material interviene la geometría. Desde principios del siglo XX las formas puramente geométricas han protagonizado el diseño de todo tipo de productos de consumo, sobre todo el mobiliario y los envases. Sin duda influidos por un gusto estético por la abstracción y la economía de formas, los diseñadores han trabajado con objetos geométricos para dar a sus creaciones un aire más elegante y menos abigarrado que en épocas precedentes.

El mundo de la publicidad no ha quedado excluido de ese enfoque. En las últimas décadas el interés por la ciencia y por el rigor científico ha inspirado campañas publicitarias en las que aparecen ideas y elementos propios de las matemáticas para dar mayor credibilidad a las cualidades del producto anunciado. De este modo, gráficos, fórmulas, objetos geométricos, símbolos, números y cálculos han protagonizado spots en todos los medios de comunicación, tanto impresos como audiovisuales.

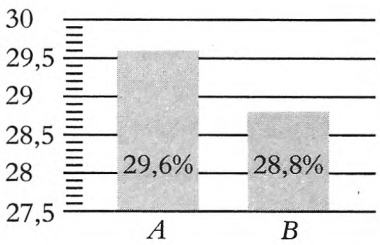
La importancia del uso de las matemáticas en esos ámbitos es doble. Por una parte, el modo en que tanto diseñadores como publicistas utilizan adecuadamente ideas matemáticas amplía su campo de aplicabilidad. Por otra, el hecho de situarlas en contextos desvinculados del mundo tecnológico y científico abre nuevas vías de comprensión para conceptos o ideas tradicionales que pueden resultar más accesibles al público en general.

Tanto el mundo del diseño como el de la publicidad son extensísimos. El análisis matemático se llevará a cabo sobre ejemplos significativos de ambos ámbitos, pero siempre ligados al mundo de la publicidad. Así, cuando se hable de un diseño, será porque en su anuncio se destaca verbalmente alguna de sus características relacionándolas con las matemáticas.

# Las matemáticas como estrategia publicitaria

## Uso tendencioso de la proporcionalidad

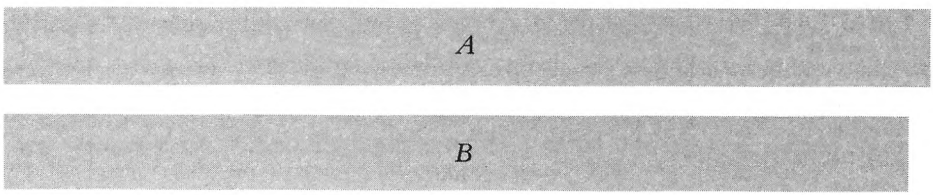
La pelea constante por liderar la audiencia lleva a las cadenas de radio y televisión a lanzar campañas publicitarias que ensalzan los éxitos propios, exageradamente por encima de los ajenos. Un caso corriente de dicha situación es utilizar gráficos con los que se pretende dar mayor credibilidad a las afirmaciones vertidas en el texto. Un recuadro típico que suele utilizarse para destacar la supremacía en la audiencia de una cadena de televisión $A$ sobre otra cadena $B$ es el siguiente:



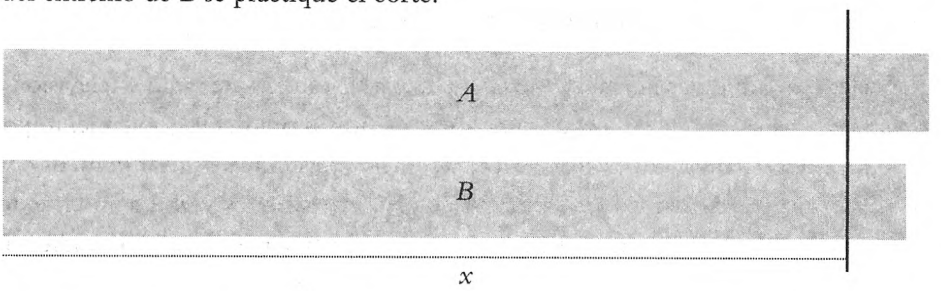

Dando por buenos los datos, ciertamente la cadena $A$ ha superado a la cadena $B$. Sin embargo, la diferencia visible entre las dos barras exagera sobremanera dicha supremacía. El rectángulo visible correspondiente a la cadena $A$ es mucho mayor en altura que el de $B$:

$$A\text{: } 29{,}6-27{,}5=2{,}1.$$
$$B\text{: } 28{,}8-27{,}5=1{,}3 \Rightarrow A/B=2{,}1/1{,}3=1{,}615.$$

La realidad es que la diferencia entre los porcentajes de audiencia se reduce a 8 décimas, que suponen apenas un 2,8% más de $A$ sobre $B$. Una comparación fiel con la realidad sería reproducir los rectángulos en toda su longitud:



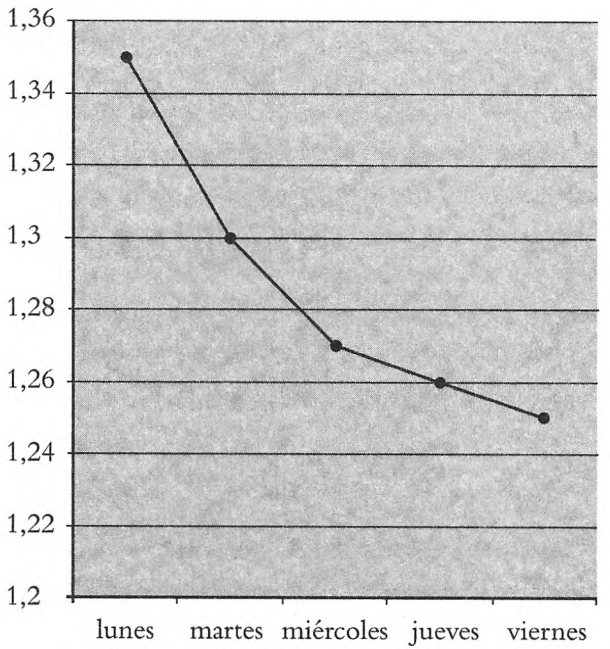
Cortando los rectángulos a nuestro antojo podemos hacer crecer hasta el infinito la proporción aparente entre los cortes resultantes. Tanto más cuanto más cerca del extremo de *B* se practique el corte:

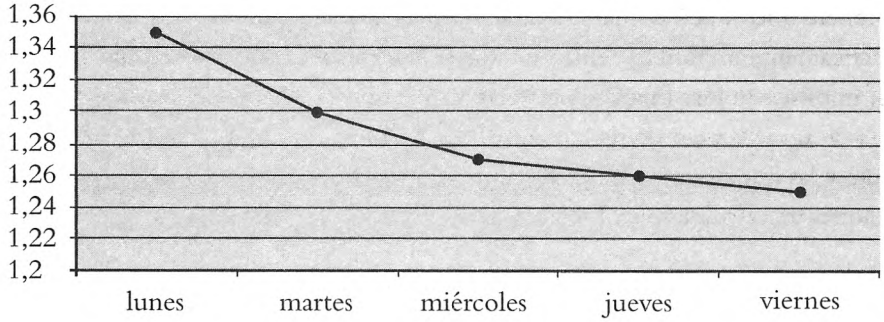



Las cosas pueden llevarse hasta extremos muy exagerados, haciendo la proporción tan grande como se desee:

$$\frac{A-x}{B-x} \xrightarrow[x \to B]{} \frac{A-B}{0} = \infty$$

Un problema similar se da en los gráficos correspondientes a la variación en el cambio de divisas. La evolución del tipo de cambio a lo largo de una semana puede parecer nimia o ingente, según la escala vertical con la que se reproduzcan las gráficas:






La pretensión de querer ilustrar con gráficos las proporciones o diferencias es una de las ideas más recurrentes en publicidad, aunque, por desgracia, su uso se haga tergiversando precisamente lo que se quiere mostrar, esto es, un falso rigor. Los números y los gráficos dan un aire riguroso propio del ámbito en el que se utilizan, las matemáticas, pero solamente cuando se emplean de forma objetiva y no tendenciosa.

## Probabilidad

Hace algunos años apareció un anuncio de una compañía de telefonía en la que se afirmaba lo siguiente: «La posibilidad de que el hijo del jefe y tú seáis la misma persona es del 0,00000000001%».

Más que «posibilidad», un término más adecuado habría sido el de «probabilidad». La probabilidad en matemáticas es el modo de cuantificar la capacidad que tiene un suceso de producirse. La definición clásica de probabilidad establece que dicha cuantificación sea la proporción entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles relacionados con la ocurrencia del fenómeno. Por ejemplo, al lanzar un dado de seis caras, la probabilidad de que salga un número $x$ inferior al tres es de 2/6, puesto que sólo hay dos resultados favorables (el 1 y el 2) de seis posibles (los seis valores del dado):

$$P(x < 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333...$$

Un modo de determinar la probabilidad de que una persona tenga a su padre por jefe es calcular el cociente entre los casos favorables y los posibles. Puesto que todo el mundo sólo tiene un padre, los casos favorables se reducen a uno. Por lo que

se refiere a los casos posibles, sería conveniente saber cuántos jefes hay, lo cual es prácticamente imposible. Teniendo en cuenta que los habitantes de todo el planeta son unos seis mil millones de personas, habría que excluir las de sexo femenino (se trata de un jefe y no de una jefa), las que no tienen hijos, las que no son jefes de nadie y las que no trabajan. Esto reduciría a mucho menos de la mitad los seis mil millones de casos posibles. Esa estimación dejaría la probabilidad en:

$$P \approx \frac{1}{3 \cdot 10^9} = 3{,}33 \cdot 10^{-10}.$$

La probabilidad atribuida por el anunciante era:

$$Q = \frac{0{,}0000000000\ 1}{100} = 10^{-13}.$$

Lo que significa considerar la existencia de unos $10^{13}$ jefes y una población de unas $2 \cdot 10^{13}$ personas. Es decir, seiscientos planetas como el nuestro:

$$\frac{P}{Q} = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-13}} = 600.$$

Desconocemos los motivos que llevaron al anunciante a utilizar un número como 0,00000000001%, pero, desde luego, consiguió asegurarse la imposibilidad de que ningún lector del planeta fuese hijo de su jefe. Cuantos más ceros hay detrás de la coma de un número decimal, menor es el número. Añadir el símbolo % aún lo reduce en una centésima más.

Estamos ante un caso de creatividad publicitaria basada en magnificar un hecho imposible con la magnitud del término que lo representa. Aunque 0% es la probabilidad de que ocurra un fenómeno imposible, el impacto visual de 0,00000000001% lo supera, y el uso de otras expresiones más ambiguas no aportaría nada nuevo y no haría sino acrecentar la confusión, como, por ejemplo, emplear el número 0,0000000000.....1%.

## Álgebra extraordinaria

Algunos anuncios de automóviles son un ejemplo de creatividad. En los últimos años han proliferado campañas que hacen hincapié en cuestiones tecnológicas, geométricas y matemáticas. El fenómeno se ha dado, sobre todo, en marcas de alta gama.

En una campaña lanzada hace unos años se mostraba el vehículo reflejado sobre un suelo tan inmaculado que se diría de cristal. El efecto producido era como si el coche anduviera sobre un espejo. Sobre la imagen se podían leer una fórmula y un lema:

$$1+1=\infty$$

*The pursuit of perfection*

¿Tiene realmente algo que ver la igualdad $1+1=\infty$ con el afán de perfección? De entrada, podrá parecer una falsedad igualar la suma de un número tan finito como es el 1 consigo mismo al infinito. Una igualdad que trae consecuencias inesperadas:

$$1+1=\infty \Rightarrow 2=\infty.$$

¿Acaso tiene esto algún sentido? Con el sentido que damos al término infinito corrientemente y con el sentido corriente que tiene la suma de números quizá no lo haya. Pero existen otros sentidos para los que dicha igualdad puede ser absolutamente correcta.

En lugar de tomar el conjunto de los números naturales en toda su extensión, tomemos el conjunto $X$, formado tan sólo por tres símbolos:

$$X=\{0, 1, \infty\}.$$

Asociaremos el símbolo 0 con la cantidad nula; el símbolo 1, con una cantidad finita cualquiera, y el símbolo $\infty$, con una cantidad no finita ni nula. Teniendo esto en cuenta, lo lógico es pensar que:

Nada + cualquier cosa = cualquier cosa.
Finito + finito = finito.
Infinito + cualquier cosa = infinito.

Así que la suma 1+1 no debería ser infinita, sino finita, y la operación suma en el conjunto $X$ debería regirse por la tabla siguiente:

| + | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $\infty$ |
| 1 | 1 | 1 | $\infty$ |
| $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |

Esta suma funciona como cabe esperar. Es una suma conmutativa (la tabla tiene simetría diagonal); posee un elemento neutro (el cero) que, sumado a otro, da como resultado siempre el otro número, y además es asociativa (el orden en que se suman tres números no afecta al resultado). ¿Funcionará igual cambiando $1+1=1$ por $1+1=\infty$, como reza el anuncio? Es decir:

| + | 0 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | ∞ |
| 1 | 1 | ∞ | ∞ |
| ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |

Así las cosas, la tabla conserva la simetría diagonal. También el cero continúa siendo el elemento neutro. La propiedad asociativa también funciona.

Pero hay algo en lo que no funciona ninguna de las dos, y es que no hay opuestos ni para el 1 ni para el ∞. En ninguno de los dos casos existe un número que sumado al 1 dé 0, ni existe otro que sumado a ∞ también dé 0. Arreglar esto significa que en cada fila o columna de la tabla tiene que aparecer el 0 por lo menos una vez. Evidentemente, llenando las tablas de ceros el problema quedaría resuelto, pero no es ésta la solución «con sentido» que buscamos.

Los resultados de la primera fila y de la primera columna son irrenunciables, pues sumar cero a cualquier cosa tiene que dar cualquier cosa. Si definimos $1+1=\infty$, la tabla queda así:

| + | 0 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | ∞ |
| 1 | 1 | ∞ | |
| ∞ | ∞ | | |

Para que existan opuestos, el 0 tiene que aparecer en cada fila y columna. Si deseamos conmutatividad debemos conservar la simetría diagonal. Las opciones son pocas:

| + | 0 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | ∞ |
| 1 | 1 | ∞ | *a* |
| ∞ | ∞ | a | 0 |

| + | 0 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | ∞ |
| 1 | 1 | ∞ | 0 |
| ∞ | ∞ | 0 | *b* |

| + | 0 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | ∞ |
| 1 | 1 | ∞ | 0 |
| ∞ | ∞ | 0 | 0 |

No hay valor de $a$ para el cual la suma definida en la primera tabla sea asociativa:

$$1+(\infty+\infty)=1+0=1.$$
$$(1+\infty)+\infty=a+\infty=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow 1+(1+\infty)=1+1=\infty.$$
$$(1+\infty)+\infty=1+\infty=1 \Rightarrow \text{contradicción.}$$

La tercera tampoco funciona:

$$1+(1+\infty)=1+0=1.$$
$$(1+1)+\infty=\infty+\infty=0.$$

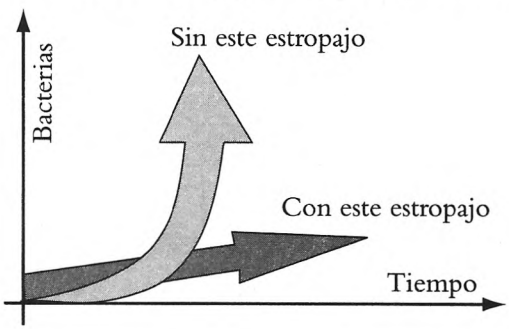
Solamente tomando $b=1$ resolvemos el problema en el segundo caso. Algo sorprendente, dado que $1+\infty=0$ y $\infty+\infty=1$ chocan con nuestras concepciones previas:

| + | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $\infty$ |
| 1 | 1 | $\infty$ | 0 |
| $\infty$ | $\infty$ | 0 | 1 |

Hemos creado una estructura algebraica constituida por un conjunto $X=\{0, 1, \infty\}$ y una operación + cuyos resultados no se salen de $X$ y tienen la coherencia esperada. Otra cosa distinta es que dicha coherencia sea la que presuponemos a los símbolos con los que denotamos los elementos de $X$.

## Funciones lineales y exponenciales

Una marca de estropajos incluyó durante años en sus envoltorios una leyenda acompañada de un gráfico; la leyenda decía: «...Evita que las bacterias se multipliquen en el salvauñas...». El gráfico asociado mostraba dos flechas crecientes en un sistema de coordenadas en el que se relacionaba el tiempo con el número de bacterias. Una correspondía a los efectos de usar el estropajo; la otra, al hecho de no usarlo.



A diferencia de otros casos, merece atención la correcta aplicación del concepto y el correspondiente trazado de las gráficas. La población de bacterias en el estropajo crece a medida que transcurre el tiempo. El publicista no dice que no vayan a cesar, sino que usando su producto no van a hacerlo multiplicándose.

Supongamos que por cada unidad de tiempo se crean $b > 1$ bacterias. Si éstas se multiplican, al cabo de $t$ unidades de tiempo el número de bacterias será:

$$B(t) = b \cdot b \cdot b \ldots^{(t \text{ veces})} \ldots \cdot b = b^t.$$

Ésta es una función exponencial de base $b$ cuya gráfica es una curva creciente cuya inclinación aumenta a cada instante para acabar haciéndose vertical en el infinito:

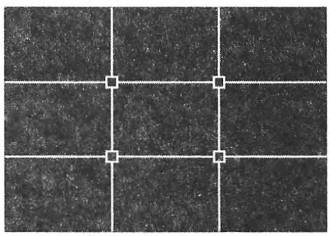
Si las bacterias, en lugar de multiplicarse, se suman, la fórmula que indica su población al cabo de $t$ unidades de tiempo es:

$$B(t) = b + b + \ldots^{(t \text{ veces})} \ldots + b = b \cdot t.$$

Se trata de una función lineal creciente, cuya pendiente constante es precisamente $b$, y que tiene por gráfica una recta. Salvo por el hecho de que las funciones exponenciales no acostumbran a comenzar en el origen de coordenadas, ambas vienen a ser las representadas por el publicista. Todo un acierto, pues la exponencial corresponde al caso en el que las bacterias se multiplican.

## La regla de los tercios

En el mundo de la imagen, tan importante en publicidad, existe una regla por la que se priman los tercios por encima de las mitades. A la hora de crear una imagen o realizar una fotografía conviene evitar que los puntos de interés estén justo en medio de la imagen. Por ejemplo, es mejor situar el horizonte por encima o por debajo de la mediatriz horizontal del rectángulo de la fotografía.



De igual forma, si va a haber dos puntos de interés, mejor colocarlos en las intersecciones de los tercios verticales y horizontales (derecha). En este caso, la proporcionalidad geométrica se usa para crear un patrón estético validado por la práctica.

### Matemáticas para la perfección

Hace algún tiempo, una marca de vino lanzó una campaña cuyo mensaje venía a decir que la excelencia de su producto era el resultado combinado de las matemáticas, la naturaleza y el saber artesano. La imagen del anuncio mostraba una larguísima serie de fórmulas matemáticas, la mayoría sin demasiado sentido real, en las que muchas de las cifras y letras se habían sustituido por imágenes del mundo natural y artesano relacionado con la producción vinícola.

El punto final lo marcaba un signo de igualdad que daba lugar al caldo embotellado. Junto a la botella había una leyenda: «¿Qué lo hizo perfecto?».

Más allá de lo apropiado o no de las fórmulas utilizadas, lo creativo del anuncio residía en basar en el aspecto matemático la extensión, minuciosidad y rigor del proceso de producción. Esos tres aspectos caracterizan la mayor parte de la actividad matemática; con ellos, las matemáticas contribuían a la perfección del producto elaborado.

## Diseño con matemáticas

### Tiempo binario

El sistema de numeración binario utiliza solamente dos cifras, el 0 y el 1, para representar cualquier cantidad. Como en el sistema decimal, la posición de cada cifra de un número escrito en el sistema binario corresponde a una potencia de la base 2:

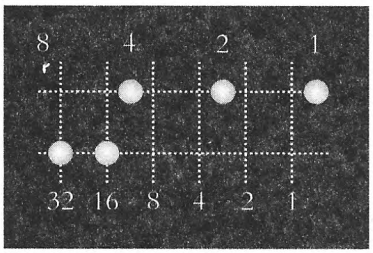
$$372_{10} = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$
$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

He aquí los trece primeros números naturales escritos en cada sistema:

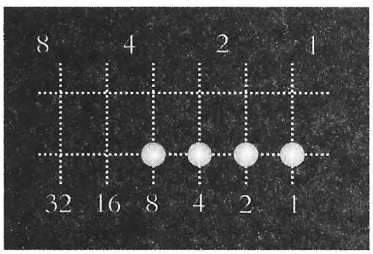
| Sistema decimal | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sistema binario | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 |

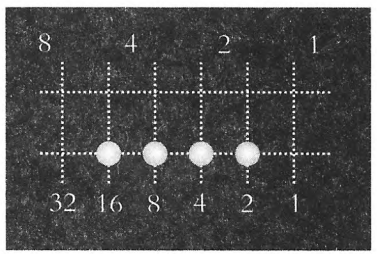
El mundo del diseño nos sorprende a veces con joyas extraordinarias. Estamos acostumbrados a medir el tiempo en horas de 60 minutos y minutos de 60 segundos. Un reloj que mida el tiempo mediante el sistema de numeración binario podrá ser considerado una extravagancia, pero es ya una realidad. Su esfera es un rectán-

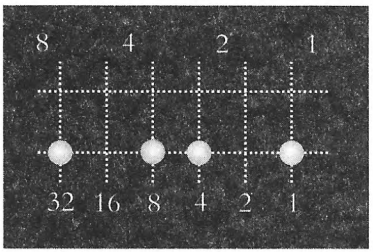
gulo determinado por cuatro líneas. La superior se dedica a las horas; la inferior, a los minutos. Entre ambas hay dos líneas más en las que se señalan los valores correspondientes a cada potencia (véase la figura siguiente). Puesto que el número de horas es un valor comprendido entre 0 y 12, bastan cuatro dígitos para señalarlas todas (véase la tabla anterior). En cambio, para los minutos son necesarios seis dígitos para marcar todos los valores comprendidos entre 0 y 60.




La dificultad estriba en que la lectura de la hora es indirecta. Hay que sumar los valores marcados en cada línea para obtenerla. En la figura anterior son las 7 horas y 49 minutos. El cuarto de hora, la media y los tres cuartos se marcan así:



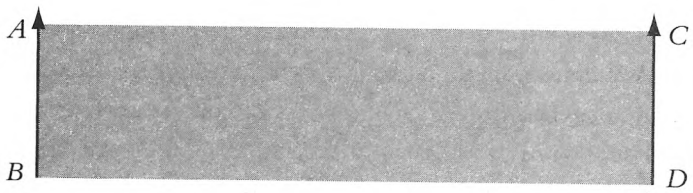



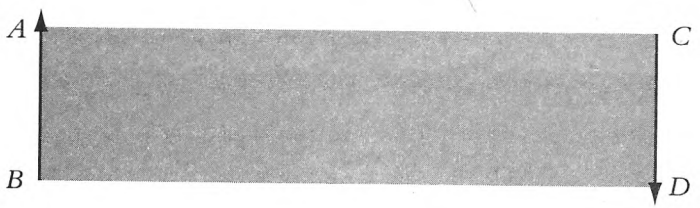

Este reloj no resulta práctico al principio, pero con el tiempo quizás uno se acostumbre a leer la hora con rapidez. Un caso extraordinario de cómo las matemáticas determinan la esencia de su diseño.

## La banda de Möbius

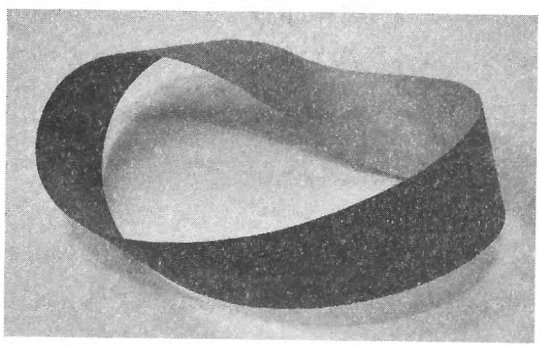
Uniendo los lados opuestos de una cinta rectangular $ABCD$ se construye un anillo conectando los lados $AB$ y $CD$ uniendo las parejas de vértices $AC$ y $BD$. La flecha de la figura siguiente indica el modo y el sentido en que se realiza esa conexión:




La banda de Möbius se construye de la misma forma, salvo un detalle que proporciona un resultado muy distinto de lo que su construcción hace entrever. La cinta se forma uniendo también los lados $AB$ y $CD$, pero en sentido opuesto, es decir, conectando el vértice $A$ con $D$ y $B$ con $C$:




El resultado es un anillo con una sola cara y con un solo borde:



Se trata de una figura geométrica especial usada en el diseño de joyas. La publicidad de esos anillos se acompaña de textos que destacan:

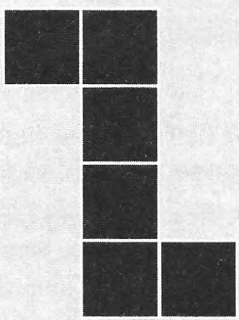
- La particularidad topológica del objeto: «Este maravilloso anillo de plata posee una forma única con una sola cara y un solo borde. Su forma simboliza el equilibrio entre nuestros yos interior y exterior».
- Las consecuencias que pueden derivarse de ella: «¿Cómo es que una pequeña cinta de oro le hace sentir como si tuviese el mundo enrollado alrededor de su dedo? Es perfecto...».

Las sortijas corrientes son cilíndricas y tienen dos caras, una exterior y otra interior. El dedo que envuelven sólo está en contacto con la interior. Si la cara interior envuelve el dedo, la exterior envuelve todo aquello que no es el dedo, es decir, el mundo entero. Una sortija de Möbius tiene una única cara. Por tanto, la que envuelve el dedo es la misma que la que envuelve todo lo que no es el dedo, esto es, el mundo entero. Lo mismo puede afirmarse con respecto a la misma cara con respecto al mundo exterior. Luego la sortija de Möbius lo envuelve todo y envuelve al mundo con uno mismo. No distingue entre dentro ni fuera, todo es uno. De ahí la afirmación de tener el mundo enrollado alrededor de un dedo.

Además de utilizar un objeto matemático para diseñar una joya, vemos cómo fuera del ámbito matemático se crean interpretaciones coherentes y acertadas con las características matemáticas del objeto que contribuyen a su comprensión.

## HEXOMINOS Y DISEÑO

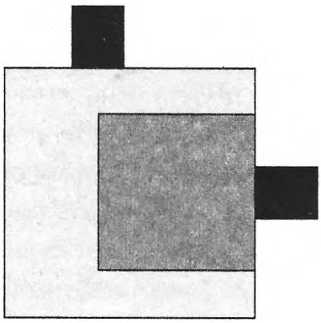
He aquí el desarrollo de la cajita de cartón que envolvía el gorro de baño de la habitación de un hotel. Se llama hexomino porque consta de seis piezas o módulos iguales.



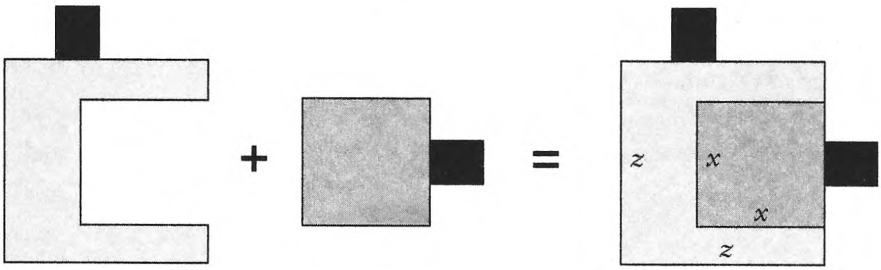
El poliedro tridimensional que se obtiene al plegar este hexomino es el cubo o hexaedro. Hay once hexominos distintos con los que se obtiene el cubo.

## Espíritu geométrico

El puzzle geométrico ha sido utilizado en el diseño de frascos de baño y aseo, tanto para hombre como para mujer. En ocasiones, también se ha resaltado la expresión algebraica de la composición del puzzle en cuestión. Así ocurrió con los envases de colonia y desodorante para hombre de una conocida marca japonesa. La forma escogida fue el cuadrado, que se descompuso en dos recipientes. Uno era también cuadrado; el otro, simétrico:



La capacidad del frasco mayor era de 75 ml; la del menor, de 50 ml. La publicidad hacía hincapié en la suma de capacidades y en el encaje de los frascos:




¿Pueden hallarse las dimensiones reales de los frascos? El frasco menor era de 50 ml, y el mayor, de 75 ml. En total, 125 ml. El encaje mostraba que el grosor era idéntico en ambos; por lo tanto, sus volúmenes, proporcionales a las áreas. Teniendo en cuenta que 1 ml de agua equivale a 1 $cm^3$, no es descabellado pensar que el lado $x$ del frasco pequeño y el $z$ del mayor fuesen:

$$50 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 7{,}1 \text{ cm.}$$
$$125 = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{125} \approx 11{,}2 \text{ cm.}$$

## ¿Por qué los puzles de 2.000 piezas no tienen 2.000 piezas?

No siempre se es libre de crear cosas con la forma o número de elementos que uno desearía. Pocos se habrán detenido a contar las piezas de los puzles con los que nos hemos entretenido en muchas ocasiones. Habrá quien piense que esa tarea es absurda, dado que el número de piezas figura siempre en la caja: 500, 1.000, 2.000, 3.000, 5.000, 8.000. Sin embargo, los fabricantes mienten. O, por lo menos, no dicen toda la verdad.

Lo cierto es que los puzzles de 500 piezas sí tienen 500 piezas, pero los de 2.000 no tienen 2.000. Y no hace falta contarlas para averiguarlo. Algunos fabricantes incluyen en sus prospectos técnicos ese detalle, pero no el motivo. Todos los puzles son rectangulares. Sus piezas, aunque distintas, se cortan sobre una base rectangular en la que se han practicado prominencias y hendiduras. Para elaborar un puzle de 2.000 piezas hacen falta dos números enteros, uno para cada lado del rectángulo, que multiplicados den 2.000. Puesto que $2.000 = 2^4 \cdot 5^3$, las opciones son:

$$1 \cdot 2.000 = 2 \cdot 1.000 = 4 \cdot 500 = 8 \cdot 250 = 10 \cdot 200 = 16 \cdot 125 = 20 \cdot 100 = 25 \cdot 80 = 40 \cdot 50.$$

Las proporciones entre la longitud y la anchura de esas distribuciones debe ser tal que dé lugar a una distribución rectangular equilibrada. Una vez montado, el puzle no debe tener el aspecto de una cinta, sino que ha de ser similar a una hoja de formato DIN. Esto significa que la proporción entre longitud y anchura es, aproximadamente, de 1,4. Pero los rectángulos derivados de los divisores de 2.000 son demasiado cuadrados o demasiado largos:

$$\frac{50}{40} = 1,25;$$
$$\frac{80}{25} = 3,2.$$

En lugar de 2.000 piezas, los puzzles suelen tener 1.998. Intuimos cuál es el motivo descomponiendo 1.998 en factores primos y viendo qué producto de dos de sus divisores proporciona un rectángulo más acorde con el formato deseado:

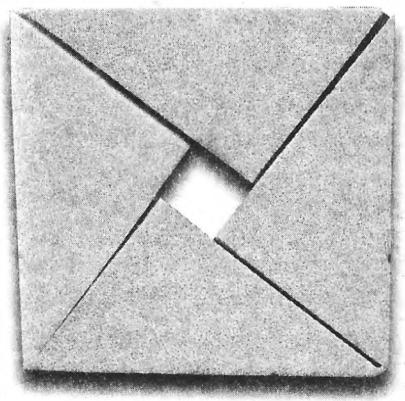
$$1.998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 \Rightarrow \frac{2 \cdot 3^3}{37} = \frac{54}{37} \approx 1,46.$$

He aquí un caso extraordinario en que la descomposición de un número natural en factores primos contribuye o impide, pero justifica, determinados diseños.

## Desmaquillarse con Pitágoras

Limpiar la cara de maquillaje es una tarea que suele realizarse mediante pequeñas toallitas diseñadas para tal fin. Cada fabricante da una forma particular a sus toallitas, pero algunos usan diseños muy matemáticos y que van más allá de las formas cuadradas, rectangulares o circulares.

La figura siguiente reproduce el diseño de unas esponjitas desmaquilladoras. La visión es cenital, pero debe entenderse que las esponjas son tridimensionales, siendo su altura de unos dos centímetros. Se trata de cuatro piezas que se encajan como un puzle:



Precisamente éste es el puzle que da lugar a una de las demostraciones más asequibles del teorema de Pitágoras. Siendo $a$ el lado del cuadrado (la hipotenusa de cada toallita) y siendo $b$ y $c$ los lados perpendiculares de cada toallita (sus dos catetos), tenemos que el área del cuadrado se descompone en:

$$a^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + (b-c)^2.$$
$$a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2.$$
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

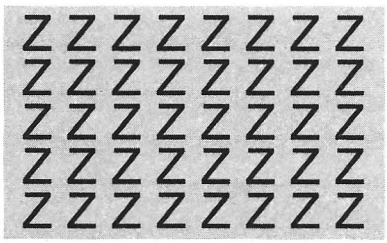
## Temas con variaciones

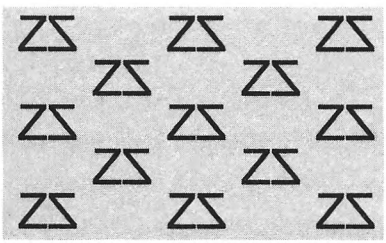
Los compositores musicales saben que la repetición de un motivo crea unidad, pero el modo en el que se desarrolla puede generar monotonía y aburrimiento. La gracia de una buena composición, musical o de cualquier otro tipo, puede basarse más en la creatividad mostrada en la repetición que en el motivo mismo.

También los diseñadores son fieles a esa idea cuando el logotipo de una marca se repite indefinidamente para decorar sus productos y envases. El recurso más utilizado es el de la simetría. La simetría no altera la forma, sólo la cambia de lugar y de posición, pues tres son las transformaciones en el plano que conservan la forma y el tamaño: la traslación, el giro y la reflexión.

La traslación cambia de lugar. El giro rota una figura con relación a un punto, el centro de giro. La reflexión es una simetría axial, es decir, reflejada en un espejo. Con esas tres transformaciones, un mismo motivo puede repetirse, creando hasta diecisiete patrones estructuralmente distintos desde el punto de vista matemático. Para el diseño creativo no se necesitan tantos.

Con la marca *Z*, por ejemplo, podemos diseñar patrones de repetición como los que se muestran seguidamente. Se observa que en la repetición la letra pierde su significado verbal para adoptar el carácter figurativo impuesto por el patrón.





La ventaja de este sistema reside en la fácil identificación de la marca y en su capacidad de reproducción sistemática. No existe prácticamente ninguna marca que no utilice patrones ornamentales en sus productos, sobre todo en los complementos.

Epílogo

# Manual del creador matemático

¿Es posible que alguien piense que *La consagración de la primavera* de Stravinski o el *Guernica* de Picasso fueron descubrimientos? ¿Qué hace que las creaciones matemáticas sean tomadas, en su mayoría, por descubrimientos y no por creaciones? ¿Acaso no se atribuye a Pitágoras la creación de la escala diatónica? ¿Por qué entonces se le ve como su creador y no se le considera como tal de la demostración del teorema que lleva su nombre? Ni la escala diatónica ni la demostración del teorema se ocultaban entre el follaje o en el interior de una cueva a la espera de un descubridor, sino que ambas fueron creaciones de un mismo hombre. Y si el lector lo pone en duda, que pruebe a descubrir por sí mismo la demostración del célebre teorema que se ofrece en los *Elementos* de Euclides.

El británico Andrew Wiles describe muy bien lo que siente el matemático desde que se enfrenta a un problema que no puede resolver hasta que da con su solución:

> «Quizá la mejor manera de describir mi experiencia de hacer matemáticas sea imaginar que entras en una mansión oscura. Entras en la primera habitación y está oscuro, completamente oscuro. Tropiezas y chocas con los muebles, pero al mismo tiempo vas aprendiendo dónde está cada cosa. Al final, tal vez al cabo de meses, encuentras por fin el interruptor de la luz, lo pulsas y, de repente, ¡todo está iluminado y puedes ver exactamente dónde estás!».

No todo el mundo tiene la capacidad intelectual de Wiles, que fue capaz de demostrar un teorema, el de Fermat, que se había resistido a toda la matemática durante más de tres siglos, pero tal vez sí que existen, entre los grandes matemáticos, unas pautas comunes en su manera de resolver problemas y de demostrar teoremas.

La primera lección consiste en atreverse a entrar en la mansión oscura. Muchas personas menosprecian sus capacidades antes de enfrentarse a un problema. Hay que atreverse y estar dispuesto a golpearse con los muebles. En contra de lo que parece, y esto es algo que, tradicionalmente, los matemáticos y educadores han ocultado de manera consciente, el error es una ayuda. Golpeándote contra el mobiliario aprendes dónde están las cosas. Y aunque no puedas ver la estancia iluminada, acabas

haciéndote una idea de cómo es y de su distribución. Es entonces cuando estás preparado porque sabes a lo que te enfrentas. Has llegado al punto en el que puedes formular claramente el problema. Todavía te mueves a oscuras, pero tus pensamientos se han iluminado.

## Recapitulación

¿Cuáles son las características de la creatividad matemática? Crear matemáticas es, sobre todo, tener buenas ideas para trazar caminos hacia nuevas fórmulas, teoremas y procedimientos con los que, poco a poco, vamos comprendiendo los fenómenos que vivimos y que nos preocupan.

El ¡eureka! de Arquímedes, esa inspiración súbita relatada por Poincaré que muchos llaman «idea feliz», a menudo forma parte de la creación. Pero raramente es fruto del azar o de la suerte, sino que aparece tras un periodo de intenso trabajo continuado (periodo de incubación) que la psicología ubica en una fase del proceso creativo conocido como «de iluminación». La heurística, el arte de la invención y el descubrimiento postulado por George Pólya e Imre Lakatos, proporciona una guía orientativa a la hora de ser creativos en matemáticas. En sí misma, la lógica no es creativa, pero sí indispensable, sobre todo en la fase, tan necesaria, de la verificación de las hipótesis.

Crisis y cambio van de la mano en las grandes creaciones matemáticas. Las crisis se superan con cambios. El desarrollo de nuevo conocimiento supone un cambio más difícil de asumir de lo que se cree, pues es habitual que los nuevos conceptos creados sean, en cierto sentido, «monstruos» que impliquen una revisión profunda del conocimiento previo. Así ocurrió con las potencias de exponente negativo, la raíz cuadrada de 2 y las raíces cuadradas de números negativos. La geometría euclidea también perdió su carácter exclusivo con la creación de otras geometrías. La última de ellas es la geometría fractal, desarrollada en una época tan reciente como la segunda mitad del siglo pasado merced a los avances tecnológicos. Hasta ahora el equipaje del matemático había sido muy ligero: con papel y lápiz era suficiente; hoy en día, el ordenador se ha hecho indispensable en muchos campos de las matemáticas.

Un modo de aproximar al neófito a la creación matemática consiste en emplear las herramientas propias de la disciplina para explorar distintos fenómenos cotidia-

nos, tanto en el ámbito más personal como en el artístico, el literario o el laboral. Mirarse en el espejo o contemplar el horizonte conducen a la creación de fórmulas y relaciones con las que comprenderemos mejor esas situaciones. Ninguna de esas fórmulas fue descubierta, no se hallaban tras el cristal ni se desenterraron de la arena de la playa. Fueron producto de nuestra imaginación para modelizar la realidad en objetos geométricos. Sin nosotros no habría ni fórmulas ni horizonte. Entre los casos estudiados se encuentran situaciones extraídas de la práctica artística y de la laboral. En el primer caso, artesanos y artistas se han visto a menudo obligados a trabajar con el suficiente rigor geométrico como para que sus obras tuviesen el aspecto deseado. De ahí que los nudos imbricados, tan comunes en decoraciones culturales, se realicen sobre cuadrículas. El enigma de los nudos cíclicos o infinitos propios del folclore celta reside en una cuestión de divisibilidad; ahora bien, el teorema no creó el nudo, el nudo creó el teorema.

El mundo laboral, por su parte, abunda en la aplicación de las matemáticas a la resolución de una gran cantidad de cuestiones. De nuevo hallamos casos en los que la solución teórica de un problema práctico puede no ser la mejor solución práctica del problema. Del estudio de diversos problemas hemos visto que no hay un único modo de concebir un triángulo equilátero, que la suma del redondeo no es el redondeo de la suma y que, salvo en casos extraordinarios, el tercio de lo que vemos no es el tercio de lo que miramos. También fuera de las matemáticas pueden hallarse focos de creación e inspiración matemática. El escritor argentino Jorge Luis Borges creó dos artefactos de ficción que constituyen, a la vez, dos singulares objetos matemáticos, imposibles pero fascinantes: un libro de infinitas páginas y un disco de un sola cara. Sobre una frase del italiano Italo Calvino planteamos un problema geométrico y un nuevo teorema.

Al abordar el teorema de Varignon se hace patente que una demostración lógica no logra explicar el fenómeno, y que hace falta recurrir al contexto para comprenderlo. Este singular ejemplo de la importancia del «medio ambiente» de un problema cualquiera nos sirve de estupenda metáfora para abordar otra de las tesis fundamentales del libro: no sólo los profesionales de las matemáticas, no sólo en las universidades, no sólo en los centros de investigación, no sólo en nuestra cultura occidental, en definitiva, se crean matemáticas. La crónica de cómo los artesanos indonesios de etnia toraja aprendieron a diseñar polígonos regulares mediante métodos no euclideos pone de manifiesto la relevancia de los aspectos sociales y culturales en la creación matemática. Vivir cosas poco corrientes abre la

mente y nos hace creativos porque con lo que ya conocemos tenemos que dilucidar cosas nuevas. Entre ellas está la de interpretar un listón de bambú como un software.

La publicidad y el diseño se han convertido en bancos de pruebas del ingenio. Cuando las estrategias se han agotado y cuando parece que se ha dado a las cosas todas las formas posibles, surgen ideas nuevas que beben de fuentes antiguas, pero menos corrientes. Lo matemático vende. No es tonto quien capta o comprende el mensaje de un anuncio o aprecia la belleza y perfección geométrica de un diseño. Objetos y conceptos matemáticos han pasado a formar parte de nuestra vida cotidiana merced a su uso en las campañas publicitarias y en el diseño de objetos que están al alcance de todo el mundo. La proporcionalidad numérica y figurativa, las bandas de Möbius, el teorema de Pitágoras, la simetría, el infinito, las funciones y sus gráficas, la probabilidad,... ¿Qué elementos matemáticos quedan todavía por usarse en diseño y publicidad?

A lo largo de la historia se distinguen dos tipos fundamentales de creación que, como suele ocurrir siempre, se retroalimentan: creaciones de expansión y de asimilación. La expansión significa ampliar el terreno conocido, mover el horizonte; con el término asimilación nos referimos a creaciones que han supuesto un cambio de concepción de los fundamentos de las matemáticas. Creaciones de este tipo son las que han acompañado a las grandes crisis.

## Pautas para la creación matemática

Crear consiste en hacer existir lo que antes no era, ya sea un objeto, un procedimiento, un concepto. Crear matemáticas consiste fundamentalmente en resolver problemas, por lo que el primer paso para crear es plantearse una pregunta a la que las matemáticas puedan responder. Como inspiración sirve cualquier cosa, ya se trate de un teorema, otro problema matemático o una actividad cotidiana. Una vez inmersos en la cuestión, es necesario mirar bien para ver patrones comunes subyacentes en similitudes o diferencias. En este proceso la interacción social y cultural puede ser muy relevante. Compartir con otros nuestras ideas e intentos fallidos puede ayudarnos a iluminar el cuarto oscuro en el que nos hallamos al principio. La tecnología también puede servir de gran ayuda e inspiración, pues hace visible casi todo lo imaginable.

Finalmente, no nos cansaremos de insistir en que el objetivo de la creación matemática consiste fundamentalmente en ofrecer explicaciones para comprender un fenómeno. La lógica valida, pero no siempre explica. El teorema de Fermat fue al fin demostrado, pero la comprensión del fenómeno que plantea recurre a tantos y tan variados argumentos y analogías que no acaba de explicar su esencia. Por eso seguimos echando de menos la supuesta demostración maravillosa de Fermat. Y lo hacemos porque continuamos pensando que puede haber un camino, no sólo más corto, sino más claro. Ansiamos comprender, y sólo anhelamos la demostración tras haber comprendido el fenómeno.

A lo largo de todo este libro se ha defendido que todo el mundo puede crear matemáticas, que las matemáticas, en definitiva, son una actividad mucho más democrática de lo que la historia —cierta historia— y la tradición educativa nos han hecho creer. ¿Cuál es entonces la clave, el método, que nos puede convertir en creadores, en creadores de matemáticas? De todo lo expuesto podemos sacar algunas conclusiones fundamentales:

1. Plantearse cuestiones matemáticas al vivir una experiencia.
2. Llevar a cabo un enfoque matemático de la cuestión.
3. Plantear la cuestión en términos matemáticos, es decir, cuantificables.
4. Usar sin reparo recursos como la experimentación, la intuición, la analogía, la lógica, así como las herramientas tecnológicas y las socioculturales: trabajos previos, ayuda de expertos.

Es decir, vivir matemáticamente, al menos un poco cada día.

¡Feliz creación!

Anexo

# Paralelas que se cortan en el plano

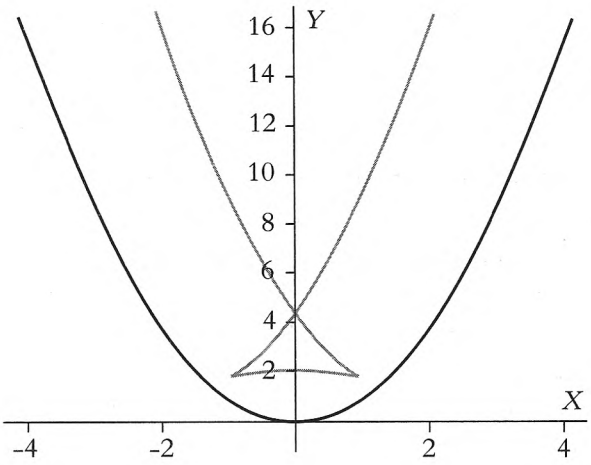
Éste es un ejemplo de cómo el uso de la tecnología puede trastocar arraigadas concepciones previas. Se reproduce en un anexo por conllevar una notación simbólica de cierta complejidad. La idea de paralelismo está asociada indefectible e inconscientemente al concepto de segmentos o rectas paralelas. Tendemos a pensar que lo paralelo es automáticamente rectilíneo.

Hace tiempo viví una experiencia que me condujo a buscar cuál sería, para una curva dada $C(t) = (t, f(t))$, la expresión de su curva paralela a distancia $d$. La experiencia vital que me indujo a plantearme la cuestión fue que el autobús en el que viajaba tuvo que detenerse por culpa de un tronco atravesado en la calzada y de lado a lado de la carretera. Su radio era tan grande que hacía imposible que el autobús pasase por encima. Al imaginarme la situación vista desde lo alto vislumbré dos líneas paralelas (las cunetas de la carretera) con un segmento perpendicular a ambas (el tronco atravesado). Fue entonces cuando me pregunté cómo serían las expresiones de dos curvas paralelas en el plano. El resultado fueron las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = t - \frac{d \cdot f'(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}}.$$

$$y(t) = f(t) + \frac{d}{\sqrt{1+f'(t)^2}}.$$

Llegado a este punto quise comprobar experimentalmente si esas fórmulas funcionaban como era de suponer. Para ello utilicé un programa informático con el que quería ver la curva original acompañada de varias paralelas a diferentes distancias. Comencé con la más sencilla de las curvas, la función de segundo grado $y=x^2$, es decir, la curva $C(t)=(t, t^2)$. El resultado fue acorde con lo esperado para distancias como $d=1$, $d=2{,}5$, $d=0$, $d=-0{,}5$. Pero al aumentar los valores negativos de la distancia $d$ topé con lo siguiente:




¿Qué sucedía? Debía de haber cometido algún error, pues el paralelismo contradice la intersección. ¡Las paralelas no se cortan! Revisé los cálculos y vi que las fórmulas eran correctas. También lo eran las instrucciones que había escrito para que el programa efectuase bien la representación gráfica. Sorpresa: en la pantalla de mi ordenador había paralelas que se cruzaban.

La definición nº 23 del «Libro I» de los *Elementos* dice: «Son rectas paralelas las que, estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos». Tan contextualizada está en el plano la idea de paralelismo que tomamos como paradigma del paralelismo esa imposibilidad de intersección. Mis curvas se habían trazado en el plano, pero no las había planteado según dicho referente, sino con relación a la equidistancia. Para las rectas en el plano, ambas cosas son equivalentes, pero no para las curvas. Las curvas paralelas pueden cruzarse.

Aunque, bien pensado, ¿excluían las definiciones y postulados euclidianos la posibilidad de considerar como rectas los arcos circulares? Si no fuese así, dos arcos circulares de distinto radio y con el mismo centro podrían prolongarse en ambos sentidos sin cortarse jamás y tendríamos un par de curvas paralelas. Y ¿qué es una línea recta para Euclides? Una recta es «aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella» (Euclides). ¿No yace por igual respecto de sus puntos un arco circular? Sin duda, la definición de recta euclidiana no fue elaborada pensando en arcos circulares, pero en su abstracción cabe la circunferencia. Otra cosa sería tomar como referente la definición de Arquímedes (aunque ésta da lugar a

otras rectas): «La recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos».

En cualquier caso, nada impedía que las curvas paralelas se cortasen. Mis prejuicios derivaban del paralelismo de rectas. En el caso de rectas en el plano se puede sustituir la noción de paralelismo por la de rectas sin intersección, pero no cuando se habla de curvas. Las curvas paralelas pueden cruzarse y, de hecho, lo hacen.

Luego elaboré una interpretación dinámica de este fenómeno: imaginé la distancia como un segmento rígido que al llegar al vértice de la parábola debe maniobrar como un automóvil para trazar una curva demasiado cerrada, es decir, deteniéndose y echando marcha atrás, si es necesario, sin modificar por ello el ancho de la calzada, o sea, el ancho del paralelismo.

Tiempo después elaboré una versión tridimensional del problema del paralelismo de curvas. Si en el plano existen dos paralelas a una curva dada para cada distancia predeterminada, en el espacio son infinitas, y forman una figura tubular por cuyo centro circula la curva original.

# Bibliografía


BOYER, C.B., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 1986.

COURANT, R. y ROBBINS, H., *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, revisado por Ian Stewart, Oxford University Press, 1996.

DAVIS, P. y HERSH, R., *Experiencia matemática*, Barcelona, Editorial Labor y Ministerio de Educación y Ciencia, 1989.

ERNEST, J., *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, Suny Press, 1991.

HERSH, R., *What is Mathematics, Really?*, Nueva York, Oxford University Press, 1997.

LAKATOS, I., *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Madrid, Alianza Universidad, 1994.

MATUSSEK, P., *La creatividad. Desde una perspectiva psicodinámica*, Barcelona, Editorial Herder, 1977.

POINCARÉ, H., «La creación matemática», en *Matemáticas en el mundo moderno*, Selecciones de Scientific American. Versión española del original inglés *Mathematics in the Modern World* a cargo de Miguel de Guzmán Ozamiz, Barcelona, Editorial Blume, 1974.

PÓLYA, G., *How to Solve It: A new aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1988.

# Índice analítico


Albertí, Miquel 89, 117
álgebra 68-70, 110, 129-132
analogía 16, 23, 25, 35-37, 147
arco circular 85, 86, 121, 150
área
  de los segmentos parabólico y esférico 22
  del círculo 22, 51-53
  del cuadrado 140
  del rectángulo 50-52, 54
  del triángulo 51-54
  limitada por una curva 54-59
Arquímedes 22-25, 53-54, 144, 150
arquitectura 106

Bali (Indonesia) 108-110
barrios de Dorotea, los 94-97
bidimensional 24, 79, 90-94
Borges, Jorge Luis 90-94, 145

cálculo
  de áreas 51, 62
  del área del triángulo 51
Calvino, Ítalo 90, 94, 145
caos 97-101
Cardano, Gerolamo 67
cardinal 41-42, 46, 93
ciclos 82-83
circunferencia rectilínea 121-122
*ciudades invisibles, Las* 94
cocina 15-16, 19
comunicación 13, 122-123
conjetura 16, 24, 28, 35-37
contabilidad 87
contar 41-48
Courant, Richard 16, 25, 32, 39, 40
creación matemática 13-40, 77, 94, 144-147
cuadrados de los números naturales 32, 35
cuadrilátero 97-101
cuantificación 40, 128
cuerda circular 121, 123
curva 51-59, 71-74, 149-151
  de Von Koch 71, 73
  paralela 149

Davis, Philip J. 16, 20, 28, 32, 40, 124
demostración 16, 19, 97-99, 143, 145, 147
diagonal del cuadrado inconmensurable con su lado 63
disco 90-94, 145
diseño 111-114, 125, 134-141, 146
distancia al horizonte 77-79
división 49, 110, 111, 118-119, 122
  de la circunferencia en partes iguales 122
  no euclidea de un segmento en partes iguales 118-121

ensayo y error 114
Ernest, Paul 20, 21
espejo 17, 76-77, 130, 141, 145
  de cuerpo entero 76-77
espiral 73, 74, 112, 113

etnomatemáticas 105
Euclides 13-15, 21, 27, 83, 143
eureka 22, 27, 33, 115-117, 121
experimentación 16, 19, 26, 32, 34-37, 147
explicación 37, 75, 105, 109, 122, 147

fracciones son finitas, las 45-46
fractal 71-74, 144
función
  exponencial 133
  lineal 133

Gauss, Friedrich 57, 103, 122
geometría 28, 51, 68-70, 97, 100, 144
  euclidea 21, 112, 144
  fractal 74, 144

Hersh, Reuben 16, 19-21, 28, 37, 40
horizonte 77-79, 145

idea feliz 17-18, 26, 144
infinito 45-47, 56, 80-83, 90-93, 130
interacción cultural 105-124
interpretación 20, 33, 112, 115, 137, 151
intuición 16-17, 23, 34, 37, 147

jardinería 83-85

Lakatos, Imre 19, 20, 25, 28, 31, 32, 144
Leibniz, Gottfried 59-60
*libro de arena, El* 90-92
lógica 15-19, 23, 38-40, 144-147

Mandelbrot, conjunto de 72-73
matemáticas extraacadémicas 106-124
método kira-kira 118-122
Möbius, banda de 136-137
Molucas, archipiélago (Indonesia) 107
multiplicación
  digital 108-110
  maya 45

Newton, Isaac 59-60
nudos 145
  cíclicos 80-83, 145
números reales no pueden contarse 47

observación 32-34, 57, 112-114
orden 97-101

parábola 54, 151
paralela 28-29, 86, 99, 113
paralelas que se cortan 149-151
paralelepípedo 101
paralelogramo 98-101
patrón 13, 133, 141, 146
pautas para la creación matemática 146-147
pendiente 61, 133
Pitágoras 62-63, 140, 143, 146
  teorema de 78
Pla, Josep 21
plantación en tresbolillo 83-84
Poincaré 22-26, 144
poliedro 101
  tridimensional 100,137
polígonos regulares, construcción de 120

Pólya: etapas de la resolución de problemas 27-37
Pólya, George 25, 27-28, 31, 32, 97
Pólya: etapas de la resolución de problemas 27-37
potencia de dos es par, toda 38
potencias 34, 48-50, 64, 144
de dos no son suma de naturales consecutivos 101-103
probabilidad 65, 91, 128-129, 146
proceso creativo, fases del 10, 23-27, 144
psicología de la creatividad 25-27
publicidad 125-141
punto medio 97-99
puzle 138-140

redondeo de la suma no es suma de redondeos 87-88, 145
Robbins, Herbert 16, 25, 32, 39, 40

simetría 17-18, 88, 131, 141, 146
sistema binario 134
software 21, 53, 71, 100, 146
Sulawesi (Indonesia) 110, 112
suma
de ángulos de un triángulo 28
de cien primeros números naturales 57

tangente 78, 108, 120
tecnología 21, 53, 71-75, 100, 146, 149
teorema 9-16, 35-40, 62-66, 143-147
tercio de lo que vemos no es el tercio de lo que miramos, el 85-86, 145
tetris frigorífico 88-90
toraja 110-124, 145
arquitectura 110, 111
división de la circunferencia 121-122
división de un segmento 113, 114, 116-119
grabados 110-114
tramos 82-83
trayecto más breve, el 17
trayectoria más corta entre dos puntos periféricos de dos islas circulares 107-108
tresbolillo *véase* plantación en tresbolillo
triángulo 28-31, 50-54, 62, 65, 83-85

uso tendencioso de la proporcionalidad 126-128

Varignon, teorema de 97-101, 145
verificación 25, 31, 36-37, 38, 144
viaje intercultural 106
vivencia matemática 124

Wiles, Andrew 143