El sueño del mapa perfecto

Cartografía y matemáticas

Raúl Ibáñez

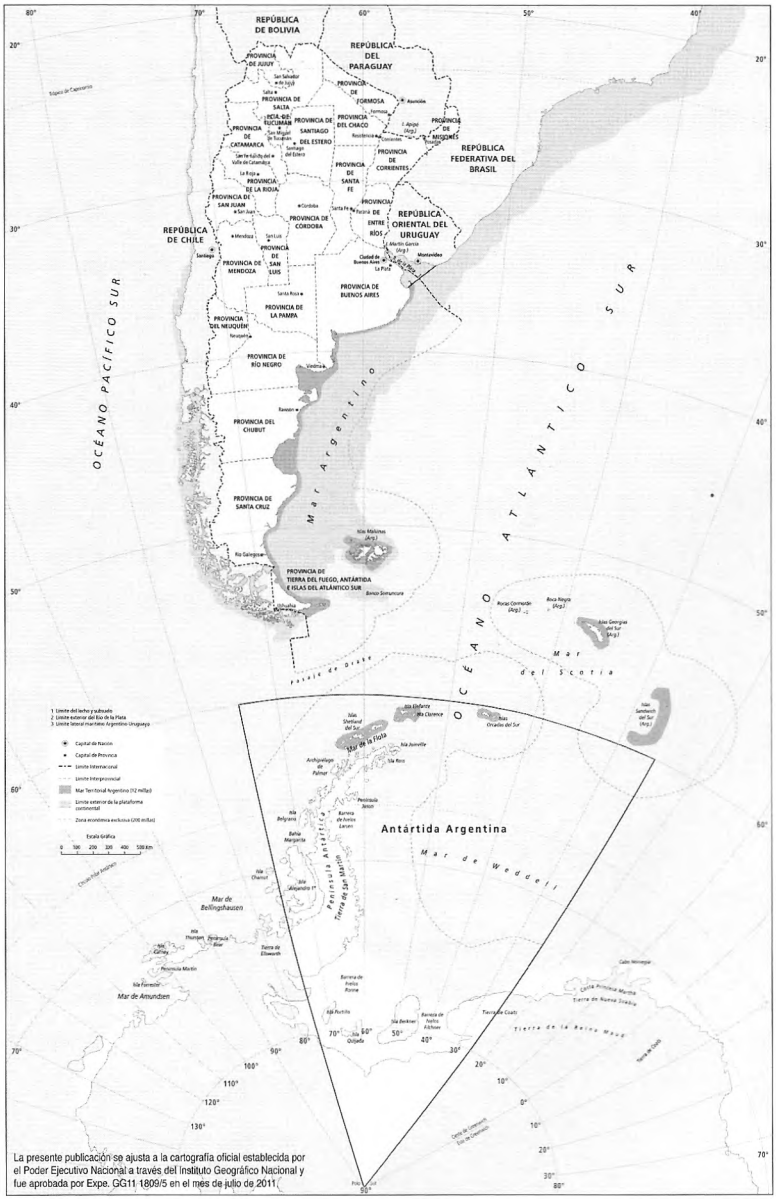
El mundo es matemático

El sueño del mapa perfecto

Cartografía y matemáticas

Muchos de nosotros recordaremos esos mapamundis escolares donde una Groenlandia gigantesca convivía con una América del Sur diminuta. ¿Por qué eran las dimensiones de los distintos continentes tan obviamente erróneas? Porque para plasmar en dos dimensiones la superficie de la Tierra no hay otra alternativa que deformar la realidad. El mapa plano perfecto pertenece a la misma clase de objetos que los unicornios o las demostraciones de la cuadratura del círculo, es decir, los inexistentes. Sin embargo, la historia de cómo se llegó a tal conclusión y los intentos por paliar este problema constituye un episodio fascinante de la historia de las matemáticas.

Fe de erratas del mapa del libro El sueño del mapa perfecto


REPÚBLICA DE BOLIVIA
REPÚBLICA DEL PARAGUAY
REPÚBLICA FEDERATIVA DEL BRASIL
REPÚBLICA DE CHILE
REPÚBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY
PROVINCIA DE JUJUY
PROVINCIA DE SALTA
PROVINCIA DE TUCUMÁN
PROVINCIA DE CATAMARCA
PROVINCIA DE SANTIAGO DEL ESTERO
PROVINCIA DEL CHACO
PROVINCIA DE FORMOSA
PROVINCIA DE MISIONES
PROVINCIA DE CORRIENTES
PROVINCIA DE SANTA FE
PROVINCIA DE ENTRE RÍOS
PROVINCIA DE LA RIOJA
PROVINCIA DE SAN JUAN
PROVINCIA DE CÓRDOBA
PROVINCIA DE MENDOZA
PROVINCIA DE SAN LUIS
PROVINCIA DE BUENOS AIRES
PROVINCIA DE LA PAMPA
PROVINCIA DEL NEUQUÉN
PROVINCIA DE RÍO NEGRO
PROVINCIA DEL CHUBUT
PROVINCIA DE SANTA CRUZ
PROVINCIA DE TIERRA DEL FUEGO, ANTÁRTIDA E ISLAS DEL ATLÁNTICO SUR
OCÉANO PACÍFICO SUR
OCÉANO ATLÁNTICO SUR
Mar Argentino
Mar del Scotia
Antártida Argentina
Mar de Weddell
Mar de Bellingshausen
Mar de Amundsen
Península Antártica
Tierra de San Martín
Tierra de la Reina Maud
Tierra de Nueva Zelanda
Islas Malvinas (Arg.)
Islas Georgias del Sur (Arg.)
Islas Sandwich del Sur (Arg.)
Islas Orcadas del Sur
Islas Shetland del Sur
Mar de la Flota
Islas Elefante
Isla Clarence
Isla Joinville
Isla Rey
Archipiélago de Palmer
Península Antártica
Barrera de hielos Larsen
Isla Belgrano
Bahía Margarita
Isla Charlot
Isla Alejandro I
Barrera de hielos Ronne
Isla Berkner
Barrera de hielos Ross
Isla Roberts
Isla Ocampo
Isla Thurston
Península Eltsin
Tierra de Ellsworth
Isla Carney
Península Martin
Isla Fletcher
Tierra de Nueva Zelanda
Tierra de la Reina Maud
Cabo Norvegia
Cerro Princesa Martha
Cerro Nansen
Cerro Adelaida
Cerro Bertrab
Cerro Balboa
Cerro Thorvaldsen
Cerro Escudero
Cerro Tres Cruces
Cerro Mercedario
Cerro Aconcagua
Cerro Tupungato
Cerro Marmolejo
Cerro Pissis
Cerro Bonete
Cerro Pomerape
Cerro Parinacota
Cerro Sajama
Cerro Illimani
Cerro Huayna Potosí
Cerro Chimborazo
Cerro Cotopaxi
Cerro Antisana
Cerro Sangay
Cerro Pichincha
Cerro Roraima
Cerro Bolívar
Cerro Duida
Cerro Neblina
Cerro Tamani
Cerro Yapacana
Cerro Aracamuni
Cerro Pico da Neblina
Cerro Pico 31 de Março
Cerro Pico da Bandeira
Cerro Pico da Tijuca
Cerro Pico do Cristal
Cerro Pico do Itacolomi
Cerro Pico das Agulhas Negras
Cerro Pico do Paraná
Cerro Pico Boa Vista
Cerro Pico Parima
Cerro Pico Tres Puntas
Cerro Pico Tres Tetas
Cerro Pico Tres Tetas
Cerro Pico Tres Tet

A la memoria de mi padre, a quien añoro profundamente.
A mi madre, una mujer fuerte y positiva.
A ambos les debo la vida y mucho más

A mi mujer Ana, y a mis hijos Aitor y Vanessa,
que son mi vida

© 2010, Raúl Ibáñez por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Créditos fotográficos: Getty Images

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6975-1
Depósito legal: NA-1670-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. La forma de la Tierra 11
Nuestro planeta ¿es plano o es redondo? 13
Evidencias directas de la esfericidad de la Tierra 16
El pensamiento medieval 19
Del modelo elipsoidal al geoide 22

Capítulo 2. Las dimensiones de la Tierra 25
Las estimaciones de Eudoxo y Arquímedes 25
La medición de Eratóstenes 26
La medida de Posidonio y el error de Colón 31
La técnica de la triangulación 32

Capítulo 3. Meridianos, paralelos y círculos máximos 35
La latitud y los paralelos 35
La longitud y los meridianos 40
El problema de la determinación de la longitud 42
Círculos máximos, las geodésicas de la esfera 46
La curvatura de los círculos máximos 49

Capítulo 4. En busca de un mapa correcto de la Tierra 51
¿Qué significa que un mapa sea correcto? 52
Un doble problema: la escala y la proyección cartográfica 54
Una proyección que preserve las distancias
también preservará los caminos más cortos 58
Que una proyección preserve las distancias
equivale a que preserve las longitudes de las curvas 60
Una proyección que preserve las distancias también preservará los ángulos 62
Una proyección que preserve las distancias también preservará las áreas 64
En busca de la proyección isométrica 65

Capítulo 5. Proyección de Arquímedes o cilíndrica isoareal de Lambert 71
Definición y propiedades cartográficas 72

Proyecciones cilíndricas y pseudocilíndricas 76
La utilización de los mapas isoareales 81

Capítulo 6. Proyección central o gnomónica 87
Definición y propiedades cartográficas 89
Proyecciones azimutales 95
La utilización de los mapas realizados con la proyección gnomónica 100

Capítulo 7. Proyección estereográfica 105
Definición y propiedades cartográficas 107
La utilización de los mapas realizados con la proyección estereográfica 112
Proyecciones cónicas 123
Proyección cónica conforme de Lambert 127

Capítulo 8. Lo que Euler le dijo al cartógrafo 129
Proyecciones isoareales conformes 130
¿Existen mapas correctos de la Tierra? 131
La curvatura de Gauss, regreso al problema cartográfico 135
El globo terráqueo 140
Proyecciones equidistantes 144
Proyección cilíndrica equidistante 144
Proyección azimutal equidistante 145
Proyección cónica equidistante 148

Capítulo 9. La proyección de Mercator 149
Definición y propiedades cartográficas 149
La proyección de Mercator transversal 160
La proyección de Mercator oblicua 162
Peters contra Mercator 164

Epílogo 171

Bibliografía 173

Índice analítico 174

Prefacio

El principal objetivo de este libro es hablar de la geometría de los mapas. Aunque primero deberíamos preguntarnos qué es un mapa. Según podemos leer en cualquier diccionario, un mapa es la «representación de una parte o de la totalidad de la superficie terrestre o de otros planetas, cielo estrellado, cuerpos, etc., sobre una superficie plana».

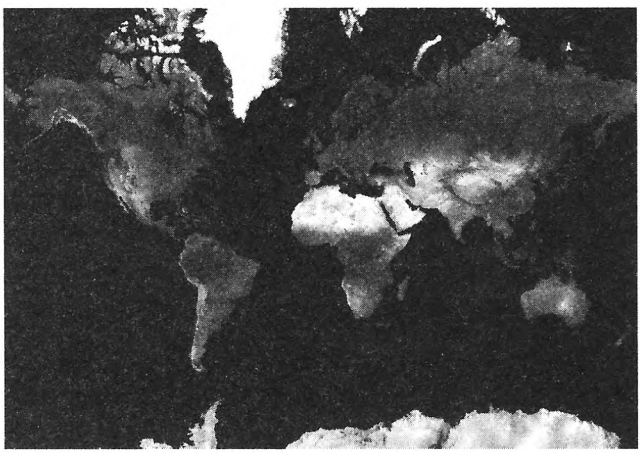
Sin embargo, el lector estará de acuerdo conmigo si digo que no necesitamos acudir al diccionario para saber qué es un mapa. Los mapas son objetos familiares para todos nosotros, pertenecen a nuestra vida cotidiana, nos los encontramos todos los días, desde que nos levantamos por la mañana hasta que nos acostamos, tanto en nuestro entorno laboral como en el privado, ya sea de forma activa o pasiva. Todos recordamos, con cierta nostalgia, los mapas que decoraban las paredes de las escuelas donde estudiábamos de niños. A diario utilizamos los billetes de nuestra moneda, el euro, y en ellos podemos ver un mapa de Europa que simboliza la unidad de los estados que forman la Unión Europea. Cuando leemos el periódico o vemos un noticiario en la televisión descubrimos infinidad de mapas. Nos podemos encontrar, por ejemplo, con un mapamundi con información sobre razas, religiones, idiomas o poblaciones, un mapa donde se representan los diferentes niveles de contaminación, producción de algún producto o tasa de accidentes de Euskadi, España, Europa o cualquier otro territorio, un mapa mostrando la situación económica de los diferentes países de la Unión Europea o un mapa de algunas de las zonas del mundo donde hay conflictos armados. Por supuesto, nunca puede faltar el mapa más consultado por nosotros, el mapa del tiempo. Si vemos algún programa documental, ya sea de naturaleza, historia, geografía, economía u otro tema, o si leemos un libro o revista especializados, o de divulgación, en alguno de los anteriores tópicos, nos encontraremos mapas explicativos que nos ayudan a comprender la información, a ubicar los diferentes datos en su lugar.

También nos encontramos mapas en las películas o en los libros de ciencia ficción, mapas imaginarios como en *El señor de los Anillos* o *La isla del tesoro,* mapas reales como en las películas de aventuras y de guerra, *Dersu Uzala*, *Casablanca* o *Juegos de guerra*, o divertidos mapas como en la película de animación *El emperador y sus locuras*, donde los protagonistas caminan sobre él. También los encontramos en el arte, desde los significativos mapas de las obras del pintor holandés del barroco Johannes Vermeer hasta el mapa Dymaxion del pintor estadounidense contemporáneo Jasper Johns o los mapas del mundo del artista italiano Alighiero Boetti.

Cuando organizamos nuestras vacaciones nos aprovisionamos de unos cuantos mapas para estudiar las diferentes alternativas para nuestros viajes, organizarlos y, finalmente, orientarnos con ellos. Del mismo modo, cuando realizamos un desplazamiento en coche necesitamos un mapa de carreteras, y si paseamos por una ciudad que nos es desconocida precisamos de un mapa-callejero para no perdernos. Dando una vuelta por nuestra ciudad podemos ver mapas en la publicidad de algunas compañías, en escaparates de agencias de viajes, en tiendas de ropa infantil o librerías cuando anuncian el inicio del curso escolar. También nos encontramos mapas en el logotipo de algunas empresas o en el envoltorio de sus productos.

Los mapas forman parte asimismo de nuestra vida laboral. Una gran cantidad de trabajos se asocian, en mayor o menor medida, con el empleo de mapas: mapas para la navegación marítima o aérea, mapas políticos, urbanos, de comunicaciones (ferrocarril, carretera...), mapas topográficos, morfológicos, científicos de diferentes tipos (botánicos, geológicos, climatológicos, geográficos, oceanográficos, sismológicos...), mapas económicos y estadísticos, mapas artísticos utilizados para los anuncios publicitarios o para el turismo, mapas catastrales que representan las parcelas de los diferentes propietarios y un largo etcétera. Por lo tanto, podemos afirmar que sabemos qué son los mapas, que conocemos de forma exhaustiva esos objetos que manejamos cotidianamente para muy diversas acciones de nuestra vida.

Por otra parte, el mapamundi de la imagen (que es el mapa realizado con la proyección de Mercator que estudiaremos en el capítulo 9) es el mapa que nos resulta más familiar, el que hemos visto desde nuestra infancia para representar la Tierra, al menos los que somos de cierta generación, y que, por lo tanto, nuestra mente utiliza de forma inconsciente, como una realidad inalterable. Como todos «sabemos», éste



es el buen mapa, el mapa correcto o, como alguien afirmó delante de mí en cierto momento, «éste es el mapa verdadero». Miremos de nuevo el mapamundi y planteemos algunas cuestiones sencillas: ¿Qué camino tomar para ir de Madrid (o, si queremos acentuarlo un poco más, de Baku) a Washington D.C.? Como el camino más corto entre dos puntos del plano es la recta, la respuesta parece que debe de ser el paralelo 40° N; sin embargo, como se verá en el capítulo 3, en la esfera el camino más corto entre dos puntos cualesquiera es el círculo máximo que pasa por dichos puntos, y en este caso su imagen en el plano no es el paralelo 40° N. Éste es uno de los motivos por los cuales los aviones que unen Madrid con Washington no siguen el paralelo 40° N, como podíamos creer, sino que suben hacia el Norte y después descienden hacia el Sur siguiendo el círculo máximo (si hemos considerado Baku el camino hacia Washington, casi nos lleva al Polo Norte). Podemos concluir que para nuestro mapamundi no se preservan los caminos más cortos.

Por otra parte, es habitual que en la parte inferior de un mapa se indique la escala del mismo. Entonces, dados dos lugares sobre la Tierra, ¿cuál es la distancia entre ellos? En estos casos tomamos la regla y medimos la distancia en el mapa entre dichos lugares, para después transformar esa medida en la distancia deseada por medio de la escala. Sin embargo, según hemos comentado, tendríamos que medir en el plano la longitud de la curva imagen del círculo máximo y no la de la recta que une los dos puntos. Aun así, el resultado que se obtendría seguiría siendo incorrecto, y esto se debe a que nuestro mapa no preserva las longitudes de las curvas, no preserva las distancias y, en realidad, no se puede hablar de la escala como algo uniforme en todo él. Siguiendo en esta línea de pensamiento, cuestionemos si el área es preservada en la proyección de Mercator. Como es bien conocido, en este mapa la representación de Groenlandia es demasiado grande, mostrándose incluso un poco más grande que África. Sin embargo, la realidad es que Groenlandia tiene una extensión aproximada de 2.175.600 km^2, y África, de 29.800.000 km^2; por tanto, el área sufre una gran distorsión. Finalmente, preguntemos si los mapas preservan los rumbos, las direcciones y, en definitiva, los ángulos. El ángulo entre los meridianos y los paralelos es de 90°, y también lo es en nuestro mapa anterior; sin embargo, si fijamos nuestra atención en el mapa de la página siguiente, que es el que obtenemos si miramos la Tierra desde el espacio infinito (a esta proyección clásica se la conoce con el nombre de proyección ortográfica), ahora esto no es cierto, es decir, en él no se preservan los ángulos.

Por lo tanto, los mapas no siguen el comportamiento que creíamos que tenían con respecto a cuestiones como distancias, caminos más cortos, áreas o rumbos, de

manera que tal vez no los conozcamos tanto. Además, no sólo existen los dos tipos anteriores de mapas, sino que contamos con un gran número de representaciones planas diferentes de la Tierra: Mercator, ortográfica, cilíndrica isoareal de Lambert, cónica isoareal de Albers, Mollweide, ortográfica de Gall-Peters, Eckert IV, central, estereográfica, cónica conforme de Lambert, cónica conforme bipolar oblicua, cilíndrica equidistante, azimutal equidistante, Winkel-Tripel, Van der Gritten, UTM, Bonne, Eckert I-IV, homolográfica sinusoidal de Goode, Hammer, Werner, Briesemeister, cilíndrica isoareal de Behrmann, Robinson y una largo etcétera. De hecho, el cartógrafo John Snyder habla en su libro *Flattening the Earth* de unas 300 proyecciones cartográficas distintas. Entonces nos preguntamos: ¿Por qué hay tantos mapas? ¿Cuál es el correcto? ¿Por qué los anteriores mapas no lo son? ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra? ¿Qué significa «correctamente»?

El objetivo del presente libro es, en parte, contestar a estas preguntas, así como adquirir un mayor conocimiento de esos objetos cotidianos que son los mapas. La herramienta necesaria para adentrarnos en el estudio de dichas cuestiones es la geometría diferencial, como podemos observar en los programas de las asignaturas de cartografía de diferentes licenciaturas (Geografía, Ingeniería Cartográfica, Náutica, Ciencias Ambientales, Ciencias del Mar, etcétera) o en textos habituales de cartografía. Sin embargo, nuestro objetivo en este libro es evitar los tecnicismos y ser fundamentalmente intuitivos, «geométricos», por lo que las herramientas que vamos a utilizar son las propias de la geometría clásica (básicamente geometría euclidea y trigonometría). Las aproximaciones que aparecen en muchos de los argumentos desaparecen si llevamos éstos al límite, pero observemos que en ese caso no estamos más que introduciendo el cálculo diferencial e integral, y nos encontramos entonces dentro de la geometría diferencial.

Capítulo 1

La forma de la Tierra

> *«Primeramente» repuso Sócrates, «estoy convencido de que si la Tierra está en medio del cielo y es de forma esférica, no tiene necesidad ni del aire ni de ningún otro apoyo que la impida caer...*
> *Además, estoy convencido de que la Tierra es muy grande y que no habitamos en ella más que esta parte que se extiende desde Fasis hasta las columnas de Hércules, repartidos alrededor del mar como las hormigas y las ranas alrededor de un pantano...*
> *Se dice, mi querido Simmias, que si se mira esta Tierra desde un punto elevado, se parece a uno de esos balones de cuero...»*
>
> Platón, «Fedón, o de la inmortalidad del alma» (siglo IV a.C.)

Antes de entrar a realizar o, en nuestro caso, a estudiar mapas del planeta en el que vivimos y, por tanto, centro de nuestra atención e interés, debemos ocuparnos de cuáles son su forma y dimensiones, por la manera de determinar la posición de los puntos sobre su superficie o por el estudio de algunos de sus elementos geométricos destacados, como se ha venido haciendo desde la Antigüedad. Ya decía Claudio Ptolomeo en su *Geografía* que: «...La primera cosa que uno tiene que investigar [para hacer cartografía del mundo] es la forma, el tamaño y la posición de la Tierra con respecto a sus alrededores [el cielo], de forma que será posible hablar de la parte conocida, cómo es o cuán grande es [...]. Estas cosas pertenecen a la más noble y a la más bella de las aventuras intelectuales, a saber, el mostrar a la inteligencia humana por medio de las matemáticas... [la naturaleza de] la Tierra a través de su retrato...».

Éste es precisamente el objeto de la geodesia, palabra procedente de los vocablos griegos *geo* («tierra») y *daio* («dividir»), luego significa «dividir la Tierra», y es la ciencia que estudia la forma y las dimensiones del planeta, su campo de gravedad y sus variaciones temporales. Entre las herramientas fundamentales de la geodesia están las diferentes ramas de las matemáticas, y en particular la geometría, cuyo parentesco etimológico con la geodesia nos permite intuir la importante relación entre ambas: geometría deriva del griego *geo* («tierra») y *metria* («medir»), esto es «medir la Tierra».

CLAUDIO PTOLOMEO (CA. 90-CA. 170)

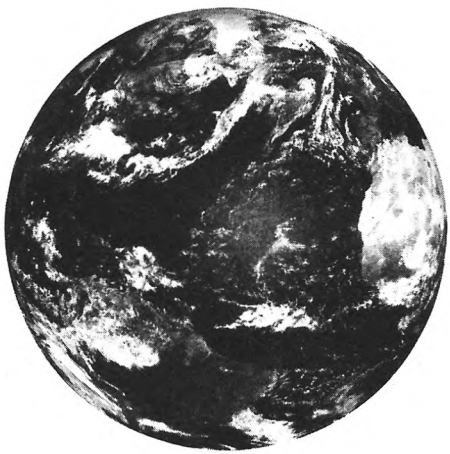
Poco se sabe de la vida de este astrónomo, matemático y geógrafo, salvo que era un ciudadano romano de ascendencia griega, o egipcia, que vivió y trabajó en Alejandría. Fue el autor de dos tratados que tuvieron una importancia e influencia destacada en la ciencia europea e islámica, el *Almagesto* (*El gran tratado*, originalmente *Tratado matemático*) y la *Geografía*. El *Almagesto* es un tratado en el que Ptolomeo, muy influenciado por Hiparco, recoge y amplía el conocimiento astronómico griego, así como las matemáticas necesarias para dicho estudio. En él expone con detalle la teoría matemática que describe el movimiento del Sol, la Luna y los planetas. Su modelo es geocéntrico y describe el movimiento de esos astros, que considera esféricos, haciendo uso de movimientos circulares combinados (los epiciclos). El *Almagesto* contiene, además, un catálogo de estrellas. Ptolomeo también divulgó sus ideas con un estilo más sencillo en su obra *Las hipótesis de los planetas*. La *Geografía* es una recopilación del saber geográfico sobre el mundo en su tiempo. Desarrolla y deja instrucciones de cómo crear mapas del mundo conocido (Ecúmene) y de las provincias romanas, haciendo uso de una red de coordenadas. Los mapas de Ptolomeo (cuyas reproducciones conocidas se deben a las primeras ediciones impresas del siglo XV) tenían la gran virtud de que habían sido creados utilizando proyecciones geométricas. Sin embargo, eran muy imprecisos debido a los datos erróneos que se manejaban fuera del territorio del Imperio Romano, e incluso dentro del mismo, y por la estimación a la baja que realizó del tamaño de la Tierra. En sus obras *Analema* y *Planisferio* se explican las proyecciones ortográfica y estereográfica, respectivamente. También escribió *Harmónica*, sobre música, *Óptica* y *Tetrabiblos*, un tratado de astrología.

Reconstrucción de uno de los mapamundis de la Geografía de Ptolomeo, que aparece en la Cosmografía de Johannes de Armsshein —Nicholas Germanus— de 1482.

Iniciamos aquí un primer bloque temático que abarca los tres primeros capítulos y que está dedicado al estudio de la Tierra, «ese oscuro objeto de deseo», su forma y tamaño, las coordenadas geográficas y los círculos máximos.

Nuestro planeta ¿es plano o es redondo?

Plantear la cuestión de cuál es la forma de la Tierra nos puede parecer hoy en día infantil y hasta algo insultante, ya que como bien sabemos desde la época escolar nuestro planeta es redondo como una pelota (matemáticamente, una esfera), aunque achatado por los polos (más cercano a lo que los matemáticos llamamos un elipsoide). También de nuestra etapa escolar es la creencia de que la humanidad estaba convencida de que el mundo era plano hasta que Cristóbal Colón le sacó de su ignorancia, mostrando a sus contemporáneos la redondez del mismo.



Las imágenes por satélite de la Tierra nos muestran que nuestro planeta es redondo y no plano.

Que la Tierra es redonda es un conocimiento profundamente enraizado en nosotros, en nuestro pensamiento, en nuestra concepción del mundo, en nuestra sociedad, y que, por lo tanto, no vamos a cuestionar en ningún momento. Pero ¿qué evidencias directas tenemos de que la Tierra sea realmente redonda? Una de ellas puede ser que hemos visto gran cantidad de imágenes tomadas desde satélites en las que se puede apreciar que el mundo en el que vivimos es una gran esfera. Pero, sin entrar en la débil posibilidad de una teoría conspirativa que afirme que esas imáge-

nes no son reales, que están manipuladas, no se trata de una evidencia que podamos comprobar personalmente, no es una evidencia directa de dicha esfericidad, o, como decía el filósofo griego Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) en su *Tratado del cielo*, nos estamos refiriendo a la búsqueda de pruebas «a través de fenómenos accesibles a la sensación».

De hecho, los habitantes de este planeta hemos tenido desde la Antigüedad la sensación, e incluso la creencia, de que habitábamos en un mundo plano, que salvo el relieve que conforman las montañas, los valles y los océanos, que hacen que varíe la geometría de nuestro entorno, en general la Tierra está aplanada. Y, de hecho, así lo creían los diferentes pueblos que habitaron la Tierra hasta hace unos 2.500 años, como los egipcios, los babilonios, los chinos e incluso los griegos. Las primeras referencias griegas sobre la forma de la Tierra se encuentran en las obras del poeta griego Homero (s. IX a.C.), en las que se recogen los conocimientos geográficos y cosmológicos de su tiempo. Los griegos pensaban que la Tierra era un disco aplastado, sostenido por el aire, que contenía la tierra conocida en aquella época y que estaba rodeado de agua, el gran río-océano cuyas aguas se precipitaban por los bordes. Éste fue el pensamiento de la escuela jónica de filosofía y, en particular, de Anaximandro (ca. 610 a.C.-ca. 546 a.C.), discípulo de Tales de Mileto, que fue el autor del primer mapamundi conocido.

Reconstrucción del mapa de Hecateo, basado en el mapa de Anaximandro, que es la primera representación hallada del Ecúmene, el mundo conocido.

LA TIERRA EN LOS MITOS COSMOLÓGICOS

Todos los pueblos de la Antigüedad (babilonios, egipcios, chinos, griegos, indígenas americanos...) en sus mitos sobre el origen y estructura del mundo se imaginaron una Tierra más o menos plana, ya fuese descansando en un océano de agua, flotando en el aire o sobre algún animal mitológico.

Para los babilonios, la Tierra era un disco plano que flotaba en un océano y estaba cubierto por la bóveda celeste, un casquete metálico semiesférico del que colgaban las estrellas. Por encima de la bóveda celeste había más agua, el agua superior, que a veces se filtraba, generándose así la lluvia. En algunos mitos, por ejemplo africanos, la Tierra descansa sobre una serpiente que nada en el océano, mientras que para los hindúes, lo hace sobre cuatro elefantes situados sobre una tortuga gigante que también se encuentra nadando en el agua.

Para los egipcios y chinos, la Tierra plana era rectangular y flotaba también sobre las aguas, mientras que la bóveda celeste descansaba sobre dos cadenas montañosas o sobre cuatro montañas colocadas en las esquinas del mundo.

Para los mayas, así como para otras culturas americanas, el mundo es una plancha plana rectangular por encima de la cual está el cielo, formado por trece planos horizontales superpuestos, dando forma a una estructura piramidal con el dios principal en la parte superior; debajo de la Tierra se encuentra el inframundo, que consta de nueve estratos horizontales planos dispuestos como una pirámide invertida. La idea de una cosmología vertical formada por mundos planos paralelos es también común en el budismo.

Se suele atribuir al filósofo y matemático griego Pitágoras (ca. 570 a.C.-ca. 500 a.C.), aunque no sin cierta polémica, la idea de la esfericidad de la Tierra. No sabemos si esta afirmación estaba basada en observaciones físicas o simplemente en razonamientos más filosóficos, como que la esfera es la forma geométrica más perfecta y, en consecuencia, este planeta, morada de los hombres y obra de los dioses, debía de tener esa forma. Que el mundo es esférico nos lo encontramos citado por Platón en su diálogo «Fedón, o de la inmortalidad del alma». Pero, sobre todo, este pensamiento lo recoge Aristóteles en su *Tratado del cielo*, en el que ofrece argumentos físicos y lógicos que apoyan esa teoría, además de dar la primera estimación conocida del radio terrestre: «Todos los matemáticos que intentan calcular el tamaño de la circunferencia de la Tierra dicen que son 400.000 estadios».

En el siguiente capítulo se discute la cuestión de las dimensiones del globo terráqueo.

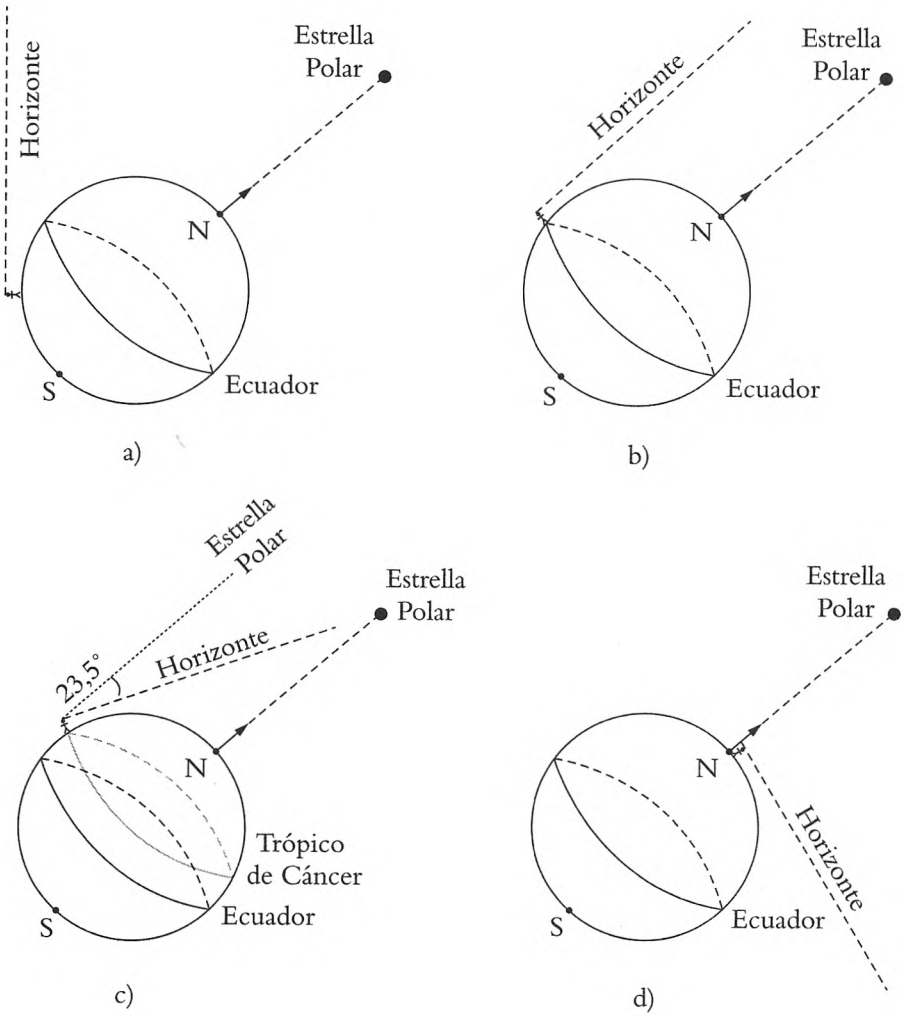
Evidencias directas de la esfericidad de la Tierra

Aprovechando que los argumentos que Aristóteles ofreció para probar la esfericidad terrestre siguen siendo válidos hoy en día, contestaremos a la cuestión planteada al inicio de esta sección sobre qué evidencias directas pueden demostrarnos que la Tierra realmente es redonda. Mirando al cielo, como hicieron los griegos, podemos obtener una primera evidencia al observar que los astros que vemos moviéndose allí arriba, la Luna, el Sol o los planetas, son redondos. Más aún, si observamos la sombra del orbe terrestre sobre la Luna en un eclipse lunar, cuando la Tierra se sitúa entre el Sol y la Luna, dicha sombra es circular.

Los eclipses de Luna nos ofrecen otra prueba, aunque no tan evidente, ya que éstos se ven en todas partes al mismo tiempo, aunque no a la misma hora. Cuanto más hacia el oriente se encuentre el observador, más tarde observará el eclipse. Por ejemplo, el eclipse total de Luna que tuvo lugar la noche del 20 al 21 de febrero de 2008 tuvo su punto máximo a las 3:26 de la hora mundial (es decir, la hora del meridiano de Greenwich). Por lo tanto, el punto máximo del eclipse se pudo ver el 21 de febrero en España, Francia, Argelia o Libia a las 4:26; en Inglaterra, Mauritania o Senegal, a las 3:26; en Groenlandia, la costa atlántica de Brasil o Argentina, a las 0:26; en la costa atlántica de Estados Unidos, Colombia o Ecuador, a las 22:46 del día anterior, y en México o el centro de Estados Unidos, a las 21:26. Si el globo terráqueo fuese plano, los eclipses de Luna se verían a la misma hora en todas partes. De hecho, lo que realmente es importante para nuestros propósitos es constatar que la hora sería la misma en todo el planeta si éste estuviese aplanado. El motivo es que la determinación de las horas del día en cada zona tiene su origen en la posición del Sol en el cielo. Sin embargo, el mediodía, que es el momento en el que el Sol está más alto, varía de unos lugares a otros al ser la Tierra redonda, aunque se produciría en todos los sitios a la vez en el caso de que éste fuera un planeta plano.

El cielo nos ofrece una prueba más y muy convincente: cuando un viajero se desplaza hacia el Norte, las constelaciones (estrellas), que en su lugar de origen se ven más hacia el Sur, van descendiendo en el firmamento hasta desaparecer bajo el horizonte. Al mismo tiempo, en el Norte surgen otras que el viajero nunca pudo ver en el lugar en el que inició su viaje; poco a poco éstas irán alzándose en el firmamento. En particular, si estamos en el hemisferio sur no vemos la estrella polar; al desplazarnos hacia el Norte ésta aparecerá por el horizonte cuando pasemos por el ecuador, y poco a poco irá alzándose en el cielo hasta llegar a encon-

trarse sobre nuestras cabezas si llegásemos hasta el mismo Polo Norte. Esto no ocurriría en un mundo plano, en el cual veríamos las mismas constelaciones desde todos los lugares.



Un viajero que se encuentre en el hemisferio sur no podrá ver la Estrella Polar (a); sin embargo, si va desplazándose hacia el norte llegará un momento en el que el astro aparecerá por el horizonte. Esto ocurrirá exactamente cuando el viajero llegue al ecuador (b). Si continúa viajando hacia el Norte verá cómo la Polaris se va alzando en el cielo; así, sobre el trópico de Cáncer, que es el paralelo de latitud 23,5°, la Estrella Polar está a 23,5° sobre el horizonte (c). Y en el Polo Norte, el viajero tendría a Polaris sobre su cabeza (d).

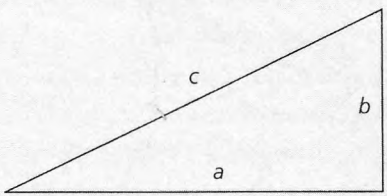
Si bajamos un poco la vista y fijamos nuestra atención en el horizonte, también encontraremos algunas evidencias de la redondez de nuestro planeta. Para empezar coloquémonos en la costa, en una zona bien abierta al mar, o en la cubierta de un barco en alta mar, y descubriremos que la línea del horizonte se va curvando mucho hacia los extremos; en un mundo plano se vería menos curvada.

Aunque sin ninguna duda la evidencia más tangible e indiscutible para nuestros propósitos es la siguiente. Supongamos que desde la playa viésemos un velero alejarse. Si el mar fuese una gran llanura de agua no lo veríamos desaparecer, sino que iríamos viendo como el velero se hace cada vez más pequeño a nuestros ojos hasta llegar a ser imperceptible. Sin embargo, esto no es lo que ocurre en realidad, sino que en la lejanía del horizonte el barco va desapareciendo primero por el casco, la cubierta, las velas y, por último, el extremo superior del mástil, con su pequeña vela al viento. El motivo

¿A QUÉ DISTANCIA SE ENCUENTRA EL HORIZONTE?

¿Cuándo dejamos de ver la vela que está en la parte superior del mástil de un velero que se aleja en el mar? La herramienta necesaria para resolver estas cuestiones es el famoso, sencillo y siempre útil teorema de Pitágoras: «Dado un triángulo rectángulo de catetos a y b y de hipotenusa c, entonces $c^2=a^2+b^2$».

Acometamos primero la cuestión de la distancia al horizonte, para lo cual vamos a suponer que la persona que mira la línea entre el cielo y el mar tiene sus ojos a una altura de $h=1{,}70$ m. Puesto que la luz se propaga en línea recta, cuando se mira al horizonte la mirada es una recta tangente a la Tierra, y teniendo en cuenta un sencillo resultado geométrico que nos dice que «una línea recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio en el punto de tangencia» (véase la imagen de la página siguiente), entonces tenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos son la mirada desde los ojos al horizonte, cuya distancia denotaremos d, y el radio R de la Tierra (consideraremos el radio ecuatorial de 6.378.137 m), y cuya hipotenusa es la recta que va desde los ojos al centro del planeta, $R+h$. Utilizando el teorema de Pitágoras, obtenemos que la distancia al horizonte es de casi 5 km:



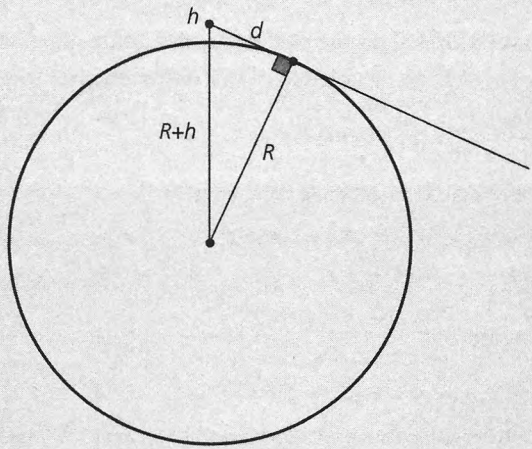
$$d=\sqrt{(R+h)^2-R^2}=4.656{,}79\,\text{m}.$$

de este efecto es la curvatura del globo terrestre. Es exactamente lo mismo que cuando vemos alejarse a alguien detrás de una colina, primero dejamos de ver sus pies; luego, sus piernas; después desaparece la cintura, el tronco y, finalmente, la cabeza.

Más aún, este efecto del que estamos hablando es el motivo por el cual existe el horizonte como una línea nítida entre el mar y el cielo, ya que en caso contrario lo que ocurriría es que la zona entre el mar y el cielo sería difusa y no se distinguiría bien el horizonte.

El pensamiento medieval

A pesar de todo lo expuesto anteriormente, una de las creencias que se ha hecho popular en el mundo occidental es que en la Edad Media todo el mundo creía que

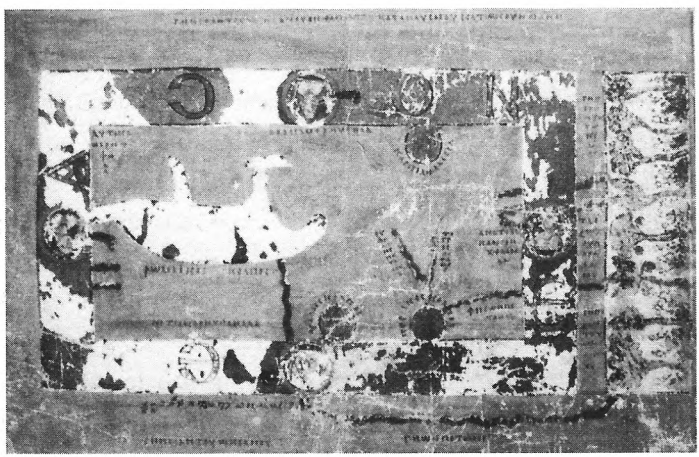


Triángulo rectángulo cuyos catetos son la mirada desde los ojos al horizonte (distancia d*) y el radio* R *de la Tierra, y cuya hipotenusa es la recta que va desde los ojos al centro del planeta,* R+h.

Si hacemos el mismo razonamiento para la vela superior del mástil del barco, que imaginemos que está a $h = 15$ m de altura, se obtendrá que un marinero en el mástil verá el horizonte a 13.832,73 m. Sumando ambos resultados, en el momento en que dejamos de ver la vela del mástil del barco éste se encuentra a 18.489,52 m de distancia, más de 18 km.

el mundo en el que habitaba era plano y que fue Cristóbal Colón (1451-1506) quien convenció a sus contemporáneos de la redondez de la misma. Este mito parece tener su origen en el libro *Vida y viajes de Cristóbal Colón* del escritor estadounidense Washington Irving (1783-1859).

Una supuesta interpretación literal de la Biblia llevó a la concepción de una Tierra plana. Por ejemplo, en Daniel 4:8 se dice «El árbol creció y se hizo corpulento, su altura llegaba al cielo y era visible desde los confines de la Tierra», o en Daniel 1:35, «La piedra se convirtió en una gran montaña que llenó toda la Tierra», lo cual no hubiese sido posible si la Tierra no fuese plana. En Samuel 2:8 y Job 9:6 se habla de los pilares que sostienen la Tierra. Pero, además, la interpretación literal de la Biblia también determinó la forma de los mapas medievales: rectangulares, siguiendo las palabras de Isaías 11:12 o del Apocalipsis 20:8, «Las cuatro esquinas de la Tierra», o circulares e incluso ovales según la expresión «el círculo de la Tierra» en Isaías 40:22, y normalmente con Jerusalén en medio, como sugería Ezequiel 5:5. Estas ideas, así como el establecimiento de un sistema cosmológico general que reemplazara las ideas de Ptolomeo y sus antecesores, fueron popularizadas por la famosa *Topographia Christiana* del monje griego Cosmas Indicopleustes (siglo VI). La forma plana del Orbis Terrarum se convirtió en una verdad oficial defendida por muchos teólogos cristianos y personas afines al poder, y estuvo en la creencia de mucha gente humilde a la que



Mapa del mundo de Cosmas Indicopleustes. Orientado con el Norte hacia arriba, el mapa muestra la Tierra rectangular, colocada en el centro y rodeada por el Océano. En la parte izquierda observamos el mar Mediterráneo, en el que desemboca el Nilo, que nace en el Océano. A la derecha se observa, arriba, el mar Caspio y, abajo, los golfos Árabe (Mar Rojo) y Pérsico. En este último desembocan los ríos Tigris y Éufrates.

En la Edad Media fueron comunes los llamados «mapas de T en O», nombre procedente de Orbis Terrarum. *Dichos mapas mostraban el mundo conocido rodeado por un océano con forma de O, mientras que la T era el mar mediterráneo, que dividía la Tierra en tres zonas: arriba, Asia; a la izquierda, Europa, y a la derecha, África. Algunos eran muy sencillos, mientras que otros ganaban en complejidad, como el de Hereford (arriba), de Richard of Haldingham, o el de Ebstorf, de Gervase de Tilbury, ambos del siglo XIII.*

no llegó otro conocimiento más que éste. Cosmas Indicopleustes, siguiendo una interpretación literal de la Biblia, describe el universo como un gran tabernáculo donde se encuentra la Tierra, que es plana, rectangular, y está rodeada por el océano.

Pero la creencia en la forma esférica de la Tierra no fue abandonada por los sabios ni por las personas cultas de la época. Así, encontramos referencias a la misma, por ejemplo, en la obra de uno de los padres de la iglesia latina, San Agustín de Hipona (354-430), que no duda de la redondez de la Tierra, aunque sí de que hubiese habitantes en las antípodas; también en la obra enciclopédica *Etimologías*, de San Isidoro de Sevilla (ca. 560-636), arzobispo de Sevilla, que recoge todo el conocimiento de la época y que fue uno de los libros más utilizados en las instituciones educativas, pero sobre todo en su obra *De astronomia seu naturam rerum*; asimismo en *La Divina Comedia*, del poeta italiano Dante Alighieri (1265-1321), o en el libro *De sphaera mundi*, del astrónomo inglés Juan de Sacrobosco (1195-1256), seguramente el libro de texto más importante de la historia, editado durante cinco siglos. Sacro-

bosco recogió el saber plasmado en el *Almagesto* de Ptolomeo, eliminó los tecnicismos y lo acompañó con nuevos conocimientos, todo ello con el objetivo de que los saberes geográficos y cosmológicos de Ptolomeo fueran más comprensibles para sus contemporáneos.

Del modelo elipsoidal al geoide

La esfera perfecta como modelo para describir la forma de la Tierra se mantuvo hasta el siglo XVII. El físico y matemático inglés Isaac Newton (1643-1727), como consecuencia de su ley de la gravitación universal, llegó a la conclusión de que debía estar ligeramente achatada por los polos y ensanchada por el ecuador. La fuerza centrífuga generada por su rotación es mayor en el ecuador y va disminuyendo hasta hacerse nula en los polos; por lo tanto, contrarresta la gravedad, haciendo que ésta sea menor en dicho paralelo central. En consecuencia, un modelo más apropiado para describir nuestro planeta es que se trata de un elipsoide de revolución.

Pero la teoría propuesta por Newton de que la Tierra estaba ligeramente achatada por lo polos no era compartida por todos los científicos de la época. Así, las mediciones realizadas por el matemático y astrónomo italiano Jean-Dominique Cassini (1625-1712), director del Observatorio de París, y su hijo Jacques Cassini (1677-1756) en distintas partes de un mismo meridiano, les llevaron a pensar que la Tierra era más bien alargada en los polos y aplastada en el ecuador. Con motivo de esta discrepancia se originó una encendida polémica, que acabó enfrentando a la ciencia inglesa y a la francesa, y dividió a la Academia de Ciencias de París en dos sectores irreconciliables. Para zanjar la polémica, hacia 1735 la Academia propuso enviar dos expediciones para medir el arco correspondiente a un grado de latitud cerca del polo y del ecuador. Maupertuis (1698-1759) y Clairaut (1713-1765) fueron a Laponia, y Godin (1704-1760), La Condamine (1701-1774) y Bouguer (1698-1758), con la colaboración de los españoles Jorge Juan (1713-1773) y Antonio de Ulloa (1716-1795), fueron a Perú. Los resultados de las mediciones confirmaron finalmente que Newton estaba en lo cierto. Voltaire, partidario de Newton, diría sobre Maupertuis: «Ha aplastado la Tierra y a los Cassini».

Desde entonces hasta la actualidad se han ido realizando diferentes mediciones para conseguir elipsoides que se aproximen lo mejor posible a la forma de la superficie terrestre. Los últimos desarrollados, utilizando la tecnología de los satélites, han sido el elipsoide GRS (Geodetic Reference System) de 1980, adoptado por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica, y el WGS (World Geodetic System),

EFECTOS DE LA GRAVEDAD

Los cohetes espaciales siempre son lanzados desde latitudes cercanas al ecuador. La NASA lanza desde Cabo Cañaveral, en Florida; la Agencia Espacial Europea (ESA), desde Kourou, en la Guayana Francesa, y Rusia y Japón, como no tienen territorios cerca del ecuador, lanzan desde más al Norte o buscan soluciones intermedias, como alquilar plataformas de lanzamiento de otros países o instalar plataformas flotantes en el océano Pacífico. El motivo es que la gravedad en las zonas cercanas a la línea ecuatorial es menor, debido a que el radio es mayor (la gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra) y a que la fuerza centrífuga de la rotación de la Tierra también es mayor, de manera que los ingenios espaciales necesitan menos combustible para ponerse en órbita.

La gravedad también influye en el deporte. En pruebas de atletismo como el lanzamiento de peso o el salto de altura, la menor gravedad en las zonas próximas al ecuador hace que los atletas obtengan mejores marcas en ellas que en lugares alejados de aquél, como el norte de Europa. Sin embargo, en pruebas de descenso en esquí alpino, donde la velocidad es importante, la mayor gravedad en el norte de Europa hace que la velocidad de descenso sea mayor, y también las marcas, que en zonas cercanas a la línea ecuatorial.

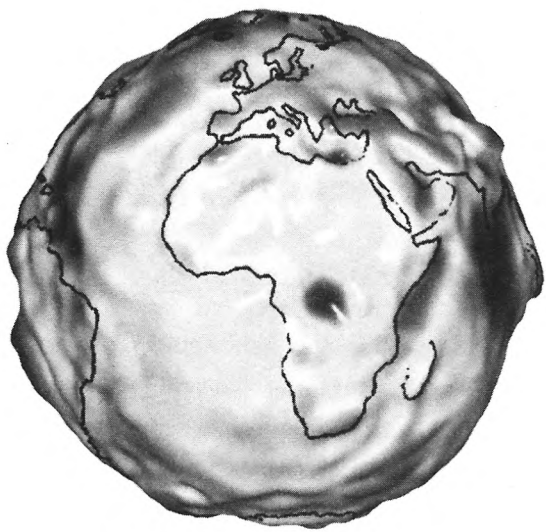
de 1984, que se está convirtiendo en un estándar mundial. El sistema GPS (Global Positioning System) utiliza este último para computar la latitud, la longitud y la elevación como superficie de referencia.

Los cartógrafos utilizan como aproximación a la forma de nuestro planeta el modelo esférico o alguno de los modelos elipsoidales dependiendo del tipo de mapa que vayan a realizar. La esfera es la superficie de referencia para los llamados mapas de «pequeña escala», es decir, de países, continentes o de amplias zonas terrestres, ya que para mapas de regiones tan amplias las diferencias entre ambos modelos son inapreciables, pero en el caso elipsoidal la complejidad de las ecuaciones es mucho mayor. Por otra parte, en el caso de los mapas de «escala grande», que cubren territorios más pequeños, como los topográficos o las cartas náuticas, las diferencias son significativas. En estos mapas tan detallados, los errores en las distancias, áreas y rumbos serían considerables en el caso de que se tomara la esfera como referencia, por lo que los cartógrafos utilizan el elipsoide.

Parece evidente que la forma de la Tierra no puede ser un elipsoide, ya que sobre ella hay montañas, valles, océanos y otros accidentes geográficos. En realidad, lo que queremos expresar cuando decimos que la superficie terrestre es un elipsoi-

de es que lo es la superficie imaginaria que representa el nivel medio del mar repartida en todos los puntos del globo, incluidas las zonas emergidas, si hubiese un hipotético canal que uniera dichos puntos con el mar. Sin embargo, las mediciones realizadas desde la geodesia demuestran que dicha superficie no es un elipsoide, sino que existen variaciones de nivel de unas regiones a otras, debidas a variaciones locales de la gravedad, que son consecuencia de la composición geológica no uniforme y de otras irregularidades. El geoide, término que proviene del griego *geo,* «tierra», y *oide*, «forma» (forma de la Tierra), es el modelo que se ha introducido para tener en cuenta dichas variaciones. El geoide es la forma tridimensional que aproxima el nivel medio del mar, y podemos pensar en ella como la superficie del mar en condiciones de calma y en la que en todo punto la dirección de la gravedad (o la línea de la plomada) es perpendicular a la superficie. En términos un poco más técnicos, se trata de una superficie del campo de gravedad con potencial constante y es utilizada en altimetría como referencia para determinar la elevación del terreno.

A lo largo de este libro consideraremos que la Tierra tiene la forma de una esfera, es decir, consideraremos el modelo esférico de nuestro planeta.



Modelo matemático para describir la forma de la superficie terrestre.

Capítulo 2

Las dimensiones de la Tierra

> —*¡Qué tonto eres! Naturalmente, no he necesitado verte, si es esto lo que quieres decir. No tienes nada particularmente regocijante para los ojos. Necesito que existas y que no cambies. Eres como ese metro de platino que se conserva en alguna parte, en París o en los alrededores. No creo que nadie haya tenido nunca deseos de verlo.*
> —*En eso te equivocas.*
> —*En fin, poco importa; yo no. Bueno, me gusta saber que existe, que mide exactamente la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Lo pienso cada vez que me miden un piso o que me venden tela en metros.*
>
> Jean-Paul Sartre, *La náusea* (1946)

Paralelamente al problema de determinar la forma del planeta en el que habitamos y por el que viajamos, surge la cuestión de conocer cuál es su tamaño. Por lo tanto, una vez establecida que la Tierra es esférica, el objetivo es determinar su perímetro, o su radio, puesto que la fórmula de la longitud de una circunferencia (para el caso de la esfera estamos refiriéndonos a cualquiera de los círculos máximos) es $2\pi r$.

Las estimaciones de Eudoxo y Arquímedes

De nuevo los griegos ya dieron respuesta a esa cuestión. Como se apuntaba en el capítulo anterior, Aristóteles, en su *Tratado del cielo*, comenta que los matemáticos habían calculado la longitud de la circunferencia del globo terráqueo, estableciéndola en 400.000 estadios. Parece ser que Aristóteles estaba citando en tal afirmación el trabajo del matemático y astrónomo griego Eudoxo de Cnido (ca. 400 a.C.-ca. 347 a.C.), considerado el fundador de la astronomía matemática.

La siguiente estimación del tamaño de nuestro planeta la encontramos en *El Arenario*, obra escrita por uno de los más grandes matemáticos griegos, Arquímedes de Siracusa (ca. 287 a.C.-ca. 212 a.C.). En ella realiza una estimación del número de granos de arena que hay en el universo, para lo cual tiene que calcular el tamaño del mismo. Como paso intermedio afirma que «el perímetro de la Tierra es de 3.000.000

de estadios y no más», aunque reconoce que en su tiempo hay quienes lo han tasado en 300.000 estadios, aunque a él le parece una estimación pequeña, ya que, al igual que Platón, concebía la Tierra como un planeta muy grande.

La medición de Eratóstenes

La medición más famosa del perímetro de la Tierra en la Antigüedad se debe a Eratóstenes de Cirene (285-195 a.C.), el que fuera director de la Biblioteca de Alejandría durante 45 años, hasta su muerte. Para llevar a cabo tal cometido realizó una doble medición, del ángulo y de la longitud, de un arco del meridiano que pasa por Alejandría. Y obtuvo una estimación del meridiano completo de 252.000 estadios, que, como veremos, es una buena aproximación. Tenemos conocimiento de su método a través del astrónomo griego Cleomedes (ca. 10-ca. 70) y de algunos otros autores clásicos (Herón, Strabo, Plinio, Vitrubio...). Muchos de los conocimientos que tenemos de importantes obras de la época de la antigua Grecia, que por desgracia se perdieron para siempre, nos han llegado de forma indirecta a través de otras obras de autores clásicos que nos han servido como medios de comunicación de su tiempo.

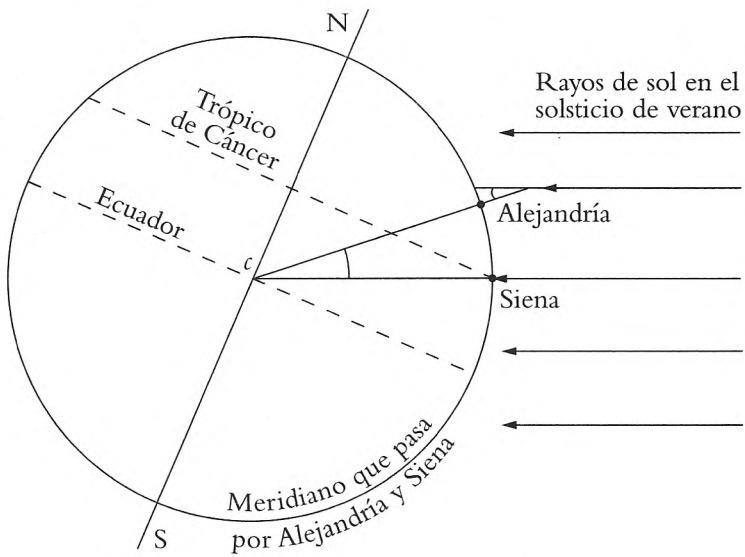
El método de Eratóstenes tenía en cuenta que la Tierra es esférica, que los rayos del Sol pueden considerarse paralelos cuando llegan a la superficie terrestre debido a la enorme distancia a la que se encuentra el astro, así como que las ciudades que considera, Alejandría y Siena (la actual Asuán), estaban situadas en el mismo meridiano, determinando así el arco de meridiano que el matemático pretendía medir.

ERATÓSTENES DE CIRENE (276-194 A.C.)

Eratóstenes fue un sabio polifacético que trabajó en geografía, matemáticas, astronomía, filosofía, cronología, gramática, crítica literaria e incluso escribió poesía, lo que motivó que sus compañeros le pusieran el mote «pentathlos», en referencia a la prueba atlética «penthlaton» que integraba cinco disciplinas. Pero el hecho de que trabajara en tantos campos también fue el motivo de otro apodo que le asignaron, «beta», es decir «el segundo», que puede interpretarse como una persona que ocupa el tiempo en muchas cosas no puede ser excelente en cada una de ellas. Sin embargo, fue uno de los grandes sabios de la Antigüedad. Con 30 años fue nombrado director de la Biblioteca de Alejandría, puesto en el que permaneció hasta su muerte, 45 años después.

El director de la Biblioteca de Alejandría consideró que la distancia entre Alejandría y Siena era de 5.000 estadios, estableciendo así la medida de la longitud del arco del meridiano. Según cuenta una leyenda, para ello Eratóstenes preguntó a los caravaneros que comerciaban entre ambas ciudades, quienes le contaron que un camello, que recorría más o menos una distancia de 100 estadios al día, tardaba 50 días en ir de una a otra. Sin embargo, es probable que consultara ese dato en los libros de la biblioteca, que contrastaría, como buen científico, con la información que los caravaneros o los soldados del ejército egipcio le pudieran aportar.

Por otra parte, Eratóstenes tuvo en cuenta que Siena se encontraba sobre el trópico de Cáncer, es decir, que al mediodía en el solsticio de verano (hacia el 21 de junio) los rayos solares caen verticalmente sobre esa ciudad, lo cual podía ser comprobado directamente por cualquier vecino o visitante de Siena observando que la luz se reflejaba en el fondo de un pozo profundo.

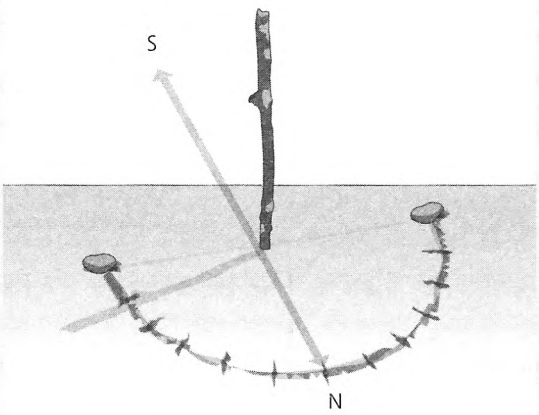


Esquema de la situación de Alejandría y Siena, y la incidencia de los rayos solares durante el solsticio de verano para la mediación de Eratóstenes del perímetro de la Tierra.

Con el fin de medir el ángulo determinado por el arco del meridiano, Eratóstenes utilizó además de la información anterior un gnomon, esto es, un sencillo dispositivo formado por una estaca vertical colocada sobre una base horizontal, y que situó en la ciudad de Alejandría. Se cuenta que Eratóstenes, en lugar de un sencillo gnomon, empleó un gran obelisco.

UTILIDADES DEL GNOMON

Fijando una posición permanente para el gnomon podemos conocer la variación de la sombra que va produciendo el Sol mientras se desplaza por el cielo a lo largo del día. Así, se podría determinar el momento del día en el que el Sol alcanza su punto más alto sobre el cielo, el mediodía, ya que es el momento en que la sombra del gnomon es más corta. El gnomon también nos puede servir como sencilla brújula, ya que su sombra al mediodía marca la dirección Norte-Sur. En particular, para los europeos la sombra apunta en la dirección Norte.

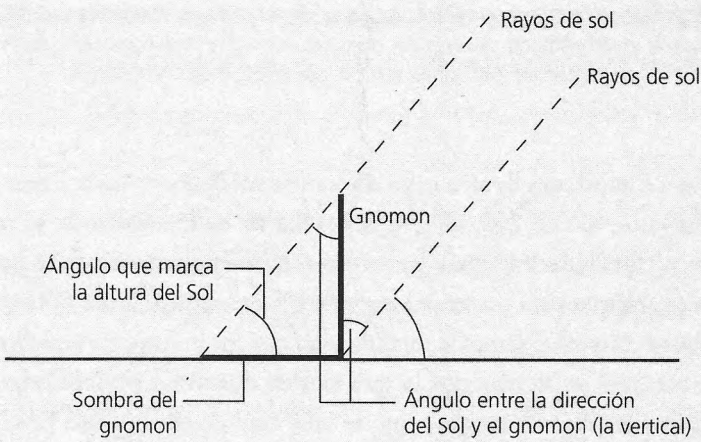


El gnomon marca la dirección Norte-Sur en el mediodía solar, cuando la sombra es más pequeña. A lo largo del día el extremo del gnomon describe una hipérbola simétrica con respecto a la dirección Norte-Sur, salvo los días 20 de marzo y 22 de septiembre, que describe una recta en la dirección Este-Oeste.

Haciendo uso del gnomon, Eratóstenes midió el ángulo α de inclinación del Sol con respecto a la vertical en el mediodía del solsticio de verano, que fue, según sus cálculos, 1/50 de la circunferencia, es decir, $360°/50 = 7{,}2°$. Por otra parte, como en ese mismo momento los rayos del Sol caen verticalmente sobre la ciudad de Siena, entonces el ángulo del arco de meridiano entre Alejandría y Siena es exactamente α, es decir, $7{,}2°$.

Si mantenemos montado nuestro gnomon a lo largo del año, éste nos servirá también para determinar los solsticios de verano y de invierno. Si todos los días del año se marca el final de su sombra al mediodía, se observa que en invierno, que es cuando el Sol está más bajo en el cielo, las sombras son más largas y es precisamente el solsticio de invierno el día que la sombra es la más larga de todas, mientras que las sombras en verano son más cortas y su extremo es el solsticio de verano.

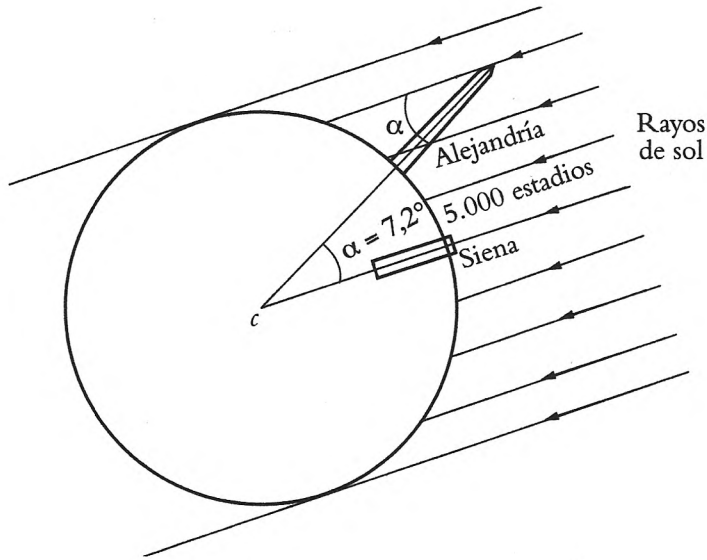
Finalmente el gnomon también puede utilizarse para determinar la altura angular del Sol. Todo lo que hay que hacer para determinar el ángulo que nos marca la altura del Sol (imagen inferior) es medir las longitudes del gnomon y de su sombra. En la notación actual, la razón entre ambas longitudes es la tangente del ángulo. O equivalentemente podemos determinar el ángulo entre el gnomon y los rayos del Sol, que nos mide cuanto se desvía el Sol respecto de la vertical, ya que es el ángulo complementario del anterior, la suma de ambos es 90°.



El gnomon y su sombra nos permiten calcular la altura angular del Sol.

Mediante un sencillo argumento se concluye que si el arco del meridiano tiene una longitud de 5.000 estadios para un ángulo de 7,2°, entonces la circunferencia completa, es decir, 360°, tendrá una longitud de:

$$\frac{360^\circ}{7{,}2^\circ} \cdot 5.000 = 50 \cdot 5.000 = 250.000 \text{ estadios.}$$



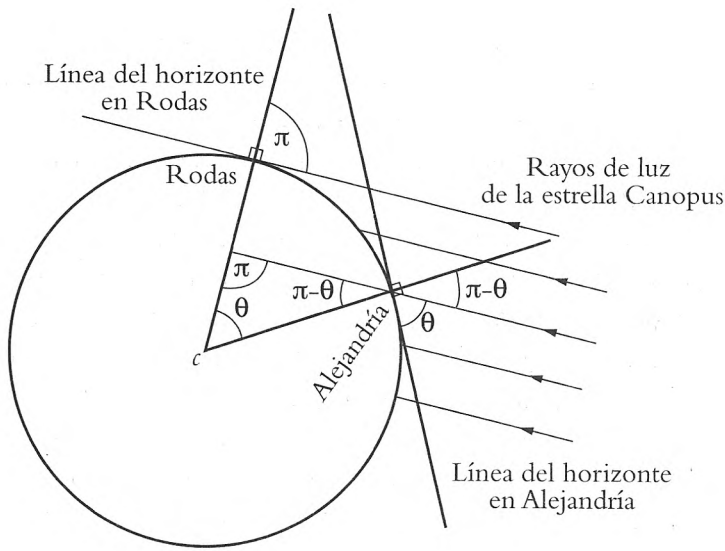
En el mediodía del solsticio de verano, los rayos de sol caían verticalmente sobre Siena, reflejándose así en el fondo de un pozo, mientras que sobre Alejandría caían formando un ángulo de 7,2° con la vertical, por ejemplo de un obelisco.

Al parecer, Eratóstenes llevó a cabo diferentes mediciones hasta llegar a una estimación final que fijó en 252.000 estadios. Una de las maravillas de su método es su sencillez y efectividad; además, podemos seguir implementándolo hoy en día. Uno de los problemas para poder valorar esta u otras estimaciones es la conversión de los estadios a nuestro sistema de medida estándar, los metros. En aquellos tiempos no existían medidas unificadas, por lo que existen diferentes posibilidades a la hora de convertir los estadios en metros, y no se sabe cuál de ellos utilizó Eratóstenes. Si consideramos el estadio egipcio, cuyo valor era de 157,5 m, su estimación es de 39.690 km, cifra muy cercana a los 40.030,2 km que mide el perímetro terrestre en el modelo esférico (obtenido a partir del elipsoide WGS 84).

Aunque casi todas las estimaciones que formuló el director de la Biblioteca de Alejandría eran ligeramente incorrectas, los errores se compensaron para dar una medida que se aproxima mucho a la realidad. Así, Alejandría y Siena no se encuentran exactamente sobre el mismo meridiano, el cálculo de la distancia entre las dos ciudades era imposible de determinar en aquella época con cierta exactitud y, con el método del gnomon, la medición del ángulo entre los rayos del Sol y la vertical sólo se podía llevar a cabo de una forma aproximada.

La medida de Posidonio y el error de Colón

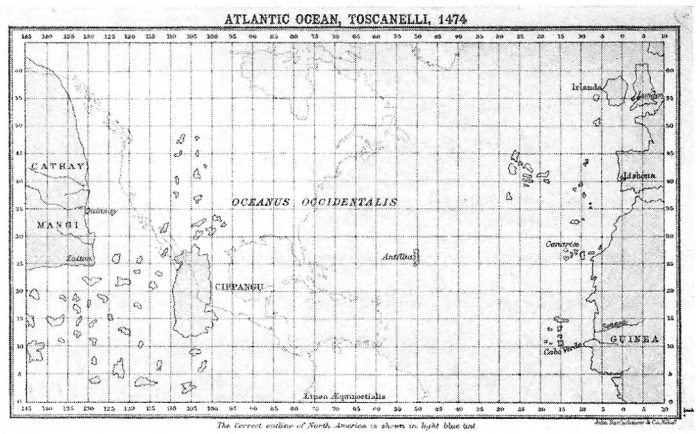
Otra importante estimación de la circunferencia terrestre en el mundo antiguo fue la realizada por el filósofo estoico griego Posidonio (ca. 130 a.C.-50 a.C.), uno de los grandes geógrafos de su tiempo; su medición también nos ha llegado a través de diferentes autores clásicos. De nuevo la idea era medir un arco de meridiano, en este caso entre Rodas y Alejandría. Desde su observatorio de Rodas, Posidonio se percató de que cierta estrella (Canopus, la segunda estrella más brillante del cielo) se encontraba sobre el horizonte; sin embargo, desde Alejandría esa misma estrella se veía elevada en el cielo un ángulo igual a 1/48 de la circunferencia terrestre (véase la ilustración siguiente). Según Cleomedes, Posidonio consideró que el arco entre Rodas y Alejandría tenía una longitud de 5.000 estadios, lo que producía una estimación de la circunferencia de la Tierra de $48 \cdot 5.000 = 240.000$ estadios. Sin embargo, el geógrafo e historiador griego Strabo (63 a.C.-24 d.C.) recoge la posterior estimación de Posidonio de 180.000 estadios (es decir, 28.350 km si fuesen estadios egipcios), obtenida por él al realizar un nuevo cálculo más certero de la distancia entre dichas ciudades, de 3.750 estadios, y quedando así reducidas las dimensiones de la Tierra.



Esquema de la medición del perímetro de la Tierra que realizó Posidonio. Cuando desde Rodas se ve la estrella Canopus en el horizonte, en Alejandría se ve con un ángulo θ, igual al ángulo entre Rodas y Alejandría.

El método de Posidonio para estimar la circunferencia terrestre es también sencillo e ingenioso, y geométricamente impecable, aunque comete un error desde el punto de vista de la física: Posidonio no tuvo en cuenta la refracción de la atmósfera terrestre, que provoca que cuando observamos objetos celestes cerca del horizonte su posición esté más baja de lo que nosotros creemos. Si los rayos de luz no sufrieran este efecto no veríamos Canopus en ese momento, sino más tarde. En consecuencia, el ángulo era menor que el obtenido por el filósofo griego.

Ptolomeo, como Strabo y otros, aceptó la estimación de Posidonio como válida y la recogió en su *Geografía*, popularizando así, en particular entre geógrafos y cartógrafos, la idea de una Tierra de pequeñas proporciones. Esta percepción llegó hasta el siglo XV, haciendo pensar a personajes como el matemático y astrónomo italiano Paolo Toscanelli (1397-1482), quien construiría una carta náutica del océano Atlántico, que era posible viajar navegando de Europa a Asia, y al propio Cristóbal Colón le llevó a creer que era factible abrir una nueva ruta de las especias por el océano Atlántico.

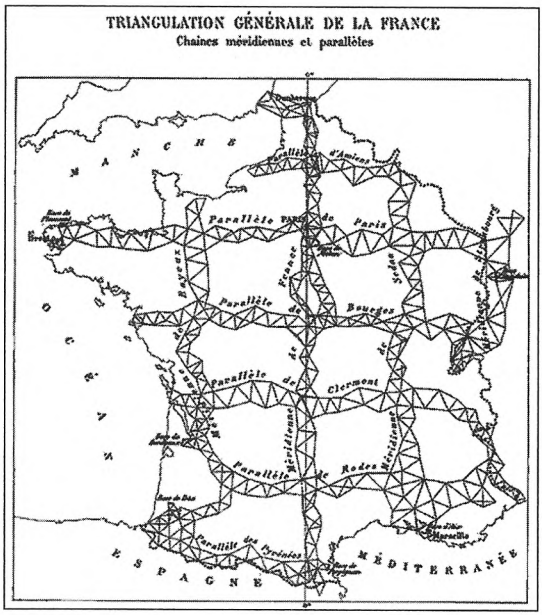


Reconstrucción del mapa de Toscanelli en el que se ha dibujado el contorno del continente americano en una posición más o menos real.

La técnica de la triangulación

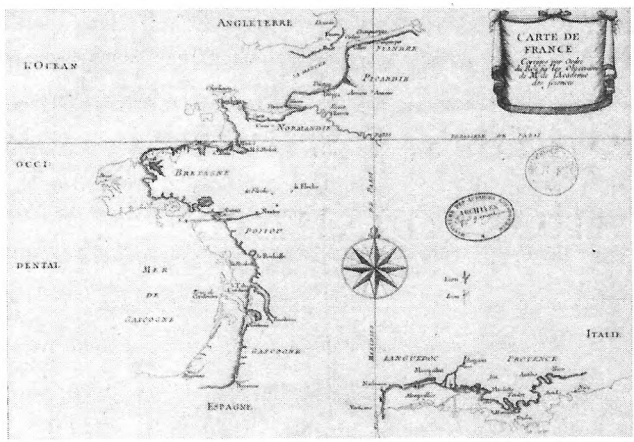
La técnica que fue empleada posteriormente para medir el meridiano de la Tierra y, por lo tanto, sus dimensiones, fue la triangulación. El procedimiento consiste en dividir el terreno en triángulos, medir con la mayor precisión posible los ángulos de

la triangulación y la longitud de uno de los lados de un triángulo inicial, llamado «base», y utilizar la trigonometría para ir obteniendo las demás longitudes. La dificultad para medir directamente las longitudes reside en lo abrupto del terreno que se pretende medir, sobre todo cuando estamos refiriéndonos a grandes longitudes. Sin embargo, sí es posible medir los ángulos con mayor precisión.



Arriba, triangulación general de Francia llevada a cabo entre 1818 y 1845.

En esta historia de la medición de la Tierra por triangulaciones nos encontramos con el trabajo del astrónomo francés Jean Picard (1620-1682), cuya medición del meridiano terrestre fue utilizada por Newton para confirmar su ley de la gravitación universal; con el de Jean-Dominique Cassini, primer director del Observatorio de París, quien lo convertiría en el principal centro mundial de astronomía y cartografía, y que intentó cartografiar Francia con precisión; con las expediciones organizadas por la Academia de Ciencias de París a Laponia y Perú para determinar si el planeta estaba achatado o alargado por los polos; o con la medición del meridiano entre Dunquerque y Barcelona llevada a cabo por los científicos franceses Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) y Pierre Méchain (1744-1804), y que llevó a la determinación de la medida del metro.



Mapa de las costas de Francia (1682) basado en las mediciones científicas (haciendo uso de las triangulaciones) de Picard, Lahire y Cassini. En él puede observarse la línea de la costa de Francia antes de las mediciones (más amplia) y después de ellas (más correcta). La diferencia entre ambas líneas motivó el comentario de Luis XIV a Cassini: «¡Vuestro viaje me ha costado una parte de nuestro reino!».

EL METRO

La unidad de longitud del Sistema Internacional de Medidas es el metro, que hoy en día se define como la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1/299.792.458 segundos (aproximadamente 3,34 nanosegundos, es decir, 3,34 milmillonésimas, 10^{-9}, partes de segundo).

La definición de metro ha ido cambiando con los tiempos, pero su inclusión como medida universal se la debemos a la Revolución Francesa. La Comisión de Pesos y Medidas fue creada en 1790 con el fin de normalizar y unificar las unidades de medida. Se pusieron dos condiciones: que las medidas fuesen universales, aceptables por todas las personas, y que no fuesen arbitrarias. Por este motivo se define la nueva unidad de longitud, el metro, como la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano entre el Polo Norte y el ecuador. En pleno periodo de agitación revolucionaria se organizó una doble expedición científica para medir, entre Dunquerque y Barcelona, el meridiano que pasa por París. Delambre, que partió hacia Dunquerque, y Méchain, que lo hizo hacia Barcelona, sufrieron toda clase de aventuras y vicisitudes en un largo proceso de mediciones por triangulaciones que duró 7 años debido a la inestabilidad social de aquel tiempo. Una versión novelada muy interesante la encontramos en *El metro del mundo*, de Denis Guedj.

Capítulo 3

Meridianos, paralelos y círculos máximos

Por la altura del Sol y de la estrella del Norte se venía en conocimiento de la latitud; la carta y la aguja de navegar, o brújula, con la velocidad estimada a ojo y el tiempo medido —valga la frase— con el reloj de arena o ampolleta, cuya exactitud dependía del paje que la velaba para darle vuelta y que de noche siempre se adelantaba, comiendo arena, para marchar a dormir antes, se podía obtener lo que ahora llamamos la estima, siempre errónea a las velocidades de la vela, y que entonces lo era tanto que la situación así obtenida llamábase de fantasía.

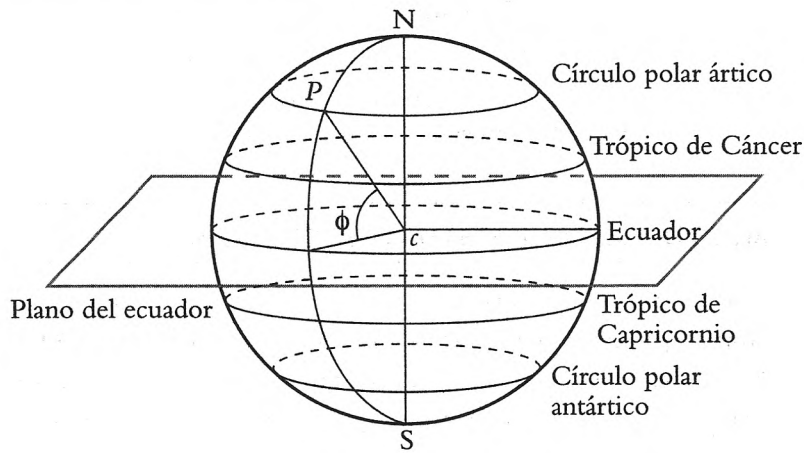
Julio F. Guillén Tato, *La Náutica* (1935)

El siguiente elemento necesario para nuestra aproximación a la cartografía son las coordenadas geográficas, la latitud y la longitud, que permiten determinar de forma única la posición de cualquier punto de la superficie terrestre. Se introduce una red geográfica formada por dos familias destacadas de curvas esféricas, los paralelos y los meridianos, que son las curvas de la esfera de latitud y longitud constantes. Por otra parte, que la recta es el camino más corto entre dos puntos es un concepto que tenemos tan interiorizado que nos cuesta darnos cuenta de que sobre la superficie terrestre esto no puede ser cierto, y el motivo es tan simple como que no hay rectas sobre ella. La siguiente cuestión parece entonces evidente: ¿cuáles son las curvas de la esfera que desempeñan el papel de las rectas sobre el plano? Y, más concretamente, ¿cuál es el camino más corto entre dos puntos de una superficie esférica? Veremos que la respuesta es otra interesante familia de curvas esféricas, los círculos máximos.

La latitud y los paralelos

Para poder definir las coordenadas geográficas debemos tener en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de un eje imaginario que pasa por su

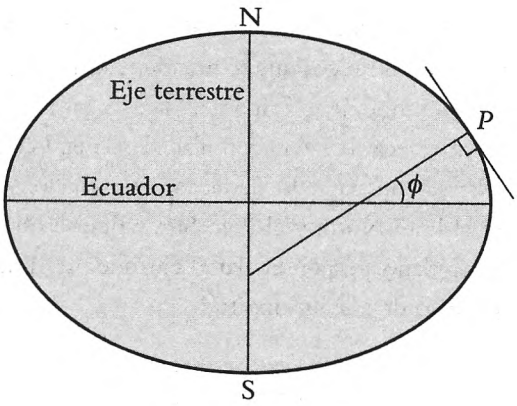
centro. Los polos Norte y Sur son los puntos de intersección de ese eje con la superficie terrestre, así como los únicos que se mantienen fijos bajo el movimiento de rotación. Considerando el modelo esférico del planeta, los paralelos son las circunferencias obtenidas al intersecar la esfera con planos perpendiculares a su eje de giro (imagen siguiente). Existe un paralelo destacado, el ecuador, que se encuentra a medio camino entre el Polo Norte y el Polo Sur, y que se obtiene al intersecar el globo terráqueo con el plano, perpendicular al eje, que pasa por el centro de la esfera. Además, es el paralelo de mayor longitud.



Esquema que muestra los cinco paralelos principales y la latitud de un punto P.

La latitud de un punto de la superficie terrestre se define como el ángulo de inclinación respecto del plano del ecuador, es decir, el ángulo entre el segmento que une el centro de la Tierra con nuestro punto y el plano en el que descansa el ecuador (ángulo denotado por ϕ en la imagen anterior). La latitud en Bilbao es de 43° 15' 52" N, es decir, que se encuentra a 43 grados, 15 minutos y 52 segundos al Norte del ecuador. La latitud toma valores entre 90° S y 90° N, o matemáticamente entre –90° y 90°. Los paralelos son, por lo tanto, las curvas formadas por los puntos de la misma latitud.

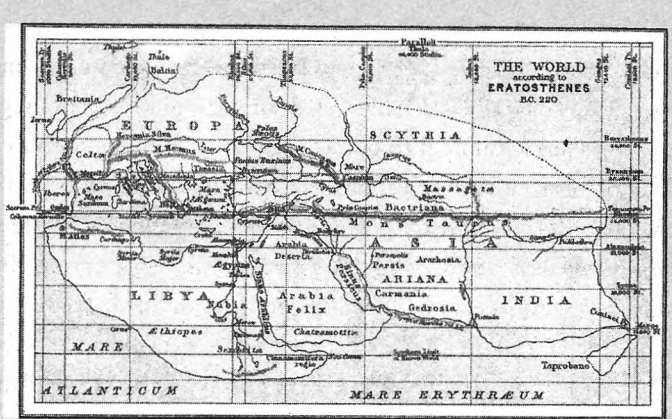
La definición de latitud que hemos dado es válida para el modelo esférico de la Tierra, que es con el que estamos trabajando en este libro. Sin embargo, para el modelo elipsoidal hay que introducir una definición más general, la latitud geodésica, que se define como el ángulo entre la perpendicular a la recta tangente al meridiano del elipsoide que pasa por el punto y el plano ecuatorial (imagen siguiente).



La latitud geodésica generaliza el concepto de latitud en el modelo elipsoidal de la superficie terrestre.

EL ORIGEN DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS

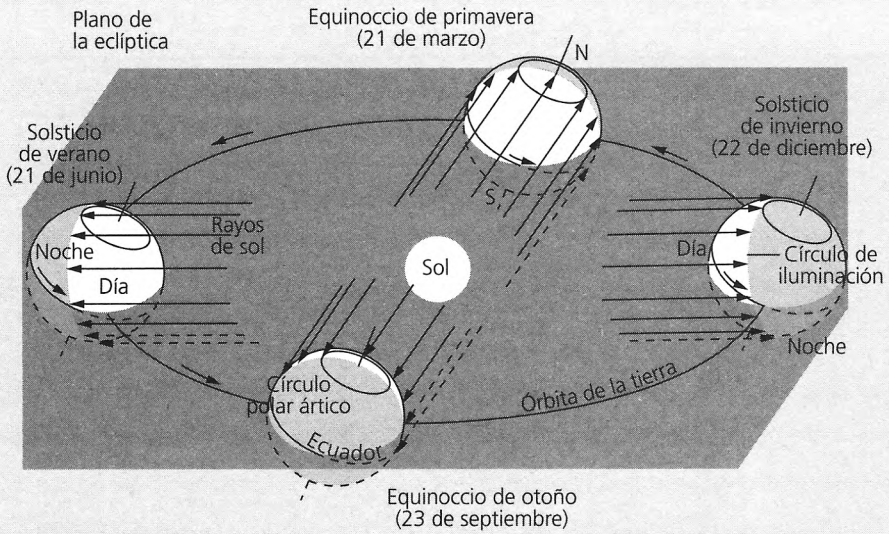
Eratóstenes ya realizó un mapa del mundo conocido en el que aparecía una red irregular de meridianos y paralelos, pero fue el astrónomo griego Hiparco de Nicea (ca. 180 a.C.–ca. 120 a.C.) quien propuso un sistema regular de meridianos y paralelos separados a intervalos iguales. En sus mapas dividió el mundo habitable en once paralelos y propuso que para determinar la longitud se hicieran observaciones simultáneas de los eclipses de Luna. Además, fue Hiparco quien introdujo en Grecia la división del círculo en 360°, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos, heredada de los babilonios.



Mapa de Eratóstenes, con una red irregular de meridianos y paralelos.

PARALELOS ESPECIALES

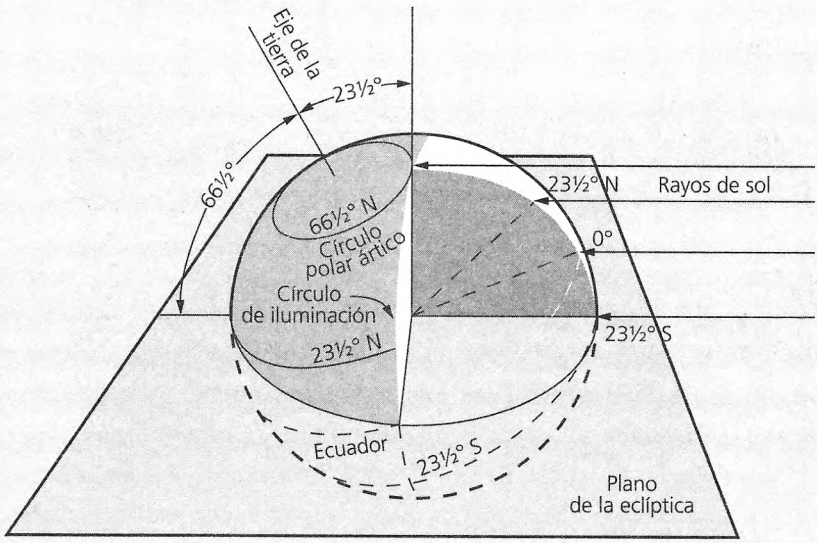
La Tierra, y en particular su centro, gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica, muy cercana a una circunferencia, que descansa sobre un plano, llamado plano de la eclíptica, respecto del cual el eje terrestre está inclinado un ángulo de 23° 30'. Al describir este movimiento hay un día del año (alrededor del 21 de junio) en que el eje terrestre se encuentra apuntando hacia el Sol, el hemisferio norte está más cerca de éste y allí el día es el más largo del año, mientras que es el más corto en el hemisferio sur; es el solsticio de verano. En su mediodía, el Sol se encuentra exactamente encima del paralelo de latitud 23° 30' N, conocido con el nombre de trópico de Cáncer. Por el contrario, en el solsticio de invierno (22 de diciembre) el eje terrestre se encuentra apuntando en la dirección contraria al Sol y es el día más corto



Esquema del movimiento de traslación de la Tierra en el que se muestran los solsticios y los equinoccios.

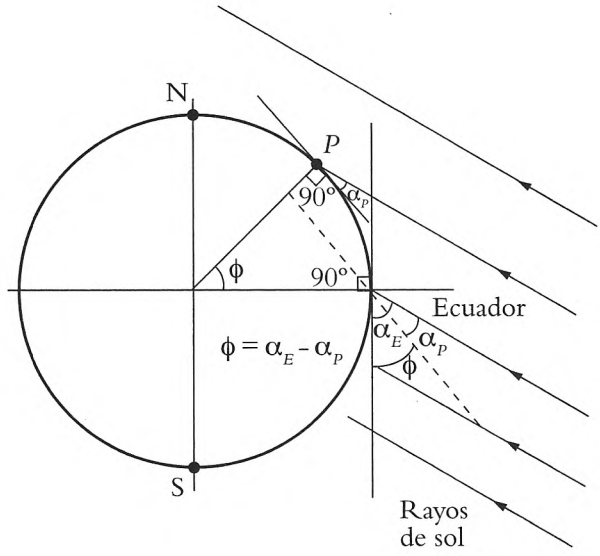
La definición matemática de latitud es correcta y comprensible, pero ¿cómo determinarla directamente cuando nos encontramos en alta mar o realizando una travesía terrestre? En la actualidad la solución es utilizar el GPS, que se ha convertido en una herramienta muy útil. Pero tengamos en cuenta que éste es un invento muy reciente y la humanidad ha tenido que emplear soluciones más naturales a

del año en el hemisferio norte. El trópico de Capricornio es el paralelo de latitud 23°30′S, sobre el que el Sol se encuentra exactamente encima al mediodía del solsticio de invierno. En los equinoccios de otoño y primavera el eje de la Tierra apunta completamente hacia la derecha o hacia la izquierda, respectivamente, del Sol, y los rayos solares al mediodía están sobre el ecuador. Como durante el solsticio de verano, los rayos del Sol caen perpendicularmente sobre el trópico de Cáncer (23°30′N), los lugares del planeta cuya latitud está a más de 90° de dicho paralelo, al sur del paralelo 66°30′S, tendrán 24 horas de oscuridad. Sin embargo, al norte del paralelo 66°30′N tendrán 24 horas de luz solar. Lo contrario sucede en el solsticio de invierno.



En el solsticio de invierno es de noche las 24 horas del día más al norte del paralelo 66°30′N, el círculo polar ártico.

lo largo de la historia. Para poder determinar la latitud terrestre se tuvo en cuenta que el ángulo ϕ es igual a la diferencia entre el ángulo del Sol al mediodía en el punto en el que queremos calcular la latitud y el ángulo del Sol al mediodía del mismo día sobre el ecuador (para lo cual podemos hacer uso, por ejemplo, del gnomon).



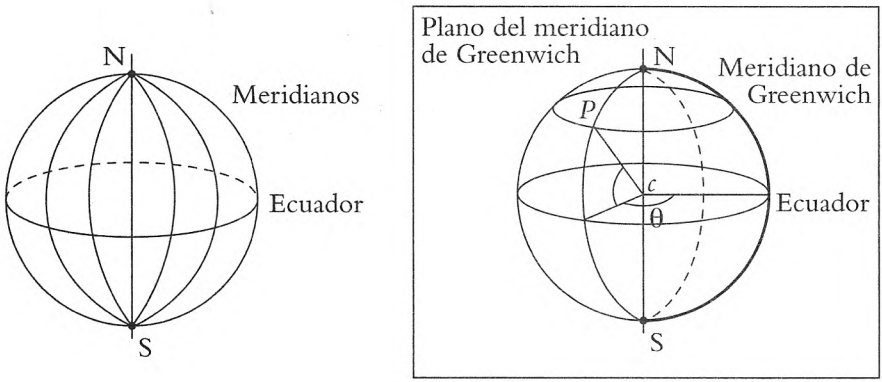
La latitud ϕ de un punto P *sobre la superficie terrestre es igual a la diferencia entre el ángulo α_P de los rayos solares al mediodía en el punto* P *y el ángulo α_E del Sol al mediodía del mismo día sobre el ecuador.*

Si nos encontramos en una ciudad de la que ya sabemos su latitud y viajamos a otra ciudad, podemos saber la latitud de esta última comparando los ángulos de los rayos del Sol al mediodía de un cierto día en ambas ciudades. Por la noche se puede utilizar la altura de la estrella Polar (que está prácticamente en la dirección del Polo Norte, exactamente a 1 grado de la misma, y casi no varía su posición) o de cualquier otra estrella destacada. La latitud se ha determinado durante muchos siglos (y aún se podría hacer hoy en día) mediante tablas (almanaques) que establecían la posición del Sol y otros cuerpos celestes según la fecha y la hora, así como con el uso de instrumentos que permitieran medir el ángulo de altitud de los cuerpos celestes, como el astrolabio, el cuadrante o la ballestilla (posteriormente, el sextante).

La longitud y los meridianos

Mientras que la latitud nos mide nuestra posición en la dirección Norte-Sur, la longitud lo hace en dirección Este-Oeste. Para empezar, consideraremos las circunferencias que se obtienen como intersección de la esfera terrestre con los planos que contienen su eje de giro (imagen siguiente). Los meridianos son precisamente cada

una de las semicircunferencias determinadas por los polos. Sobre ellos el mediodía solar se produce al mismo tiempo (meridiano, viene del término latino *meridies*, que significa mediodía).



El esquema de la izquierda muestra los meridianos, los círculos máximos de la Tierra que pasan por los polos. A la derecha se determina la longitud de un punto P.

Una primera diferencia importante de los meridianos respecto de los paralelos es que no existe un meridiano distinguido que podamos tomar como primer meridiano. Eratóstenes estableció como primer meridiano el que pasa por Alejandría, mientras que Ptolomeo lo situó en las Islas Afortunadas (Canarias y Madeira), que marcaban el límite occidental del mundo conocido. Muchos otros lugares, normalmente por motivos patrióticos o religiosos, fueron utilizándose para marcar un primer meridiano, como la Meca, Jerusalén, París, Roma, Madrid, Copenhague, Cabo Verde, etc., creando así una gran confusión. En el siglo XVIII el Observatorio Real de Greenwich, en Inglaterra, se convertiría en una referencia internacional tras la publicación, en 1767, del almanaque náutico más exhaustivo realizado hasta el momento, lo que llevaría a que en 1884 fuese aceptado, en la Conferencia Internacional sobre Meridianos celebrada en Washington (Estados Unidos), el meridiano que pasa por dicha ciudad como el de referencia, el primer meridiano.

La longitud de un punto de la superficie terrestre es el ángulo de giro respecto del meridiano de Greenwich, es decir, el ángulo entre el meridiano del punto en cuestión, más concretamente del plano que lo genera, y el plano en el que descansa el meridiano de referencia (ángulo denotado por θ en la imagen anterior). La longitud en Bilbao es de 2°55'43" O, es decir, que se encuentra a 2 grados, 55 minutos

y 43 segundos al oeste del meridiano de Greenwich. La longitud toma valores entre 180° O y 180° E o, matemáticamente, entre –180° y 180°.

La Tierra tarda 24 horas en dar una vuelta completa alrededor de su eje, es decir, en dar un giro de 360 grados, por lo que cada hora el tercer planeta solar gira un ángulo de 15 grados. Si un bilbaíno habla con un amigo de Roma y descubre que el mediodía solar en esta ciudad situada al este de Bilbao transcurre aproximadamente una hora más tarde, entonces la variación de la longitud de ambas ciudades será de aproximadamente unos 15 grados (la longitud de Roma es precisamente 12°30'E). Es decir, para determinar la longitud de un punto es necesario conocer la diferencia horaria real entre el lugar en el que nos encontramos y el meridiano de Greenwich y, como decíamos, una forma sencilla puede ser la diferencia horaria real de los respectivos mediodías.

El problema de la determinación de la longitud

Al igual que en el caso de la latitud, podemos plantearnos el problema de la determinación de la longitud de cualquier ubicación terrestre. Una posible solución es, de nuevo, mirar al cielo. Sin embargo, en este caso la tarea es mucho más ardua, puesto que, con el transcurso del día, es decir, a medida que la Tierra va girando, los cuerpos celestes van desapareciendo del cielo por el Oeste a la vez que aparecen otros por el Este. Por lo tanto, determinar la posición Este-Oeste por medio de los astros se convierte en una tarea más complicada. De hecho, la búsqueda de una

EL PRIMER VIAJE DE COLÓN

El 3 de agosto de 1492 Cristóbal Colón partiría en su viaje hacia Asia por el océano Atlántico. Se dirigiría primero rumbo a las islas Canarias junto con las tres naos, *La Pinta*, *La Niña* y *La Santa María*, que medían del orden de 22 metros de largo y 7,5 de ancho, y que entre las tres albergaban a 90 personas. Desde las Islas Canarias partiría, el 6 de septiembre, hacia el oeste, siguiendo una línea más o menos recta (por la sencillez de navegar siguiendo una latitud constante) entre los paralelos de latitud 26° y 30°. Colón había estimado que llegaría a Cipango (Japón) en unos 25 o 30 días. Sin embargo, el 12 de octubre (que se corresponde con el 21 de octubre del calendario actual) llegó a la isla de San Salvador (Guanahani para los indígenas) y seguiría navegando por la zona, pensando que se encontraba en los archipiélagos asiáticos, en torno a Japón.

solución al problema de la longitud duró cuatro siglos. Las grandes naciones, como España, Países Bajos, Inglaterra o Francia, ofrecieron cuantiosos premios (no podemos olvidar la importancia de la navegación para el desarrollo de dichos países a partir del siglo XV), y grandes científicos, como Galileo Galilei, Jean Dominique Cassini, Christiaan Huygens, Isaac Newton o Edmund Halley participaron en dicha búsqueda. El premio más importante fue tal vez el ofrecido por el Parlamento Británico en 1714, con una cuantía de 20.000 libras.

Una idea para la determinación de la longitud, como ya había sugerido Hiparco, es utilizar un acontecimiento astronómico que nos permita medir la diferencia horaria entre dos lugares. Por ejemplo, supongamos que un eclipse de Sol tiene lugar al mediodía en Bilbao, pero un marinero que se encuentra en el océano Atlántico, para el cual el eclipse tiene lugar al mismo tiempo, lo ve cuatro horas antes de su mediodía, entonces sabremos que hay una diferencia de 60 grados entre ambas localizaciones, es decir, el marinero se encontrará, más o menos, en la longitud 63 ° O. Sin embargo, los eclipses de Sol y de Luna son hechos muy puntuales (de media habrá unos cuatro eclipses al año) y, por lo tanto, no sirven para determinar la longitud de forma continuada.

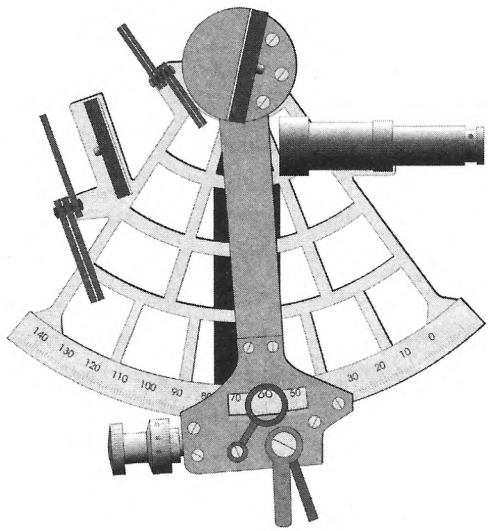
La solución podría venir del conocimiento de las posiciones relativas de varios cuerpos celestes. Así, el astrónomo Johannes Werner (1468-1522) propuso realizar un mapa de la posición de las estrellas a lo largo del recorrido de la Luna que predijese cuándo pasaría ésta cerca de ellas durante varios años. El método, que hubiese sido muy útil para los navegantes, tenía el inconveniente de que no se conocían bien las posiciones de las estrellas, no había instrumentos para que aquéllos midieran las distancias entre las estrellas y la Luna y no se entendía bien el movimiento del satélite de la Tierra, por lo que era difícil predecir con exactitud dónde se encontraría.

Galileo Galilei (1564-1642) propuso utilizar los eclipses de las lunas de Júpiter, que tenían lugar mil veces al año y de forma muy predecible, de manera que podían utilizarse como reloj astronómico. Sin embargo, la idea no fue muy bien recibida por los gobiernos de la época, y existían además serios problemas para una observación precisa de Júpiter.

Se siguieron proponiendo nuevos métodos, algunos disparatados y otros más serios, como la utilización de la brújula, que se basaba en el hecho de que el magnetismo terrestre varía de unos puntos a otros.

Más tarde se recuperaría el método del recorrido de la Luna y sus distancias a las estrellas, lo cual fue posible gracias a los avances en la observación del cielo y la publicación de un exhaustivo almanaque por parte del nuevo Observatorio Real de

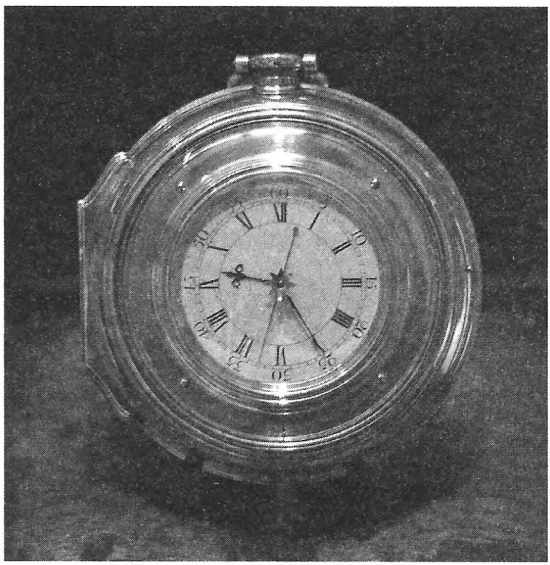
Greenwich, así como al conocimiento más preciso del movimiento de la Luna gracias a la teoría de la gravitación de Newton, y también al desarrollo de útiles herramientas para los navegantes, como el cuadrante de espejos o el sextante.



El sextante es un isntrumento importante para la navegación marítima, puesto que permite medir ángulos entre dos astros o dos puntos de la costa, o la altitud de un astro.

Sin embargo, la solución más acertada al problema de la longitud vino de la mano de un relojero, el inglés John Harrison (1693-1776), quien inventó un reloj marítimo de alta precisión que llevaba la hora exacta del puerto de origen hasta cualquier otro lugar del mundo, permitiendo así el cálculo preciso de la longitud del lugar. El navegante en alta mar simplemente tenía que observar cuándo tenía lugar el mediodía solar, mirar la hora en el reloj, que se correspondía con la hora en el puerto de origen, calcular la variación en horas entre el puerto y el barco, multiplicar el número de horas por 15°, y obtendría así la variación de la longitud con respecto a la ciudad de origen. La solución «mecánica» al problema de la longitud no fue del agrado de los científicos de la época, ni de los miembros del Comité de la Longitud nombrado por el gobierno inglés, quienes ningunearon y maltrataron al relojero John Harrison, retrasando además la entrega del premio a la espera de que la solución mediante la astronomía diera su fruto. Sin embargo, al final no tuvieron más remedio que admitir, a regañadientes, la evidencia de la fuerza de los cronómetros marinos de Harrison.

Como consecuencia de todo lo expuesto anteriormente podemos decir que cualquier punto situado sobre la esfera terrestre queda determinado de forma única por el paralelo y el meridiano que pasan por dicho punto, o, de forma equivalente, por la latitud y la longitud del mismo, lo que se conoce como «coordenadas geográficas».



Cronómetro de John Harrison, el H5. El cronómetro H4 del relojero inglés resolvió positivamente el problema del cálculo de la longitud. Éste era como un reloj de bolsillo grande, de unos 13 cm de diámetro. La prueba de su eficacia fue el viaje que el navío Deptford *realizó a Jamaica. Al llegar a Port Royal, dos meses después, el H4 solamente se había retrasado 5 segundos. El viaje de regreso fue un infierno, y el error total del viaje se amplió a 1 minuto y 54 segundos, si bien generó un error en la longitud menor que el exigido por el Decreto de la Longitud. Aún así, John Harrison tardaría muchos años en verse recompensado con las 20.000 libras del premio.*

EL HUNDIMIENTO DEL *TITANIC*

Todos hemos visto alguna de las muchas películas y documentales que se han rodado sobre el hundimiento del *Titanic*, y tal vez por ellos sabemos que era un barco que había sido diseñado utilizando la tecnología más avanzada del momento, y tan lujoso que no tenía rival. Era el orgullo de sus dueños y estaba llamado a ser la estrella de los viajes transoceánicos a principios del siglo xx. Sin embargo, la noche del 14 de abril de 1912 chocó con un iceberg y acabó en el fondo del océano. El conocimiento de las coordenadas geográficas del lugar donde ocurrió el accidente permitió que los supervivientes fuesen rescatados. El *Titanic* envió por radio mensajes de SOS: «Hemos chocado contra un iceberg. Nos hundimos. *Titanic*. 41°16'N, 50°14'O. Vengan lo antes posible». El *Carpathia*, el barco que se encontraba más cerca recibió el mensaje y se dirigió rápidamente al lugar marcado por las coordenadas geográficas, llegando a tiempo de rescatar a más de las 700 personas, la mayoría mujeres y niños, que se encontraban en los botes.

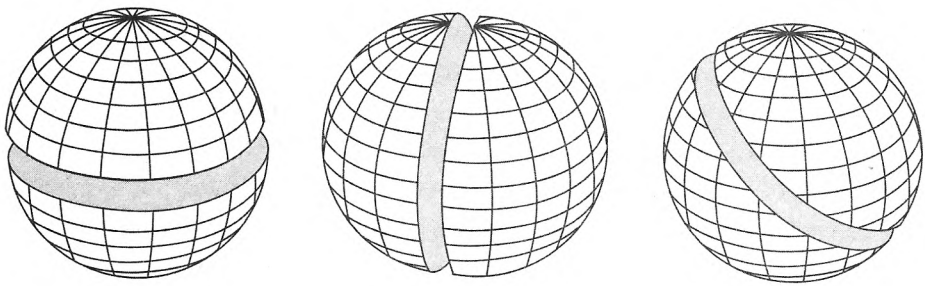
Círculos máximos, las geodésicas de la esfera

La distancia entre dos puntos de una superficie cualquiera se puede definir, y así lo hacemos los geómetras, como la más pequeña de las longitudes de todas las curvas (de los caminos) que unen esos dos puntos, que en definitiva no es más que la longitud del trayecto más corto que los une, siempre que éste exista. En geometría llamamos «geodésicas» a las curvas que nos dan los caminos más cortos sobre una superficie, aunque de hecho este concepto es algo más amplio, ya que incluye las curvas que, «localmente», nos dan la mínima distancia. ¿Qué quiere decir esto? Quiere decir que podemos tener dos puntos de la superficie unidos por una geodésica y que ésta no nos proporcione la mínima distancia entre ellos, pero que cuando tomamos dos puntos intermedios cualesquiera de la geodésica, cercanos entre sí, el camino más corto entre ellos siempre es la parte de esa geodésica que los une, tal como se ilustra en la imagen siguiente:

Las geodésicas minimizan localmente la distancia, pero quizá no globalmente. Por ejemplo, la parte del meridiano que une Londres y Gao, en Mali, a través del Polo Norte, el océano Atlántico y el Polo Sur, es una geodésica, pero no es el camino más corto entre Londres y Gao. Sin embargo, esta geodésica sí es el camino más corto entre puntos cercanos, como, por ejemplo, entre Gao y Accra, en Ghana, o entre Londres y el Polo Norte.

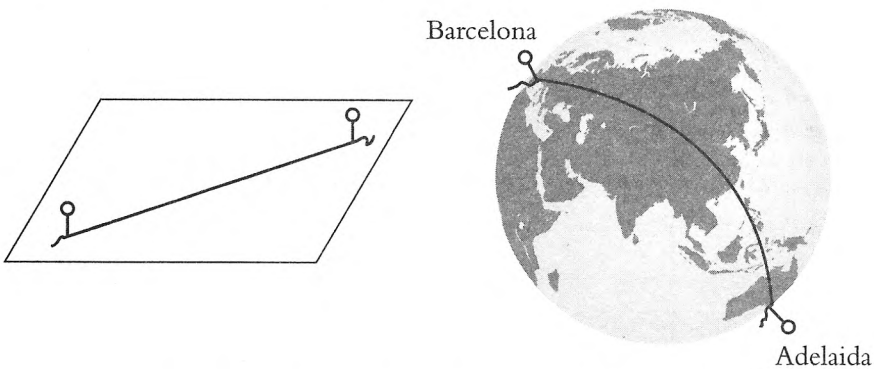
Las geodésicas de una superficie plana son las rectas, como bien sabemos todos. Sin embargo, sobre la esfera las mínimas distancias se alcanzan con las circunferen-

cias máximas, popularmente, círculos máximos, es decir, las curvas que se obtienen como intersección de la esfera con planos que pasan por el centro de la misma. Los meridianos son ejemplos de círculos máximos de la esfera; sin embargo, el único paralelo que es un círculo máximo es el ecuador.



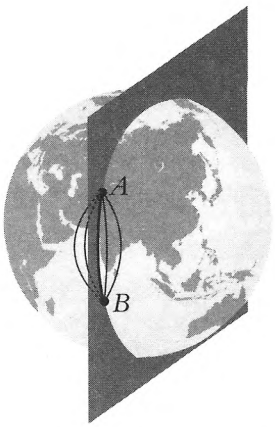
La ilustración muestra los círculos máximos de la Tierra.

Una primera evidencia de este hecho la podemos encontrar en el siguiente experimento. Supongamos que queremos trazar la recta que pasa por dos puntos de una superficie plana. Para ello podemos unir los puntos con una simple cuerda, estirándola lo más posible, de forma que ésta describa la recta que pasa por esos dos puntos. Ahora consideremos un globo terráqueo esférico. Para calcular la trayectoria de mínima distancia entre dos puntos del globo, por ejemplo entre Barcelona y Adelaida, tomamos un cordel y unimos con él dichas ciudades mientras lo mantenemos estirado; de este modo obtendremos la curva de menor longitud entre ambas ciudades (la geodésica), que no es más que un círculo máximo que pasa por ellas, tal como se muestra en la ilustración:



La cuerda tensada busca el camino más corto entre los extremos fijados.

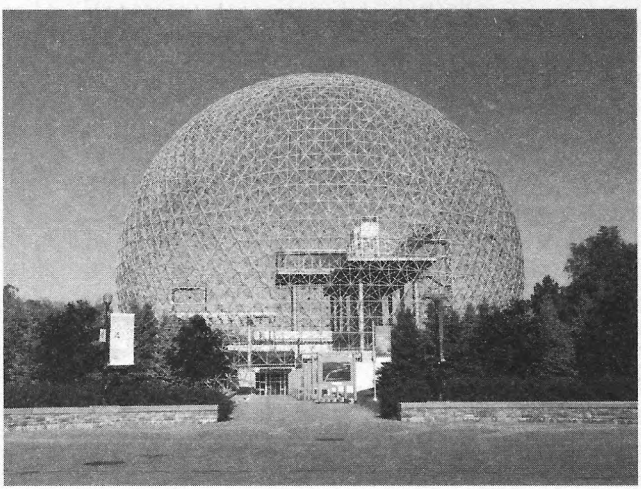
Una demostración intuitiva sería la siguiente. Supongamos que tenemos dos puntos sobre la esfera y queremos hallar la curva que describe el camino más corto entre ellos. Parece lógico suponer que podríamos limitar nuestra búsqueda a las circunferencias de la esfera que pasan por dichos puntos, y que se obtienen intersecando la superficie esférica con los planos que pasan por esos dos puntos, ya que cualquier otra curva tendrá una longitud mayor que los círculos considerados. Además, por simetría, se observa claramente que es el arco de la circunferencia obtenida con el plano que



El arco de círculo máximo entre dos puntos tiene la menor longitud de entre todos los arcos de círculo que unen esos puntos.

CÚPULAS GEODÉSICAS

Una de las más sorprendentes e impactantes construcciones con forma esférica del siglo xx es la cúpula geodésica de Richard Buckminster Fuller (1895-1983). Muchas cosas podríamos decir de este genial inventor, arquitecto, ingeniero, matemático, poeta y cosmólogo, que fue un visionario, un adelantado a su tiempo y que quiso poner la ciencia y la tecnología al servicio de la sociedad. Sin duda su mayor éxito, la cúpula geodésica, es un diseño cargado de geometría.

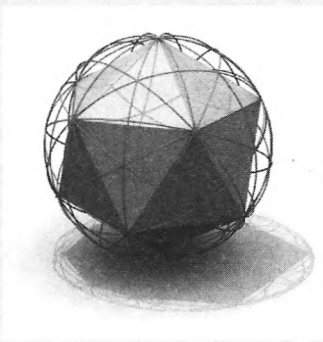


Pabellón estadounidense de la Exposición Universal de 1967, con sede en Montreal (Canadá), según un diseño de Buckminster. Posteriormente el pabellón fue transformado en un museo dedicado al agua y al medio ambiente (foto: Philipp Hienstorfer).

pasa por el centro de la esfera el que tiene menor longitud entre los puntos, tal como se muestra en la ilustración anterior. En definitiva, los círculos máximos son las geodésicas de la esfera, las curvas «más estiradas», las que minimizan las distancias.

La curvatura de los círculos máximos

Las rectas también están caracterizadas por el hecho de que son curvas que no se curvan, es decir, cuya curvatura es nula. ¿Ocurrirá algo similar para los círculos máximos de la esfera? Como parece evidente por su forma simétrica, la circunferencia, que es una curva plana, se curva igual en todos sus puntos y dicha curvatura es no nula. Además, cuanto mayor es el radio de la circunferencia, más «estirada» está y menor es su curvatura (véase la ilustración de la página siguiente). Geométricamente la curvatura de una circunferencia de radio r es igual a $1/r$; en consecuencia, cuanto mayor es su radio, menor es su curvatura. Esa variación de la curvatura de la

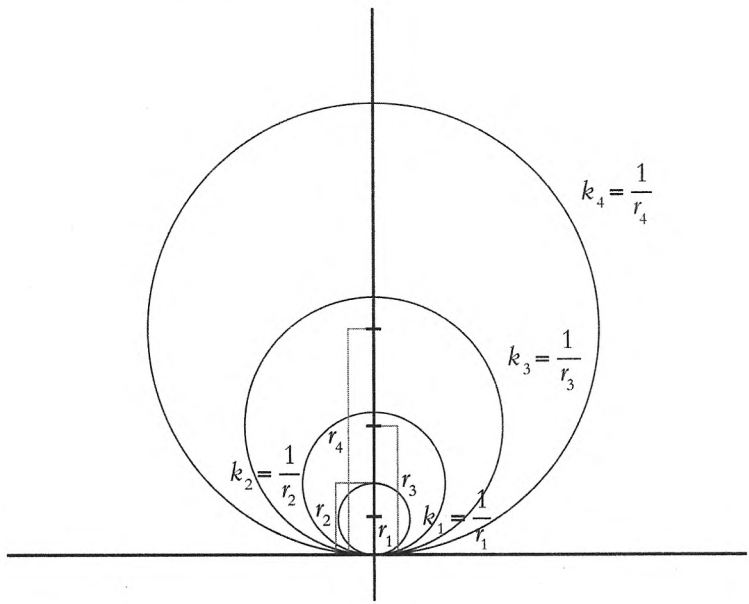


La cúpula geodésica es una estructura esférica formada por una red de círculos máximos (geodésicas), que se intersecan dando lugar a elementos triangulares que ofrecen rigidez a la estructura. El diseño más típico consiste en considerar un icosaedro inscrito en una esfera, como en la ilustración, para luego dividir a su vez cada una de las caras del icosaedro en una red de triángulos y después proyectar la estructura sobre la esfera, generándose una red de geodésicas.

Las ventajas de la cúpula geodésica son:

1. Proporciona un amplio espacio sin elementos estructurales de por medio.
2. La relación de volumen por superficie exterior es óptima, es decir, ofrece un amplio volumen con una superficie mínima.
3. Es fácil de mantener caliente en zonas frías, ya que la pérdida de calor depende de la relación entre el volumen y la superficie exterior, que es óptima.
4. Ofrece una gran rigidez, por la fuerza de la estructura y la distribución de cargas que realiza.
5. Se trata de una estructura ligera y de fácil montaje.

circunferencia dependiendo de su radio podemos sentirla cuando nos montamos sobre una bicicleta y damos vueltas en un circuito circular (o, simplemente, damos vueltas en círculo): en función del tamaño del radio del circuito tendremos que girar más o menos el manillar para mantenernos dentro de él. Cuando no giramos nuestro manillar, describimos un camino «recto», que es un círculo máximo, y cuya curvatura es la menor de todas. Por lo tanto, los círculos máximos son los de mínima curvatura, y su radio es máximo.



Cuanto mayor es el radio r *de la circunferencia, menor es su curvatura* k.

De hecho, los geómetras hemos definido una nueva curvatura, algo así como «la curvatura de la curva dentro de la superficie dada», llamada curvatura geodésica, y que nos mide cómo se curva la curva dentro de la superficie en la que habita, tomando dicha superficie como el espacio ambiente y no el espacio tridimensional.

Pues resulta que la curvatura geodésica es cero precisamente para las geodésicas, en particular para los círculos máximos de la esfera, generalizando así el resultado de las rectas del plano.

Capítulo 4

En busca de un mapa correcto de la Tierra

Desde hace unos 2.000 años, el desafío de tratar de representar la Tierra redonda sobre una superficie plana ha planteado problemas matemáticos, filosóficos y geográficos que han atraído a inventores de muchos tipos. Por supuesto que el uso de mapas es anterior a este periodo. El moderno proceso de elaboración de mapas, sin embargo, ha tenido un lento comienzo debido a que la exploración de la Tierra en su conjunto es un desarrollo histórico bastante reciente.

John P. Snyder, *Flattening the Earth* (1993)

La cartografía es una disciplina científica que se ocupa de la representación gráfica de la Tierra o de parte de ella, o de cualquier otro cuerpo celeste, para lo cual se utilizan fundamentalmente los mapas, pero también modelos en relieve o globos terráqueos, elementos todos ellos que en la era digital y de Internet pueden llegar a ser muy sofisticados, interactivos y derivar en nuevas formas de representación.

Los mapas cumplen dos funciones fundamentales: sirven para el almacenamiento y representación de información de tipo geográfico útil y nos ayudan a entender patrones espaciales, relaciones y la complejidad del mundo en el que vivimos.

La cartografía se compone de tres partes fundamentales. En primer lugar, la adquisición, análisis y tratamiento de la información geográfica que posteriormente se utilizará en la elaboración de los mapas. Las fuentes de información suelen ser las observaciones directas de campo, que ha sido la fuente tradicional a lo largo de la historia de la cartografía y que sigue siendo fundamental; la información aérea o por satélite (fotografías, radares, sensores remotos...); los mapas y bases de datos ya existentes, y la información estadística.

La segunda parte se conoce con el nombre de «cartografía matemática», y se ocupa del estudio de las proyecciones, es decir, de las transformaciones geométricas, y matemáticas, de la superficie terrestre, que es una superficie curvada, en un plano.

Éstas son las responsables de la forma en la que está representada la Tierra en los mapas. El término «cartografía matemática» tiene un sentido muy amplio que podemos resumir en la creación y estudio de una base matemática para la realización de mapas, así como para dar cobertura a las cuestiones teóricas y prácticas de disciplinas científicas relacionadas: la cartografía ya mencionada, la geodesia, la geografía o la navegación, entre otras. La parte de las matemáticas denominada geometría diferencial es una de las herramientas más importantes en la cartografía matemática.

El estudio de las proyecciones ha sido el objetivo central de la cartografía. Del mismo modo, en este capítulo queremos profundizar en el conocimiento de los mapas mediante el estudio de las proyecciones que los originan: clasificación de las proyecciones atendiendo a la forma de ser generadas, a sus propiedades geométricas, estudio de sus propiedades características, como la distorsión que producen las proyecciones, obtención de resultados fundamentales de cartografía matemática y las implicaciones de éstos en la cartografía real.

La tercera y última parte fundamental de la cartografía es el diseño y publicación de los mapas. Tradicionalmente, éstos han sido realizados en papel, primero eran elaborados a mano y posteriormente, con la llegada de la imprenta, pudieron ser impresos con una calidad de imagen cada vez mayor. Hoy día las nuevas tecnologías permiten publicar mapas digitales y en otros formatos, útiles, novedosos y sofisticados, pero además, el propio usuario ya no es un receptor pasivo, sino que puede interaccionar con el mapa y ayudar a su creación.

Otras dos partes importantes de la cartografía son su historia, así como la utilidad y el uso de los mapas. El estudio de la historia de los mapas es fundamental para entender los objetos con los que estamos trabajando, la evolución de los mismos, su importancia en la historia de la humanidad y la imagen del mundo que las sociedades han tenido; no hay que olvidar que entender el pasado nos ayuda a comprender y mejorar el futuro. Por último, el estudio de la utilidad y el uso de los mapas nos permite ser mucho más eficaces en la utilización de los mismos, pero también en el diseño de nuevas herramientas, en particular también proyecciones, que sirvan para resolver problemas existentes o que ajusten el diseño a las necesidades de uso.

¿Qué significa que un mapa sea correcto?

A lo largo de la historia, tanto los cartógrafos como los matemáticos han estado trabajando para alcanzar el sueño del mapa perfecto, buscando la manera de proyectar la superficie terrestre sobre un plano para obtener un mapa correcto del planeta. En este

MAPAS PARA RESOLVER MISTERIOS

En ocasiones recoger datos de tipo estadístico en un mapa puede ayudar a realizar descubrimientos que quizá de otra forma sería más difícil. Un ejemplo sencillo es el mapa del cólera de Snow de 1854. A mediados del siglo XIX no se conocía el origen del cólera ni de otras enfermedades infecciosas. Se pensaba que la causa eran las «miasmas», sustancias nocivas que viajaban por el aire. Londres había sufrido muchos brotes de cólera en los últimos años, con miles de muertos. El médico inglés John Snow (1813-1858) pensaba que «el agua era la que estaba matando a las personas». A finales del verano de 1854 estalló un brote de cólera en el distrito del Soho. En los primeros días ya habían muerto más de 100 personas; en 10 días, más de 500, y al final, 616. Snow, testigo de uno de los brotes de 1831, vivía en el Soho. Sospechaba que el suministro de agua contaminada era el posible vehículo de la infección. Los habitantes del distrito se abastecían de agua mediante bombas situadas en la calle pertenecientes a dos compañías, que la obtenían del contaminado Támesis. Snow realizó un mapa en el que estaban indicadas las localizaciones de las bombas y las casas en las que vivían las víctimas del cólera, lo que le llevó a sospechar de la bomba de agua de Broad Street como causa de las muertes, alrededor de la cual se acumulaban las víctimas en el mapa, y descubrió que todos los afectados habían bebido de ella. Al final, consiguió que la desconectaran. Aún pasarían años hasta que se descubriera que las bacterias eran la causa de esta enfermedad.

Mapa del cólera de John Snow que muestra los casos que tuvieron lugar en la epidemia desatada en Londres en 1854. Los puntos indican la localización de las personas afectadas por la enfermedad, y las cruces, las bombas de agua. Los puntos se acumulan alrededor de la bomba de Broad Street.

capítulo recuperamos las preguntas formuladas en el prefacio, que podemos resumir en una cuestión fundamental: ¿cómo «dibujar» correctamente un mapa de la Tierra? Pero antes cabe preguntarse algo básico y esencial: ¿Qué significa «correctamente»?

Cuando utilizamos un mapa podemos tener diversos intereses: buscar el camino más corto entre nuestro lugar de origen y nuestro destino, y determinar la distancia que los separa; medir la longitud de un río, un gasoducto o una vía de comunicación; fijar la zona de alcance de un misil militar, un escape de gas o una nube radiactiva; conocer la dirección de señales eléctricas o del viento; establecer el rumbo de viaje en la navegación aérea, marítima o terrestre; calcular la superficie de una determinada zona, ya sea bosque, lago, núcleo urbano o terreno de cultivo; analizar la información geográfica representada sobre el mapa (niveles de vida, contaminación, población, datos económicos o producción de diferentes bienes o mercancías, entre otros), para lo cual es esencial que se preserve el área, y si es posible la forma, es decir, la apariencia general de los territorios que estamos analizando y poder así examinar y comparar la información; estudiar paisajes geográficos, como cuencas hidrográficas, cordilleras, valles o costas, siendo muy importante para ello conservar la forma de los mismos, etc. En definitiva, frente a un mapa estamos interesados en cuestiones métricas como las distancias, las longitudes de las curvas, los caminos más cortos (las geodésicas), las direcciones, los ángulos, las áreas o las formas y, por lo tanto, a la hora de construir proyecciones matemáticas de la superficie terrestre en el plano estaremos interesados en que dichas proyecciones preserven esos elementos métricos.

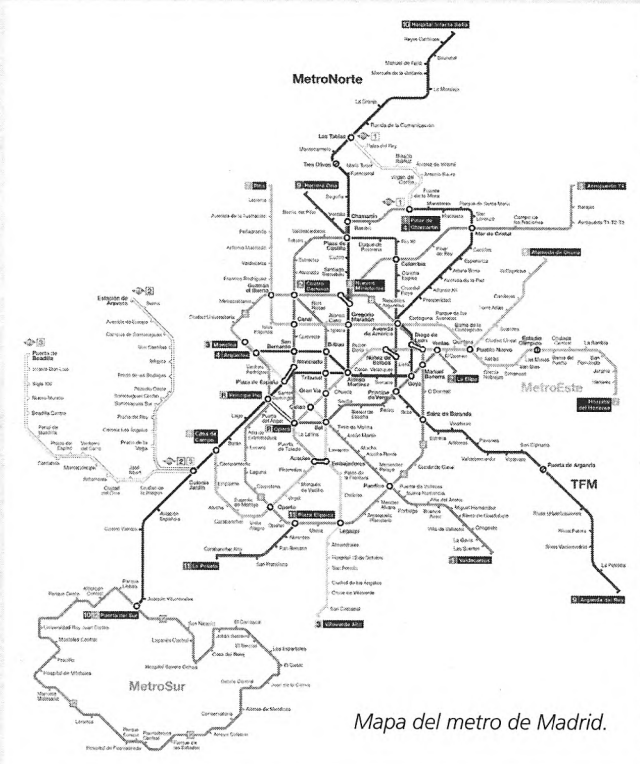
Detengámonos un momento a pensar, desde un punto de vista intuitivo y sin utilizar las herramientas de la geometría diferencial necesarias para contestar desde el rigor científico, en el problema de diseñar un mapa de la superficie terrestre. Se nos pueden ocurrir fácilmente dos dificultades que van a surgir al abordar dicho diseño. Una es la diferencia de tamaño que existe entre las personas, y por lo tanto los mapas que éstas van a utilizar, y la superficie del planeta que se desea cartografiar. La otra es la diferencia entre las formas geométricas de la Tierra y el mapa que la representa, una esférica y la otra, plana.

Un doble problema: la escala y la proyección cartográfica

De lo dicho anteriormente se deduce que la mejor manera de entender las proyecciones matemáticas que originan el diseño de nuestro mapa es verlas como un proceso en dos partes. En primer lugar, la esfera de la Tierra se proyecta sobre un globo

MAPAS TOPOLÓGICOS

En los mapas que dibujamos nosotros mismos de nuestra casa, nuestro barrio o parte de nuestra ciudad no se preserva ninguna de las cuestiones métricas habituales, al igual que ocurría con los primeros mapas desarrollados por el ser humano, como el mapa de la tablilla babilonia del siglo VI a.C. Son mapas topológicos, en los que se priorizan las relaciones espaciales de proximidad, separación, orden o continuidad. Suelen representar relaciones entre lugares, siendo los mapas del metro un ejemplo esclarecedor, ya que lo importante no es la distancia entre las estaciones, sino conocer qué estaciones están conectadas y cómo se conectan.



Mapa del metro de Madrid.

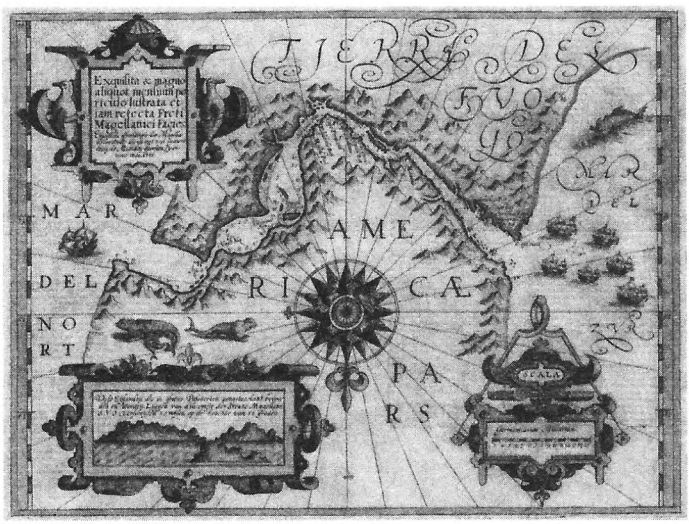
Dentro de los mapas topológicos encontramos los llamados «mapas de fantasía», de mundos imaginarios como el mapa de la Tierra Media en *El Señor de los Anillos* (J.R.R. Tolkien, 1954), o los «mapas pictóricos», como los que se realizan para los parques de atracciones. Pero también pertenecen a esta clase los mapas sobre redes neuronales y otros similares en computación, así como los relacionados con los grafos.

esférico reducido al tamaño (a la escala) que hemos elegido para el mapa, limitándose esta parte de la proyección a un simple proceso de reducción. Dicha imagen reducida de la superficie terrestre será nuestro globo de referencia, que después se transformará matemáticamente mediante proyección en la superficie plana, generándose así nuestro ansiado mapa.

El globo de referencia es un modelo perfecto de la superficie terrestre, diferenciándose de ella tan sólo en el tamaño, pero no en la forma. La escala mide la diferencia de tamaño entre la Tierra y el globo de referencia, y podemos obtenerla dividiendo el radio del globo de referencia por el radio de la Tierra. Por ejemplo, consideremos un globo de 25 cm de radio que represente la Tierra, cuyo radio podemos considerar igual a 6.371 km (si seguimos los datos del elipsoide WGS84); en ese caso la escala es igual a

$$\frac{25\text{ cm}}{6.371\text{ km}} = \frac{25\text{ cm}}{637.100.000\text{ cm}} = \frac{1}{25.484.000}.$$

Esta escala, que suele expresarse como 1:25.484.000, significa que cada centímetro del globo representa 25.484.000 cm, es decir, 254,84 km en la Tierra.



En muchos mapas antiguos la escala se indicaba con una imagen de un compás, como se puede ver en este mapa del estrecho de Magallanes (1606) de Jodocus Hondius, en el que también encontramos otros elementos típicos de los mapas de la época, como es la rosa de los vientos o los animales fantásticos.

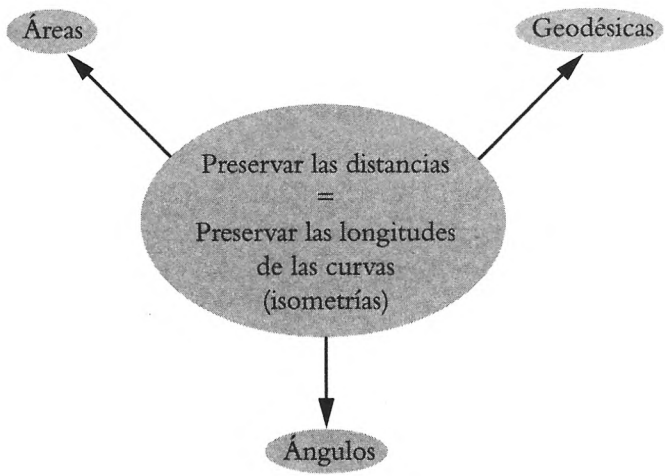
¿Cómo afecta esta transformación de reducción de tamaño a las cuestiones métricas involucradas en los mapas y que hemos comentado anteriormente? Las distancias y las longitudes de las curvas se modifican de forma lineal por la escala, es decir, cada centímetro del globo representa 254,84 km reales. Por consiguiente, si queremos medir la distancia entre Barcelona y Adelaida, simplemente deberemos medirla en nuestro globo de referencia y multiplicar los centímetros resultantes por 254,84, obteniendo así la distancia real entre ambas ciudades en kilómetros. Las áreas se ven modificadas de forma cuadrática, es decir, cada centímetro cuadrado del globo equivale a $(254{,}84)^2 = 64.943{,}4256$ km^2. Los círculos máximos, que nos dan los caminos más cortos, se convierten en los círculos máximos del globo de referencia, por lo que se preservan las geodésicas; también se preservan los ángulos, los rumbos. En definitiva, nuestra transformación de reducción del tamaño de la Tierra no modifica esencialmente las cuestiones métricas, salvo la escala, que es un factor constante en todo el globo.

Podemos expresarlo matemáticamente de la siguiente forma. Consideremos que la esfera terrestre y nuestro globo de referencia son dos esferas con el mismo centro, que tomamos como el origen de nuestro espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$; entonces nuestra transformación matemática es una aplicación de la Tierra (S_1), que es una esfera de radio 6.371 km, en el globo de referencia (S_2), con un radio de 25 cm, $\phi : S_1 \to S_2$, definida como $\phi(x) = e \cdot x$, que es lo que los geómetras llamamos una homotecia (si $e > 1$ es una ampliación y si $e < 1$ es una reducción, como en nuestro caso). Matemáticamente es una transformación sencilla y determinada de forma única por su propiedad de reducir el tamaño.

Después de resuelta la diferencia de tamaño, hay que resolver el problema de la variación de la forma, que como veremos es de una complejidad mucho mayor, y es donde se encuentra realmente la aventura de la búsqueda del Santo Grial de la cartografía: el mapa perfecto. Para tal fin, deberemos estudiar las proyecciones matemáticas de la esfera en el plano, que es el objetivo central de la cartografía matemática y de este capítulo, y su comportamiento frente a las propiedades métricas. Además, como se comenta en el prefacio hay muchas formas de transformar matemáticamente la esfera en el plano y, por lo tanto, muchas proyecciones distintas que dan lugar al mismo número de mapas diferentes. A partir de ahora nuestras proyecciones serán aplicaciones, punto a punto, de la esfera de radio unidad (con el objetivo de simplificar las expresiones) en el plano, $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^2$. Además, desde el punto de vista matemático les pedimos que cumplan ciertas propiedades naturales, como es que sean continuas y diferenciables, lo que viene a significar que la esfera se pro-

yecte sobre el plano de una forma razonable, esto es, expresado de manera intuitiva, que no se produzcan ni arrugas, ni cortes, ni superposiciones.

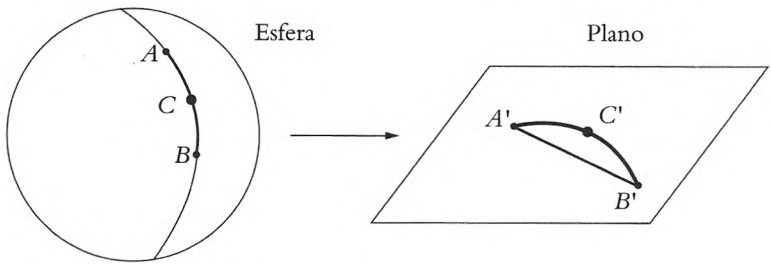
Como ya hemos comentado, es esencial conocer el comportamiento de las proyecciones frente a las propiedades métricas; por ese motivo en nuestra búsqueda de un mapa correcto de la esfera terrestre empezaremos demostrando que una proyección que preserve las distancias entre puntos (a estas aplicaciones se les llama isometrías) también preservará los caminos más cortos (las geodésicas), los ángulos y las áreas. Además, la propiedad de preservar las distancias equivale a preservar las longitudes de las curvas. Las anteriores afirmaciones no son más que un caso particular del estudio del comportamiento de las aplicaciones diferenciables entre superficies regulares con respecto a las propiedades métricas de las mismas (una demostración con las herramientas propias de la geometría diferencial puede encontrarse en cualquier texto clásico de esta disciplina, como en la *Geometría diferencial de curvas y superficies* de M. Do Carmo).



Una proyección que preserve las distancias también preservará los caminos más cortos

A continuación vamos a demostrar que toda proyección de la esfera en el plano que preserve las distancias (esto, por supuesto, significa que la distancia en la esfera entre dos lugares cualesquiera de la misma es igual a la distancia entre sus imágenes en el plano) también preservará los caminos más cortos, es decir, que la imagen, mediante la proyección dada, de los círculos máximos de la esfera son rectas en el plano.

Probaremos la afirmación anterior por «reducción al absurdo». Como el lector ya sabrá, este método de demostración consiste en suponer que lo que queremos probar es falso y, razonando de forma lógica, se llega a una contradicción que involucra la hipótesis inicial; en consecuencia, el resultado que queríamos demostrar deberá ser verdadero. En el caso que nos ocupa, vamos a suponer que la imagen de los círculos máximos mediante la proyección no siempre es una recta y llegaremos a una incoherencia. Vayamos con la prueba. Si, en efecto, nuestra proyección no preservase los caminos más cortos, existirían dos puntos A y B sobre la esfera, y un punto C sobre el camino más corto entre los dos anteriores (el círculo máximo que pasa por A y B), de tal forma que su imagen en el plano, llamémosla C', no estaría sobre el camino más corto (la recta) que une las imágenes A' y B', de los puntos A y B, respectivamente.



Por lo tanto, tenemos la siguiente situación: puesto que las distancias son preservadas por esta proyección, la distancia entre los puntos imagen A' y B' es igual a la que hay entre los puntos originales A y B:

$$d(A,B) = d(A',B'),$$

y como C está en el camino más corto entre A y B, la distancia entre ellos es la suma de las distancias de A a C y de C a B:

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B).$$

Sin embargo, C' no está en la recta que une A' y B'; entonces:

$$d(A',B') < d(A',C') + d(C',B').$$

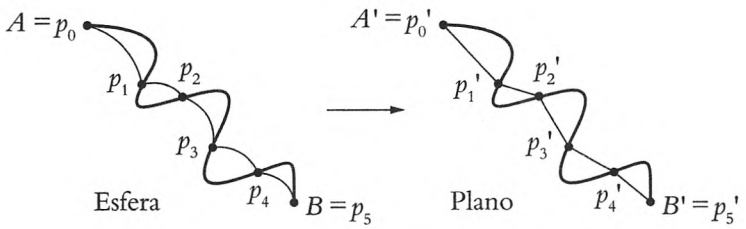
Pero esta última suma, al preservar la proyección las distancias, es igual a $d(A,C) + d(C,B)$. Así llegamos a una contradicción, puesto que hemos probado que

$$d(A,B) < d(A,B).$$

El absurdo viene de suponer que no se preservan los caminos más cortos.

Que una proyección preserve las distancias equivale a que preserve las longitudes de las curvas

Vamos a utilizar la afirmación del apartado anterior (las proyecciones que preservan las distancias también preservan los caminos más cortos) para demostrar que, en tal caso, las curvas de la esfera son transformadas en curvas del plano de la misma longitud. ¿Por qué es cierta tal afirmación? En primer lugar, toda curva de la esfera puede ser aproximada por un número finito (suficientemente grande) de arcos de círculos máximos cuyos extremos $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ están sobre la curva, como se muestra en la imagen.



Por tanto, podemos aproximar su longitud por la suma de las longitudes de estos arcos o, dicho de otra forma, por la suma de las distancias entre sus extremos, por ser los arcos de círculos máximos los caminos más cortos que los unen:

$$l(\alpha) = d(p_0, p_1) + d(p_1, p_2) + \ldots + d(p_{n-1}, p_n).$$

En segundo lugar, la curva plana, imagen de la anterior, se aproxima por las rectas, que son las imágenes de los arcos de círculos máximos considerados, como ya sabemos por el apartado anterior, y su longitud, por la suma de las distancias entre los extremos de dichos segmentos $p_0', p_1', p_2', \ldots, p_n'$:

$$l(\alpha') = d(p_0', p_1') + d(p_1', p_2') + \ldots + d(p_{n-1}', p_n').$$

En tercer lugar, como la proyección preserva las distancias, entonces la distancia entre dos extremos consecutivos de la curva esférica original es igual a la distancia de sus imágenes, extremos consecutivos de un segmento de la curva imagen:

$$d(p_i, p_{i+1}) = d(p_i', p_{i+1}'), \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

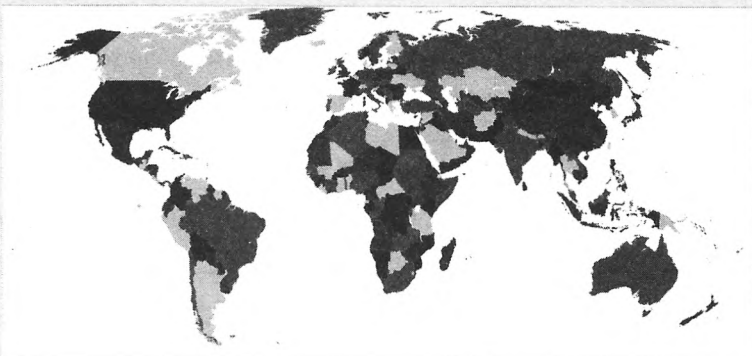
Las tres afirmaciones anteriores nos llevan a poder decir que la proyección transforma una curva de la esfera de una cierta longitud en una curva plana de la misma longitud.

¿CUÁNTOS COLORES SE NECESITAN PARA COLOREAR UN MAPA?

Seguro que, de niños, todos hemos pintado más de un mapa en el que cada región tenía que ir con un color diferente al de sus vecinas. Incluso puede que nos diéramos cuenta de que en realidad solamente necesitábamos cuatro colores. Esto es lo que le ocurrió, a mediados del siglo XIX, al hermano de uno de los estudiantes de Augustus de Morgan, Francis Guthrie (que luego sería matemático y botánico), que lo observó sobre el mapa de los cantones de Inglaterra. De Morgan difundiría esta conjetura entre sus colegas matemáticos.

En 1879 llegaría la demostración de la conjetura de la mano del abogado sir Alfred Bray Kempe, que había sido alumno del matemático Arthur Cayley. Por desgracia, la demostración era incorrecta, aunque contaba con profundas y válidas ideas.

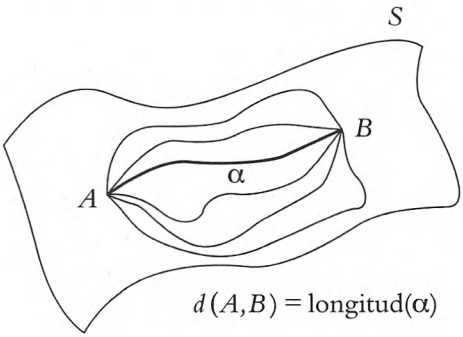
Hubo que esperar hasta 1976 para que K. Appel, W. Haken y J. Koch publicaran la prueba definitiva del teorema de los cuatro colores. Primero hubo que transformar el problema en un problema de coloreado de grafos, suponer falsa la conjetura y que existían mapas/grafos que no podían ser coloreados con cuatro colores, observar que en éstos existían ciertas «configuraciones inevitables» y finalmente comprobar que «todas» estas configuraciones podían realmente ser coloreadas. La cantidad de cálculos que tuvieron que realizar para demostrar este último paso era de tal magnitud que fue inevitable que se utilizara un ordenador. El uso de tal instrumento en la demostración abrió una profunda polémica en el seno de la comunidad matemática. ¿Puede ser considerada una demostración como tal si incluye cálculos realizados por ordenador, cuando se supone que debe ser convincente, formalizable y, sobre todo, comprobable?



Planisferio coloreado en cuatro colores, rojo, azul, verde y amarillo (aquí representado en diferentes porcentajes de gris). Éstos son suficientes para que no queden regiones adyacentes con el mismo color.

El lector con conocimientos de geometría diferencial o familiarizado con el cálculo infinitesimal habrá podido apreciar en el argumento anterior el punto en el que, trabajando de una forma más rigurosa, es necesario considerar las herramientas del cálculo.

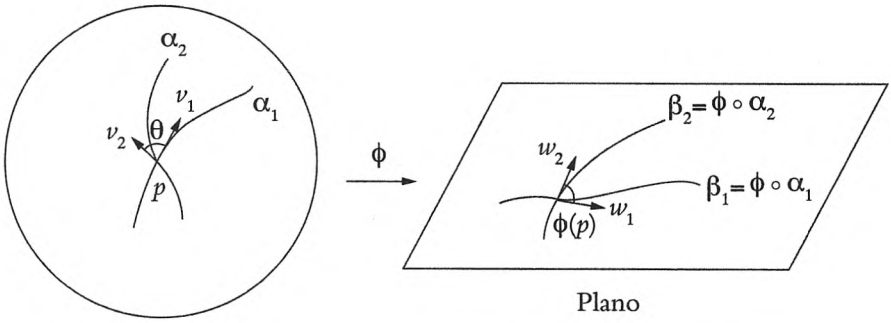
El resultado recíproco del precedente también es cierto, es decir, las proyecciones de la esfera en el plano que preservan las longitudes de las curva también preservan las distancias entre puntos. Esto es debido a que la distancia entre dos puntos es la más pequeña, de hecho la ínfima, de las longitudes de las curvas que los unen.



Una proyección que preserve las distancias también preservará los ángulos

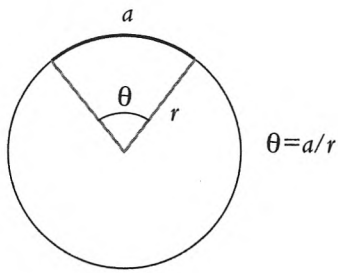
Aunque podemos tener la intuición de lo que significa que las proyecciones preserven los rumbos, los ángulos entre dos direcciones cualesquiera, para intentar comprender mejor cómo las transformaciones de la esfera en el plano afectan a los ángulos debemos entender un poco mejor los conceptos involucrados, a pesar de que ello conlleve algunos tecnicismos.

Consideremos un punto cualquiera p de la esfera, dos direcciones sobre dicho punto, es decir, dos vectores tangentes v_1 y v_2, y el ángulo θ entre ellos. Para calcular cómo se transforman los vectores tangentes y, en consecuencia, el ángulo, procederemos de la siguiente forma. Tomamos dos curvas sobre la esfera $\alpha_1:(-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$ y $\alpha_2:(-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$ que pasen por el punto p y cuyos vectores tangentes en dicho punto sean v_1 y v_2 (matemáticamente, $\alpha_1'(0) = v_1$, $\alpha_2'(0) = v_2$ y, geométricamente, como se observa en la imagen siguiente). A continuación fijamos nuestra atención en las curvas planas imagen de las anteriores: $\beta_1 = \phi \circ \alpha_1:(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ y $\beta_2 = \phi \circ \alpha_2:(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ y los vectores tangentes a las mismas en el punto de corte entre ellas, $\phi(p) \in \mathbb{R}^2$, es decir, $w_1 = \beta_1'(0) = (\phi \circ \alpha_1)'(0)$ y $w_2 = \beta_2'(0) = (\phi \circ \alpha_2)'(0)$.



Éstos son los vectores en los que se han transformado v_1 y v_2 mediante la proyección ϕ. Si el ángulo entre w_1 y w_2 es de nuevo θ diremos que la proyección ϕ ha preservado el ángulo entre los vectores v_1 y v_2 (respectivamente, entre las curvas α_1 y α_2). Una cuestión muy interesante de los conceptos explicados es que los vectores w_1 y w_2, imágenes de los vectores v_1 y v_2 mediante la proyección ϕ, no dependen de las curvas α_1 y α_2 elegidas inicialmente, luego tampoco el ángulo entre ellos. Esto nos permite, por ejemplo, considerar como curvas α_1 y α_2 los arcos de círculos máximos que pasan por el punto p y con vectores tangentes v_1 y v_2, que están unívocamente determinados.

Por lo tanto, estamos en condiciones de realizar una demostración intuitiva de que los ángulos son preservados por las isometrías. Dados dos círculos máximos de la esfera que se cortan en un punto, si tomamos una circunferencia de radio r centrada en dicho punto, es decir, formada por los puntos de la esfera que distan del centro una cierta distancia r, de radio lo suficientemente pequeño, entonces el ángulo θ entre los dos círculos máximos (que es el ángulo entre sus vectores tangentes) es aproximadamente el cociente entre la longitud del arco de circunferencia determinado por los dos círculos máximos y 2π veces el radio.

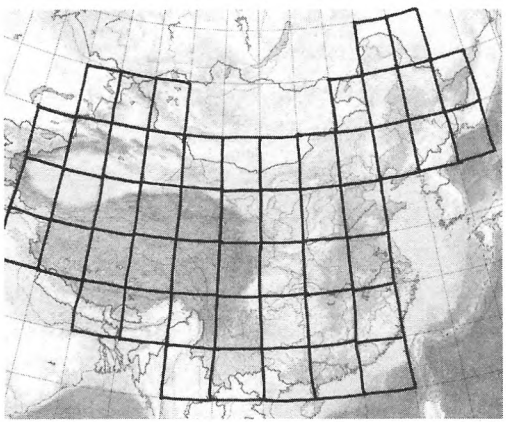


A continuación, si tomamos la imagen mediante una aplicación que preserva las distancias, obtendremos que los círculos máximos se han transformado en rectas, puesto que las isometrías preservan las geodésicas, y la circunferencia de radio r sobre la esfera se ha transformado en una circunferencia de radio r centrada en el punto de corte de las rectas. Entonces, por preservarse las distancias y ser la fórmula de la figura anterior válida para el plano, se deduce que el ángulo entre los círculos máximos también se preserva.

Las aplicaciones que preservan los ángulos se llaman aplicaciones conformes, ortomórficas o isogonales. El último término hace referencia directa a la propiedad de preservar los ángulos; sin embargo, los dos primeros significan «con la misma forma», «con la forma correcta». En efecto, las aplicaciones que preservan los ángulos preservan las formas, pero de manera local, para zonas lo suficientemente pequeñas, no así para aquellas que presentan cierto tamaño, como puede verse por ejemplo en el mapa de Mercator visto en el prefacio, en el cual se produce una distorsión muy evidente según nos acercamos a los polos.

Una proyección que preserve las distancias también preservará las áreas

La idea de esta afirmación reside en que dada una región acotada de la esfera, es posible cubrirla con una familia finita de regiones delimitadas por meridianos y paralelos que podemos considerar regiones rectangulares (un número lo suficientemente grande de regiones que, por tanto, serán lo bastante pequeñas) y podemos aproximar el área de dicha región mediante la suma de las áreas de esos «rectángulos» (base × altura). En el plano obtendremos la región imagen, cubierta por la familia de rectángulos imágenes, y dado que la aplicación preserva las distancias, tendrá la misma área.



Podemos aproximar el área de un territorio, por ejemplo China, con el área de una familia de regiones «rectangulares» delimitadas por meridianos y paralelos. Cuanto más pequeñas sean las regiones, más nos aproximaremos al área del territorio.

Las proyecciones que preservan las áreas se denominan proyecciones isoareales o equivalentes, o incluso «homolográficas». En consecuencia, hemos demostrado que las aplicaciones de la esfera en el plano que preservan las distancias, o lo que es lo mismo, las longitudes de las curvas, también preservan las áreas, las geodésicas y los ángulos, es decir, todas las propiedades métricas en las que estamos interesados.

Como corolario de lo expuesto hasta ahora podemos concluir que para cumplir nuestro objetivo de dibujar un mapa correcto del mundo tenemos que encontrar o diseñar una proyección matemática de la esfera en el plano que sea una isometría. Por lo tanto, nos lanzamos a la búsqueda de una proyección isométrica de la esfera en el plano.

En busca de la proyección isométrica

En este libro hemos llegado al punto en el cual sabemos lo que queremos y, además, qué necesitamos para obtenerlo cuando decimos que buscamos un mapa correcto de la Tierra o de una parte de ella. Si antes de continuar leyendo nos paramos un momento a reflexionar sobre cuál creemos que puede ser la forma de proyectar correctamente la esfera terrestre en el plano, es decir, de proyectarla de forma isométrica para que todas las propiedades métricas que nos interesan no se vean modificadas, pensaremos que, lógicamente, lo más adecuado será utilizar fotografías aéreas o por satélite y, a partir de ellas, diseñar el mapa correspondiente.

Imagen por satélite de Europa.

Sin embargo, aunque pueda sorprendernos, los mapas diseñados a partir de fotografías tomadas desde el espacio no son mapas correctos, puesto que no se preserva ninguno de los conceptos métricos analizados anteriormente. Otra cosa distinta es que para nuestros propósitos no nos importe el margen de error que se produzca en dichos mapas o incluso que nos interese la representación sugerente y atractiva de la Tierra vista desde el espacio, imagen ésta que nos recuerda, si hablamos de mapamundis, la forma redonda de la Tierra, algo que en ocasiones olvidamos cuando manejamos algunos de los mapas terrestres. La aplicación matemática que se origina al fotografiar una parte de la superficie terrestre, que es la proyección en perspectiva general o proyección escenográfica, no es una isometría, puesto que los meridianos no están representados por rectas, luego no se preservan las geodésicas. Tampoco se preservan los ángulos, ya que las imágenes de los meridianos y los paralelos no se cortan en ángulo recto. De forma análoga podríamos analizar el comportamiento del área obteniendo que no es preservada y, como consecuencia de todo ello, tampoco se preservan las longitudes de las curvas o las distancias.

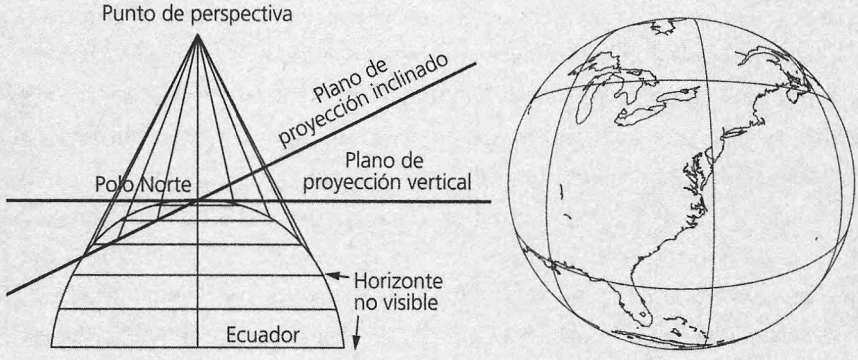
Tras este primer intento fallido de construir un mapa correcto por medio de la intuitiva proyección escenográfica, debemos continuar la búsqueda de proyecciones isométricas de la esfera en el plano. Con ese objetivo podríamos ir construyendo diferentes proyecciones cartográficas, primero geométricas y luego algorítmicas, hasta dar con una proyección isométrica que nos permitiese elaborar el soñado mapa perfecto de la Tierra. Es el conocido método del ensayo-error, método que también tiene sus problemas, como que el número de casos sea muy grande, infinito o difícil de identificar, lo que aumenta la complicación si la respuesta es negativa.

En lugar de empezar directamente a construir proyecciones cartográficas, estudiar sus propiedades e ir descartándolas si no son isométricas, que puede llegar a ser como buscar una aguja en un pajar, vamos a intentar limitar un poco nuestro campo de búsqueda. Para ello vamos a empezar estudiando si es suficiente encontrar, o construir, una aplicación de la esfera en el plano que preserve, a priori, solamente uno de los atributos métricos anteriormente considerados, los ángulos, las áreas o las geodésicas.

Desde un punto de vista formal estaríamos analizando si en el diagrama de la página 58 las implicaciones mostradas mediante las flechas de un solo sentido son realmente equivalencias, flechas de doble sentido. Es decir, ¿será posible que todas las transformaciones que preservan los ángulos, aplicaciones conformes, también preserven las distancias, isometrías? Del mismo modo, ¿podría ocurrir con el área o con las geodésicas?

PROYECCIÓN EN PERSPECTIVA GENERAL

Estas proyecciones eran conocidas por los griegos y egipcios hace más de 2.000 años, aunque fueron de poco interés hasta el siglo XVIII, con excepción de los casos no generales: ortográfica, estereográfica y gnomónica. Si el centro de proyección está en línea con el centro de la Tierra, la proyección se denomina «en perspectiva vertical»; en caso contrario, «inclinada». Para esta proyección, el meridiano y el paralelo centrales se transforman en rectas, mientras que los demás meridianos y paralelos se transformarán en rectas, arcos de circunferencia o elipses, incluso parábolas e hipérbolas, dependiendo del aspecto de la proyección (polar, ecuatorial u oblicua). No se preservan las propiedades métricas, y existe una menor distorsión cerca del centro de proyección y una deformación exagerada hacia los bordes. Esta proyección, en su caso general, no fue prácticamente utilizada más que para representar la Tierra vista desde el espacio. Con el inicio de la carrera espacial, a mediados del siglo XX, tomó cierto interés, puesto que las imágenes de la Tierra, o de otros planetas, se comprendían con esta proyección. Los mapas del tiempo que vemos en la prensa o en televisión suelen ser mapas en perspectiva inclinada, así como las imágenes simuladas o fotografías de páginas de Internet, como Google Earth.



A la izquierda, esquema de la proyección en perspectiva general (vertical o inclinada). A la derecha, mapa realizado con la proyección en perspectiva general vertical.

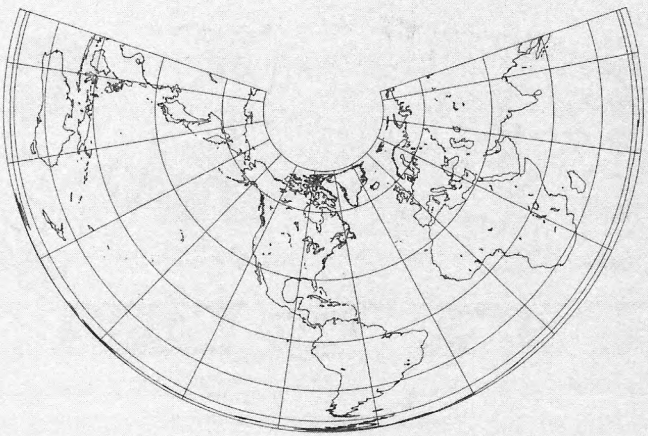
Desde el punto de vista práctico estaríamos simplificando nuestra tarea, ya que nos permitiría limitar nuestra búsqueda a las proyecciones conformes (isoareales o que preserven las geodésicas), es decir, solamente tendríamos que preocuparnos de que la proyección cartográfica preservase uno de esos atributos geométricos.

En los capítulos siguientes mostraremos algunos ejemplos concretos de aplicaciones conformes, isoareales y que preserven las geodésicas, para analizar su comportamiento frente a otros atributos métricos y poder saber así si es posible lo anteriormente comentado. De paso, podremos ver tres ejemplos de mapamundis conocidos, e históricos, en los que se conservan los ángulos, las áreas o los caminos

PROYECCIONES GEOMÉTRICAS VERSUS ALGORÍTMICAS

Una primera clasificación de las proyecciones cartográficas es la basada en el método de generación de las mismas. En este sentido, podemos clasificar las proyecciones cartográficas en geométricas y algorítmicas (o, igualmente, artificiales, analíticas o matemáticas). Las proyecciones geométricas son aquellas que tienen una interpretación geométrica como «rayos de luz», ya sean éstos entendidos como que emanan de una fuente de luz puntual, del infinito o de una recta, y que proyectan la Tierra (podemos pensar en ella, para no perder la intuición, como en una bola de plástico transparente donde están dibujados los continentes y los accidentes geográficos), siguiendo las leyes de la perspectiva, sobre una superficie plana o incluso sobre una superficie intermedia, como el cilindro o el cono, que luego se desarrolla en un plano.

La familia de las proyecciones geométricas se puede dividir en subfamilias si atendemos a que la superficie de proyección sea un plano, un cilindro o un cono, dando lugar a las



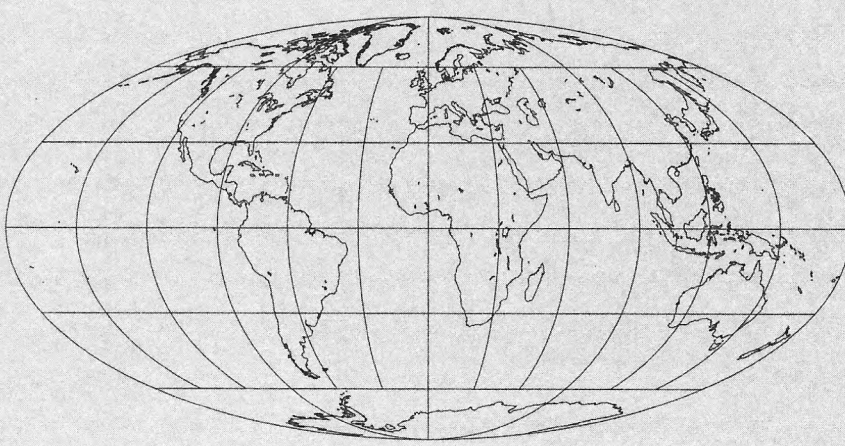
Mapa realizado con la proyección cónica isoareal de Albers (1805). Es una proyección geométrica que se obtiene al proyectar la esfera de referencia sobre un cono, para luego desplegarlo en un plano.

más cortos. En concreto, conoceremos la proyección de Arquímedes, que preserva las áreas, la proyección central o gnómica, que preserva las geodésicas, y la proyección estereográfica, que preserva los ángulos, y que, sin embargo, no son isometrías. En consecuencia, no va a ser posible, como queríamos, limitarnos a buscar simplemente proyecciones conformes (isoareales o que preserven las geodésicas).

proyecciones azimutales, cilíndricas o cónicas, respectivamente. Ejemplos de proyecciones geométricas son la gnomónica, la estereográfica, la cilíndrica isoareal de Lambert o la cónica isoareal de Albers.

Sin embargo, para muchas proyecciones cartográficas no existe una interpretación geométrica directa como «rayos de luz», y simplemente se describen por medio de fórmulas matemáticas: son las proyecciones algorítmicas. Dentro de éstas hay proyecciones que sí están inspiradas en principios geométricos o que son sencillas derivaciones de ellas, como la proyección de Mercator o la de Hammer-Aitoff. Sin embargo, hay proyecciones puramente algorítmicas, entre ellas las famosas de Mollweide, Sanson-Flamsteed, Robinson o Winkel-Tripel.

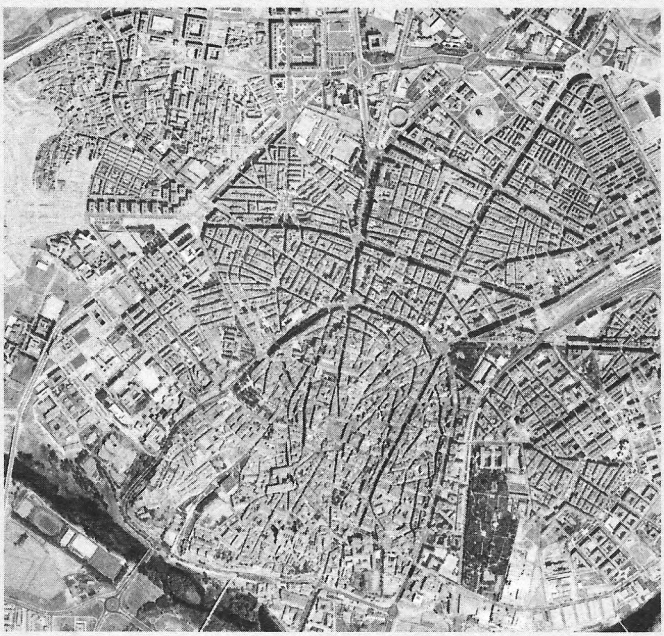
La subclasificación de las proyecciones atendiendo a la superficie auxiliar, plano, cilindro o cono sigue manteniéndose, en gran medida, dentro de las proyecciones algorítmicas.



Mapa realizado con la proyección de Mollweide (1805). Se trata de una proyección algorítmica, es decir, generada a partir de una expresión puramente matemática, que es isoareal, con forma de elipse 2:1, y los paralelos son rectas paralelas.

ORTOFOTOGRAFÍA

Es muy habitual que para mapas culturales o turísticos de ciudades no muy grandes o poblaciones importantes se incluya una ortofotografía. Al ver esa imagen la mayoría de las personas piensa que es exactamente una fotografía aérea de la ciudad, es decir, se trata de un «mapa» en perspectiva general vertical. Sin embargo, esto no es del todo cierto. Una ortofoto es una representación de tipo fotográfico de la ciudad realizada con una serie de fotografías aéreas de diferentes partes de la misma, pero corregidas para que la imagen corresponda a una proyección ortogonal (que es la que proyecta a través de rayos paralelos, rayos con una misma dirección, y que podemos ver como un caso particular de proyección en perspectiva general vertical cuando el foco se encuentra en el infinito), y dispuestas en conjunto. Precisamente la utilización de la proyección ortogonal hace que no se produzcan distorsiones al pasar de una fotografía a otra.



Ortofotografía de la ciudad de Salamanca (fuente: SIGPAC).

Capítulo 5

Proyección de Arquímedes o cilíndrica isoareal de Lambert

En la escuela quien marcaba la línea era la Enciclopedia Álvarez de primero, segundo y tercer grado, auxiliada por libros de lectura. Estaban también las tres cartillas progresivas, con el Cuaderno de Dibujo a mano, en los pequeños. También se disponía de los dos libros de Historia Sagrada, de primer y segundo grados. También de algunos atlas de España y Europa. Vestían las paredes unos mapamundi. Aparte, del armario, en cualquier momento podía sacar la esfera, mapas, material de geometría, láminas de Ciencias de la naturaleza, el cuerpo humano, etc.

Eugenio Fernández Riol, *Historia de un caballo y su dueño el doncel* (2005)

La proyección cilíndrica isoareal de Lambert, también llamada proyección de Arquímedes, ya que probablemente fuese conocida por el matemático griego, es una de las siete proyecciones propuestas por el matemático Johann Heinrich Lambert en su trabajo «Notas y comentarios sobre la composición de mapas terrestres y celestes» (1772). Tal vez sea éste el primer trabajo matemático en el que se realiza una investigación general del tema de las proyecciones cartográficas haciendo uso de la nueva herramienta que era el cálculo. Las proyecciones presentadas por Lambert en este trabajo fueron, siguiendo el orden en el que aparecen en el mismo y por el nombre por el que son conocidas hoy:

1. Proyeccción cónica conforme de Lambert.
2. Proyección de Lagrange.
3. Proyección transversal de Mercator.
4. Proyección cilíndrica isoareal de Lambert.
5. Proyección cilíndrica isoareal transversal.
6. Proyección azimutal isoareal de Lambert.
7. Proyección cónica isoareal de Lambert.

Las proyecciones 1, 3 y 6 están entre las proyecciones más comunes del último siglo. Sin embargo, la cilíndrica isoareal de Lambert es de moderado interés en cartografía, aunque de ella derivan algunas de las proyecciones más utilizadas, y su importancia se debe más a su sencillez y a su riqueza geométrica, lo cual hace que sea normalmente utilizada en los libros de cartografía como ejemplo de proyección isoareal.

Definición y propiedades cartográficas

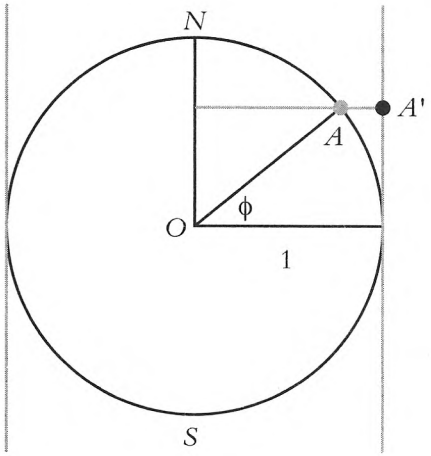
Se define la aplicación de Arquímedes de la esfera en el cilindro tangente a la misma como aquella tal que la imagen de un punto cualquiera A de la esfera es el punto A' del cilindro que es la intersección de éste con la recta que pasa por A y corta perpendicularmente al eje del cilindro, como muestra la figura siguiente. Esta proyección es claramente geométrica. Siguiendo con la analogía de la Tierra como una bola de plástico semitransparente expresada en el capítulo anterior, la imagen te-

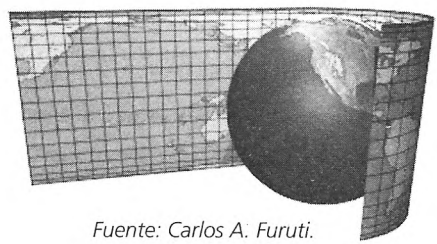
JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

Nació en Mülhausen, Alsacia (en la actualidad Mulhouse, Francia), adonde emigró su familia, que era calvinista, por motivos religiosos. A la edad de 12 años tuvo que abandonar la escuela para trabajar con su padre, que era sastre, y contribuir a la economía familiar, aunque continuó estudiando por su cuenta y en su tiempo libre. Posteriormente trabajó en la siderurgia y como dependiente, y en 1746 pasó a ser el secretario privado del filósofo suizo Isaak Iselin (1728-1782), en Basilea; dos años más tarde ejerció de profesor en casa del conde Peter von Salis en Chur, ocupación que le permitió disfrutar de tiempo libre para estudiar matemáticas, astronomía y filosofía, así como el acceso a la excelente biblioteca del conde.

Lambert fue un matemático excepcional que demostró la irracionalidad de π y conjeturó que los números e y π eran trascendentes, es decir, que no son raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Fue uno de los primeros matemáticos que estudió el problema del quinto postulado de Euclides, asumiendo que éste era falso y obteniendo resultados en geometría no euclidea. Introdujo y estudió las funciones hiperbólicas, y llevó a cabo importantes investigaciones en geometría esférica, cartografía y perspectiva. Asimismo realizó significativas contribuciones a la teoría de la probabilidad. Su labor no se limitó tan sólo a las matemáticas, sino que también realizó importantes estudios en física, astronomía y filosofía.

rrestre sobre el cilindro se obtiene al poner una fuente de luz sobre todo el eje del cilindro, rodeada de una lente que solamente permita pasar los rayos de luz proyectados en un plano horizontal, es decir, ortogonales al eje.

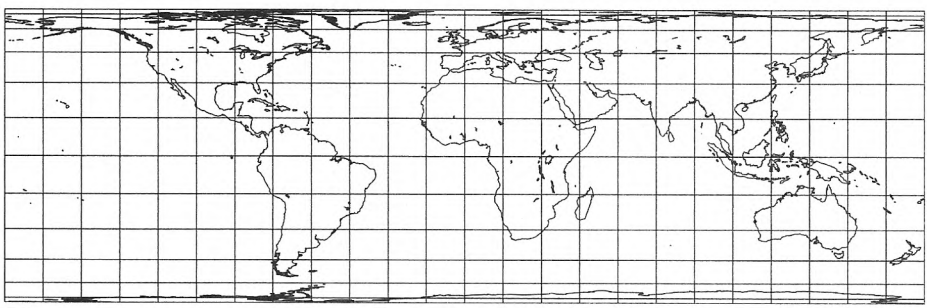




Fuente: Carlos A. Furuti.

La proyección de Arquímedes proyecta horizontalmente los puntos de la esfera terrestre sobre el cilindro tangente a la misma; después se desarrolla el cilindro tras cortarlo por un meridiano.

Si consideramos que la Tierra es nuestra esfera unidad y que el cilindro es la tangente a la esfera en el ecuador, luego su eje pasa por los polos Norte y Sur, entonces una vez proyectada la imagen de la esfera en el cilindro, éste se despliega en el plano, cortando por un meridiano del cilindro. Ese desarrollo del cilindro en el plano es isométrico y preserva todas las propiedades métricas. El mapamundi así obtenido fue el diseñado por J.H. Lambert en 1772.



Mapa realizado a partir de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert (1772).

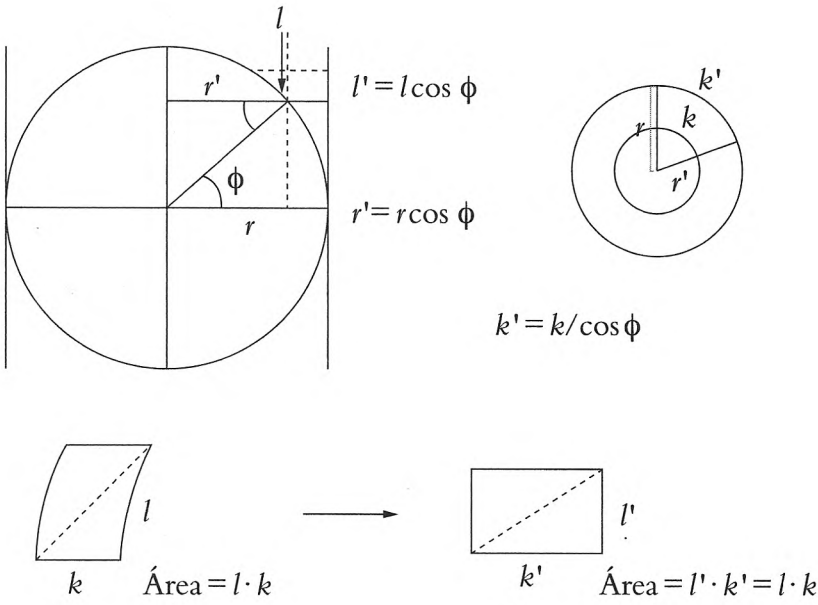
Éstas son algunas de las propiedades del mapa construido haciendo uso de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert:

1. Es de forma rectangular, como todas las proyecciones cilíndricas.
2. Los meridianos y los paralelos son rectas, de igual longitud cada una de las dos familias de rectas, que se intersecan ortogonalmente.
3. Los meridianos están igualmente espaciados, consecuencia de que la escala es constante en cada paralelo, aunque dicha constante varía de un paralelo a otro; sin embargo, los paralelos están desigualmente espaciados, comprimiéndose según se van acercando a los polos.
4. Como la proyección generadora es isoareal, entonces en el mapa se preservan las áreas, salvo el factor de «escala de superficie», que se originaba por la reducción del tamaño de la esfera terrestre (la homotecia) y que es constante en todo el mapa; sin embargo, no se preservan ni los ángulos ni las geodésicas.
5. La distorsión en las formas, los ángulos y las distancias es muy pequeña cerca del ecuador, donde la escala es real, pero mayor según nos acercamos a los polos.

Volvamos ahora al asunto central de este capítulo, que es el comportamiento de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert frente a las áreas, los ángulos y las geodésicas. Para demostrar que la aplicación de Arquímedes preserva el área, es suficiente probarlo para regiones «rectangulares» (suficientemente pequeñas, infinitesimales) cuyos lados son meridianos y paralelos.

Como se muestra en la figura siguiente, dado un punto sobre la esfera de latitud ϕ, la imagen de un meridiano (lo suficientemente pequeño) de longitud l es un segmento de recta en el cilindro, de longitud $l' = l \cos\phi$, mientras que la imagen de un paralelo (lo suficientemente pequeño) de longitud k es un arco de circunferencia en el cilindro de longitud $k' = k / \cos\phi$. Por lo tanto, dado un «rectángulo» infinitesimal de base k y altura l sobre la esfera, luego de área $l \cdot k$, éste se transforma en un «rectángulo» de base $k' = k / \cos\phi$ y altura $l' = l \cos\phi$, cuya área será también $l \cdot k$. En conclusión, la proyección de Arquímedes es una aplicación que preserva el área.

Recordemos que, siguiendo la filosofía del presente libro, ésta es una demostración intuitiva, con geometría clásica, y que una demostración más rigurosa se desarrollaría dentro de la geometría diferencial, haciendo uso del cálculo.



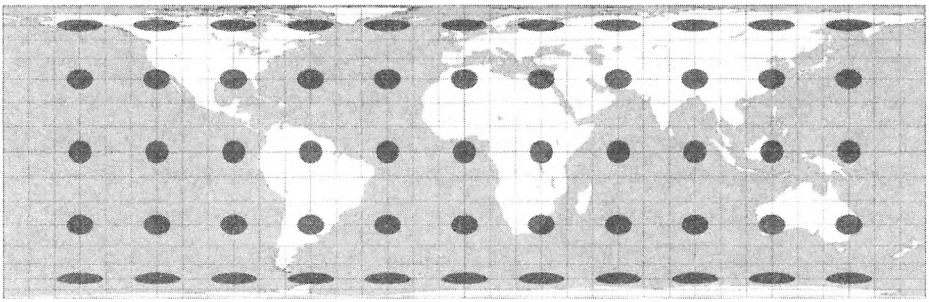
La proyección de Arquímedes es isoareal.

Sin embargo, en este mapa de Lambert no se preservan los ángulos. Para constatar este hecho nos sirve la imagen de la figura anterior. Vemos que por la distorsión que se produce en los meridianos (se contraen) y en los paralelos (se dilatan), el ángulo entre la base y la diagonal del rectángulo sobre la esfera es mayor que el mismo ángulo pero del rectángulo imagen sobre el plano. Sin embargo, el ángulo entre los meridianos y los paralelos, que es un ángulo recto, sí está preservado. En general, del comentario anterior podemos extraer la conclusión de que la condición necesaria y suficiente para que se preserven los ángulos es que ocurran estas dos cosas:

1. Que se preserven los ángulos entre los meridianos y los paralelos (que son ángulos rectos, es decir, de 90 grados).
2. Que la distorsión en la dirección de los meridianos μ sea igual a la distorsión en la dirección de los paralelos λ.

Por el teorema de Pitágoras, si se cumplen ambas propiedades podemos concluir además que la distorsión en cualquier dirección es siempre la misma. En particular, para la proyección cilíndrica isoareal de Lambert hemos visto que la distorsión que

se produce en los meridianos es $\mu = \cos\phi$, y en los paralelos es $\lambda = 1/\cos\phi$, y la imagen de un círculo alrededor de un punto de la esfera se transforma mediante esta proyección en una elipse del plano achatada en la dirección Norte-Sur (véase en la imagen siguiente las elipses generadas en diferentes lugares de la Tierra, que además nos muestra la deformación de las formas en diferentes latitudes).



La indicatriz de Tissot es una forma de representar gráficamente la deformación que se produce en un mapa. Se toman pequeñas circunferencias a lo largo de toda la superficie terrestre, para después considerar sus imágenes en el mapa y así tener una representación de la deformación que produce la proyección en los diferentes lugares. Así, si consideramos que la circunferencia tiene radio 1, ésta se transformará en una elipse de semiejes λ y μ. Si $\lambda = \mu$, las elipses serán circunferencias, y el mapa será conforme, y si $\lambda = 1/\mu$, la aplicación será isoareal. Aquí vemos la indicatriz de Tissot en el mapa cilíndrico isoareal de Lambert.

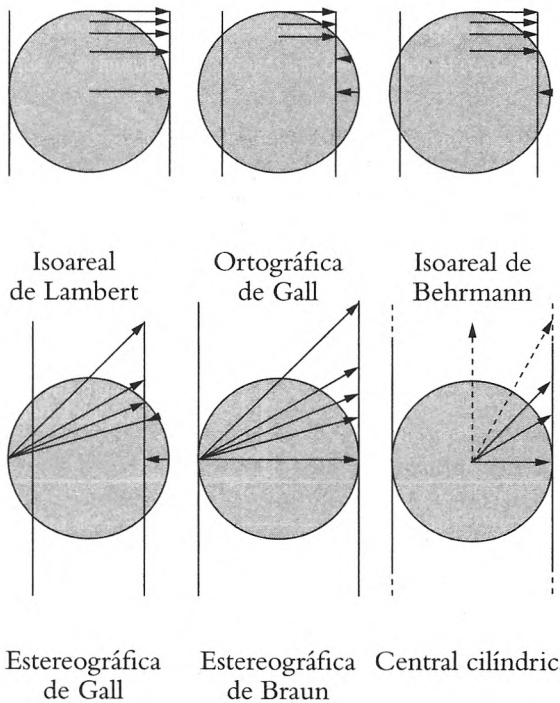
Finalmente, es obvio que esta aplicación no preserva las geodésicas, solamente los meridianos y el ecuador. En conclusión, las proyecciones isoareales pueden no ser isometrías, y la propiedad de preservar áreas no sería suficiente por sí sola para generar un mapa perfecto de la Tierra.

Proyecciones cilíndricas y pseudocilíndricas

La proyección cilíndrica isoareal de Lambert es una proyección geométrica cilíndrica, que se caracteriza por ser generada al proyectarse geométricamente la esfera terrestre sobre un cilindro tangente, en el ecuador en su versión normal, a la Tierra, para después desarrollar este cilindro en un plano, lo cual se consigue normalmente cortando el cilindro por uno de sus meridianos, una de sus rectas verticales. La distorsión de esta clase de mapas se produce en la primera etapa, ya que el desarrollo

del cilindro en el plano es isométrico y no causa distorsiones métricas. Cambiando el diámetro del cilindro, es decir, siendo secante a la esfera, su posición o la forma de proyectar los «rayos», se obtienen diferentes mapas geométricos cilíndricos.

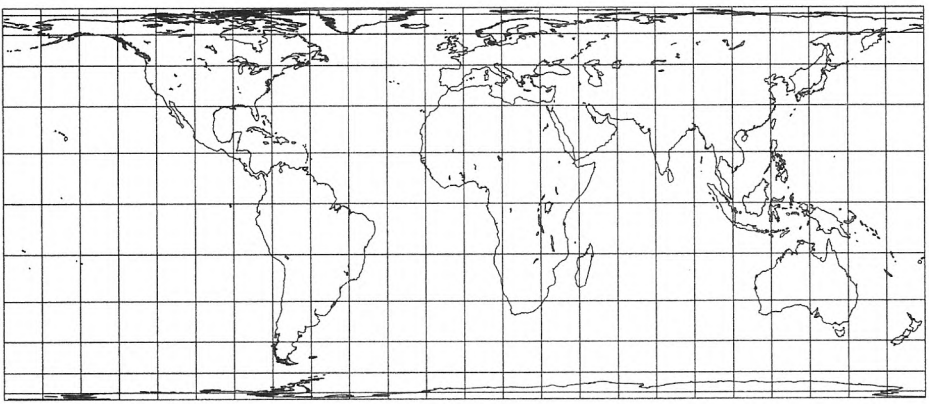
Otras proyecciones de esta clase son la proyección cilíndrica central (que consiste en proyectar los «rayos de luz» desde el centro de la esfera sobre ésta y hacia el cilindro, y que tiene una distorsión muy fuerte hacia los polos, más incluso que en el caso de la proyección de Mercator) o la proyección estereográfica de Braun (1867, para la cual los puntos de cada meridiano se proyectan, desde el punto opuesto del ecuador en ese meridiano, sobre el cilindro, y que fue un intento, como también lo fue en ese tiempo la proyección estereográfica de Gall, de compensar la distorsión excesiva de la proyección de Mercator cerca de los polos).



Esquema de una sección de algunas proyecciones cilíndricas geométricas que nos explica las diferencias en tamaño y aspecto de los mapas que generan.

Estamos considerando que el cilindro sea tangente a la esfera en el ecuador, pero también podemos tener en cuenta los casos en los que el cilindro fuese secante al globo, cortándolo por dos paralelos simétricos con respecto al ecuador. Así, la mis-

ma proyección geométrica que para el caso de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert nos generará, por ejemplo, la proyección de Behrmann (1910) si los paralelos de corte están a 30°N y S, o la proyección de Gall-Peters (1855 y 1967) si están a 45°, ambas también equivalentes. La versión secante a 45° de la proyección estereográfica de Braun es la proyección estereográfica de Gall (1885).



Mapa realizado con la proyección cilíndrica isoareal de Behrmann, que es secante con los paralelos a 30° del ecuador.

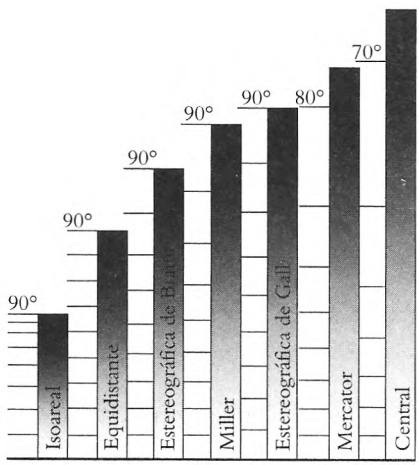
El concepto de proyección cilíndrica se extiende de las proyecciones geométricas a las algorítmicas que comparten algunas propiedades con las anteriores:

1. Las líneas coordenadas, meridianos y paralelos, son líneas rectas que se cortan ortogonalmente.
2. La escala es constante a lo largo de los paralelos (diferente para cada paralelo), luego los meridianos están igualmente espaciados; los meridianos y paralelos tienen la misma longitud.

En particular, los mapamundis generados con estas proyecciones son rectangulares y presentan un comportamiento simétrico con respecto al ecuador. Algunos ejemplos son la proyección cilíndrica equidistante (esta sencilla proyección introducida por Eratóstenes tiene la propiedad de que los meridianos también tienen escala constante y por tanto los paralelos están igualmente espaciados, siendo un caso particular cuando la separación entre meridianos y paralelos es la misma y se forma un retículo cuadrado, que es conocido con el nombre de Plate Carrée, y que

es la proyección matemática con la formulación más sencilla puesto que simplemente representa en el plano la latitud ϕ y la longitud θ), la proyección cilíndrica de Miller (1942, un intento de mantener las formas de la proyección de Mercator, pero reduciendo la exageración polar de ésta, aunque el resultado no es ni isoareal ni conforme) o la proyección de Mercator (que comentaremos extensamente en el capítulo 9).

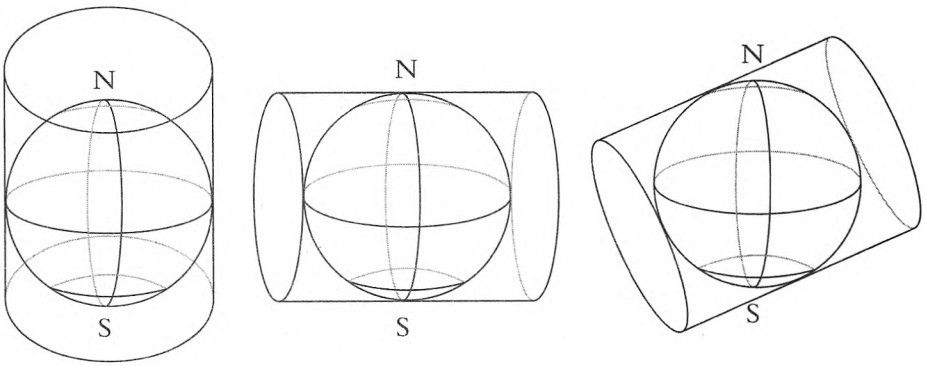
En la figura siguiente podemos ver una comparativa de cómo están espaciados los paralelos en el hemisferio norte, produciéndose diferentes deformaciones, para algunas proyecciones cilíndricas, con la misma escala en el ecuador.

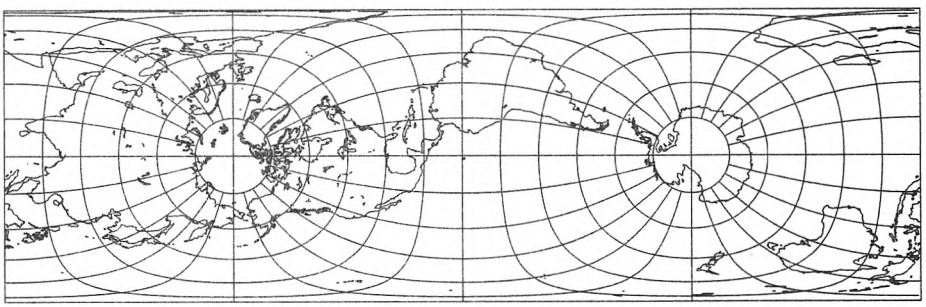


Comparación de la separación entre los paralelos en algunas proyecciones cilíndricas.

Además, se pueden considerar diferentes aspectos de las proyecciones cartográficas (normal, transverso y oblicuo), que tienen que ver en general con la posición del plano, el cilindro o el cono sobre el que se proyecta, en relación con la esfera terrestre, y cuya primera consecuencia es la diferente apariencia de la red de meridianos y paralelos. El aspecto normal de la proyección cilíndrica, en el caso geométrico y por extensión también en el algorítmico, es aquel en el que el cilindro es tangente a la esfera en el ecuador o secante en un par de paralelos, que es el caso anteriormente comentado. El aspecto transverso es aquel en el que el cilindro es tangente a un meridiano, o secante en círculos paralelos al meridiano, mientras que hablaremos del aspecto oblicuo cuando la tangencia sea un círculo máximo que no sea ni un meridiano ni el ecuador, o las curvas de intersección del cilindro y la es-

fera sean círculos paralelos a un círculo máximo de éstos. La conveniencia de utilizar el aspecto transverso o el oblicuo reside, por ejemplo, en la necesidad de fijar nuestro interés en un territorio que se extiende a lo largo de un meridiano, respectivamente de un círculo máximo genérico, ya que la distorsión es menor en el entorno de las curvas de tangencia.





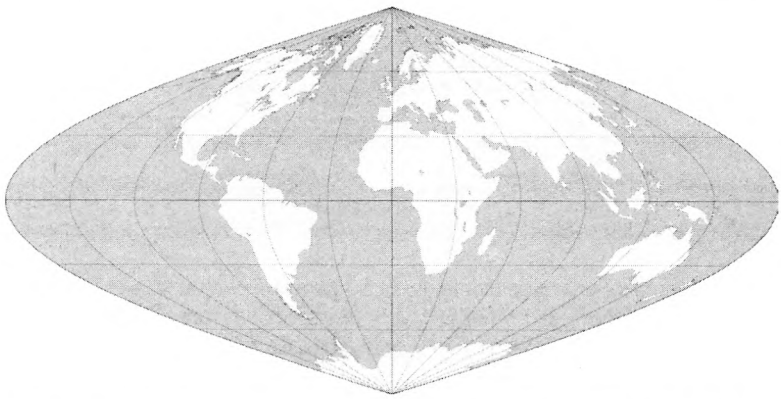
Los esquemas de arriba muestran diferentes aspectos de las proyecciones cilíndricas. La imagen inferior es la proyección cilíndrica isoareal de Lambert (1772), cuyo meridiano de tangencia es 90°O, que atraviesa Norteamérica de Norte a Sur.

En su versión normal, las proyecciones cilíndricas producen fuertes distorsiones en la forma, y muy frecuentemente también en el área, en zonas cercanas a los polos. Asimismo, los mapamundis rectangulares que producen pueden hacer que algunas personas, en particular los escolares, tengan una imagen irreal del mundo.

Las proyecciones pseudocilíndricas tratan de dar solución a ambos problemas comprimiendo los paralelos según nos vamos acercando a los polos. En su aspecto normal, tangente al ecuador, las proyecciones pseudocilíndricas presentan las siguienes características:

1. Los paralelos son rectas horizontales no necesariamente equidistantes.
2. Los meridianos son curvas arbitrarias equidistantes a lo largo de todos los paralelos.

Por lo tanto, como en las proyecciones cilíndricas, la escala es constante a lo largo de los paralelos; sin embargo, como los meridianos y los paralelos no se cortan ortogonalmente, ninguna de estas proyecciones puede ser conforme. Algunos ejemplos muy utilizados en los atlas son dos proyecciones isoareales: la de Mollweide (1805, mapamundi de forma elíptica para el cual los meridianos son elipses), y la proyección sinusoidal o de Sanson-Flamsteed (posiblemente introducida por Mercator y cuyos meridianos son curvas sinusoidales). Otros mapas basados en proyecciones pseudocilíndricas son el de Collignon (1865, en sus versiones triangular o diamante, con meridianos de rectas inclinadas, que preserva las áreas pero tiene gran distorsión en las formas), la serie de seis mapas de Eckert (1906, los pares isoareales y los impares con los paralelos igualmente espaciados, y cuyos meridianos son en cada dos mapas, rectas, circunferencias o elipses) o la proyección de Robinson (1974, utilizada por la National Geographic Society para sustituir la proyección de Mercator en los mapamundis).



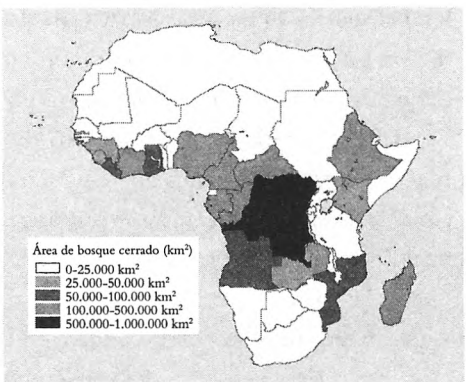
Mapamundi realizado con la proyección sinusoidal o de Sanson-Flamsteed. También se la conoce como isoareal de Mercator, puesto que la utilizó en algunos mapas de sus atlas.

La utilización de los mapas isoareales

En relación al uso de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert, ya hemos comentado que es de moderado interés en cartografía para el diseño de mapas de toda la superficie terrestre debido a la enorme distorsión que se produce en las zonas

polares, excepto en los libros sobre cartografía o geometría diferencial, como ejemplo sencillo de construcción de una proyección que conserva las áreas. Más interés tienen algunas variaciones de esta proyección, en su versión normal, como la de Gall-Peters (que veremos de forma detallada en el capítulo 9) o la de Behrmann, que suele utilizarse en el diseño de mapamundis.

Sin embargo, la moderada distorsión que se produce en el entorno de la curva de tangencia la hace muy apropiada, en su versión normal, para mapas de la zona tropical o mapamundis en los cuales la atención se centra en esa zona, como por ejemplo aquellos en los que se muestra la producción mundial de caucho, maderas, arroz, caña u otros productos esencialmente tropicales. En su versión transversa es útil para mapas de zonas que se extienden en la dirección Norte-Sur, mientras que para zonas a lo largo de un círculo máximo sería el aspecto oblicuo. Este último ha sido utilizado para mapas de Eurasia y África, y para rutas aéreas de la Commonwealth.



Mapa que muestra las zonas de bosque cerrado del continente africano, realizado con la proyección cilíndrica isoareal de Lambert.

La propiedad de preservación de las áreas es, obviamente, una propiedad prioritaria para mapas con información basada en regiones de ciertos territorios. Es necesaria, por ejemplo, si deseamos calcular el porcentaje del territorio de la selva amazónica que ha sido deforestada, si estamos acometiendo una reparcelación agraria de una provincia o autonomía o si manejamos un mapa en el que se muestra la cantidad de habitantes por kilómetro cuadrado. En un mapa de este tipo el área está a escala, y si conocemos esa «escala de superficie» (recordemos que no hay que confundirla con la escala normal, la de la distancia, que es lineal, y que, por ejemplo,

en el mapa cilíndrico isoareal de Lambert no es constante a lo largo de todo el mapa, como se deduce fácilmente del hecho de que la longitud de todos los paralelos en el mapa sea la misma pero no en la superficie terrestre) podemos incluso utilizarlo para calcular áreas de territorios simplemente calculando el área de dicha zona en el mapa y multiplicándola por la escala de superficie.

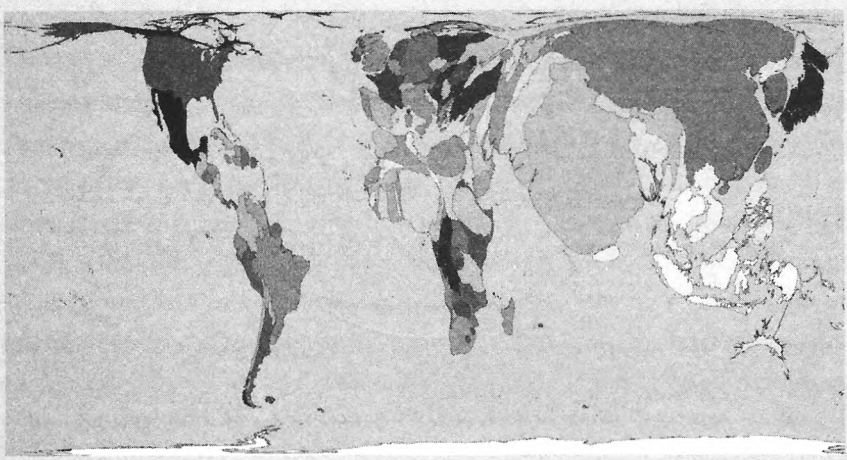
Pero, salvo en casos particulares, no se consulta un mapa para calcular áreas, ya que esta información, cuando se refiere a territorios concretos, se puede expresar simplemente de forma numérica, sino que lo interesante de este tipo de mapas es que nos permiten comparar las áreas de diferentes territorios, contrastar la superficie de cierta región con sus vecinas u otras regiones relacionadas en el estudio, o el área de una parte con respecto al total, ya sea un país, un continente o la Tierra en su conjunto.

Y puesto que los mapas son un instrumento para transmitir información «de un vistazo», de forma más rápida, ilustrativa y significativa que una tabla de números, es importante que para los mapas «de distribución», ya sean de especies vegetales o animales, de escuelas, de aeropuertos, de producción de un cierto producto, de niveles de contaminación, de religiones o de cualquier otro tipo que vayan a utilizarse en publicaciones científicas o divulgativas, en medios de comunicación o en textos educativos, se utilicen proyecciones equivalentes. Para una mayor utilidad de la información estadística que estemos manejando es importante que los territorios a los que se refiera el estudio estén representados correctamente en función de su superficie; en caso contrario podrían inducir a error o ser malinterpretados, ya que no podemos apreciar a qué extensiones se corresponden los datos. Asimismo, para este tipo de mapas sería también deseable que la deformación en las formas fuese la menor posible, aunque, como observamos en la proyección cilíndrica isoareal de Lambert, y esto ocurre para muchos mapas isoareales, la distorsión en las formas es significativa, en especial en las zonas polares.

En general, en educación sería deseable que los mapas no tuvieran distorsión en el área y en las formas (algo que, como veremos más adelante, es imposible), ya que los mapas que los jóvenes ven o manejan en el aula son los que van a formar su imagen mental de la Tierra, de los continentes y de los países, y ésta podría estar muy distorsionada, como ya se sugería en un informe de 1907 de la Asociación Geográfica Británica. Por lo tanto, habría que utilizar o bien mapas isoareales con la menor distorsión posible en las formas, o bien otros cuya deformación en área y forma sea pequeña, como dos de los mapas considerados por la National Geographic Society, el de Robinson y el de Winkel-Tripel.

CARTOGRAMAS

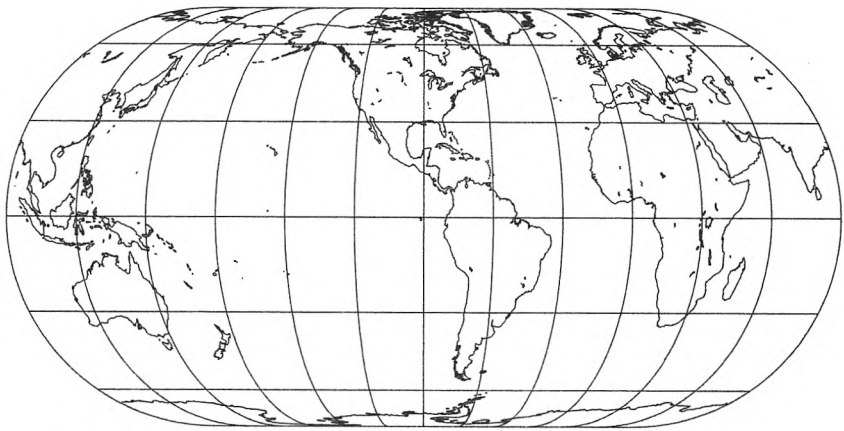
Los cartogramas son mapas en los cuales la superficie de los países, o las diferentes regiones consideradas, aparecen redimensionadas en proporción a su población o a alguna otra propiedad análoga (tasa de nacimientos o muertes, incidencia de enfermedades, datos de producción, niveles de contaminación, parámetros económicos, tasas de pobreza u otro tipo de información sobre la población humana). Aunque existen diferentes técnicas y metodologías, a los cartogramas se les pide normalmente que las diferentes regiones sigan «pegando» adecuadamente (aunque existen también cartogramas discontinuos) y que la distorsión en formas sea la menor posible.



Cartograma en el que aparece representada la distribución de la población mundial por países. Su superficie está establecida en función de dicha distribución (© Copyright SASI Group. University of Sheffield).

Una de las ventajas de la utilización de los cartogramas es que nos permiten comparar de forma visual y rápida los valores de la información estudiada para los diferentes territorios. El resultado suele ser impactante y provocador para el lector, aunque no está exento de inconvenientes: se pierde la realidad geográfica, son difíciles de «leer» y dan la impresión de ser mapas incompletos, quizá por el desarraigo geográfico, por lo que es conveniente complementarlos con mapas isoareales. En cualquier caso, sirven para llamar la atención y alentar una visión crítica.

Otras proyecciones isoareales son la cónica isoareal de Albers (1805), la de Mollweide (1805), la ortográfica de Gall-Peters (1855 y 1967), la de Eckert IV (1906), la proyección azimutal isoareal de Lambert (1772) o la proyección sinusoidal (o de Sanson-Flamsteed, 1650 y 1729), entre otras muchas.



En 1906, el geógrafo alemán Max Eckert publicó seis proyecciones pseudocilíndricas; las que llevan un número par son isoareales, como la que aquí se ilustra, que es la Eckert IV.

Desgraciadamente, aunque parece que poco a poco esto empieza a cambiar, es frecuente que desde la educación, la divulgación científica o los medios de comunicación no se ponga demasiado cuidado en la elección de los mapas. Por otra parte, en ocasiones la utilización consciente de mapas que no preservan el área puede deberse a intentos de manipulación política. Por ejemplo, pueden ser utilizados en propaganda política para que una región o país parezca más grande e importante, con el objetivo de mostrar su poder político, económico o militar, intimidar o agredir psicológicamente a otros territorios. Así, muchos países aprovecharon la hegemonía de la proyección de Mercator, debido a su trascendental importancia en navegación y en el curso de la historia, para el diseño de intencionados mapamundis. A los ingleses les gustaba utilizarla, y normalmente el Imperio Británico aparecía pintado de color rojo, mucho más poderoso a los ojos de los demás, con el meridiano de Greenwich y, por tanto, Inglaterra, en el centro, y sus colonias en zonas en las que se exageraba el área; en algunos casos incluso Australia y Nueva Zelanda aparecían repetidas a ambos lados.

Mapa del Imperio Británico en 1907.

El Imperio Ruso y, posteriormente, la comunista Unión Soviética, aprovecharon que el mapamundi de Mercator mostraba una Rusia extremadamente enorme para exhibir su poder al resto del mundo. Pero también al contrario, algunos grupos políticos que alertaron sobre el supuesto «peligro rojo», la instauración del comunismo en el mundo, utilizaron también este mapa mostrando los exagerados territorios de la URSS y China con un agresivo rojo intenso. Igualmente, Europa y Estados Unidos se sintieron cómodos (al menos en general no sintieron la necesidad de cambiar de proyección) con un mapa que era generoso con su imagen mundial.

Por el contrario, puede que un país se muestre más pequeño para demostrar que está siendo agredido por otros países o territorios. Así, en el libro *How to Lie with Maps*, su autor Mark Monmonier pone el ejemplo de un mapa publicado en 1973 por la Jewish National Fund de Canadá que, para demostrar la «mentira árabe» sobre la agresión israelí, mostraba a Israel, en blanco, en medio de la zona árabe, en negro, que recorría el norte de África, desde Marruecos hasta Arabia Saudí. El mapa «hablaba» de la extensión de ciertos territorios, pero no de la tecnología, poder militar, poder económico o apoyo internacional. Por cierto, los nazis, que fueron unos expertos en la utilización de la propaganda política y en particular de los mapas, ya habían utilizado ese mismo argumento en un mapa que con el texto «Alemania, ¿la nación agresora?» comparaba el territorio germano con el de todo el Imperio Británico.

Éstos son solamente algunos ejemplos, pero la historia de la cartografía guarda muchos más.

Capítulo 6

Proyección central o gnomónica

Einstein siempre será difícil/para ser abordado con nuestros enclenques cerebros./
Sea cual sea tu velocidad de obturación/—y la velocidad de obturación siempre
puede cambiar—/por cualquiera de los caminos caen las sombras,/la velocidad
de la luz será siempre la misma./Hay otras palabras y conceptos aquí/
que te hacen sentir desencajado./La «geodésica» toma el camino más corto/
desde un punto a otro cercano./En este complejo tablero de ajedrez,/
vea dónde están sus coordenadas;/para poner a prueba por medio
de las matemáticas/sus teorías sobre lo cercano y lo lejano.
Keki N. Daruwalla, «Space-time instruction», *The Map-maker* (2002)

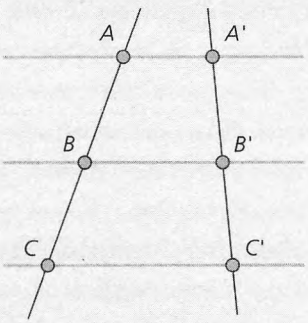
La proyección central o gnomónica está considerada la proyección más antigua y se suele atribuir a Tales de Mileto, quien supuestamente la utilizó en su versión oblicua para diseñar mapas del cielo estrellado. Esta proyección azimutal, del globo terráqueo en un plano tangente al mismo se denominaba antiguamente *horologium* u horóscopo, por su relación con los relojes de sol, que tienen gnomons. En los relojes de sol el gnomon se sitúa inclinado y apuntando hacia el Polo Norte, y su sombra nos va indicando las horas a lo largo del día mientras el Sol cruza el cielo. Los ángulos entre las marcas horarias de un reloj de sol designado para cierta latitud son iguales a los ángulos entre los meridianos en la proyección gnomónica centrada en esa misma latitud, contando 15° de longitud desde el meridiano central como una hora más desde el mediodía solar.

El origen del uso del término proyección central es desconocido, mientras que el término «proyección gnómica» fue introducido en 1749 por el matemático inglés William Emerson, y más tarde, en 1836, el matemático británico Augustus de Morgan introdujo el término de «proyección gnomónica». La riqueza geométrica de esta proyección está en el hecho de que representa las curvas que nos dan los caminos más cortos (las geodésicas) de la esfera, también llamadas ortodrómicas, que, como sabe-

TALES DE MILETO (CA. 624 A.C.-CA. 547 A.C.)

Se sabe muy poco de la vida y obra de este filósofo y matemático griego, tan sólo lo que nos ha llegado a través de referencias en obras de filósofos e historiadores posteriores, como Aristóteles, Heródoto o Diógenes Laercio. Maestro de Pitágoras, en la Antigüedad era considerado el primer filósofo, así como el primero de los siete sabios de Grecia. Se le atribuye una serie de resultados geométricos entre los cuales se encuentran dos que se conocen con el nombre de «teorema de Tales»:

1. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.
2. Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los correspondientes segmentos de la otra recta.

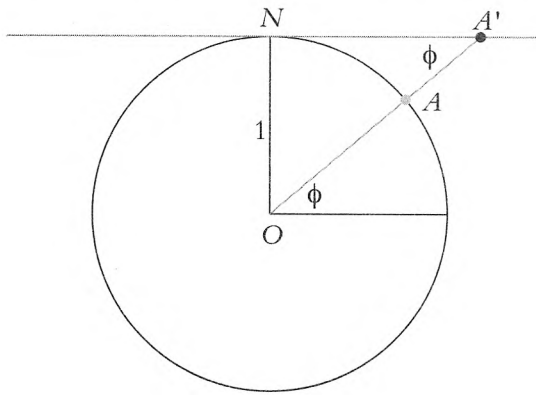


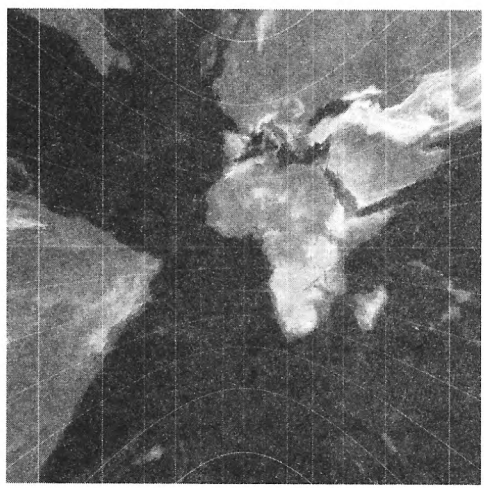
Aunque no podemos estar seguros de cuáles fueron sus verdaderas aportaciones científicas, lo cierto es que fue el primer matemático al que se le atribuyeron resultados matemáticos concretos; además, se le reconoce como el creador de la geometría deductiva. Diferentes fuentes le describen como autor de actividades de tipo práctico, como la medición de pirámides en Egipto observando las longitudes de las sombras de éstas y de un palo vertical auxiliar, la predicción del eclipse de sol o el cálculo de la distancia de un barco a la costa por medio de la proporcionalidad de triángulos semejantes. A Aristóteles debemos la historia acerca de la riqueza de Tales. Éste, haciendo uso de sus conocimientos astronómicos, pronosticó que la siguiente cosecha de aceite sería abundante, motivo por el cual se hizo con el control de las prensas de aceite de Mileto y Quíos, y de esta manera pudo imponer meses después, tras la recolección, el precio que quiso a quienes requirieron su utilización, llegando a conseguir con ello una cierta fortuna y dando respuesta a los reproches de sus conciudadanos en relación a su pobreza y la inutilidad de su filosofía.

mos, son los círculos máximos, como líneas rectas en el mapa, mientras que su punto débil es que la deformación es muy exagerada según nos vamos alejando del punto de tangencia, que es el punto central del mapa, lo cual descarta su uso en cartografía como mapamundi, aunque no para otros fines, como veremos más adelante.

Definición y propiedades cartográficas

Consideramos una esfera y un plano tangente a ella. La imagen de un punto A de la esfera mediante la aplicación central es el punto A' del plano que se obtiene al intersecarlo con la recta que pasa por A y el centro de la esfera.

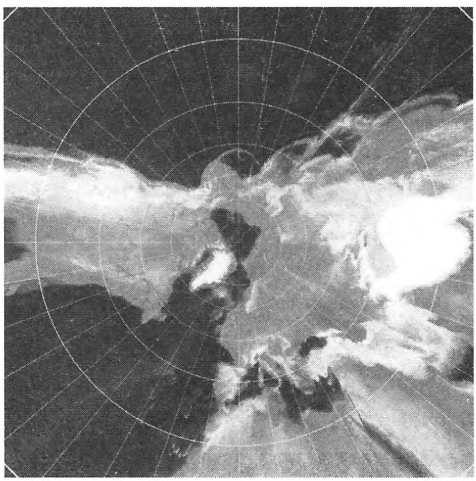




Esquema de la proyección central o gnomónica y mapa realizado empleando dicha proyección en su versión ecuatorial.

Esta proyección es claramente una proyección geométrica. Si volvemos a pensar en la esfera terrestre como una bola de plástico semitransparente donde están dibujados los continentes y otros accidentes geográficos, podemos ver la imagen de este mapa sobre la mesa blanca en la que hemos apoyado la bola de plástico, al colocar y encender una luz en el centro de la bola.

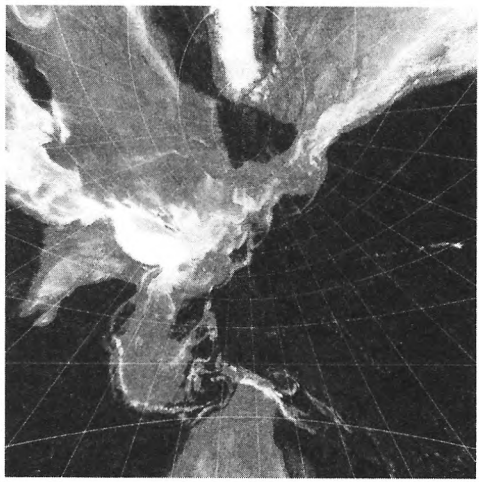
Si el punto de tangencia es uno de los polos, entonces los meridianos son rectas radiales e igualmente espaciadas que emanan del centro del mapa, que representa al polo. El ecuador es el infinito, que nunca podrá representarse, aunque como el mapa tiene que tener una extensión finita tampoco podremos representar todo un hemisferio, ya que requeriría un plano infinito. Los otros paralelos están representados por circunferencias concéntricas alrededor del polo.



Mapa elaborado con la proyección gnomónica polar, centrada en el Polo Norte.

Si el punto de tangencia está en el ecuador, los meridianos son rectas paralelas, aunque no igualmente espaciadas. El ecuador es una recta perpendicular a los meridianos, y los otros paralelos son hipérbolas.

Si el punto de tangencia está en cualquier otro punto, los meridianos son rectas radiales que apuntan al polo, aunque no están espaciadas de manera regular. El ecuador es una recta perpendicular únicamente al meridiano en el que está el punto de tangencia, y los otros paralelos son elipses para latitudes más cercanas al polo de ese hemisferio, una parábola para la latitud del punto de tangencia e hipérbolas para latitudes más lejanas.



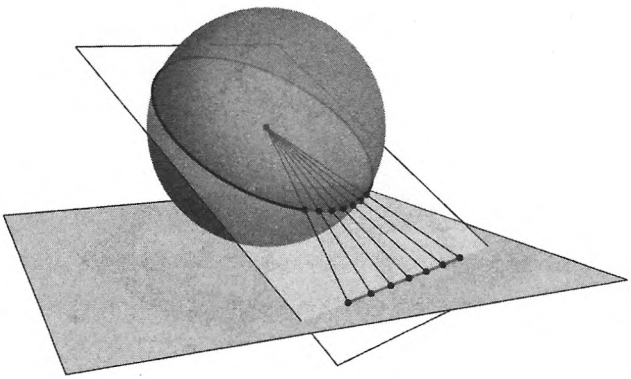
Mapa realizado con la proyección gnomónica oblicua, centrada en Japón.

Éstas son algunas propiedades del mapa construido a partir de la proyección gnomónica:

1. Normalmente su imagen es circular (aunque puede acotarse con otras formas) y cubre tan sólo parte de uno de los hemisferios.
2. Los círculos máximos que pasan por el punto de tangencia se transforman en rectas radiales igualmente espaciadas (si tomamos una familia de círculos máximos separados por un mismo ángulo), mientras que los puntos que están a la misma distancia del punto de tangencia se transforman en circunferencias centradas en dicho punto.
3. La forma y distribución de los meridianos y los paralelos es como ya hemos indicado anteriormente; además, la distorsión en la dirección de los meridianos es $\mu = 1/\text{sen}^2\phi$, y la distorsión en la dirección de los paralelos, $\lambda = 1/\text{sen}\,\phi$.
4. Esta proyección preserva las geodésicas, pero no distancias, ángulos ni áreas.
5. La distorsión de áreas, formas y ángulos, aunque menor cerca del centro, el punto de tangencia, es muy pronunciada a medida que nos alejamos de dicho punto.

La demostración de que la proyección central preserva las geodésicas es geométrica y muy sencilla. La clave está en tener en cuenta que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos, que éstos se obtienen como la intersección de la esfera

con un plano que pasa por el centro de la misma y que, en consecuencia, la imagen de un círculo máximo mediante la proyección central es la recta intersección del plano que genera el círculo máximo y el plano de tangencia, como puede verse en la imagen. Así queda demostrado que la aplicación transforma geodésicas de la esfera (círculos máximos) en geodésicas del plano (rectas).



La proyección gnomónica preserva las geodésicas, transforma círculos máximos de la esfera en rectas sobre el plano.

Pero, además, se podría demostrar que ésta es la única proyección cartográfica que satisface esta propiedad, contrariamente a lo que ocurre con las áreas o los ángulos: para estas propiedades encontramos muchas proyecciones que los preservan.

Con el objetivo de estudiar si la proyección gnomónica preserva las áreas y/o los ángulos calcularemos la distorsión que se produce en meridianos y paralelos. Para ello vamos a calcular en esencia la indicatriz de Tissot de cualquier punto de la esfera, es decir, tomamos un disco lo suficientemente pequeño (de hecho, infinitesimal, por lo que podemos considerarlo sobre el plano tangente a la esfera en dicho punto) y vemos cómo es la elipse en la que se transforma por la proyección.

Partimos de una esfera de radio 1, que es nuestra superficie terrestre a escala, y el plano de proyección T, que es tangente a la esfera en el punto de tangencia (que bien podría ser el Norte) y sobre el que proyectamos parte del hemisferio desde el centro del mismo. Entonces, consideremos un punto A de la esfera de latitud ϕ y un disco D de radio r lo suficientemente pequeño, tangente a la esfera en dicho punto.

Para ver su imagen, en el plano de proyección T, mediante la proyección central, separaremos el estudio en dos fases. En la primera, el disco D se transforma en un

disco D' que descansa en un plano paralelo al de D y cuyo centro es A', la imagen de A mediante la proyección central. Por similitud de triángulos (teorema de Tales), en la figura siguiente obtenemos que el radio r' de D' satisface que

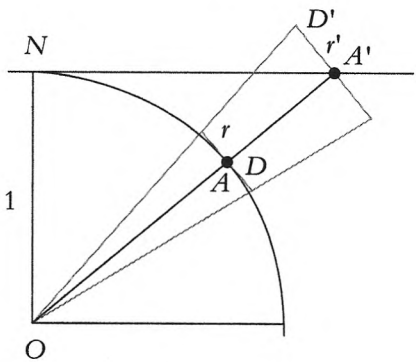
$$\frac{r'}{r} = \frac{|OA'|}{1},$$

y utilizando trigonometría elemental,

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{|OA'|},$$

se deduce que:

$$r' = \frac{r}{\operatorname{sen}\phi}.$$



Fase de expansión de la proyección gnomónica.

Ahora, la proyección del disco D' sobre el plano tangente T nos dará la imagen deseada, que ya no es un disco, sino una elipse. En la dirección «Este-Oeste» el disco D' interseca al plano T, luego no hay ningún cambio al proyectarlo y, por tanto, el semieje correspondiente de la elipse será el radio ya calculado:

$$r' = \frac{r}{\operatorname{sen}\phi}.$$

Luego la distorsión en el paralelo es:

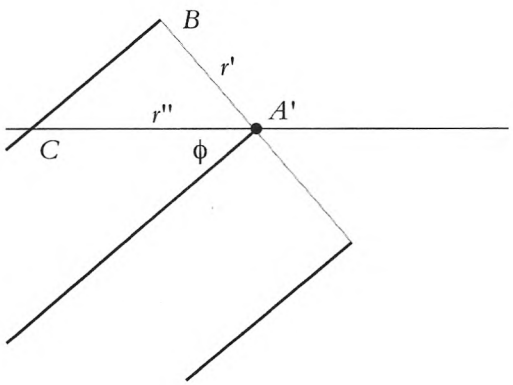
$$\lambda = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}.$$

Pero veamos qué ocurre en la dirección «Norte-Sur», que nos dará la distorsión en el meridiano. Como el radio r' es muy pequeño en comparación con la distancia de A' al origen O, el ángulo $A'BC$ (figura siguiente) está muy cercano al ángulo recto (en consecuencia, como r es lo suficientemente pequeño, podemos considerar que dicho ángulo es recto). Por lo tanto, el segmento en la dirección «Norte-Sur» de longitud r' se convertirá en un segmento en el plano T de longitud r'' igual a

$$r'' = \frac{r'}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{r}{\operatorname{sen}^2\phi},$$

de nuevo haciendo uso de la trigonometría elemental. Y la distorsión en el meridiano será:

$$\mu = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi}.$$



Fase de distorsión de la proyección gnomónica.

En consecuencia, la imagen D'' de la circunferencia D de radio r, mediante la proyección central, es una elipse de semiejes:

$$r' = \frac{r}{\operatorname{sen}\phi} \quad y \quad r'' = \frac{r}{\operatorname{sen}^2\phi}.$$

Como conclusión tenemos que la proyección central no preserva las áreas, ya que, por lo comentado anteriormente, la distorsión en meridianos

$$\mu = \frac{1}{sen^2\phi}$$

debía ser la inversa de la distorsión en paralelos

$$\lambda = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi},$$

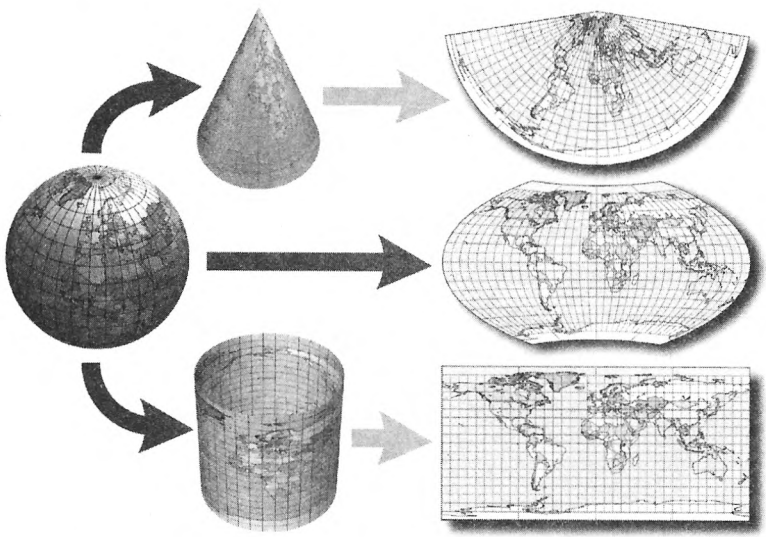
lo cual ahora no es cierto:

$$1 \neq \lambda\mu = \frac{1}{\operatorname{sen}^3\phi}.$$

Tampoco preserva los ángulos, puesto que la distorsión en meridianos y paralelos no es la misma.

Proyecciones azimutales

Las proyecciones geométricas se clasifican en azimutales, cilíndricas (estudiadas en el apartado anterior) y cónicas dependiendo de si la superficie auxiliar de proyección es directamente un plano, un cilindro o un cono. La utilización del cilindro y el cono se debe a que son superficies desarrollables, es decir, que pueden desplegarse en una superficie plana sin que se produzca distorsión en las propiedades métricas en dicho desarrollo.

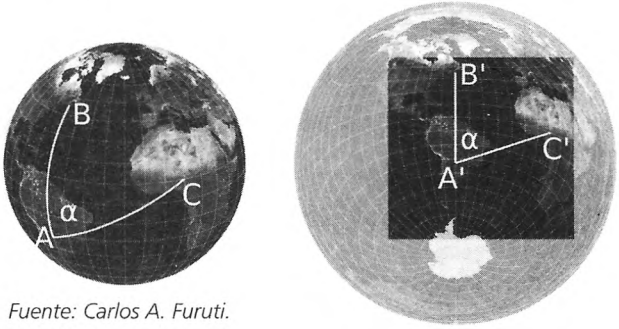


Tipos de proyecciones, dependiendo de la si la superficie auxiliar sobre la que se proyecta es directamente un plano, un cilindro o un cono, dando lugar a proyecciones azimutales, cilíndricas o cónicas (fuente: Carlos A. Furuti).

Aunque éstas son las superficies auxiliares principales, también se podrían tomar otras superficies auxiliares intermedias no necesariamente desarrollables (si bien esto no suele ser lo habitual), como, por ejemplo, en la proyección armadillo (Erwin J. Raisz, 1943), que consiste en proyectar la esfera sobre la superficie de un toro (recordemos que para los matemáticos esta superficie es la que tiene la forma de un flotador) y luego proyectar ortogonalmente, según una cierta dirección, sobre un plano:

A pesar de que las proyecciones algorítmicas se expresan mediante fórmulas matemáticas y no tienen interpretación geométrica, es habitual clasificarlas igualmente como azimutales, cilíndricas o cónicas cuando comparten con ellas algunas de sus propiedades fundamentales.

Pero volviendo a las proyecciones azimutales, sorprende que no se hable simplemente de proyecciones «planares» o planas. ¿De dónde surge la expresión «azimutal»? Dado un punto A de la superficie terrestre y otros dos puntos B y C, el azimut de B a C es el ángulo formado por las curvas de mínima distancia que unen A con B y A con C, que ya sabemos que son los círculos máximos. Es decir, es el ángulo que alguien situado en el punto A mirando a B tiene que girarse para mirar a C, tal como se muestra en la ilustración:



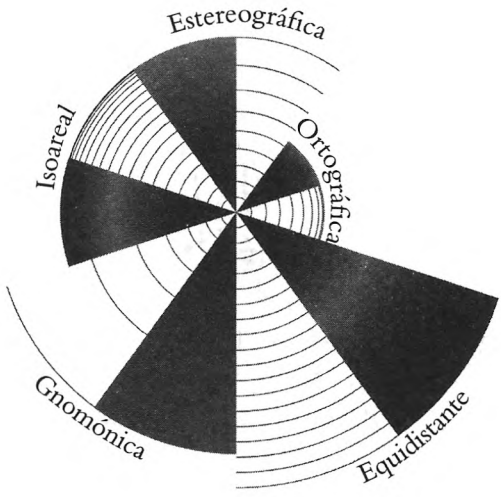
Fuente: Carlos A. Furuti.

Este concepto procede de la astronomía y de la náutica, y se refiere al ángulo, o longitud de arco, medido sobre el horizonte lejano que forman el punto cardinal Norte, o respectivamente el Sur, y la proyección vertical del astro sobre el horizonte del observador.

Por lo tanto, en su origen las proyecciones azimutales son aquellas que preservan el azimut desde un punto de referencia fijo, que es el centro del mapa; por tanto, preservan las direcciones a otros puntos cualesquiera, pero no necesariamente las distancias. Las que serían aplicaciones planares reciben el nombre de azimutales debido a que se obtienen al proyectar directamente sobre un plano tangente (también se podría considerar un plano secante) a la superficie terrestre.

Todas las proyecciones azimutales en su versión polar (con el Polo Norte o el Polo Sur como punto de referencia) satisfacen las siguientes propiedades:

1. Los meridianos son líneas rectas, igualmente espaciadas (si consideramos una red de meridianos separados por un ángulo constante), que pasan por el punto central.
2. Los paralelos son circunferencias concéntricas centradas en el punto de tangencia; por lo tanto, las diferentes proyecciones azimutales están determinadas por la forma de distribuirse o de espaciarse las circunferencias imágenes de los paralelos.



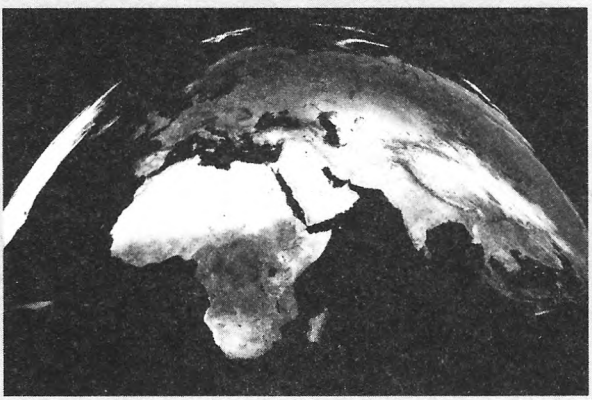
Comparativa de la distribución de los paralelos en las versiones polares de diferentes proyecciones azimutales (fuente: Carlos A. Furuti).

En cualquier aspecto, no sólo el polar, las rectas radiales que emanan del centro son las imágenes de las geodésicas, de los círculos máximos, que pasan por el punto de tangencia. Pero, en general, no se preservan las distancias desde ese punto (sólo en el caso de la proyección azimutal equidistante). Además, el resto de las geodésicas, las que no pasan por el punto de referencia, en general no son preservadas, salvo en el caso particular de la proyección gnomónica, que estamos estudiando aquí.

MAPAS PARA DETERMINAR LA DIRECCIÓN A LA MECA

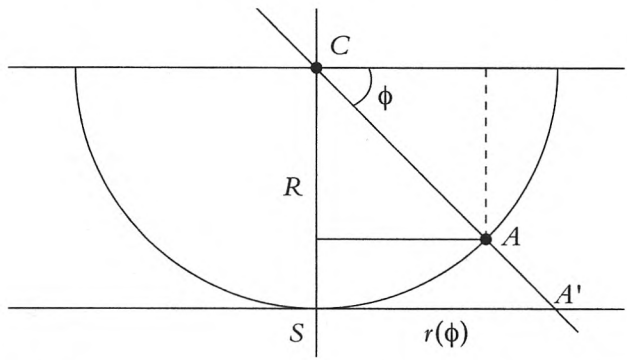
Los musulmanes deben rezar cinco veces al día en dirección a la Kaaba, el lugar sagrado de forma cúbica que simboliza la casa de Dios y que se encuentra en La Meca. E igualmente las mezquitas deben de estar correctamente orientadas. Pero, ¿cómo puede saber un musulmán que se encuentra en cualquier parte del mundo, o quien va a construir una mezquita, la dirección en la que está La Meca? Una posibilidad es considerar la proyección estereográfica con La Meca en el centro, ya que al ser ésta azimutal y conforme, puede trazarse la recta entre la mezquita y La Meca, para calcular después el ángulo entre ésta y el meridiano, y así podremos girar ese ángulo respecto al Norte para orar. Uno de los problemas de este mapa es que tiene los meridianos curvados, lo que dificulta un poco el cálculo del ángulo.

Una idea alternativa sería considerar proyecciones retroazimutales, es decir, aquellas para las que la dirección desde cualquier punto de la Tierra a un punto fijo (y no al revés, como ocurre en las azimutales) es correcta. Para la proyección retroazimutal realizada por el cartógrafo británico James I. Craig en 1910, los meridianos son rectas paralelas igualmente espaciadas, y si la consideramos centrada en La Meca nos origina un buen mapa para calcular la qibla, la dirección en la que está La Meca.



La distorsión que produce esta familia de proyecciones (geodésicas, área, ángulos, forma) es pequeña cerca del punto de tangencia (o alrededor del círculo de corte en el caso del secante) y se va haciendo cada vez mayor según nos alejamos de él. Estas proyecciones tienen el atractivo de representarnos la imagen de la Tierra vista desde el espacio. Proyecciones geométricas clásicas de esta familia son las proyecciones ortográfica, gnomónica y estereográfica, mientras que otras proyecciones más sofisticadas son la azimutal equidistante o la azimutal isoareal de Lambert. Este tipo de mapas son útiles en oceanografía, navegación de larga distancia, defensa y otros intereses militares, turismo... por ser proyecciones centradas en un sitio concreto y que preservan las geodésicas que pasan por el mismo. Causan demasiada distorsión para ser utilizados como mapas geográficos.

Teniendo en cuenta lo comentado anteriormente, para dibujar la red de meridianos y paralelos correspondiente a un mapa azimutal, en su versión polar, debemos colocar el centro (ya sea el Norte o el Sur), trazar una familia de rectas, igualmente espaciadas, que pasan por el centro del mapa y que se corresponden con los meridianos, y pintar una familia de circunferencias concéntricas que se corresponden con los paralelos. Por lo tanto, la información que necesitamos saber es la distancia a la que debemos dibujar cada una de esas circunferencias. Por ejemplo, podemos calcular dicha distancia para el caso de la proyección gnomónica.



Tomemos el Polo Sur como punto de referencia. Dado un punto A, de latitud ϕ, y su imagen A', éstos determinan dos triángulos rectángulos semejantes, como se muestra en la figura anterior. Las longitudes de los catetos del triángulo pequeño son (recordemos que aquí ϕ tiene valores negativos)

$$R\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) \quad \text{y} \quad R\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right),$$

mientras que para el triángulo grande son R y $r(\phi)$, la distancia de A' al centro. El teorema de Tales, de nuevo, nos dice que

$$\frac{R\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)}{R\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)}=\frac{R}{r(\phi)},$$

de donde

$$r(\phi)=R\tan\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)=-R\cot(\phi).$$

Por lo tanto, ahora estaríamos en condiciones de poder dibujar la red de meridianos y paralelos de la proyección central.

La utilización de los mapas realizados con la proyección gnomónica

Como ya hemos comentado anteriormente, la proyección central no es adecuada para el diseño de mapamundis. Se necesitaría un doble mapa circular, con una parte para un hemisferio y otra para el opuesto. Eso no sería un problema si no fuera porque cada uno de los mapas no podría cubrir el hemisferio correspondiente en su totalidad y, lo que es peor, la deformación se va haciendo más extrema cuanto más nos alejamos del centro del mapa y más proporción del hemisferio pretendemos abarcar. Al observar cualquier mapa gnómico se hace obvio a la vista la enorme deformación que sufren las distancias, las áreas y las formas. Sin embargo, para una distancia angular de hasta unos 30° desde el punto de tangencia, el mapa generado con esa proyección es un mapa bastante bueno, sin mucha distorsión. Esta transformación es utilizada a menudo para mapas de las regiones polares. Además, recordemos que es un mapa azimutal, por lo que se preserva el azimut desde el centro del mismo.

A pesar de lo comentado anteriormente, sí se ha hecho uso de esta proyección para representar amplias zonas de la superficie terrestre. Por ejemplo, en 1844 la Sociedad para la Difusión del Conocimiento Útil, SDUK, de Gran Bretaña, publicó un libro de mapas de dos volúmenes, con la pretensión de que fueran baratos y facilitar así su uso en educación. La proyección gnomónica fue utilizada en este atlas para los mapas celestes y en una serie de seis mapas para representar con ellos el mundo al completo (África y el Mediterráneo, América, Asia y parte de Australia,

Oceanía y los dos polos). Estos seis mapas se corresponden con las seis caras de un cubo en el que se ha circunscrito la esfera terrestre y sobre el que se proyecta geométricamente desde el centro de la esfera, obteniéndose de esta manera una serie de mapas que cubren toda la Tierra. Otro ejemplo de un atlas del mundo con seis partes obtenidas de forma similar fue publicado en Weimar en 1803 por el cartógrafo C.G. Reichard (1758-1837). El propio matemático Augustus de Morgan publicó en 1836 un libro con el extenso, pero explicativo, título *Una explicación de la proyección gnomónica de la esfera, y de aquellos puntos de la astronomía que son más necesarios en el uso de los mapas astronómicos, siendo una descripción de la construcción y uso de grandes y pequeños mapas de las estrellas, así como de los seis mapas de la Tierra.*

Se puede realizar un mapa del mundo proyectando la esfera de referencia sobre un cubo que la circunscribe haciendo uso de la proyección gnomónica y desplegando luego éste sobre el plano (fuente: Carlos A. Furuti).

En cualquier caso, la propiedad más importante de la proyección gnómica es que preserva geodésicas, es decir, las ortodrómicas de la esfera son representadas como rectas del plano. Por tanto, la importancia de esta proyección en navegación es obvia. El piloto de un barco, o de un avión, que desee calcular el camino más

corto entre dos puntos del planeta, origen y destino, simplemente tendrá que trazar sobre la carta de navegación de tipo gnomónico la recta que une las imágenes de los mencionados lugares sobre el mapa y de esta forma sabrá qué trayecto deberá seguir para recorrer la mínima distancia entre ellos. Por este motivo, las cartas náuticas gnomónicas son ampliamente utilizadas en navegación, como podemos descubrir en cualquier tienda o página web de venta de cartas de navegación. En particular, la Oficina Hidrográfica de Estados Unidos ha publicado este tipo de cartas de todos los océanos, y las oficinas hidrográficas de muchos otros países también han utilizado esta proyección. En muchos tratados sobre navegación se explican métodos para navegar «siguiendo los círculos máximos» y de cálculo de distancias haciendo uso de cartas náuticas gnomónicas.

Las dos condiciones principales en navegación, marítima o aérea, son que las ortodrómicas se representen como rectas en la carta náutica y que se preserven los ángulos, los rumbos; de ahí la importancia que tendría en navegación diseñar un mapa perfecto que preservase todas las propiedades métricas. Como veremos en el siguiente capítulo, los marineros resolvieron la falta de un mapa correcto de la Tierra utilizando conjuntamente una carta gnomónica y un mapa de Mercator, el cual es conforme y en el que, además, las curvas de rumbo constante, las loxodrómicas, se representan como rectas. El hecho de que los círculos máximos de la esfera se representen como rectas hace que la proyección central sea también útil en mineralogía. También en sismología, puesto que las ondas sísmicas se propagan a lo largo de círculos máximos, como lo hacen las ondas de radio; así, las cartas realizadas con dicha proyección son también importantes para los operadores de radio de los barcos, e incluso se emplean mapas celestes de proyección central para las observaciones de meteoritos, ya que se mueven a lo largo de círculos máximos.

A pesar de que la proyección «horologium» es una de las más antiguas, su empleo durante el Renacimiento fue raro, y se empezaron a utilizar de nuevo a principios del siglo XVII, especialmente para el diseño de mapas celestes. Así, el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) hizo uso de su aspecto ecuatorial para trazar un mapa de las estrellas en 1606; el astrónomo austriaco Christoph Grienberger (1561-1636) usó diferentes aspectos para crear un atlas de constelaciones en 1616, y el matemático y astrónomo italiano Orazio Grassi (1583-1654), para llevar a cabo otros mapas de estrellas en 1618. A partir de entonces ha sido una de las proyecciones utilizadas en el diseño de mapas celestes. El motivo es que aquellas estrellas que están en el mismo círculo máximo en la cúpula celeste, y que aparentan estar en la misma recta en el cielo, están representadas en el mapa

gnomónico sobre una misma línea recta. Este hecho facilita su localización, así como el estudio del cielo estrellado sobre dichos mapas.

La proyección central es la transformación que más se ha manejado para generar mapas poliédricos y variaciones de éstos, aunque también se hayan servido de algunas conformes o isoareales. La idea es muy sencilla, se circunscribe la esfera terrestre (el globo de referencia) en un poliedro y se proyecta sobre el mismo. En el caso de la proyección gnomónica, de una forma simple, se hace desde el centro de la esfera. Así se obtiene la imagen de la Tierra sobre las caras planas del poliedro y podemos quedarnos con él montado o desplegarlo sobre una superficie plana. Los poliedros más utilizados son los sólidos platónicos, cuyas caras son polígonos regulares idénticos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro), aunque también pueden emplearse otros poliedros, como el octaedro truncado, el cubo-octaedro y otros. En los mapas poliédricos la distorsión es mayor cerca de los vértices y de las aristas, y menor en las zonas cercanas al centro de sus caras, que es el punto de tangencia. Ejemplos de mapas poliédricos, con la proyección gnómica, son las seis caras del mapa de Reichard o de la SDUK, el mapa de mariposa de Cahill (1909), que se proyecta sobre un octaedro y se despliega, o el mapa Dimaxion del diseñador y arquitecto americano Buckminster Fuller, que es una variación de la proyección sobre el icosaedro, y del que hablaremos en el capítulo 9.

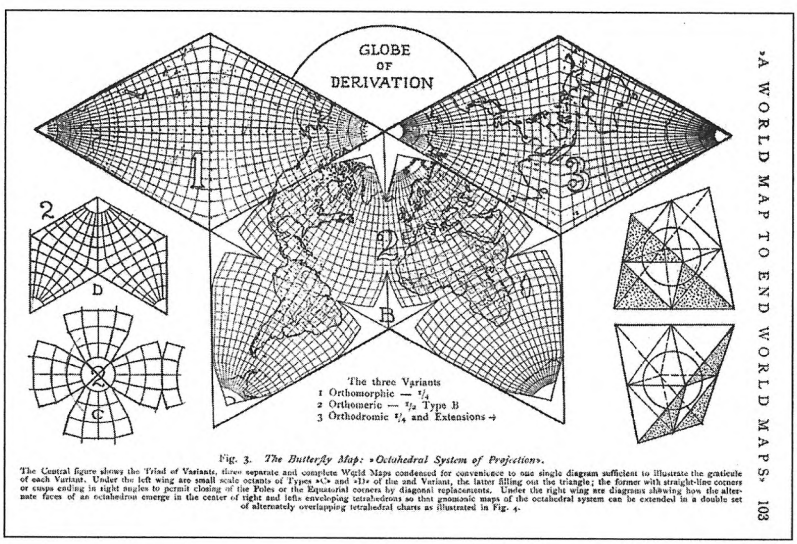


Fig. 3. *The Butterfly Map: »Octahedral System of Projection«.*
The Central figure shows the Triad of Variants, three separate and complete World Maps condensed for convenience to one single diagram sufficient to illustrate the graticule of each Variant. Under the left wing are small scale octants of Types »A« and »D« of the 2nd Variant, the latter filling out the triangle; the former with straight-line corners or cusps ending in right angles to permit closing of the Poles or the Equatorial corners by diagonal replacements. Under the right wing are diagrams showing how the alternate faces of an octahedron emerge in the center of right and left enveloping tetrahedrons so that gnomonic maps of the octahedral system can be extended in a double set of alternately overlapping tetrahedral charts as illustrated in Fig. 4.

Mapa octaédrico o de mariposa de Cahill, realizado al proyectar gnómicamente la esfera de referencia sobre un octaedro. Volviendo a montar el octaedro se consigue un globo terrestre con dicha forma.

MAPAS CELESTES I

Además de los mapas de la superficie terrestre, existen otros que han tenido una importancia destacada a lo largo de toda la historia de la humanidad y en todas las culturas: los mapas del cielo con sus estrellas y constelaciones, desde los mapas celestes de la antigua China, India, Mesopotamia o Egipto, que influyeron en los posteriores mapas griegos, romanos e islámicos, hasta la desarrollada cartografía celeste europea. En los siglos XVII y XVIII, un gran número de atlas celestes fueron producidos en Europa; éstos mostraban las constelaciones como representaciones alegóricas de héroes y heroínas de la mitología griega, animales (reales o imaginarios) o diferentes instrumentos. En aquella época el cielo era muy importante en la sociedad europea, tanto por ser un instrumento fundamental para la navegación como por el arraigo de la astrología; no hay que olvidar que a lo largo de la historia muchos astrónomos se ganaron parte de su sustento trabajando también como astrólogos.

El primer atlas de la bóveda celeste en su totalidad, y que marcaría las líneas del posterior desarrollo de los atlas estelares, fue el titulado *Uranometria* (1603) del abogado y editor bávaro Johann Bayer (1572-1625), basado en el catálogo de estrellas del astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601). Esta obra era anterior al telescopio, instrumento que contribuyó al desarrollo de la astronomía, y de los mapas estelares, inventado en 1609 por el matemático y astrónomo italiano Galileo Galilei (1564-1642).

Dos grandes hitos de la época de la cartografía celeste fueron *Harmonia Macrocosmica* (1660), del matemático y cartógrafo alemán Andreas Cellarius (ca. 1596-1665), el atlas más célebre del siglo XVII y, para algunos, el más bello de todos los atlas celestes jamás producidos, y *Atlas Coelestis* (1729) del astrónomo inglés John Flamsteed (1646-1719), que fue el primer astrónomo real de Inglaterra en el Observatorio de Greenwich.

Imagen perteneciente a la edición de 1708 de la obra Harmonia Macrocosmica, *de Andreas Cellarius.*

Capítulo 7

Proyección estereográfica

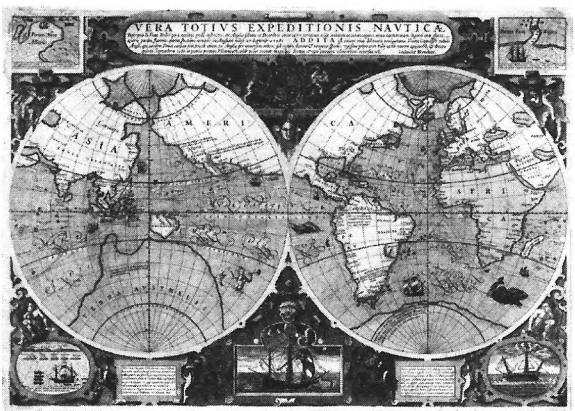
La proyección estereográfica es un método gráfico de representar información geométrica tridimensional en dos dimensiones, y de resolver problemas geométricos tridimensionales. En geología, el método es utilizado principalmente para resolver problemas relacionados con las orientaciones de rectas y planos, tanto en cristalografía como en geología estructural. Tales problemas tienen que ver más con la relación angular entre líneas y planos que con sus relaciones espaciales.
R.G. Park, *Foundation of Structural Geology* (2004)

La proyección estereográfica es, probablemente, la proyección azimutal más utilizada y conocida desde su origen, así como una de las más empleadas en cartografía. Esta aplicación se suele atribuir a Hiparco de Nicea, aunque es probable que fuese conocida por los egipcios. El documento más antiguo que la menciona es un tratado de Ptolomeo titulado *Sphaera a planetis projectio in planum*, cuyo texto original en griego se ha perdido, si bien nos ha llegado a través del árabe: fue el matemático Maslama quien realizó la traducción del griego al árabe, que serviría para posteriores traducciones y ediciones. La obra de Ptolomeo apareció impresa por primera vez como un apéndice de la edición de 1507 de su obra *Geografía*, con el título *Planisphaerium Ptolemai*. En ella su autor describe un instrumento para determinar la posición de las estrellas en la esfera celeste, el astrolabio, en el que se empleaba la proyección estereográfica, denominada por Ptolomeo «proyección planisferio», nombre que se mantuvo hasta el siglo XVI (el término planisferio siguió utilizándose para referirse a las cartas celestes por haber sido ésta la aplicación destinada a generarlas); en la Edad Media se le conocía también con el nombre de «proyección astrolabio». El nombre «estereográfica» se debe al matemático belga François d'Aguillon (1567-1617), que en su obra *Opticorum libri sex philosophis juxta ac mathematicis utiles (Seis libros de óptica, útiles para filósofos y también matemáticos)*, estudia las propiedades de las proyecciones ortográfica y estereográfica. El nombre de «estereográfica» proviene de las palabras griegas *estereo*, «cuerpo sólido», y *grafía*, «dibujo, pintura, representación».

MASLAMA EL MADRILEÑO (C.A. 950-1007)

Âbû-l-Qâsim Maslama ibn Âhmad al-Faradi al-Hasib al-Qurtubî al-Maŷrîtî nació en Madrid a mediados del siglo x (su apodo «al-Maŷrîtî» significa «el madrileño»). Siendo joven se trasladó a Córdoba, donde mantuvo relación con el grupo de científicos que introdujeron la ciencia griega en al-Ándalus. Con el tiempo, Maslama formó una escuela científica en Córdoba a la que, debido a la fama que él alcanzaría (se ganó apodos tales como «el Euclides andalusí» o «el príncipe de los matemáticos andalusíes»), acudían estudiosos de todo al-Ándalus, lo que hizo que sus enseñanzas se expandieran geográficamente. Entre las aportaciones de Maslama destacan la traducción al árabe del *Planisferio* de Ptolomeo, obra que, al igual que su original, se ha perdido, pero que sirvió para posteriores traducciones al latín y al hebreo, manteniendo los comentarios que realizó Maslama sobre la obra; la introducción de técnicas para la construcción del astrolabio, tema sobre el que pudo escribir un pequeño tratado; la adaptación de las tablas de Al-Jwarizmi y Al-Battani al meridiano de Córdoba, haciéndolas más exactas y de más fácil manejo; un manual de aritmética comercial; una obra sobre astronomía, y la determinación de la longitud de la estrella Calbalazada (hoy Régulo).

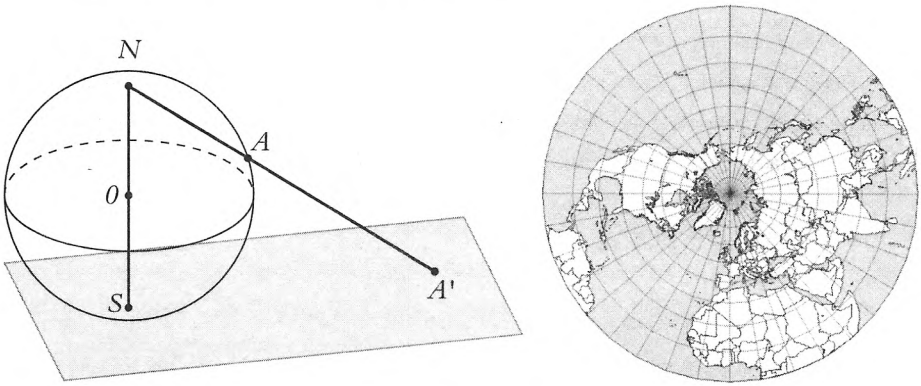
Aunque la versión polar de esta proyección era conocida y usada en la Antigüedad para la realización de mapas celestes, a finales del siglo XVI y durante el XVII y el XVIII fue utilizada de forma habitual para representar la Tierra en dos hemisferios.



Mapamundi en dos hemisferios, Vera totius expeditionis nauticæ *(1595) de Joducus Hondius (1563-1612), realizado con la proyección estereográfica. En él se muestran las rutas de los primeros viajes alrededor del mundo llevados a cabo por los ingleses, tanto el de sir Francis Drake, entre 1577 y 1580, como el de Thomas Cavendish, entre 1586 y 1588.*

Definición y propiedades cartográficas

La proyección estereográfica se define como sigue: consideremos la esfera y un plano tangente a ella en un punto S (por ejemplo, el Sur), y vamos a realizar la proyección desde el punto antipodal N (el Norte en el caso de que el Sur sea el punto de tangencia). La imagen de un punto A de la esfera mediante la aplicación estereográfica desde N es el punto A' del plano que se obtiene al intersecar éste con la recta que pasa por los puntos A y N, como muestra la figura. Es decir, es la sombra que produce una bombilla colocada en el Norte sobre una mesa, o papel, si la esfera terrestre plastificada se apoya en la mesa justamente sobre el Polo Sur.



A la izquierda, definición de la proyección estereográfica; a la derecha, mapa trazado con la proyección estereográfica polar, con el Polo Sur como foco de proyección.

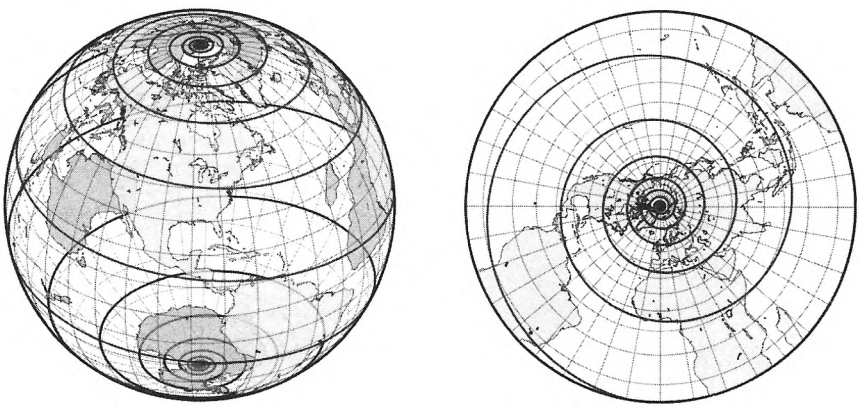
Algunas propiedades de la proyección estereográfica son:

1. Su imagen se suele tomar circular, debido a que es azimutal, y cubriendo solamente uno de los hemisferios. Aunque podría cubrirse una extensión aún mayor, no es recomendable por el aumento de la distorsión.
2. La distorsión de meridianos y paralelos es

$$\mu = \lambda = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)};$$

por lo tanto, la proyección es conforme, es decir, preserva los ángulos, aunque no preserva ni las geodésicas, ni el área y, por supuesto, tampoco las distancias.

3. Al ser una proyección azimutal sí preserva las geodésicas que pasan por el punto de tangencia, es decir, para el caso en el que uno de los polos sea el foco de proyección, los meridianos se representan como rectas que pasan por el centro del mapa.
4. Todos los meridianos y paralelos, aunque más generalmente todas las circunferencias de la esfera, máximas y también normales, se proyectan en circunferencias sobre el plano, con excepción de las que pasan por el punto de tangencia, que se transforman en rectas (ésta es una propiedad particular de las aplicaciones matemáticas denominadas inversiones, y la proyección estereográfica es una inversión).
5. Las loxodrómicas o líneas de rumbo fijo (esto es las curvas sobre la esfera que forman un ángulo constante con los meridianos) se transforman en espirales logarítmicas.
6. La distorsión en áreas, formas y distancias es pequeña cerca del punto de tangencia, va creciendo al alejarnos del mismo y se hace exagerada al salir del hemisferio en el que está el punto de tangencia, es decir, a partir del ecuador en las versiones polares.

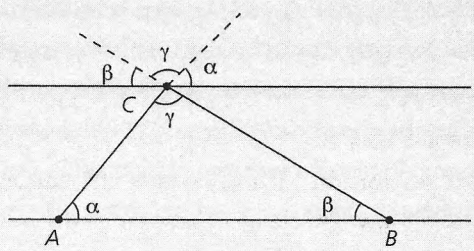


La loxodrómica, o curva de rumbo constante, vista sobre la esfera terrestre y sobre el mapa realizado con la proyección estereográfica centrada en el Polo Norte (fuente: Carlos A. Furuti).

A continuación, vamos a proceder de forma similar al caso de la proyección central para calcular la distorsión que produce la proyección estereográfica. Consideremos un disco D de radio r lo suficientemente pequeño (infinitesimal) y tangente a la esfera (que tomamos de radio 1, ya que es nuestra esfera de referencia) en un pun-

LA SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

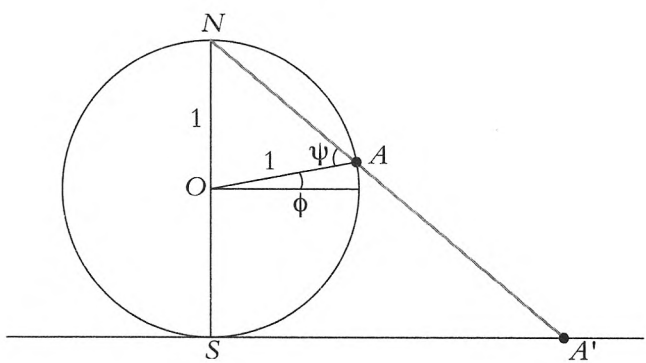
Todos sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es de 180° (o π radianes), la mitad de una vuelta completa. Este clásico resultado de la geometría euclidea ya aparece en los *Elementos* (Proposición I-32) de uno de los padres de la geometría, el matemático griego Euclides de Alejandría (ca. 325 a.C.-365 a.C.). La demostración es de una gran sencillez y belleza. Dado un triángulo *ABC* como el de la imagen, se traza la paralela a la línea *AB* que pasa por *C*. Por ser paralelas, forman con la recta *AC* ángulos iguales (ángulo α). Por el mismo motivo, los ángulos de las dos paralelas con la recta *BC* son iguales (ángulo β). Y como las rectas *AC* y *BC* son secantes, el ángulo γ y su opuesto son iguales. Finalmente, la suma de los tres ángulos del vértice *C*, que es igual a la suma de los ángulos α, β y γ del triángulo, es un ángulo llano, de 180°.



to *A* de la misma, de latitud ϕ. Vamos a estudiar cómo se transforma mediante la proyección estereográfica y, de paso, cuál es la distorsión que produce esa proyección.

Antes de proyectar nuestro disco a través de la proyección estereográfica veamos la siguiente observación. En la figura siguiente llamamos ψ al ángulo *ONA*, que es igual al ángulo *OAN* y, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un triángulo es π, se deduce que:

$$\psi = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

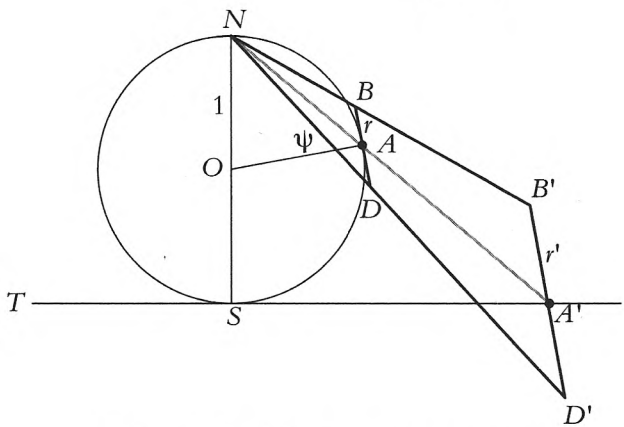


Por otra parte, en función del ángulo ψ, tenemos que la distancia entre N y A es $|NA| = 2\cos\psi$, para lo cual recurrimos al teorema del coseno, empleado en trigonometría (dado un triángulo de lados a, b y c y ángulo α, opuesto al lado a, entonces $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$). Mientras que teniendo en cuenta simplemente la definición de coseno se observa que la distancia entre N y A', la imagen de A mediante la proyección estereográfica, es:

$$|NA'| = \frac{2}{\cos\psi}.$$

De nuevo, para entender mejor la transformación del disco mediante la proyección estereográfica vamos a separar dicha transformación en dos fases. En la primera, el disco se transforma en un disco D' que descansa en un plano paralelo al de D y cuyo centro es A', la imagen de A mediante la proyección estereográfica (véase la figura siguiente). En este punto, razonando por similitud de triángulos (teorema de Tales) tenemos que:

$$r' = r\frac{|NA'|}{|NA|} = \frac{r}{\cos^2\psi} = \frac{r}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$



Fase de expansión de la proyección estereográfica.

La segunda fase consiste en proyectar el disco D' de radio r' sobre el plano de proyección T. En la dirección «Este/Oeste», el disco D' y el plano T se intersecan, luego el segmento imagen es el mismo. Esto nos ofrece, además, la información de que la distorsión en los paralelos es

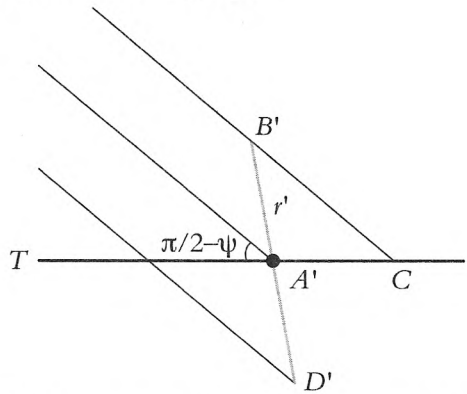
$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$

puesto que hemos calculado en particular cómo se transforma un segmento infinitesimal de longitud r sobre un paralelo.

Veamos qué ocurre en la dirección «Norte/Sur», estudio que, además, nos ofrecerá la distorsión en el meridiano (figura siguiente). Para empezar observemos que el ángulo $SA'N$ es igual a $\pi/2 - \psi$. Si consideramos que $|NA'|$ es muy grande en comparación con r' (hemos considerado inicialmente que D es infinitesimal), podemos asumir que los rayos de la proyección son paralelos. Entonces, el segmento $A'B'$ es proyectado en el segmento $A'C$, y el segmento $B'C$ es paralelo a NA', siendo el ángulo $A'CB'$ igual a $\pi/2 - \psi$, así como el ángulo $A'B'C$; en consecuencia, el triángulo $B'A'C$ es isósceles. Por lo tanto, $|A'C| = |A'B'| = r'$. De este modo hemos demostrado que la imagen de D mediante la proyección estereográfica es un disco de radio

$$r' = \frac{r}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$

luego la distorsión es la misma en cualquier dirección y, en particular, en meridianos y paralelos. Todo ello nos indica que la proyección estereográfica es una proyección isogonal, es decir, que preserva los ángulos.



Fase de distorsión de la proyección estereográfica.

En 1695, el matemático y astrónomo inglés Edmund Halley (1656-1742), motivado por su interés por las cartas celestes y usando la recientemente introducida

herramienta que era el cálculo, publicó la primera demostración de que la proyección estereográfica es conforme.

Como ya indicábamos anteriormente, las aplicaciones conformes son precisamente las que preservan las formas, aunque a nivel local y no global, como se pone de manifiesto en la proyección de Mercator o incluso en la proyección estereográfica. Cuando intentamos dibujar el contorno de un país o el curso de un río, lo que determina su forma es la variación de la dirección en la que estamos dibujando; matemáticamente diríamos que es la variación del vector tangente a la curva en cuestión. Por ese motivo la propiedad de preservar los ángulos es la responsable de que localmente se preserven las formas. Un ejemplo ilustrativo podría ser Groenlandia, en la que la diferencia entre su forma real y la del mapa de Mercator es muy grande; sin embargo, si nos fijamos en pequeñas zonas de la costa, la diferencia es pequeña.

Realizar el diseño de la red de meridianos y paralelos para un mapa confeccionado con la proyección estereográfica polar se reduce a calcular la distancia del centro a la que deben colocarse las circunferencias que representan los paralelos terrestres, ya que en las proyecciones azimutales los meridianos son rectas igualmente espaciadas que pasan por el centro. Precisamente, el radio de la circunferencia imagen de un paralelo de latitud ϕ es igual a

$$r(\varphi) = 2R\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

si R es el radio de la esfera de referencia. Para obtener esa distancia solamente tenemos que utilizar la definición de la tangente del ángulo *SNA* de la figura de la página 109 si la esfera tuviese radio R.

La utilización de los mapas realizados con la proyección estereográfica

La proyección estereográfica ha sido utilizada desde la Antigüedad hasta nuestros días para el diseño de mapas celestes. Su versión polar ya fue utilizada, exclusivamente para tal fin, desde los griegos hasta quizás 1507, año en el que se usó por primera vez para la realización de un mapa terrestre, que según cita John Snyder en *Flattening the Earth*, fue realizado por Walther Ludd de St. Dié. Los primeros mapas estelares impresos, haciendo uso de la proyección estereográfica polar, fueron traza-

dos en 1515 por el famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528), *Imagines coeli septentrionales cum duodecim imaginibus zodiaci*, para el hemisferio norte eclíptico, e *Imagines coeli meridionales,* para el sur eclíptico, centrados respectivamente en los polos eclípticos Norte y Sur. A éstos siguieron muchos otros, como los dos hemisferios celestes eclípticos realizados por Halley hacia 1678, o el *Planisphère contenant les constellations celestes* (publicado en *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* en 1756), del astrónomo francés Nicolas Louis de Lacaille (1713-1762), que muestra las estrellas visibles del hemisferio sur ecuatorial y que sería incluido en la edición de 1776 de Fortin del famoso *Atlas celeste de Flamsteed.*

Muchos otros mapas estelares, con la proyección estereográfica polar, fueron trazados en la época dorada de la cartografía celeste por grandes astrónomos, cartógrafos y matemáticos como Johann Doppelmayer, Pierre-Charles Le Monnier o Jean-Dominique Cassini, entre muchos otros.

Mapa estelar que Durero realizó para el hemisferio norte eclíptico (Imagines coeli septentrionalis).

El uso de la proyección estereográfica polar para mapas terrestres se extendió a partir de principios del siglo XVI. El humanista alemán Gregor Reisch (ca. 1470-1525) la utilizó en su enciclopedia *Margarita philosophica nova* (1512) en un sencillo mapa centrado en el Polo Norte. El cartógrafo alemán Peter Apian (1495-1552) dibujó un pequeño mapa circular del hemisferio norte hasta 25° del hemisferio sur en su *Cosmographicus liber* (1524). El cartógrafo francés Guillaume de L'Isle (1675-1726) dentro de su *Atlas nouveau, contenant toutes les parties du Monde* (1730) incluye dos mapas de los hemisferios norte y sur realizados con la proyección estereográfica polar. Similares trabajos desarrollaría su sobrino, el cartógrafo Philippe Buache (1700-1773), en particular su famosa *Carte des Terres Australes comprises entre le Tropique du Capricorne et le Pôle Antarctique où se voyent les nouvelles découvertes faites en 1739 au Sud du Cap de*

MAPAS CELESTES II

Las estrellas están distribuidas por todo el espacio, y cuando las miramos por la noche parece que están fijadas a una gran esfera que se extiende a nuestro alrededor, debido a que se encuentran a una gran distancia. A esa esfera ideal, concéntrica con la Tierra y de radio indeterminado en la que supuestamente estarían fijadas las estrellas, se la conoce con el nombre de esfera celeste.

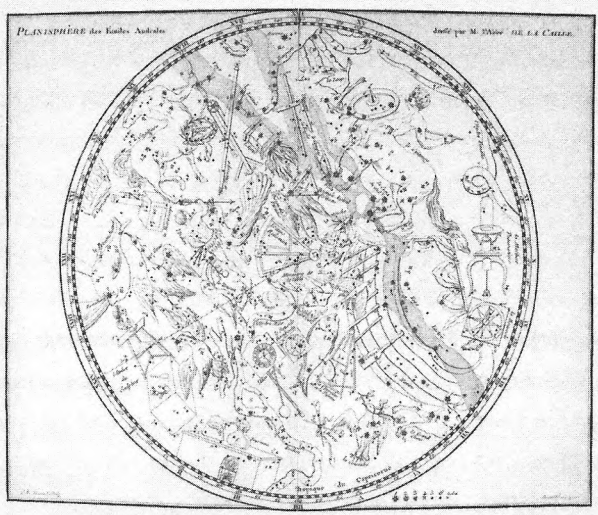
Existen dos sistemas de coordenadas estelares, definidos de una forma similar al sistema terrestre (con ecuador celeste, polos Norte y Sur celestes, meridianos y paralelos celestes, y los ángulos que nos van a determinar la posición de cualquier estrella en la bóveda del cielo, análogos a la latitud y a la longitud). Uno, más utilizado en la Antigüedad, es el eclíptico, que utiliza como referencia el plano de la eclíptica, el camino del Sol «alrededor» de la Tierra, que hace las veces ahora de «ecuador eclíptico»; el otro, más actual, se basa en el ecuador terrestre. Además, el cenit es el punto más alto del globo celeste que se encuentra sobre el observador, y el nadir, el diametralmente opuesto.

Dada la esfera celeste, con las posiciones de las estrellas y constelaciones determinadas a través de estas coordenadas, podemos proyectarla sobre una superficie plana y obtener así un mapa del cielo estrellado, al igual que se hace con la superficie de la Tierra. Las mismas proyecciones que se utilizan en la cartografía terrestre pueden ser utilizadas en la celeste, como así ocurre. Sin embargo, las proyecciones que más se suelen utilizar en los mapas de las estrellas son la gnomónica, la estereográfica y la equidistante, que dibujan mapas que podemos centrar en el cenit, pues la distorsión que se produce es uniforme alrededor de ese punto central; además, son azimutales, lo que simplifica el problema de encontrar la dirección a la

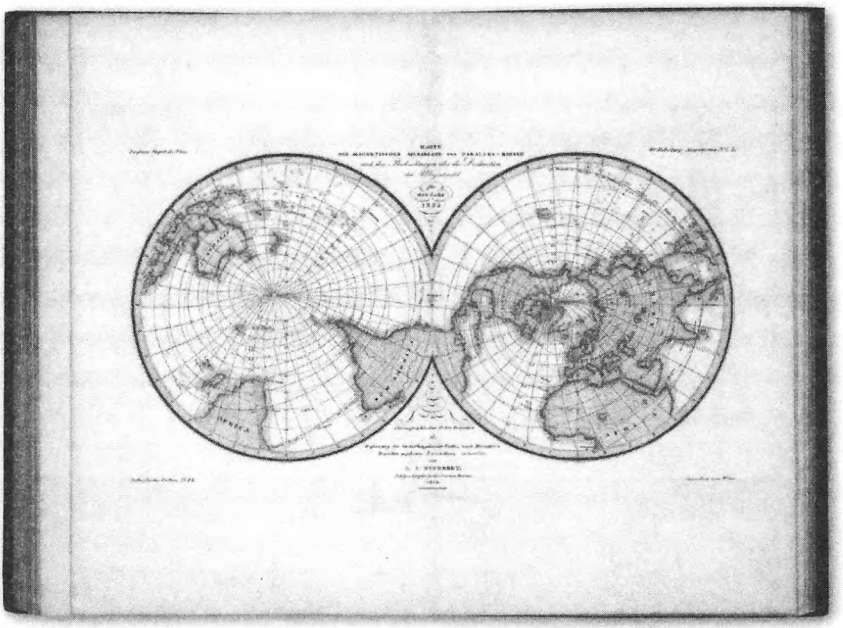
Bonne Esperance (1739), del que existen dos versiones, una de ellas sin tierra en la zona de la Antártida y otra que muestra dos grandes zonas de tierra, mucho tiempo antes de que se conociera bien el continente austral, y que han utilizado algunas personas que han querido especular con la existencia de la Atlántida.

A estos mapas les seguirían muchos otros similares de los dos hemisferios, incluso también se diseñaron mapamundis con los dos hemisferios mostrados conjuntamente, como, por ejemplo, el mapa *Karte Der Magnetischen Meridiane und Parallel-Kreise*, y otros similares, que aparecen en la obra *Physikalischer Atlas* (1848) del geógrafo alemán Heinrich Berghaus (1797-1884), que debía servir de ilustración para el *Cosmos*, o *Ensayo de una descripción física del mundo*, del naturalista y explorador alemán Alexander von Humboldt (1769-1859).

que mirar desde nuestro lugar de observación central para contemplar una estrella. Dependiendo después de nuestro interés particular, elegiremos una u otra de las tres proyecciones: que las estrellas que están en el mismo círculo máximo se representen sobre la misma recta, que se preserven los ángulos o que las distorsiones no sean muy grandes.



Mapa celeste de la región polar sur de Nicolas Louis de Lacaille, que aparece en la edición de Fortin del Atlas celeste de Flamsteed.



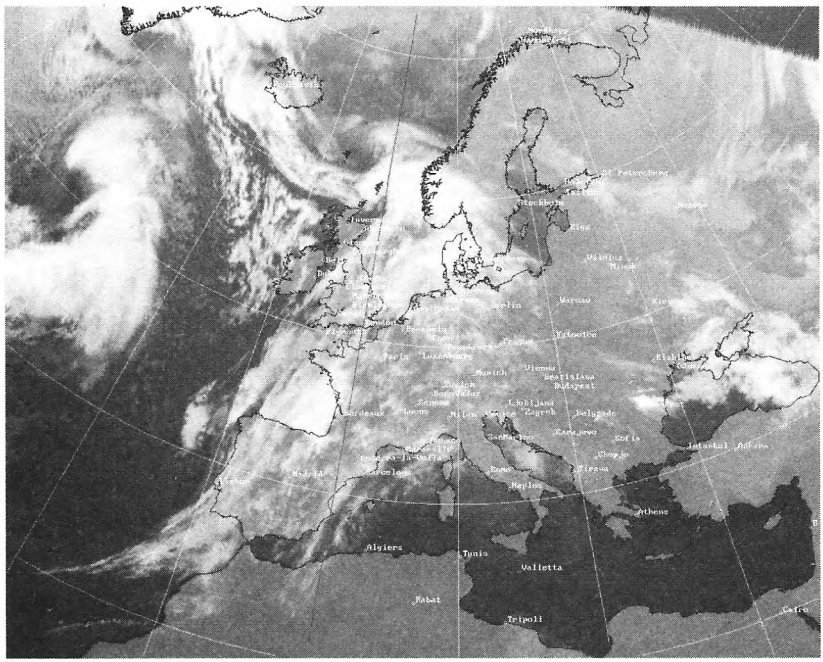
Karte Der Magnetischen Meridiane und Parallel-Kreise, *mapa en dos hemisferios con proyección estereográfica del geógrafo alemán Heinrich Berghaus.*

En general, la proyección estereográfica polar se ha convertido en una aplicación bastante habitual en el diseño de mapas de las zonas polares, ya que al no considerar zonas muy alejadas del centro de proyección, el polo correspondiente, la distorsión métrica general es muy pequeña. En particular, el USGS (Servicio Geológico de Estados Unidos), así como muchas otras agencias internacionales, la utilizan comúnmente para mapas de la Antártida, con una justificación mayor si por la temática se hace necesario utilizar un mapa conforme, por ejemplo para mapas meteorológicos, mapas de los vientos de la Antártida u otros. E igualmente para mapas del círculo polar ártico. Por citar algún otro ejemplo concreto, el The National Snow and Ice Data Center o la National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), de Estados Unidos, también utilizan la proyección estereográfica para las zonas polares.

Asimismo, es la base del sistema de coordenadas UPS (Estereográfico Polar Universal), que junto con el sistema UTM (Mercator Transversal Universal), conforman un sistema de coordenadas, o proyecciones, para toda la Tierra, que definen una serie de zonas específicas de un tamaño intermedio en las que la proyección selec-

cionada es adecuada, puesto que la distorsión es pequeña; ello ha convertido a este sistema de coordenadas en el utilizado mayoritariamente por todas las agencias del mundo para trazar mapas de un determinado tamaño. Volveremos sobre él en el capítulo 9, dedicado a la proyección de Mercator.

La proyección estereográfica polar también es utilizada para zonas de tamaño intermedio, que no son las polares, pero que están cercanas a ellas. Así, se suele utilizar para mapas de Rusia, de toda Europa o de algunos países europeos, como Suecia, y también de Australia o de Norteamérica.



Mapa del tiempo en Europa realizado con la proyección estereográfica polar.

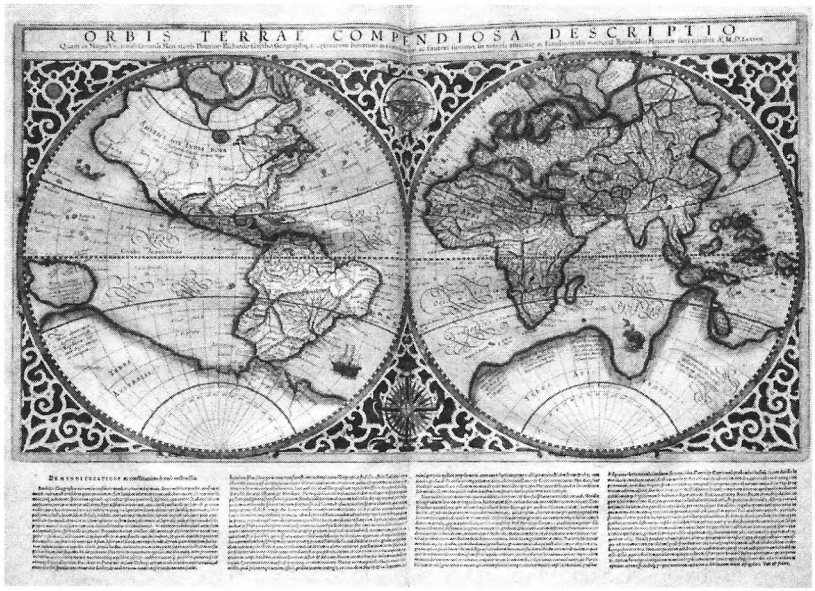
Otro aspecto de la proyección estereográfica, el ecuatorial, es decir, aquel para el que el punto de tangencia con el plano de proyección, y que será el centro del mapa, está situado sobre la línea del ecuador, fue utilizado por el matemático árabe toledano Azarquiel para el diseño del astrolabio. En la realización de mapamundis no fue empleado hasta el siglo XVI; el sencillo mapa en dos hemisferios del cartógrafo francés Jean Rotz es el primero de aquellos que se conservan.

AZARQUIEL (CA. 1029-1100)

Abu Ishäq Ibrahim Ibn Yahyà al-Naqqash al-Zarqali nació en Toledo; su apodo «Azarquiel» (versión latinizada de al-Zarqali) hace referencia a sus ojos azules (zarcos). Según algunas fuentes, trabajaba como artesano del metal en el taller de su padre y no tenía formación académica (hay quienes le describen incluso como analfabeto). Empezó a construir instrumentos científicos, como el astrolabio, para los astrónomos del reino taifa de Toledo, lo que le puso en contacto con la astronomía, ciencia en la que se formó de manera autodidacta. A raíz de la conquista de Toledo por Alfonso VI en 1085, se trasladó a Córdoba, donde murió en el año 1100. Sus aportaciones científicas pertenecen al campo de la astronomía y son de tres tipos: instrumentos, tablas y estudios teóricos. De los instrumentos que diseñó y construyó, el que más fama le proporcionó fue la azalea, un tipo de astrolabio «universal» que podía ser utilizado en cualquier latitud y que se utilizó en Europa hasta el siglo XVI. También construyó una clepsidra a orillas del Tajo, un reloj de agua que permitía conocer la hora tanto de día como de noche. Escribió diferentes tratados para la construcción y el uso de instrumentos, como la ya ciatada azalea, el ecuatorio o la esfera armilar, entre otros. Azarquiel adaptó las tablas astronómicas de Al-Jwarizmi y Al-Battani a las coordenadas de Toledo, las conocidas «Tablas Toledanas». También recogió sus propias observaciones y adaptó información astronómica griega en su «Almanaque», con el que se podía fijar la posición de un planeta, el Sol, la Luna y otros cuerpos celestes, directamente, sin necesidad de grandes cálculos, y permitía predecir eclipses tanto solares como lunares. Escribió diferentes tratados en los que recogió los estudios que durante su vida realizó sobre el Sol, la Luna o Mercurio.

Pero fue Rumold Mercator, hijo de Gerardus Mercator y heredero de la tradición de su padre, quien, con su mapa *Orbis terrae compendiosa descriptio* (1587) —incluido por este último en la edición de 1595 del atlas de Mercator—, convertiría el aspecto ecuatorial de la proyección estereográfica en la proyección estándar para la producción de mapas del mundo en dos hemisferios que dominaría la cartografía de los siglos siguientes.

Dependiendo de en qué parte de la línea del ecuador se coloque el centro de uno de los hemisferios, el punto de tangencia, ya que el otro es el punto antipodal de la esfera terrestre, se obtienen diferentes visiones del mundo. En mapas como el de Rumold, en el *Nova et accuratissima terrarum orbis tabula* (1664) del cartógrafo holandés Joan Blaeu (1596-1673), hijo del también cartógrafo Willem Blaeu, o en el *Orbis terrarum nova et accuratissima tabula* (1666), de Peter Goos (que muestran



Orbis terrae compendiosa descriptio *(1587), mapamundi en dos hemisferios, realizado con la proyección estereográfica ecuatorial, de Rumold Mercator. En él pueden observarse las formas que aún tenían para los cartógrafos tanto América como la Antártida.*

California como si fuese una isla, error cartográfico que se repite en muchos mapas de parte de los siglos XVII y XVIII), el centro está situado en el meridiano que pasa por el mar Caspio, por lo que uno de los hemisferios contiene Europa, África, Asia y parte de Oceanía, mientras que en el otro se incluyen el océano Pacífico y América.

Otros, como Joducus Hondius, que en su *Vera totius expeditionis nauticæ* (pág. 106) muestra las rutas alrededor del mundo de los ingleses Francis Drake y Thomas Cavendish, giraron el mundo 90° y centraron los mapas en los océanos Atlántico y Pacífico, respectivamente, para cada uno de los hemisferios. Hubo quien colocó Europa y África en el centro de uno de los hemisferios, como hizo el alemán Philipp Eckebrecht (1594-1667) en un mapamundi que trazó en 1630 para un trabajo de astronomía del matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630).

La proyección estereográfica ecuatorial también ha sido utilizada desde entonces, incluso en la actualidad, para mapas de zonas parciales del mundo. Por ejemplo, el cartógrafo alemán Johann Baptist Homann (1664-1724) la empleó, además de en el mapamundi en dos hemisferios típico de aquellos siglos, en mapas de Europa, Asia,

África y América, como lo harían otros cartógrafos. Un ejemplo es el mapa *America noviter delineata* (1640) de Joducus Hondius, trazado también con esta proyección:

La versión oblicua fue utilizada por primera vez en el siglo IV para mapas del cielo por el matemático y astrónomo griego Teón de Alejandría, quizás el último director de la Biblioteca de Alejandría y padre de Hipatia. En los tratados modernos sobre mapas celestes la proyección estereográfica es una de las recomendadas, junto a las otras proyecciones azimutales, la gnomónica y la equidistante, para el diseño del mapa del cielo estrellado.

La proyección estereográfica, en su aspecto oblicuo, fue sugerida para mapas terrestres como una proyección original por el cartógrafo austriaco Johannes Stabius (1450-1522) y promovida como una de sus nuevas proyecciones por el matemático alemán Johannes Werner (1468-1522) en su traducción al latín de la *Geografía* de Ptolomeo. Debemos tener en cuenta que uno de los problemas fundamentales cuando se sugerían proyecciones para realizar mapas no era definirlas geométricamente, sino dar métodos de construcción de las mismas, ya que no se disponía de los programas informáticos con los que contamos hoy en día; así, en el libro de John Snyder *Flattening the Earth* se muestran algunos de los métodos de construcción de la proyección estereográfica y de otras transformaciones cartográficas.

En los siglos XVI y XVII, fue usada raramente, salvo excepciones, como se recoge en el atlas del marinero y cosmógrafo Jacques de Vaulx (ca. 1555-1597), que la em-

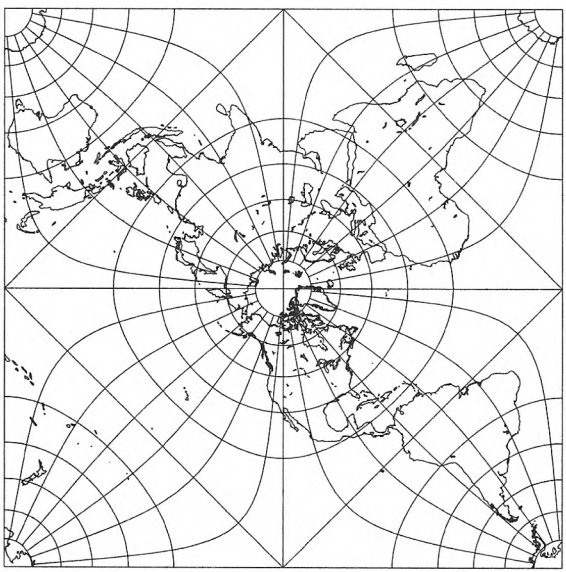
pleó en 1583 para trazar un mapa de dos hemisferios, uno centrado en París y el otro, en el punto antipodal, y que cubre la zona de la Antártida. También aparece en los mapas de Europa y Asia del historiador inglés John Speed (1552-1629). Y aunque no ha sido una estrella de la cartografía, la proyección estereográfica oblicua se ha continuado usando hasta la actualidad: si tomamos la publicación *Map Projections for Europe* (2003), del Institute for Environment and Sustainability de la Comunidad Europea, se encuentra, por ejemplo, que la proyección estereográfica oblicua es empleada en mapas de Holanda, Polonia o Rumania. Además, es la base de la nueva proyección dada por Henri Roussilhe en 1922 y que fue utilizada tanto por la URSS como por el USGS de Estados Unidos.

Volviendo a los cielos, la proyección estereográfica también está siendo utilizada, en particular, por el Servicio Geológico de Estados Unidos, para el trazado de mapas de la Luna, Marte y Mercurio.

La riqueza geométrica de la proyección estereográfica la ha convertido en una herramienta útil en muchas ramas de la ciencia, dentro de las matemáticas en áreas como el análisis complejo, las geometrías no euclideas, la geometría diferencial, la geometría analítica o la topología, así como en física, geología estructural o ingeniería, en cristalografía se emplea para estudiar las simetrías de los cristales y porque la propiedad conforme hace que se mantengan los ángulos entre las caras y entre las aristas del cristal, y en fotografía, para el diseño de lentes de gran angular de tipo «ojo de pez», con el propósito de capturar el mayor rango posible de imagen.

Las fotografías realizadas con la proyección estereográfica, con una lente de gran angular de tipo «ojo de pez», se han puesto de moda en el arte fotográfico (fuente: Alexandre Duret-Lutz).

Las aplicaciones conformes son especialmente convenientes en situaciones en las que los ángulos, o las direcciones (léase rumbos) son una propiedad importante, como, por ejemplo, en la navegación marítima o aérea. Una familia destacada de curvas para la navegación, al igual que, como ya comentamos, lo eran las ortodrómicas, son las loxodrómicas (aquellas que forman un ángulo constante con el meridiano), puesto que para navegar por ellas simplemente hay que mantener el rumbo, marcado, por ejemplo, por una brújula. Por este motivo, una aplicación conforme importante es la proyección de Mercator, en la cual las loxodrómicas se transforman en rectas y, por tanto, son fáciles de trazar sobre el correspondiente mapa. La preservación de los ángulos hace que estas proyecciones se empleen también en geodesia, en meteorología (para representar, por ejemplo, las direcciones de los vientos o las isobaras, que son perpendiculares a las direcciones de los vientos) o en oceanografía. Igualmente son útiles en campos en los que se usan patrones de radiación circular: no olvidemos que las aplicaciones conformes transforman las circunferencias en circunferencias o rectas, como en las emisiones de radio o en las ondas sísmicas. Para la confección de mapas del cerebro también es importante que las transformaciones sean conformes, como puede verse en los estudios de la investigadora estadounidense Monica K. Hurdal (Universidad Estatal de Florida), que trabaja en matemática biomédica.



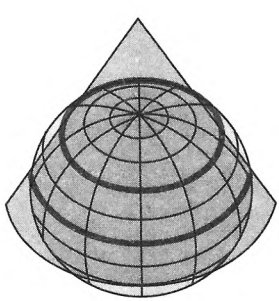
La proyección quincuncial de Peirce es una transformación conforme, generada con técnicas de análisis complejo a partir de la estereográfica, que transforma la esfera en un cuadrado.

Por último, dado que las proyecciones conformes preservan las formas a nivel local, esto las hace muy apropiadas para el trazado de mapas de regiones pequeñas de la Tierra, como quedará de manifiesto en posteriores ejemplos.

Entre las aplicaciones conformes más utilizadas se encuentran las proyecciones siguientes: la estereográfica ya estudiada, la de Mercator, la cónica conforme de Lambert o la cónica conforme bipolar oblicua. Otras proyecciones conformes son la de Lagrange (presentada por Lambert en su trabajo de 1772), las de August y Eisenlohr (introducidas hacia 1870), la quincucial de Peirce con forma cuadrada (1879) y la también cuadrada de Goyou (1887), por citar sólo algunas.

Proyecciones cónicas

La aplicación conforme más importante, después de la estereográfica, que acabamos de estudiar, y la de Mercator, que estudiaremos en el capítulo 9, es la proyección cónica conforme de Lambert, que, como su nombre indica, pertenece al tercer tipo de proyecciones matemáticas utilizadas en cartografía, además de las azimutales y las cilíndricas. Las transformaciones cónicas de tipo geométrico (y, por extensión, las algorítmicas) consisten en proyectar la esfera de referencia sobre un cono tangente, o secante, a la esfera, y luego desplegar éste en un plano; para ello se corta el cono por uno de sus «meridianos» y se abre hasta dejarlo plano. El motivo por el cual se utiliza un cono, como ocurría con el cilindro, es que esta superficie se puede desplegar en un plano sin modificar la geometría métrica. Además, las circunferencias de tangencia, o de corte del cono con la esfera, se toman como líneas estándar o líneas de escala real, es decir, aquellas curvas sobre las que la escala es lineal.



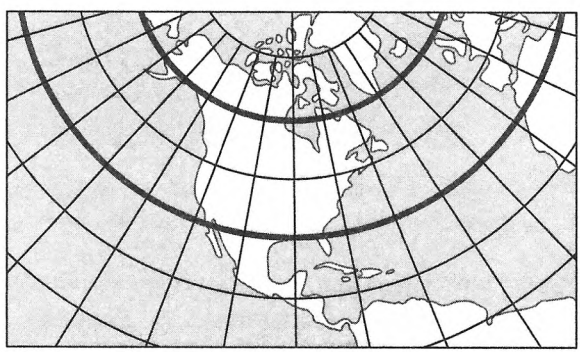


Imagen proyectada sobre un cono y desplegada.

Todas las proyecciones cónicas en su versión normal, es decir, cuando el vértice del cono está en el eje Norte-Sur terrestre y la curva de contacto con la esfera es un paralelo (o dos en el caso secante), satisfacen las siguientes propiedades:

1. Los meridianos se transforman en líneas rectas que emanan de un punto y están uniformemente separados en intervalos angulares iguales. La distancia angular entre los meridianos se reduce con un factor fijo, la constante cónica, con respecto a la misma sobre la esfera.
2. Los paralelos se proyectan en arcos de circunferencias concéntricas, que cortan los meridianos en ángulo recto. La distorsión es constante a lo largo de cada paralelo.

Estas propiedades nos están diciendo, además, que la forma de un mapa generado por una proyección cónica es un arco circular, o un arco de una corona circular, y que la red de meridianos y paralelos está determinada por la separación angular entre los meridianos y el modo en que los paralelos se encuentran espaciados entre sí. Todo ello, junto con la determinación de cuál o cuáles son los paralelos estándar, determina el mapa.

La forma de la red de meridianos y paralelos es muy característica en las proyecciones cónicas. Un ejemplo es esta proyección cónica isoareal de Albers (1805).

Por otra parte, la distorsión en los mapas diseñados a partir de proyecciones cónicas es pequeña cerca del paralelo, o paralelos, estándar, y va aumentando en la dirección de los polos. Debido a esta distorsión, y al modo en que se construyen

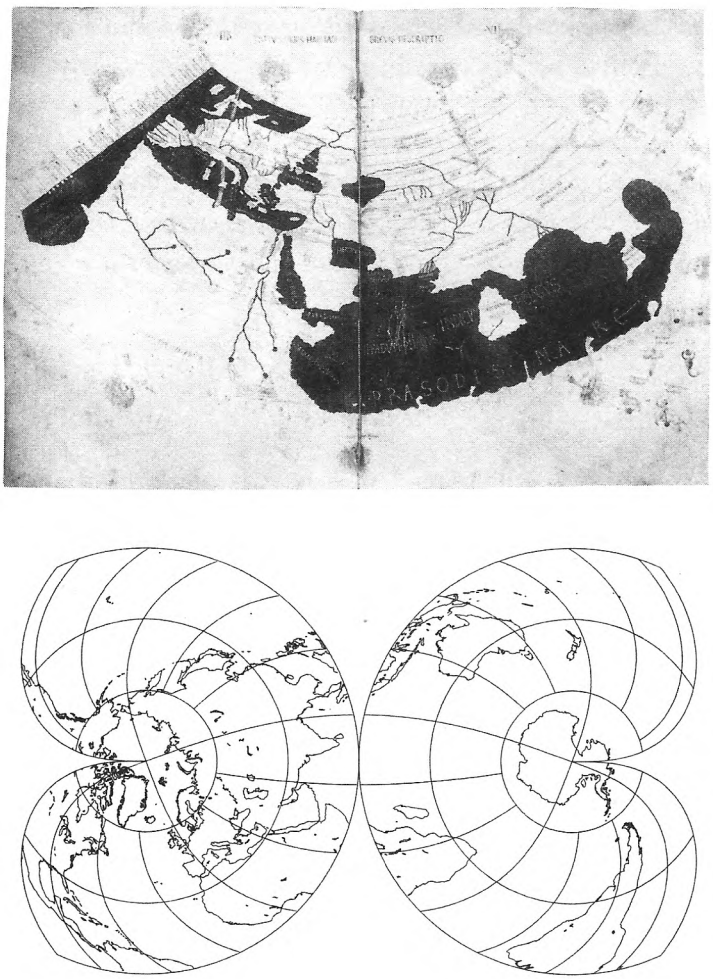
estos mapas, suelen ser utilizados en áreas regionales, nacionales o en territorios algo más extensos de zonas templadas (mientras que, en general, los azimutales y cilíndricos se utilizan más para zonas polares y ecuatoriales, respectivamente). En particular, se trata de proyecciones adecuadas para extensiones de terreno que se encuentran entre dos meridianos no demasiado alejados el uno del otro, como España, Francia, Alaska o Mongolia, y puede cubrir regiones más amplias que se extiendan en la dirección Este-Oeste, como Rusia, Europa o Estados Unidos.

Estamos centrándonos en el aspecto normal, o polar, pero también podríamos considerar los aspectos ecuatorial y oblicuo de esta proyección. Por otra parte, si relajamos las condiciones cónicas se obtienen lo que se conoce como proyecciones pseudocónicas (cuyos meridianos están curvados) y policónicas (cuyos paralelos no son concéntricos).

Mapa de la península de Florida realizado con la proyección cónica isoareal de Albers.

Ptolomeo introdujo dos proyecciones de tipo cónico (aunque no dejó ningún comentario sobre el cono en su descripción), ambas con arcos de circunferencias concéntricas para los paralelos, pero una con los meridianos representados por rectas (ilustración de la pág. 126) y otra por arcos circulares (pág. 12). Ptolomeo

tuvo una influencia destacada en la cartografía del Renacimiento y así, en particular, desde principios del siglo XVI nos encontramos con la aparición de proyecciones cónicas y pseudocónicas que serían estudiadas y utilizadas por los grandes cartógrafos, como Gerard y Rumold Mercator, Willem Blaeu, Joducus Hondius, Joseph de l'Isle o John Speed, entre otros. Algunas de ellas presentan formas muy curiosas, como las proyecciones con forma de corazón de Johannes Werner o del cartógrafo francés Rigobert Bonne (1727–1795) o las de doble corazón del matemático y cartógrafo francés Oronce Finé (1494-1555).

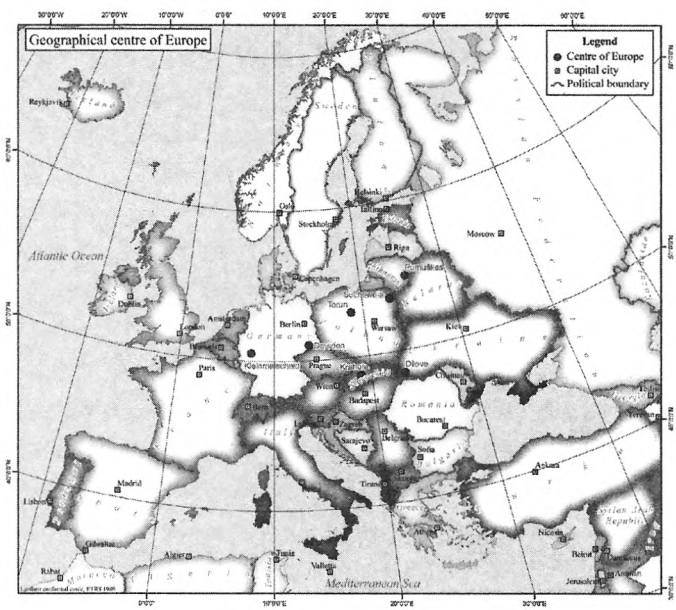


Arriba, mapamundi de Ptolomeo realizado con una proyección de tipo cónico. Abajo, mapa basado en la proyección doble cordiforme de Oronce Finé (1538).

Proyección cónica conforme de Lambert

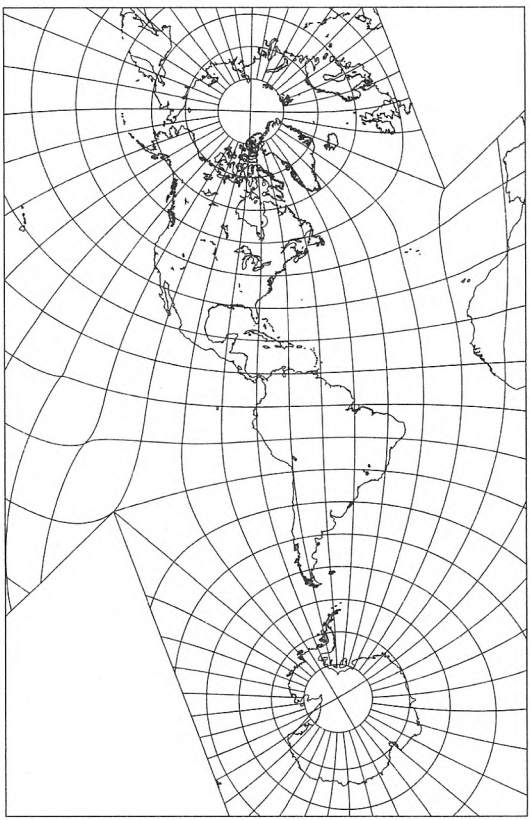
El cilindro y el plano pueden ser vistos como superficies límite del cono: el primero lo obtenemos cuando alejamos el vértice hasta dejarlo en el infinito, y el segundo, si lo acercamos hasta aplanar el cono. Lambert utilizó toda la herramienta matemática en su poder (cálculo, geometría, álgebra y trigonometría) para desarrollar una familia de proyecciones cónicas conformes, con dos paralelos estándar, y que tiene como casos límite la estereográfica, que es azimutal, y la de Mercator, cilíndrica. Lambert incluyó como ejemplo en su trabajo un mapa de Europa.

Hasta que fue utilizada por Francia durante la Primera Guerra Mundial, esta proyección había permanecido olvidada. Desde entonces se ha convertido en una de las proyecciones más utilizadas para mapas de «escala grande», después de la de Mercator. La utiliza la USGS de Estados Unidos, así como muchas otras agencias internacionales para mapas topográficos. La Comisión Europea la recomienda para mapas conformes de Europa al completo de escalas menores o iguales a 1:500.000, y es común en países como Francia o Estados Unidos. También se emplea mucho para la realización de cartas náuticas.



Mapa político de Europa realizado con la proyección cónica conforme de Lambert, que se ha convertido en una de las proyecciones cartográficas más utilizadas.

Otras proyecciones cónicas son: la oblicua bipolar, desarrollada en 1941 por O.M. Miller y William A. Briesemeister, de la Sociedad Geográfica Americana, con el propósito de crear un mapa que cubriera todo el continente americano, para lo cual sigue siendo ampliamente utilizada, y que en su diseño utiliza dos aspectos oblicuos de la proyección cónica conforme de Lambert; la proyección cónica isoareal de Albers, desarrollada por el cartógrafo alemán Heinrich Ch. Albers en 1805; la proyección cónica equidistante que nos recuerda el mapa de Ptolomeo; y la policónica, que suele atribuirse al topógrafo suizo Ferdinand R. Hassler (1770-1843), utiliza distintos conos en su realización y tiene un aspecto singular que nos recuerda a la curva denominada nefroide, con forma de riñón.



Mapa de América realizado con la proyección cónica oblicua bipolar.

Capítulo 8

Lo que Euler le dijo al cartógrafo

—Ésa es otra cosa que hemos aprendido de vuestra Nación —dijo Mein Herr—, el arte de hacer mapas. Pero lo hemos desarrollado mucho más que vosotros. ¿Cuál es para ti el mapa más grande que sería de verdad útil?

—Sobre seis pulgadas por milla.

—¡Sólo seis pulgadas! —exclamó Mein Herr—. Nosotros muy pronto superamos las seis yardas por milla. Entonces probamos con cien yardas por milla. ¡Y finalmente llegamos a la idea más fabulosa de todas! ¡Realizamos un mapa del país con la escala de una milla por milla!

—¿Lo habéis utilizado mucho? —pregunté.

—Nunca ha sido desplegado todavía —dijo Mein Herr—, los granjeros se opusieron. Ellos dijeron que cubriría completamente el país, ¡y no dejaría pasar la luz del Sol! Así que ahora utilizamos el propio país, como su propio mapa, y te aseguro que funciona casi tan bien.

Lewis Carroll, *Silvia y Bruno* (vol. 2) [1893]

Tras nuestro pequeño paseo por tres significativos ejemplos de proyecciones cartográficas útiles para el diseño de mapas, como son las proyecciones cilíndrica isoareal de Lambert, central y estereográfica, que nos han servido para entender mejor algunos de los aspectos inherentes al problema cartográfico que estamos estudiando, volvamos de nuevo al tema central de este libro: ¿Existen mapas correctos de la superficie terrestre? ¿Cómo construir correctamente uno de dichos mapas?

Con el fin de que no perdamos el hilo de nuestra reflexión, recordemos que un mapa perfecto sería aquel para el cual se mantienen inalteradas, salvo la escala dada por el cambio de tamaño, las propiedades métricas, como son el área, los ángulos, las geodésicas, las formas y, en general, las longitudes de las curvas y las distancias. Es decir, la proyección cartográfica empleada en su diseño debe ser una isometría. Recordemos que una aplicación entre superficies es una isometría si se preservan

las distancias. Esta propiedad implica, en particular, que se preservan áreas, ángulos y geodésicas. Con el objetivo de simplificar la búsqueda y la construcción de un mapa correcto nos habíamos planteado entonces si sería suficiente que una proyección fuese isoareal para que fuera una isometría, lo cual facilitaría mucho nuestro trabajo, puesto que podríamos limitarnos a la construcción, o búsqueda, de aplicaciones que a priori simplemente preservasen el área para poder diseñar mapas isométricos. De forma análoga habíamos actuado para ángulos y geodésicas.

Sin embargo, los tres ejemplos cartográficos estudiados en los capítulos precedentes nos han mostrado que para que una proyección sea una isometría, y obtengamos con ella nuestro ansiado mapa ideal, no es suficiente que se preserve solamente una de las tres propiedades métricas (área, ángulos y geodésicas), sino que es preciso añadir más información sobre la proyección.

Proyecciones isoareales conformes

Tras fracasar en nuestro primer intento de obtener información que nos lleve hacia la construcción del mapa ideal, ¿cómo atacar ahora el problema cartográfico? No nos compliquemos mucho por el momento y simplemente planteémonos si será suficiente que una transformación satisfaga dos de las tres propiedades métricas para poder afirmar que es una isometría.

Empezaremos por considerar el caso en el que la aplicación de la esfera en el plano preserve los ángulos y las áreas, y veremos si necesariamente será, o no, una isometría. Para intentar resolver este interrogante vamos a aprovechar lo estudiado en los capítulos anteriores sobre la deformación que producen las proyecciones que mantienen invariantes el área y los ángulos. Como vimos en el capítulo 5 si la proyección es conforme entonces la distorsión no varía con la dirección, y en particular la distorsión que se produce en los meridianos (μ) es igual a la distorsión que se produce en los paralelos (λ):

$$\mu = \lambda.$$

Por otra parte, en ese mismo capítulo se observaba también que para las proyecciones isoareales la deformación que se producía en meridianos era inversa a la de los paralelos, para poder compensar el área, es decir,

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

Teniendo en cuenta ambas igualdades llegamos a la conclusión de que

$$\mu = \lambda = 1,$$

es decir, toda aplicación que sea al mismo tiempo isoareal y conforme no va a producir ninguna distorsión, ni en las direcciones de los meridianos y paralelos ni en ninguna otra dirección; por lo tanto, será una isometría (el lector puede preguntarse qué pasa con la escala, pero recordemos que en estos momentos estamos trabajando con la esfera de referencia y, por tanto, el cambio de tamaño, la escala lineal, no forma parte del problema).

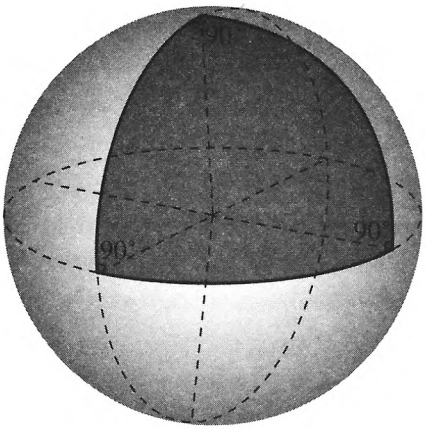
¡Eureka! Un método para construir mapas precisos de la esfera terrestre podría consistir en proyecciones que preservasen el área y los ángulos al mismo tiempo, lo cual no es ninguna trivialidad, puesto que al demostrar que una determinada proyección es una isometría, en consecuencia se preservan todas las propiedades métricas, es decir, también geodésicas, formas, longitudes de curvas y distancias.

¿Existen mapas correctos de la Tierra?

Antes de intentar buscar, o construir, una transformación isoareal conforme, a partir de la cual se pueda diseñar un mapa perfecto desde el punto de vista métrico, sigamos el estudio iniciado y consideremos el caso de las proyecciones que conservan otras dos propiedades métricas, como, por ejemplo, ángulos y geodésicas.

De forma análoga al concepto de triángulo sobre el plano, es decir, la región comprendida por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos no alineados, se define el concepto de «triángulo esférico» como la región de la esfera delimitada por tres arcos de círculos máximos que se cortan dos a dos en tres puntos que no descansan sobre el mismo círculo máximo. Como las aplicaciones que estamos considerando preservan las geodésicas, la imagen de un triángulo esférico es un triángulo plano, y como son conformes, preserva los ángulos de los triángulos y, en particular, también su suma. Sabemos por geometría clásica que «la suma de los ángulos de un triángulo es igual a π (180°)», pero ¿qué sabemos de la suma de los ángulos de un triángulo esférico? ¿Es de nuevo igual a π (180°), como cabría esperar?

Empecemos con un ejemplo concreto. Tomemos un triángulo esférico formado por un arco de meridiano entre el Norte y el ecuador, otro arco similar formando un ángulo de $\pi/2$ (90°) con el anterior y el arco de ecuador que conecta con los dos anteriores y que forma con cada uno de ellos un ángulo de $\pi/2$ (90°), como muestra la imagen:



Triángulo esférico formado por tres ángulos de 90°, luego la suma de ellos es de 270°.

La suma de los ángulos de este triángulo esférico es $3\pi/2$ (270°), y no π (180°), como estábamos esperando. En conclusión, no existen proyecciones de la esfera en el plano que preserven al mismo tiempo los ángulos y las geodésicas. Pero esto tiene una consecuencia muy importante, ya que nos permite afirmar que no existen isometrías de la esfera en el plano, es decir,

NO EXISTEN MAPAS PERFECTOS.

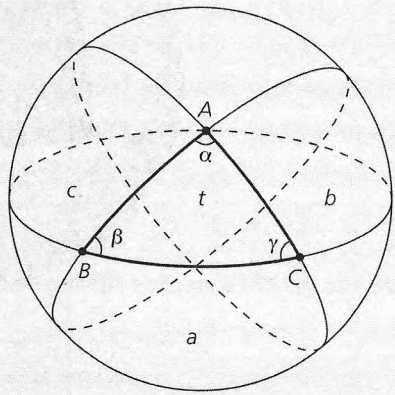
Pero aún más: este resultado no es solamente global sino que también es local, es decir, tampoco es posible construir mapas perfectos de una pequeña parte de la superficie terrestre. Dicho de otra forma, no es posible construir isometrías locales de la esfera en un plano.

Para probarlo, volvamos a la suma de los ángulos de un triángulo esférico cualquiera. El valor de esta suma se encuentra entre π y $3\ \pi$ (ambos valores excluidos). Como cada ángulo esférico es menor que π, es obvio que la suma de los tres será menor que $3\ \pi$, pero, además, podemos acercarnos tanto a ese valor como queramos: basta considerar dos de los vértices sobre el ecuador y el otro cercano al ecuador, pero de forma que el triángulo esférico cubra casi todo el hemisferio. En el otro extremo podemos considerar dos vértices en el ecuador, y el tercero, en el Norte, de forma que los arcos de meridiano estén muy juntos formando un ángulo tan peque-

FÓRMULA DE LA SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO

Dada una esfera de radio R, entonces la porción de ella entre dos círculos máximos (llamada lúnula esférica) que se intersecan con un ángulo de α radianes, tiene un área de $\alpha/2\pi$ veces la de toda la esfera, es decir,

$$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot(4\pi R^2).$$



Sea un triángulo esférico de vértices A, B, C y ángulos α, β y γ. Si consideramos los círculos máximos que contienen a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, entonces la fórmula anterior nos dice que:

$$t+a=2\alpha R^2.$$

De forma similar se obtiene:

$$t+b=2\beta R^2, \qquad t+c=2\gamma R^2.$$

Sumando las anteriores igualdades,

$$3t+a+b+c=2R^2(\alpha+\beta+\gamma).$$

Pero resulta que $t+a+b+c$ es igual a la superficie de un hemisferio (observemos que para cada vértice, por ejemplo A, hay dos lúnulas iguales de ángulo α, con dos regiones cada una de áreas t y a). En conclusión,

$$2t+2\pi R^2=2R^2(\alpha+\beta+\gamma),$$

y simplificando,

$$t=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi).$$

ño como queramos; la suma de los tres ángulos del triángulo será cercana a π. Incluso se podría demostrar que para cualquier triángulo esférico se cumple la fórmula:

$$\text{Área triángulo esférico} = R^2\,(\text{Suma de los ángulos} - \pi),$$

si consideramos R el radio de la esfera. Como la suma de los ángulos de un trián-

gulo esférico de cualquier tamaño y forma es siempre mayor que π, se deduce que no existen aplicaciones de regiones pequeñas de la esfera en el plano que preserven ángulos y geodésicas; por lo tanto, tampoco existen isometrías locales. Y la esperanza que habíamos puesto en la construcción de una proyección isoareal conforme era una ilusión, ya que no existen isometrías de la esfera en el plano.

Aunque a lo largo de la historia los cartógrafos no pudieron construir esos mapas ideales de la Tierra, tampoco pudieron demostrar que no fuese posible diseñarlos hasta que el matemático suizo Leonhard Euler lo probó haciendo uso del anterior argumento en su trabajo *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano* (artículo presentado en la Academia de Ciencias de San Petersburgo en 1775 y publicado en 1778 en *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*).

LEONHARD EULER (1707-1783)

Euler es conocido como «el matemático más prolífico de toda la historia». A lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos, 866 si añadimos su obra póstuma hasta 1911, cuando se inició la edición de sus obras completas, que se calcula que alcanzarán los 90 volúmenes.

Euler nació en Basilea. Su padre, pastor calvinista, quería que su hijo estudiara teología, pero éste se decantó por las matemáticas. Con 19 años publicó su primera memoria científica sobre la distribución óptima de mástiles y velas en los navíos sin haber visto nunca un barco. Entre 1727 y 1740 llevó a cabo su primera estancia en la Academia de Ciencias de San Petersburgo. A su llegada se encontró un zar nada interesado en la ciencia y, para sobrevivir, tuvo que enrolarse durante tres años en la Marina rusa. Se casó con Catherine Csell, con la que tuvo trece hijos. Euler afirmaba que había realizado muchos de sus descubrimientos con alguno de sus hijos en brazos. También por aquella época perdió la visión de su ojo derecho. Durante los años 1741 y 1766 ingresó en la Academia de Ciencias de Berlín. Debido a la crisis económica, los primeros años se ganó la vida dando clases a miembros de las familias nobles. La relación con Federico II no fue buena, le llamaba el «cíclope matemático», y a pesar de ser el responsable de matemáticas, le tocó realizar trabajos como la nivelación del canal Finow, instalaciones de juegos de agua, la dirección de una mina de sal o diversas cuestiones financieras. Tras su regreso a San Petersburgo, Catalina II le dio un trato completamente opuesto, tanto en lo personal como en el aspecto laboral. Euler acabó sus años completamente ciego, aunque casi la mitad de sus trabajos fueron escritos durante aquella época.

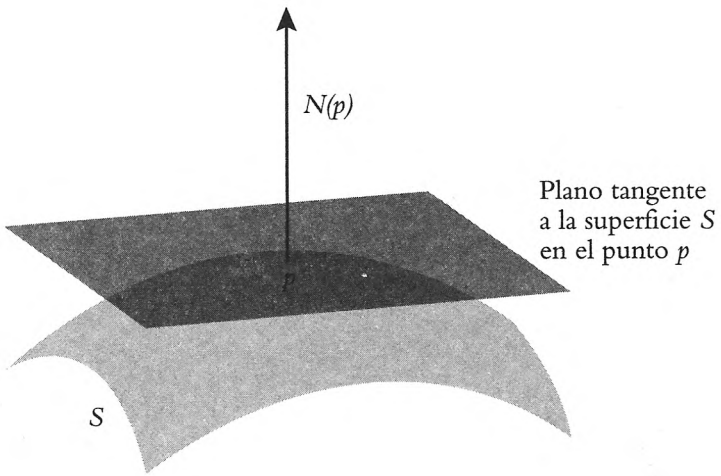
Digámoslo de nuevo, NO EXISTEN MAPAS PERFECTOS de la Tierra ni de cualquier parte de ella, y todos ellos son falaces en algún sentido, absolutamente todos. Un par de experimentos que ponen de manifiesto el resultado de Euler son los siguientes: consideremos una pelota de plástico, cortémosla por la mitad e intentemos colocarla completamente plana sobre la mesa. Podemos comprobar que en nuestro intento de aplanar la pelota, ésta se deformará o se rasgará, modificándose así las distancias entre los diferentes puntos de la superficie. Incluso si realizamos algunos cortes radiales para facilitar el aplanamiento seguiremos teniendo el mismo problema. Lo mismo ocurre en sentido contrario: si pegamos, por ejemplo, un sello de grandes dimensiones en una naranja, se formará un gran número de pliegues.

El resultado de Euler pone de manifiesto que lo importante a la hora de utilizar mapas, trazados con diferentes proyecciones, que abarquen diferentes regiones de la Tierra o incluso mapamundis, es considerar aquellos que se ajusten lo más posible a nuestras necesidades concretas. A la hora de utilizar un mapa en nuestro trabajo o en nuestra vida cotidiana no debemos dejarnos guiar por su reconocimiento, su nombre o por ser el mapa oficial de alguna agencia internacional, sino que la elección, dentro de la gran variedad de mapas existentes, debe ser consecuencia de una reflexión inicial sobre las propiedades que necesitamos que se preserven en él.

La curvatura de Gauss, regreso al problema cartográfico

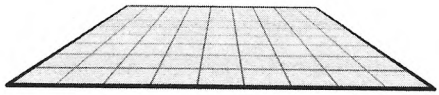
Uno de los objetivos que nos habíamos planteado al inicio de este libro, de igual forma que todos los cartógrafos a lo largo de la historia, era el diseño de un mapa terrestre correcto. Sin embargo, como hemos demostrado siguiendo los pasos de Euler, esto es imposible. Demostraciones aparte, nos podemos preguntar por qué no es posible tal mapa, por qué no puede realizarse una transformación de la esfera en el plano que deje invariante la geometría métrica de la misma. Seguramente, y pensemos en el experimento de la pelota de goma, nos vendrá a la mente la siguiente respuesta: «¡La esfera es una superficie curvada, y el plano, no!». Y algo de razón no nos falta si nos atenemos a lo estudiado hasta ahora, pero también es cierto que el cilindro y el cono son superficies curvadas y, a pesar de ello, podemos desenrollarlas hasta dejarlas planas sin modificar las propiedades métricas de las mismas. ¿Qué diferencia hay entonces entre la esfera y las otras dos superficies, cilindro y cono? ¿Es posible que la forma de curvarse de ellas sea distinta, o será

que el problema de la curvatura no es tan importante como creíamos? Como vamos a ver a continuación, no todas las superficies están curvadas del mismo modo. ¿Cómo medir la forma en la que se curva una superficie? La curvatura, que es un concepto local, en un cierto punto de la superficie nos mide cuánto se aleja ésta en dicho punto, en su entorno, de ser una superficie plana. Pero, de alguna forma, hay que cuantificarlo.



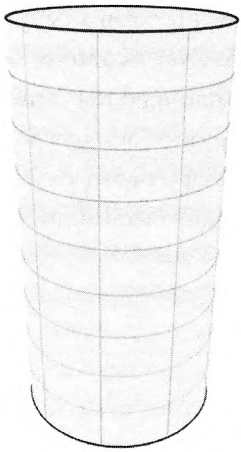
Dos elementos muy importantes en el estudio local de una superficie son el plano tangente a la superficie en un punto p *de la misma y el vector normal a la superficie en* p, N(p), *que es perpendicular al plano tangente.*

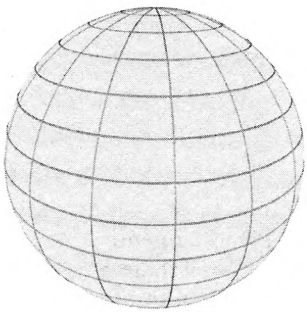
Para ello consideremos el llamado plano tangente a la superficie S en el punto p, que es el plano más «próximo» a la superficie en dicho punto y el vector perpendicular al plano tangente en p, llamado vector normal (como se muestra en la imagen). Estudiar la curvatura de la superficie en dicho punto significa conocer, y computar, cómo varía el plano tangente (o respectivamente, el vector normal) en el entorno del punto. Esto en matemáticas significa derivar. Así se obtiene un objeto matemático que es el operador forma (no entraremos en su definición concreta puesto que es algo técnica y quien esté interesado puede verla en cualquier libro de geometría diferencial), que en principio contiene toda la información de cómo se curva la superficie en el espacio. A partir del operador forma se definen dos curvaturas distintas para extraer toda la información posible del mismo, la llamada curvatura de Gauss K y la curvatura media H.



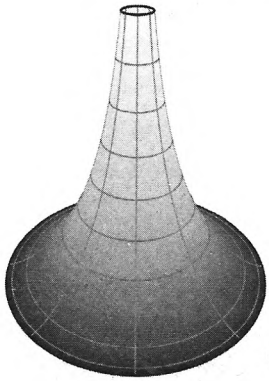
Plano

Cilindro

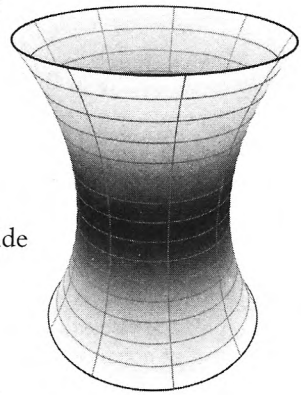




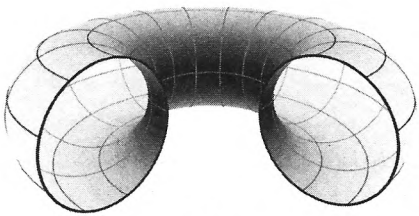
Esfera



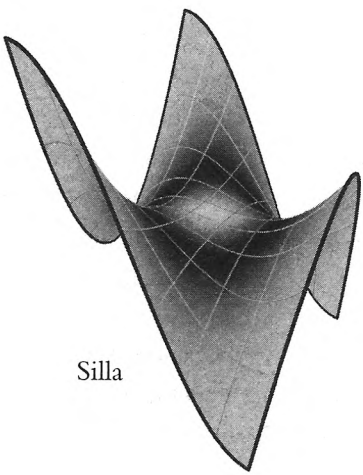
Pseudosfera



Catenoide



Toro

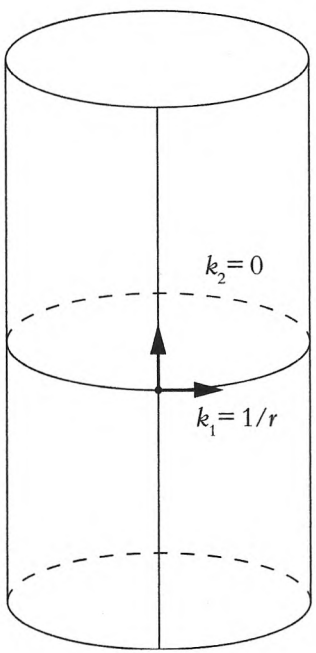


Silla

Algunos ejemplos de superficies en los que los tonos de gris nos indican los diferentes valores de la curvatura de Gauss y media. Plano ($K=H=0$*), cilindro de radio* r (K=0; H=1/2r); *esfera de radio* r (K=1/r^2, H=−1/r); *pseudoesfera* (K=−1; *la curvatura media es más extrema hacia el borde y más pequeña hacia el infinito; en la imagen, la escala de grises se corresponde con la curvatura media); superficie del toro (su curvatura es positiva en la zona externa del toro, mientras que es negativa en la interna; la curvatura media también cambia de una zona a otra, y la escala de grises de la imagen se corresponde con la curvatura de Gauss); catenoide* (H=0; *la escala de grises se corresponde con la curvatura de Gauss); silla del mono (la escala de grises se corresponde con la curvatura de Gauss). (Fuente: Josu Arroyo.)*

Otra forma, quizás algo más geométrica, de definir estas curvaturas es la siguiente: dado el punto p de la superficie S en el que queremos definir las curvaturas, tomamos el vector normal $N(p)$ y la familia de los planos $\Pi(p)$ que pasan por p y contienen la dirección $N(p)$. Para cada uno de esos planos $\Pi(p)$ tomamos su intersección con la superficie S, que nos da una curva que pasa por p, y medimos la curvatura de esa curva en dicho punto, que es un valor numérico, la medida de cómo se curva la curva en el punto. Obtenemos así la familia de todas las curvaturas direccionales de la superficie en el punto p, que nos da cierta información sobre la manera en qùe se curva la superficie. El conjunto de todas estas curvaturas direccionales tiene un valor máximo k_1 y un valor mínimo k_2, las llamadas curvaturas principales; es decir, son la máxima y mínima curvatura «direccional» de la superficie en p. A partir de ellas se pueden recuperar la curvatura de Gauss y la curvatura media como:

$$K = k_1 k_2, \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$



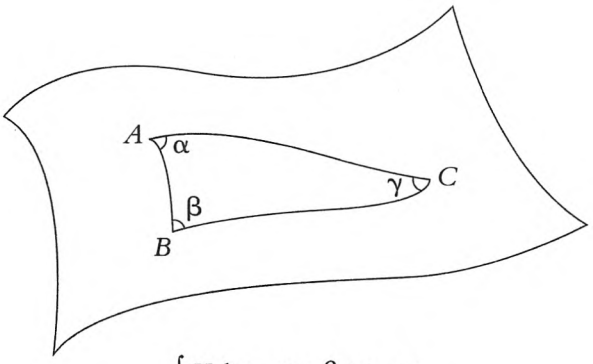
El cilindro con sus dos direcciones principales, con curvaturas $k_1 = 1/r$ *y* $k_2 = 0$, *luego* $K = 0$, $H = 1/2r$.

El gran matemático Carl Friedrich Gauss demostró en su trabajo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) que, contrariamente a lo que sugiere la definición, la llamada, con posterioridad, curvatura de Gauss depende únicamente de las propiedades métricas de la superficie, es decir, es un elemento de la geometría intrínseca de la misma (el conocido como teorema egregium de Gauss). Por consiguiente, la curvatura de Gauss mide el modo en que la superficie se curva internamente o, de forma intuitiva, es la curvatura que puede percibir un «habitante» de, y desde, la misma (sin «mirar» al exterior). Como consecuencia, si dos superficies son isométricas, es decir, si existe una isometría entre ellas, la curvatura de Gauss debe ser la misma en los puntos correspondientes mediante la isometría (el resultado es local; ocurre lo mismo si la isometría es solamente de una parte de la superficie).

La solución a nuestro problema cartográfico puede entonces verse como un resultado particular del teorema egregium de Gauss. Como la esfera tiene curvatura de Gauss constante positiva (igual a 1 si la esfera tiene radio 1; ésta se curva igual en todas las direcciones y en todos los puntos) y el plano tiene curvatura cero, entonces no puede existir una isometría (ni siquiera local) entre ellas.

Más aún, en geometría diferencial, un ámbito más general que la cartografía matemática, donde se trabaja para cualesquiera dos superficies, el teorema egregium de Gauss convierte a la curvatura de Gauss en una obstrucción geométrica a la construcción de isometrías entre dos superficies, o dicho en lenguaje cartográfico, para poder realizar un mapa de una cierta superficie de interés sobre otra superficie cualquiera es necesario que ambas superficies tengan la misma curvatura de Gauss. Una cuestión clave relacionada con la anterior es si el resultado es suficiente, además de necesario. Es decir, dadas dos superficies con la misma curvatura de Gauss, ¿serán isométricas, al menos localmente? El matemático ruso-germano Ferdinand Minding (1806-1885), que desarrolló un profundo trabajo en la geometría diferencial de superficies, demostró que si las dos superficies tienen la misma curvatura de Gauss y ésta además es constante a lo largo de toda la superficie, entonces sí existe una isometría local entre ellas. En el caso particular del cilindro (el cono) y el plano, como ambos tienen curvatura de Gauss constante e igual a cero, respectivamente, entonces son localmente isométricas. Sin embargo, si la curvatura de Gauss no es constante, el resultado no es cierto.

La fórmula de la suma de los ángulos de un triángulo esférico que hemos visto anteriormente puede ser generalizada a una superficie cualquiera, como demostró Gauss, relacionando mediante una fórmula matemática la variación de los ángulos de un triángulo geodésico con respecto a π con la curvatura de Gauss:



$$\int_T K\,d\sigma = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

La fórmula de la suma de los ángulos de un triángulo, tanto del plano como de la esfera, puede generalizarse en una superficie cualquiera; es la conocida fórmula de Gauss-Bonnet, que implica la curvatura de Gauss de la superficie.

Por supuesto, que en el caso de la esfera de radio R recuperamos la fórmula anterior, puesto que la curvatura de Gauss es $1/R^2$, y entonces:

$$\int_T K d\sigma = \frac{1}{R^2}\int_T 1\, d\sigma = \frac{1}{R^2}\,\text{Área de } T.$$

Pero hemos introducido dos curvaturas; por lo tanto, nos podemos cuestionar qué ocurre con la otra, la curvatura media. La geometría extrínseca de una superficie se ocupa de la relación de la misma con el espacio exterior tridimensional y la medida de cómo se curva realmente en él viene dada por la curvatura media.

El globo terráqueo

No es posible diseñar mapas correctos de la Tierra. El globo terráqueo es la representación más perfecta de nuestro planeta, en la que se preservan todas las propiedades métricas anteriormente consideradas, salvo el factor tamaño. La única distorsión que se produce es el factor de escala, que es constante sobre todo el globo. En este modelo podemos trazar correctamente las rutas aéreas o marítimas, ya que los rumbos y las distancias son reales. La distancia entre dos puntos de la superficie terrestre, como pueden ser dos ciudades, se calcula trazando el círculo máximo sobre el globo, que puede obtenerse fácilmente con una cuerda tensa, y midiéndolo con

LA HISTORIA DEL GLOBO TERRÁQUEO

Los griegos, que conocían la forma esférica de la Tierra, ya empezaron a construir globos terráqueos para representarla, aunque fue el gramático y filósofo estoico Crates de Malos el primero del que se tiene constancia que construyera uno hacia el año 150 a.C. En él se mostraban, antes de los descubrimientos de América, Australia y parte del continente africano, cuatro zonas terrestres distribuidas por el globo, aunque solamente una conocida, el ecúmene. Los griegos, romanos y, posteriormente, los árabes, crearon y utilizaron globos terráqueos y celestes.

El primer globo terráqueo que se ha conservado hasta nuestros días es el construido por el geógrafo alemán Martin Behaim en 1492. El Renacimiento fue una época de esplendor en la construcción de estos accesorios cartográficos, y fue el cartógrafo alemán Martin Waldseemüller (ca. 1470-ca. 1520) quien introdujo un avance importante en la construcción de globos en gran cantidad al utilizar husos esféricos impresos.

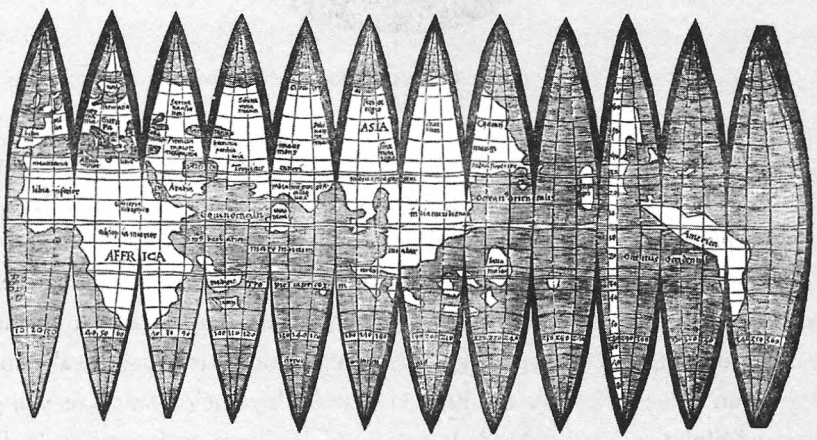
Facsímil del globo de Waldseemüller (1507).

Estudiando los globos terráqueos a lo largo del tiempo podemos observar, de forma paralela, los avances técnicos en la construcción y en los conocimientos geográficos. Un punto de inflexión en el desarrollo técnico para la construcción de estos globos, así como en los aspectos científicos asociados al problema cartográfico, se debe al cartógrafo flamenco Gerardus Mercator. Su objetivo era que fuera una herramienta útil para la navegación, tanto para estudiantes como para navegantes; por ejemplo, incluye las imágenes de curvas loxodrómicas. Sin embargo, muchas de sus obras se convirtieron en elegantes muebles para las casas de las clases pudientes.

¿CÓMO CONSTRUIR UN GLOBO TERRÁQUEO?

A pesar de que la esfera es la única forma, en esencia, para poder representar de un modo correcto la superficie terrestre, la construcción real de este modelo trae consigo muchos problemas técnicos. El primero es el tamaño: los globos terráqueos suelen tener de 30 a 40 cm de diámetro, lo que hace que sean demasiado pequeños para poder apreciar los detalles. Por ejemplo, si el globo tiene relieve a escala, el Everest simplemente tendría una altura de unos 0,28 mm, y el cauce de un río sería imperceptible. El segundo problema es el material empleado para fabricar la esfera base. Antiguamente los globos eran macizos y podían ser de cristal, mármol, madera o metal (oro, plata, bronce o plomo), pero a partir de Mercator serían huecos, y constaban, por ejemplo, de un armazón de madera sobre el que se aplicaba una pasta de papel y yeso. Hoy en día siguen siendo huecos, pero son cada vez más finos, y están elaborados con materiales diversos, como cartón, plástico o metal.

Desde Waldseemüller se imprimen una serie de husos o lúnulas esféricas, que posteriormente se pegan sobre la esfera base para generar el globo terráqueo. Por lo tanto, caemos en el mismo problema que para la generación de los mapas, ya que hay que imprimir la imagen de la esfera terrestre sobre los husos planos. Se suelen utilizar normalmente 12 husos esféricos centrados en el ecuador, con las dos regiones polares aparte, diseñados con una proyección sinusoidal modificada. Otra alternativa, más frecuente en la actualidad, es colocar dos colecciones de 12 sectores triangulares centrados en uno de los polos y cubriendo uno de los hemisferios. Sin embargo, con las técnicas modernas, los husos esféricos se imprimen directamente sobre el material que conforma la esfera base.



Husos esféricos del globo de Martin Waldseemüller (1507).

una cinta métrica, o midiendo la propia cuerda, para finalmente aplicar la escala a la medida obtenida. Del mismo modo se podrían tomar otras medidas de interés sobre el globo terráqueo, más exactas que sobre cualquiera de los mapas planos. Los errores que puedan obtenerse en las mediciones sobre el globo terráqueo vendrán de los errores que se cometan en el proceso de medición, y no por el modelo en sí mismo, siempre que éste haya sido construido correctamente (como veremos, la complejidad en la construcción de los globos hace que sea en la construcción real de los mismos donde se origine el error).

Globo terráqueo moderno.

El uso de los globos terráqueos es muy útil en cartografía, geografía, náutica, geodesia, oceanografía, climatología o sismografía, entre otras ciencias. Pero, además, sirven para tener una imagen real de la Tierra, de su redondez o de las relaciones espaciales asociadas. Por ello sería importante que en todos los centros educativos y en todas las casas hubiese un globo terráqueo que nos permitiera contemplar una imagen real de nuestro planeta. Por otra parte, debido al armazón en el que van colocados, podemos incluso apreciar la rotación terrestre, y al girar, la parte del globo que vemos sería la región de la Tierra en la que es de día, es decir, la que está iluminada por el Sol, mientras que la que no logramos ver sería la región en la que es de noche.

A pesar de la perfección teórica de los globos terráqueos, sus insalvables desventajas descartan su utilización (aun asumiendo una construcción perfecta del mismo):

1. Son frágiles, voluminosos y de difícil manejo, transporte y almacenamiento.
2. Son muy caros de producir, especialmente los de mayor tamaño, y nada prácticos para mostrar detalles.
3. Resultan difíciles de manipular para tomar medidas o fijar ángulos.
4. Sólo se puede trabajar con un hemisferio a un tiempo.
5. Son completamente impracticables para hacer reproducciones por medio de impresión o electrónicamente.

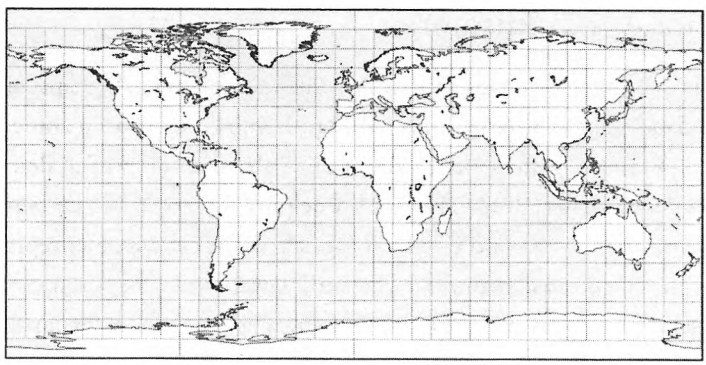
Proyecciones equidistantes

Para finalizar este capítulo vamos a introducir una nueva familia de mapas atendiendo a sus propiedades métricas. A lo largo del libro hemos puesto de manifiesto que el ideal de cualquier cartógrafo sería diseñar un mapa con escala (índice de reducción) constante, es decir, sin más distorsión que la que produce el cambio de tamaño. Acabamos de demostrar que esto no es posible, pues la escala de cualquier representación plana de la Tierra no es constante, ya que varía tanto con la posición como con la dirección debido a que las proyecciones cartográficas generan distorsión inevitablemente. Sin embargo, existe la posibilidad de construir mapas para los cuales una familia de curvas tenga escala constante y longitud proporcional a las curvas correspondientes sobre la Tierra (a estas curvas se las llama líneas o curvas estándar); tales proyecciones se denominan equidistantes. Veamos tres ejemplos de este tipo de proyecciones, uno de cada tipo: cilíndrica, azimutal y cónica.

Proyección cilíndrica equidistante

Esta proyección, también llamada rectangular, equirrectangular o carta plana, es matemáticamente trivial y está definida, en su caso más sencillo y con el ecuador como curva tangente, tomando la longitud y la latitud directamente como coordenadas cartesianas (figura siguiente). Mientras que el mapa cilíndrico isoareal de Lambert se comprime en las latitudes altas y el de Mercator se expande, en el mapa cilíndrico equidistante los paralelos están igualmente distanciados: la distancia de un paralelo al siguiente, en el mapa, es siempre la misma. La escala es correcta a lo largo de los meridianos y del ecuador (en este caso la retícula está formada por cuadrados:

plate carrée o carta plana), o también a lo largo de los meridianos y un par de paralelos equidistantes del ecuador (equirrectangular o rectangular). Esta proyección suele atribuirse a Eratóstenes, aunque Ptolomeo cita a Marino de Tiro como su inventor sobre el año 100. A partir de entonces fue ampliamente utilizada, en particular en navegación, debido a la sencillez de construcción. Esta proyección es muy adecuada para mapas de ciudades o de otras pequeñas superficies. Además, también se usa para mapas del mundo simples o de regiones con pocos datos geográficos. En el siglo XX ya casi no se emplea en mapas geográficos con cierto detalle. La USGS y otras agencias suelen utilizarlo para mapas índice, es decir, aquellos en los que se sitúan esquemáticamente los diferentes mapas incluidos en una serie o atlas, y en los que se indica la página o referencia de localización.

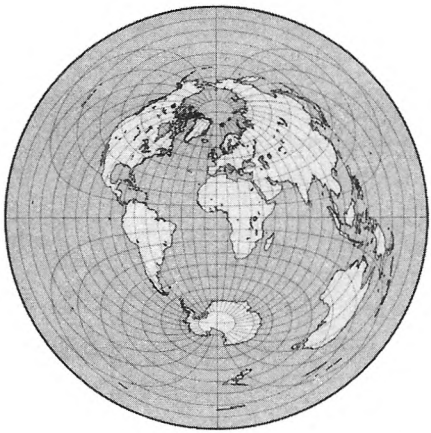


Mapa realizado con la proyección «carta plana», que es un caso particular con paralelo estándar en el ecuador de la proyección equirrectangular (fuente: Carlos A. Furuti).

Proyección azimutal equidistante

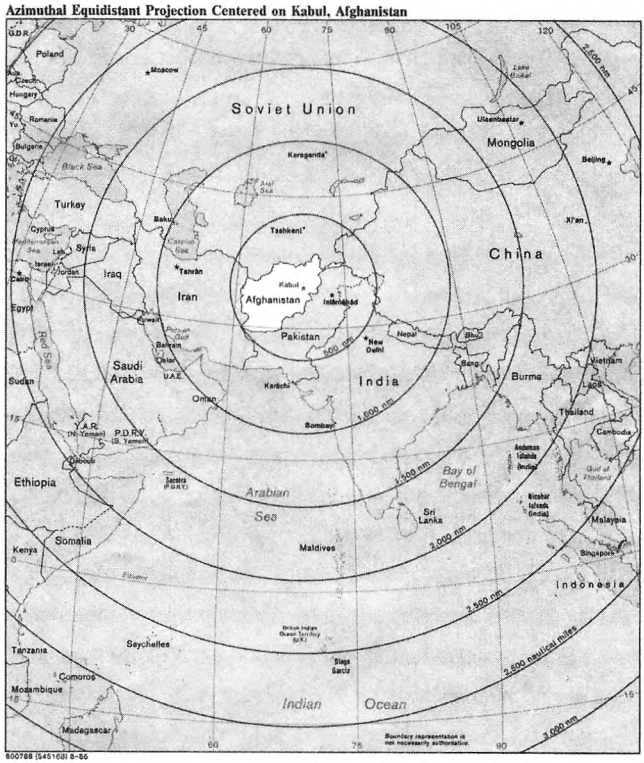
Ésta es la cuarta proyección azimutal clásica, pero, a diferencia de las otras tres anteriormente mencionadas, no es geométrica. Como otras proyecciones azimutales, satisface que las geodésicas, círculos máximos, que pasan por el punto de referencia se transformen sobre el plano en rectas que pasan por el punto central, conservándose además el ángulo entre dichas geodésicas. La propiedad particular de esta proyección es que la escala es constante a lo largo de las rectas que pasan por el centro del mapa (son las líneas estándar de esa proyección equidistante), es decir, se preservan las distancias desde el centro del mapa. Además, la Tierra puede presentarse en su totalidad en un único mapa, aunque la distorsión se hace muy grande al superar el círculo máximo frontera de la semiesfera que tiene el punto de referencia como

extremo y el límite del mapa es el punto antipodal que se corresponde con toda la circunferencia exterior. En este mapa hay un punto destacado, que se convierte en el «centro del mundo», y desde el que se preservan las distancias, motivo por el cual suele llamarse «mapa egocéntrico».



Mapa azimutal equidistante centrado en el Polo Norte (fuente: Carlos A. Furuti). A la derecha, bandera o emblema de la ONU.

En el aspecto polar de este mapa los meridianos son rectas radiales que emanan del centro, imagen del punto de referencia, y los paralelos son circunferencias concéntricas igualmente espaciadas. El mapa centrado en el Polo Norte nos es muy familiar, puesto que forma parte de la bandera y emblema de la Organización de Naciones Unidas (ONU, en el que la Antártida ha sido reemplazada por ramas de olivo). La sencillez de su construcción en el aspecto polar nos hace imaginarnos que fue utilizada desde muy temprano. Se cree que los egipcios la utilizaron para trazar mapas estelares, aunque la carta celeste más antigua conocida en la que se ha usado fue realizada por Conrad de Dyffenbach en 1426. Sin embargo, el primero que se sirvió de ella para elaborar mapas terrestres fue Mercator en su famoso mapamundi de 1569, que incluía dos discos para las zonas polares realizadas con esta proyección. A partir de entonces fue ampliamente utilizada: por ejemplo, aparecía en multitud de atlas de las zonas polares de los últimos dos siglos o acompañando a mapamundis para mostrar dichas regiones, como en el mapa realizado con la proyección de Van der Gritten por la National Geographic Society o mapas de la USGS. Su uso también se extendió ampliamente a mapas de un hemisferio, norte o sur, o incluso de todo el planeta.



Mapa azimutal equidistante centrado en Kabul, Afganistán.

La dificultad de construcción de los aspectos oblicuo y ecuatorial hizo que esta proyección no fuese considerada hasta el siglo XIX en dichos aspectos. El oblicuo ha sido utilizado para mapas del mundo centrados en importantes ciudades, o localizaciones, y a veces también para mapas de continentes, lo contrario que ocurre con el aspecto ecuatorial, quizá porque el ecuador no contiene muchas localizaciones consideradas «importantes» por quienes los elaboran.

Esta proyección es muy interesante para situaciones en las que se necesite considerar distancias o los caminos más cortos desde un punto concreto. Por ejemplo, puede ser considerada por un militar al mando de una base nuclear para determinar qué ciudades están en su radio de destrucción, en navegación marina o aérea para establecer el rumbo fijo desde un puerto o aeropuerto a diferentes lugares del mundo, o, en combinación con la proyección de Mercator (como se comentará en el capítulo 9), para navegar entre dos localizaciones.

Además de ser útil en la navegación, también lo es en el estudio de los terremotos, y los operadores de radio con antenas direccionales la utilizan para marcar la dirección y amplificar la señal.

Proyección cónica equidistante

Como proyección cónica, se verifica que, en su versión normal, el mapa que genera tiene forma de arco, o corona, en el que los meridianos son líneas rectas que emanan de un punto y están uniformemente separados en intervalos angulares iguales. Por su parte, los paralelos son arcos de circunferencias concéntricas que cortan los meridianos en ángulo recto, pero con la propiedad añadida ahora, para la proyección equidistante, de que están igualmente espaciados, lo que hace que la escala sea la misma a lo largo de todos los meridianos, haciendo que éstos sean las curvas estándar. No es conforme, ni isoareal, ni preserva las formas.

Como sucede con las demás proyecciones cónicas, es apropiada para regiones templadas, siendo la versión con un paralelo de tangencia conveniente para mapas de pequeños países, o territorios, cercanos a dicho paralelo; para zonas más extensas, como Rusia, Europa o Norteamérica, es más acertado considerar el caso de dos paralelos estándar que atraviesen el territorio en cuestión.

El primer mapa de Ptolomeo se asemeja al realizado con la proyección cónica equidistante, cortada por el Norte en el paralelo de Thule y por el Sur, por el ecuador.

Capítulo 9

La proyección de Mercator

La Carta reducida [carta de Mercator] tiene los rumbos o líneas loxodrómicas rectas, que es una de las ventajas de su construcción. [...] Parecerá poco ventajoso seguir en los caminos oblicuos las loxodrómicas o líneas curvas mayores, pudiendo llegar al mismo paraje por un camino más corto. Hay razones poderosas para no apartarse de las loxodrómicas mayores y del uso de la brújula, que nunca inducen en desventajas...
Tomás López, *Principios geográficos aplicados al uso de los mapas* (1783)

El mapamundi de Mercator ha sido sin lugar a dudas el mapa más familiar para muchos de nosotros, al menos para los que pertenecemos a una cierta generación, e incluso podemos decir que ha sido «el mapamundi» por antonomasia durante prácticamente cuatro siglos. En un tiempo de viajes y descubrimientos, allá por el siglo XVI, se hacía necesario, aún diría más, imprescindible, para navegantes, comerciantes y personas de estado, un mapa que fuese útil para la navegación. Y el científico y cartógrafo flamenco Gerardus Mercator desarrollaría ese mapa. Además, la proyección que da lugar al mismo es seguramente la más valiosa y utilizada en nuestro tiempo, puesto que es la proyección base del sistema UTM, Mercator Transversal Universal, que emplean casi todas las agencias internacionales para el diseño de mapas de escala grande, es decir, de territorios no muy extensos.

Definición y propiedades cartográficas

Los mapas medievales, realizados sin una base científica y sin tener en cuenta una proyección matemática, no tenían utilidad alguna en lo referente a la navegación y, en general, no servían para realizar ningún tipo de medición sobre ellos. Como consecuencia, en no pocas ocasiones los barcos llegaban a zonas muy alejadas del destino marcado o incluso a lugares desconocidos.

El primer intento de construir cartas útiles para la navegación vino de la mano de los propios interesados, los navegantes, cuyas cartas portulanas estaban basadas en

GERARDUS MERCATOR (1512-1594)

Mercator fue una persona muy brillante, que se dedicó a los saberes tanto aplicados y técnicos (podemos decir que era cartógrafo, geógrafo, calígrafo, grabador, constructor de instrumentos científicos y editor) como a los más teóricos (en este sentido tuvo un profundo interés y conocimiento de matemáticas, astronomía, cosmografía, magnetismo terrestre, historia, filosofía y teología). Entre sus hitos cartográficos destacan el «Mapa de Palestina» de 1537, con una clara motivación religiosa; su primer mapamundi con la proyección de doble corazón de Oronce Finé (el primero en utilizar la palabra «América» para nombrar a todo el continente); su conocido mapa de Europa de 1554, trazado con la proyección de Werner, o el «Mapa de Mercator» de 1569, así como la construcción en 1541 del globo terráqueo más completo hasta la fecha, con loxodrómicas incluidas. Su proyecto final fue la preparación de un mapa del mundo mediante la elaboración de otros individuales de diferentes regiones. Publicó una primera parte de su atlas (fue el primer uso del término «atlas» para referirse a una colección de mapas «...en honor al Titán, Atlas, rey de Mauritania, un erudito filósofo, matemático y astrónomo») en 1585, con 51 mapas, y centrado en Alemania, Francia y Países Bajos. En el volumen de 1589 añadiría 23 mapas de Italia y de Grecia. Su hijo Rumold publicó el «Atlas de Mercator» en 1595, con otros 28 mapas más, de diversas partes de Europa. Fueron utilizadas diferentes proyecciones cartográficas: cónicas, estereográfica, de Sanson-Flamsteed, de Werner o la de Mercator, entre otras.

Retrato de Gerardus Mercator realizada en 1574 por el artista alemán Frans Hogenberg (1535-1590).

las notas que iban tomando en sus viajes, en las observaciones astronómicas y en las mediciones de distancias y de rumbos; los instrumentos que utilizaban eran el compás, el semicírculo graduado, la regla y la brújula. Sin embargo, las cartas portulanas no tenían en cuenta la geometría de la esfera, es decir, su curvatura o redondez, y en su diseño no se utilizaba proyección alguna.

El intento científico de resolver el problema de las cartas náuticas vino de la mano de Mercator, Ortelius y otros cartógrafos de su tiempo, que utilizaron la ciencia para el trazado de las mismas. El objetivo de Gerardus Mercator era, por tanto, construir un mapamundi que fuese adecuado para la navegación, para lo cual debía preservar los rumbos (es decir, la proyección generadora tendría que ser conforme), al tiempo que las loxodrómicas, curvas de rumbo constante, tendrían que estar representadas como rectas.

El astrónomo y matemático portugués Pedro Nunes (1502-1578) ya había descrito y estudiado las curvas loxodrómicas (que sobre la superficie terrestre son espirales que convergen en los polos) en su *Tratado de la navegación* (1537). En él desmentía la extendida creencia de que navegando con rumbo fijo se describía un círculo máximo, la curva de mínima distancia. Para navegar entre dos puntos de la Tierra se intentaba seguir el camino más corto, la ortodrómica; sin embargo, ello significaba que había que cambiar constantemente el rumbo, con lo cual era fácil desviarse de la ruta; en consecuencia, era mejor navegar por la loxodrómica, ya que para ello bastaba con mantener el rumbo constante, aunque el camino fuese más largo. Mercator ya había incluido en su globo terráqueo de 1541 la imagen de multitud de curvas loxodrómicas.

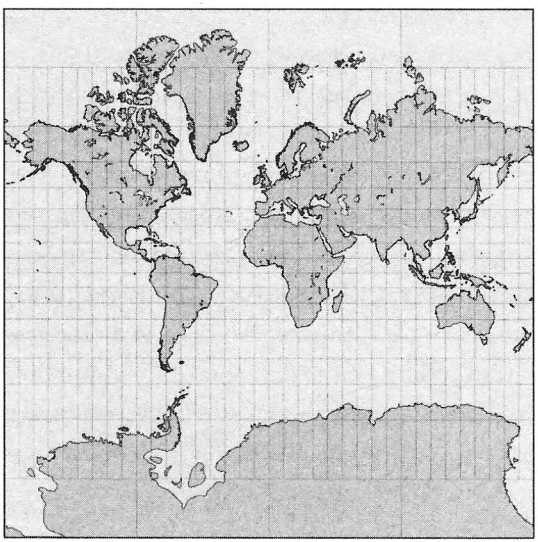
La cuestión geométrica subyacente al problema de diseñar una carta náutica como la buscada por Mercator es la construcción de una proyección conforme que transforme las loxodrómicas en rectas sobre el plano. Para empezar, en un mapa como éste, los meridianos y paralelos deben estar representados por rectas que se cortan perpendicularmente. Además, por el estudio realizado en el capítulo 5 sobre la proyección de Lambert sabemos que esta proyección cilíndrica no es conforme porque la distorsión que se produce en la dirección de los meridianos, $\cos\phi$, no es igual a la que se produce en la de los paralelos, $1/\cos\phi = \sec\phi$ (ϕ es la latitud del punto en el que estamos). Luego intuitivamente vemos que la solución está en conseguir modificar el mapa para que ambas distorsiones coincidan. En concreto, hay que «estirar» el mapa de Lambert en la dirección Norte-Sur, ya que el mapa pasa de estar encogido (la distorsión en los paralelos es $\cos\phi$) a estar estirado (nueva distorsión igual a $1/\cos\phi = \sec\phi$). Ésta es la idea clave de la construcción, y si ahora inte-

gramos esta distorsión matemáticamente, conseguiremos la expresión matemática de la proyección buscada, la proyección de Mercator:

$$x = R\left(\theta - \theta_0\right)$$

$$y = R \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

siendo θ la longitud (θ_0, la longitud central del mapa) y ϕ, la latitud, y estando con la esfera de referencia, $R = 1$.



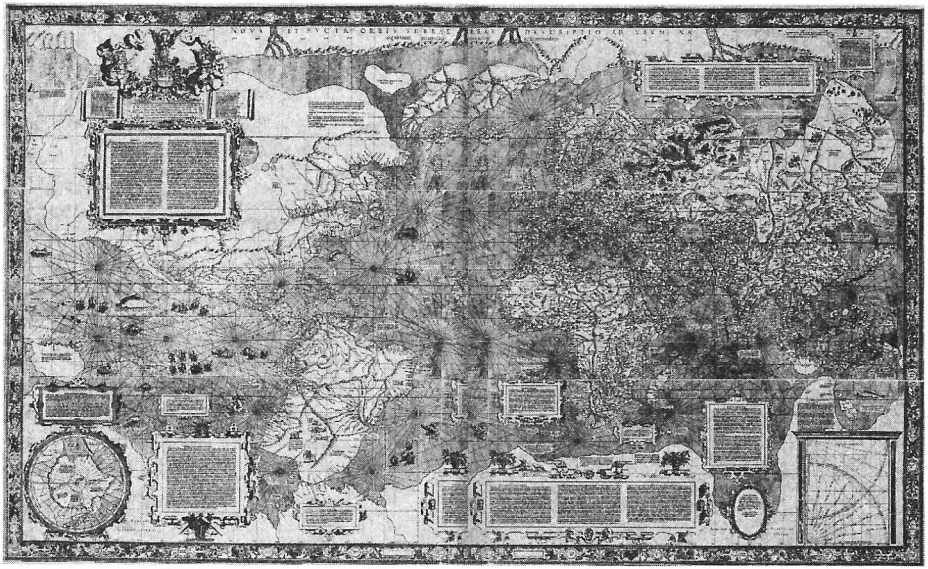
Mapa moderno realizado con la proyección de Mercator (fuente: Carlos A. Furuti).

Esto es esencialmente lo que hizo Mercator en su mapa *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigatum emendate accommodata* (Una nueva y extendida descripción de la Tierra con correcciones para el uso en navegación), de 1569: construir una «rejilla» de meridianos y paralelos representados por rectas que se cortan perpendicularmente y, a continuación, espaciar los paralelos para compensar la distorsión que se produce en los meridianos y obtener así la misma distorsión en ambas direcciones, como puede leerse en el mapa original de 1569.

CARTAS PORTULANAS

Los mapamundis de la alta Edad Media eran mapas de tipo enciclopédico, nada útiles para la navegación. Los marinos se servían de notas personales sobre los trayectos entre puertos, basadas en las distancias medidas, las observaciones astronómicas y el reconocimiento de las costas, que recibían el nombre de «portulanos». A partir de la invención de la brújula en el siglo XII, los portulanos fueron más precisos, empezándose a escribir libros de derrota con información detallada de distancias y rumbos. En algún momento, de estas notas de navegación surgirían mapas de las costas con información útil para la navegar, las cartas portulanas, que fueron las primeras cartas náuticas. Éstas no utilizaban meridianos ni paralelos, intentaban describir bien los litorales y eran detallistas con los puertos, accidentes geográficos y peligros para la navegación; la toponimia estaba escrita perpendicularmente a la línea de la costa, y los territorios del interior quedaban normalmente en blanco (salvo elementos decorativos), aunque incluían la representación de brújulas o rosas de los vientos, de las que partían las líneas de rumbo que formaban un entramado de tipo tela de araña, y también se indicaba la escala. Con la regla se trazaba una recta uniendo los puntos de origen y destino, y se trasladaba paralelamente hasta una rosa de los vientos cercana, que daba el rumbo que se debía seguir. Aunque se alcanzaría una precisión importante, sobre todo en mapas de costas del Mediterráneo, la información cartográfica era, obviamente, aproximada. Estas cartas portulanas no tenían en cuenta la curvatura, la redondez de la Tierra, y no estaban trazadas siguiendo proyección matemática alguna.

Mapa de Europa y el Mediterráneo del Atlas Catalán de 1375; la ilustración es una copia del siglo XIX.



Mapa original de Mercator de 1569.

En el artículo de J.M. Sachs «A Curious Mixture of Maps, Dates and Names» (1987) se destaca que, aunque en la ecuación matemática de la proyección de Mercator aparece el logaritmo, John Napier no publicó su trabajo sobre logaritmos hasta principios del siglo XVII. Además, para obtener estas ecuaciones hay que utilizar las herramientas del cálculo aplicadas a la geometría diferencial, pero Newton y Leibniz no nacieron hasta cincuenta años después de la muerte de Mercator, y Gauss no desarrolló la geometría diferencial hasta principios del siglo XIX. Entonces, ¿cómo trazó Mercator su mapa de 1569? A pesar de no disponer de las herramientas que con el tiempo desarrollaría la matemática, Mercator tenía un profundo conocimiento científico del problema cartográfico y una intuición muy desarrollada, fruto del mismo. La realización de Mercator fue práctica, basada en grandes tablas de datos. Sin embargo, la verdad es que no dejó ninguna explicación técnica sobre el diseño de su mapa, ni tablas náuticas relacionadas con el mismo, y menos aún una guía práctica de cómo debían utilizarlo los navegantes. Quizá por ese motivo, y porque para los marinos él era fundamentalmente un científico y no uno de ellos, este mapa no tuvo una gran repercusión en el mundo cartográfico hasta treinta años más tarde. Salvo excepciones, como la de su amigo y también cartógrafo Abraham Ortelius, que en su atlas *Teatrum orbius terrarum* (1570) incluyó ocho mapas realizados con la proyección desarrollada por Mercator.

Las explicaciones matemáticas de esta proyección vendrían de la mano del matemático de Cambridge Edward Wright (1561-1615), quien en su libro *Errores en la navegación, detectados y corregidos* (1599, y una versión extendida en 1610), además de incluir nuevas tablas náuticas y dar instrucciones para obtener rumbos fijos en mapas basados en la proyección de Mercator, ofreció explicaciones matemáticas de cómo generar este mapa, y también algunas descripciones intuitivas. Por ejemplo, imaginó la esfera de referencia como un balón, o un globo, contenido en un cilindro tangente a la esfera en el ecuador, al que le insufla aire, de manera que el globo se va aplastando contra el cilindro, y la imagen de cada punto de la esfera de referencia es el punto de contacto con el cilindro.

En un principio el empleo de esta proyección fue lento. El cartógrafo holandés Peter Plancius la utilizó en 1594 para trazar cartas náuticas, y Joducus Hondius para su mapamundi *Typus totus orbis terrarum* (1597), entre otros. El primer atlas marítimo de la historia fue diseñado precisamente con la proyección de Mercator entre 1646 y 1647 por el inglés Robert Dudley.

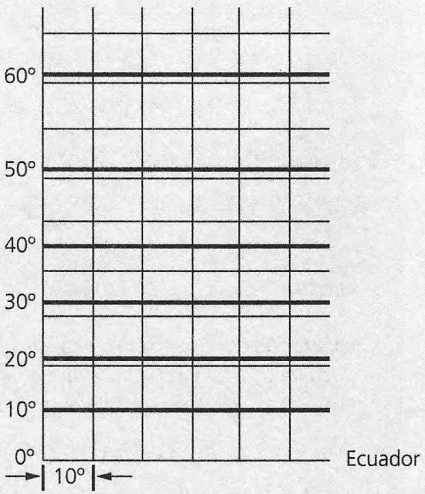
Mapa Typus totus orbis terrarum *(1597), también conocido como «mapa del caballero cristiano», de Joducus Hondius, realizado con la proyección de Mercator. En la zona media del mapa puede verse al caballero cristiano luchando contra el Pecado, la Lujuria, el Diablo y la Muerte. Además, el Mundo le ofrece el cáliz envenenado de la prostituta Babilonia, utilizado en ocasiones como símbolo de la Iglesia Católica.*

LAS MATEMÁTICAS DE LA PROYECCIÓN DE MERCATOR

Para realizar una estimación de la altura, respecto al ecuador, a la que ir colocando los paralelos en el mapa de Mercator, podemos realizar pequeños incrementos en la latitud sobre los que aplicar el correspondiente factor de escala. Si partimos de un paralelo de latitud ϕ y tomamos pequeños intervalos de tamaño t, tenemos una sucesión de latitudes marcadas, t, $2t$, ..., $\phi - t$, ϕ, sobre las que ir estirando la altura. Como la distorsión en la dirección del meridiano para una latitud α tiene que ser, por lo estudiado, igual a la distorsión en la dirección del paralelo, que es $\sec\alpha$, entonces la distorsión en vertical en las latitudes marcadas será $\sec t$, $\sec(2t)$, ..., $\sec(\phi - t)$, $\sec\phi$, y como la longitud del arco de la esfera entre las latitudes marcadas es t, entonces la estimación de la altura del paralelo de latitud ϕ será:

$$t\sec t + t\sec(2t) + \ldots + t\sec(\phi - t) + t\sec\phi.$$

Por ejemplo, si queremos estimar la altura del paralelo de latitud $\phi = 60°$ y tomamos intervalos de $t = 10°$, como $\sec 10° = 1{,}0154$, $\sec 20° = 1{,}0642$, $\sec 30° = 1{,}1547$, $\sec 40° = 1{,}3055$, $\sec 50° = 1{,}5557$ y $\sec 60° = 2{,}0000$, multiplicando por 10 y sumando obtendríamos 80,955, es decir, que el paralelo de 60° debería ir colocado a la altura en la que estaría el de 80,955° si estuviera uniformemente distribuido (como se muestra en la imagen). Esto es lo que hizo Edward Wright, e imaginamos que de alguna forma también Mercator. Veámoslo ahora de una forma más moderna. Para una proyección cilíndrica, en la que el ecuador es el eje de las x y el paralelo de latitud ϕ es una línea horizontal a una altura $y = h(\phi)$, como el factor de escala (distorsión) en la dirección de los meridianos λ debe ser igual al factor de escala en la dirección de los paralelos $\mu = 1/\cos\phi = \sec\phi$, se tiene que:



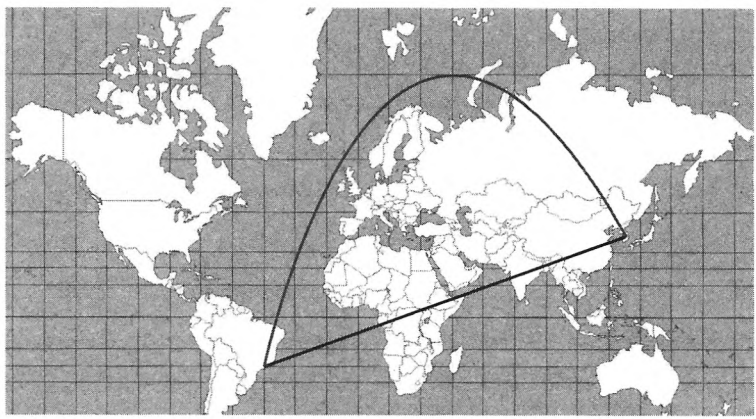
$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta dist_{\text{mapa}}}{\Delta dist_{\text{esfera}}} = \lim_{t\to 0}\frac{h(\phi+t)-h(\phi)}{t} = h'(\phi) = \sec\phi.$$

Entonces,

$$h(\phi) = \int_0^{\phi}\sec t\,dt = \ln\left[\tan(\phi)+\sec(\phi)\right] = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right].$$

Pero volvamos a la proyección de Mercator y recordemos las propiedades de un mapa realizado con la misma:

1. Es un mapa rectangular, al estar trazado con una proyección cilíndrica.
2. Los meridianos y paralelos forman un entramado de rectas que se cortan en ángulo recto.
3. Es una aplicación conforme, por su propia construcción, que no preserva distancias, áreas, geodésicas o formas de amplios territorios.
4. La distorsión de áreas, formas y distancias es muy pequeña cerca del ecuador (línea donde la escala es real), pero se acrecenta mucho al acercarnos a los polos, lo cual la hace muy conveniente para mapas de territorios cercanos al ecuador.
5. Las loxodrómicas, o curvas de rumbo constante, se transforman en rectas.

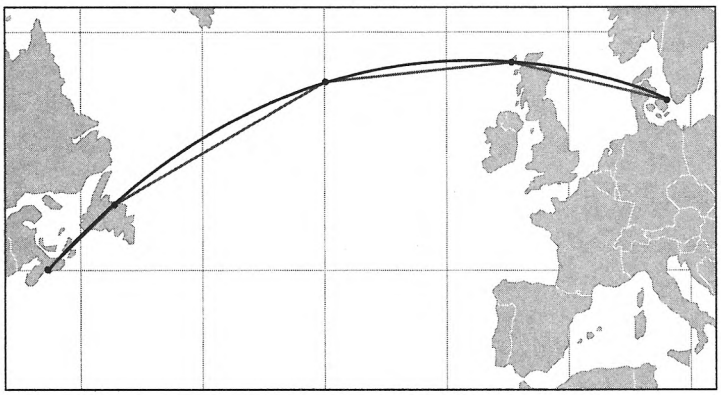


Comparación entre la loxodrómica, curva de rumbo constante, y la ortodrómica, curva de mínima distancia, entre las ciudades de Río de Janeiro y Seúl, en el mapa de Mercator (fuente: Carlos A. Furuti).

Este mapa hacía realidad el sueño de Mercator. Si un navegante quiere viajar del punto *A* al punto *B* sobre la superficie terrestre, solamente necesita trazar sobre la carta náutica de tipo Mercator la recta que une ambos lugares y medir el rumbo marcado por dicha recta para dirigir su barco en esa dirección. Sin embargo, como ya sabemos, las loxodrómicas no son ortodrómicas, y aunque indican el camino más sencillo que se puede seguir, ya que solamente hay que mantener el rumbo constante, no ofrecen el camino más corto entre origen y destino, si bien navegar por él resulta difícil, puesto que requiere un continuo cambio de rumbo. Los marinos y

pilotos de aviones acabaron descubriendo cómo conseguir una solución intermedia. Para viajar entre el origen y el destino se haría lo siguiente:

1. Trazar una geodésica (recta) en un mapa central, o incluso en un mapa azimutal equidistante centrado en nuestro origen.
2. Romper la geodésica en fragmentos, generando una familia de puntos estratégicos.
3. Trasladar esos puntos a una carta de Mercator y unirlos mediante rectas, que son las loxodrómicas y marcarán el rumbo que se debe tomar en cada uno de los puntos estratégicos.



Método de aproximación del círculo máximo por loxodrómicas, utilizado por los navegantes sobre el mapa de Mercator y con la ayuda de, por ejemplo, un mapa gnomónico.

Sin lugar a dudas, la proyección de Mercator ha sido, y es, la proyección por excelencia en el diseño de cartas náuticas y de navegación aérea desde su establecimiento en el siglo XVII. Ha sido la proyección estándar de la agencia U. S. Coast and Geodetic Survey (ahora National Ocean Service) de Estados Unidos desde 1910, o del Instituto Hidrográfico de la Marina de España, por citar un par de ejemplos.

Quizá por la importancia que tuvo esta proyección en una época de viajes, lo cierto es que el uso de la proyección de Mercator para mapamundis se hizo muy frecuente, siendo una de las transformaciones cartográficas más empleadas en los atlas del mundo hasta el siglo XX, a pesar de la fuerte deformación que se produce en las áreas en zonas cercanas a los polos. Se utilizaba en mapas murales, en los libros de

EL VIAJE DE CHARLES LINDBERGH

El aviador norteamericano Charles Lindbergh (1902-1974) alcanzó fama universal por ser el primer aviador que cruzó el Atlántico sin escalas y en solitario. En 1919, un rico neoyorquino ofreció un premio de 25.000 dólares al primer piloto que realizara un vuelo en solitario sin paradas entre Nueva York y París. Lindbergh creía que podía ganarlo con el avión adecuado y convenció a un grupo de hombres de negocios de St. Louis para que financiara la gesta, lo que incluía la construcción de un avión especial que él había ayudado a diseñar, el Espíritu de St. Louis. El 20 de mayo de 1927 despegó de Long Island, con 4 sandwiches, 2 cantimploras de agua y 1.700 litros de gasolina; 33,5 horas y 3.610 millas (unos 5.800 km) después, aterrizaba en París ante una multitud de 100.000 personas que estaban esperándole. El «águila solitaria», como le apodaron, se convirtió en un héroe mundial. Lindbergh planificó su viaje de forma exhaustiva con cartas de navegación. Según sus propias palabras:

> «...Pasé gran parte del periodo de tiempo de la construcción trabajando en los detalles de la navegación y trazando el recorrido del vuelo, con sus rumbos y variaciones, sobre los mapas y cartas. Después de calcular la ruta con las cartas gnomónica y de Mercator, revisé toda la distancia entre Nueva York y París con las tablas náuticas... De Nueva York a París tracé el círculo máximo, cambiando el rumbo cada 500 millas...».

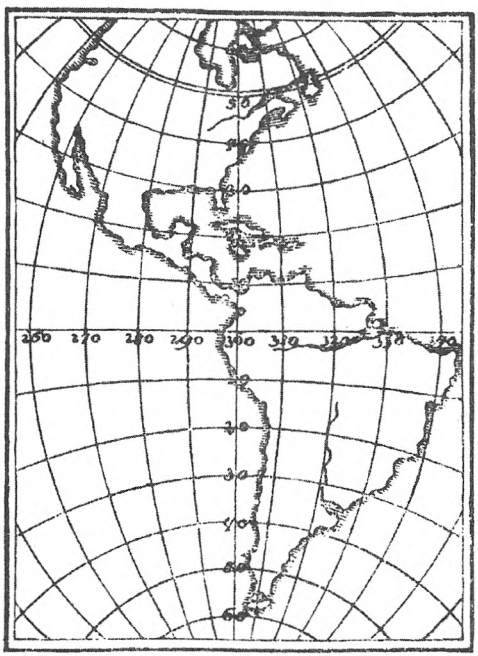
texto, en los atlas en general, incluidos los escolares, en publicaciones divulgativas y en prensa. El cartógrafo estadounidense John Snyder (1926-1997), de la USGS, en un estudio realizado con diferentes atlas del mundo publicados en Estados Unidos, Gran Bretaña, Francia y Alemania en el siglo XIX, constató que la proyección de Mercator era la que se utilizaba preferentemente. Sin embargo, en otro estudio similar para el siglo XX comprobó que dicha proyección prácticamente desaparecía a partir de la década de 1940, utilizándose muchas otras distintas, como la homolosena de Goode, Winkel-Tripel, Robinson, Eckert IV o Van der Gritten, entre otras.

El hecho de que la proyección no cause casi distorsión en zonas cercanas al ecuador hace que sea muy útil precisamente para mapas de aquellas zonas. También es utilizada por ser una aplicación conforme. A modo de ejemplo, ha sido empleada en los mapas marítimos trazados por el teniente de navío estadounidense Matthew Fontaine Maury (1806-1873), que incluían información como el tiempo atmosférico, los vientos, las corrientes y otras observaciones hidrológicas y metereológicas, así como de rutas de navegación.

Para terminar, podemos citar que la proyección de Mercator es utilizada para trazar mapamundis de algunas de las modernas herramientas de Internet, como son Google Maps o Virtual Earth. En estos mapas interactivos se realizan desplazamientos y zooms sobre regiones pequeñas, y en ellas las formas van a sufrir poca distorsión debido a que la proyección de Mercator es conforme, es decir, la deformación en las formas es mínima a nivel local, para regiones pequeñas.

La proyección de Mercator transversal

La proyección de Mercator que acabamos de estudiar es una transformación conforme para la cual la distorsión en zonas cercanas al ecuador, que es la curva de tangencia del cilindro generador con la esfera de referencia, es muy pequeña. En consecuencia, si consideramos el aspecto transversal de esta proyección, es decir, mantenemos la misma trasformación cartográfica, pero ahora el cilindro sobre el que proyectamos la esfera de referencia está girado 90°, de forma que entonces la curva de tangencia sea un meridiano, tendremos la proyección de Mercator transversal, centrada en dicho meridiano, que también es conforme y produce una distorsión pequeña en zonas cercanas al meridiano de tangencia fijado. Todo ello la hace muy apropiada para mapas de zonas terrestres que se extienden en la dirección Norte-Sur, como el continente americano o la India.



Mapa de América trazado con la proyección de Mercator transversal, que es la imagen que mostró Lambert como ejemplo de su proyección.

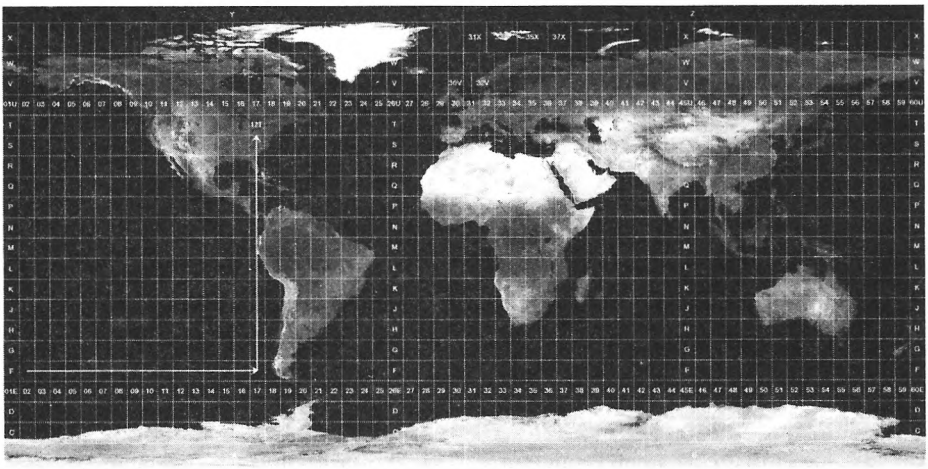
Esta proyección cartográfica fue una de las introducidas por Lambert en su trabajo de 1772, y fue posteriormente estudiada, en 1822, en su versión elipsoidal, por Carl F. Gauss y por el matemático y topógrafo Louis Krüger (1857-1923), por lo que también se conoce como proyección de Gauss-Krüger. Sus propiedades son:

1. Los meridianos y paralelos, y en general las loxodrómicas, no son rectas.
2. Es una aplicación conforme: preserva los ángulos y las formas a nivel local.
3. La distorsión en zonas cercanas al meridiano central es muy pequeña (de hecho, la escala es real en dicho meridiano) y va aumentando según nos vamos alejando del mismo.

En consecuencia, esta transformación es ideal para la elaboración de mapas tanto que se extiendan en la dirección Norte-Sur, como para aquellos de zonas no muy grandes, simplemente eligiendo de forma conveniente el meridiano central que pasa por dicho territorio. Ha sido utilizada, en particular, en diferentes atlas para el trazado de mapas de Norteamérica, la región oeste de la antigua Unión Soviética, la India, Oriente, el Sudeste Asiático, la región este de Australia y África. En general es ampliamente utilizada, por ejemplo, por casi todos los países europeos. Pero, en esencia, la bondad de esta aplicación para territorios pequeños hizo que se empezase a aprovechar como base de sistemas de coordenadas para mapas topográficos, como, por ejemplo, el sistema de coordenadas británico (en 1919) o el SPCS, un sistema de proyecciones para Estados Unidos (en 1930). Sin embargo, el sistema definitivo, y hoy en día podemos decir que universal, fue desarrollado en 1947 por el Servicio Cartográfico de la Armada estadounidense, el sistema de proyecciones UTM (Mercator Transversal Universal).

La Tierra, entre la latitud 84° N y 80° S, se divide en 60 zonas de 6° de longitud, y se utiliza para cada una de ellas la proyección de Mercator transversal, cuyo meridiano de tangencia es el que está situado en la mitad de la zona considerada. Las zonas están numeradas del 1 al 60. Por otra parte, se designan letras según una división que se hace en 20 zonas de 8° de latitud, de Sur a Norte. Así, Bilbao está en la zona UTM 30T, Nueva York en la 18T, Sydney en la 56H, y Alejandría en la 35R. Para las zonas de los polos, fuera de las latitudes 84° N y 80° S, se utiliza el sistema UPS (Estereográfico Polar Universal).

El sistema UTM es el utilizado universalmente por la mayoría de las agencias topográficas, geológicas, geodésicas, cartográficas, militares, marinas o similares de todo el mundo, para mapas de escalas menores o iguales a 1:500.000. El Mapa Topográfico Nacional de España, del Instituto Geográfico Nacional, que es la base de todos los mapas del país, utiliza el sistema de proyecciones UTM en sus series de mapas de escalas 1:200.000, 1:50.000, 1:25.000 y menores. Una de las agencias más importantes del mundo, como es la U.S. Geological Survey (USGS), viene utilizándolo desde 1977.



Mapa de las zonas UTM. Si queremos realizar un mapa topográfico de la zona donde nos encontramos, tendremos que ver en qué zona UTM estamos para saber qué proyección de Mercator debemos utilizar.

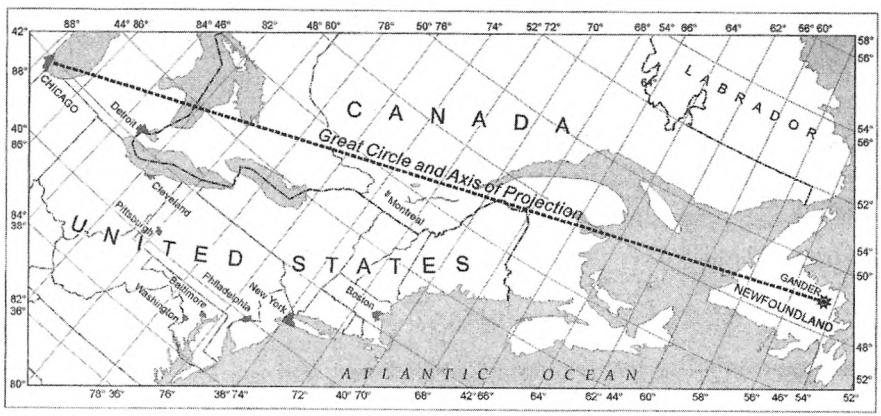
La proyección de Mercator oblicua

Es posible considerar el aspecto oblicuo de la proyección de Mercator, es decir, el caso en el que el cilindro de proyección sea tangente a la esfera de referencia en un círculo máximo cualquiera, que no sea ni el ecuador ni ninguno de los meridianos. De esta forma se obtiene la proyección de Mercator oblicua, que, obviamente, es conforme, y de nuevo verifica la importante propiedad de que la distorsión que se produce en zonas cercanas al círculo máximo de tangencia es pequeña. Dicha propiedad la hace adecuada para territorios que se extienden a lo largo de un círculo máximo.

El origen de esta proyección no está muy claro, aunque sus primeros usos fueron para trazar un mapa de Suiza en 1903, por Max Rosenmund, y un mapa de Madagascar en 1928, por Jean Leborde. Desde entonces se ha utilizado, por ejemplo, para realizar mapas del continente americano (tanto en su totalidad como de zonas parciales), Eurasia, Australasia y territorios más pequeños, como las Indias Occidentales (Antillas y Bahamas), Hawai, Nueva Zelanda, Italia o Alaska, entre otras agencias por la Nacional Geographic Society.

Poco a poco, a lo largo del siglo XX, se fue desarrollando el transporte comercial, tanto de mercancías como de personas. Las emergentes compañías aéreas empezaron a cubrir grandes rutas, incluyendo los vuelos transoceánicos. Estas rutas que cubrían grandes distancias intentaban trazarse a lo largo de círculos máximos, para

minimizar el tiempo de vuelo y el gasto en combustible. Las cartas aeronáuticas solían ser alargados mapas plegables orientados en la dirección que unía los dos aeropuertos y que mostraban estrechas franjas alrededor de la ruta, ya que en el fondo no eran muy útiles desde el punto de vista cartográfico. Precisamente la proyección de Mercator oblicua, por sus propiedades, podía ser ideal para cartografiar rutas aéreas a lo largo de círculos máximos. Así, en 1947 la agencia estadounidense U.S. Coast and Geodetic Survey la utilizó para la primera carta aeronáutica de una ruta a lo largo de un círculo máximo, la que unía Chicago y Gander. En aquel tiempo, el aeropuerto de Gander, en Terranova, era una escala necesaria en los vuelos transoceánicos. Esta carta, además de centrarse en la ruta ortodrómica, podía emplearse para trazar nuevos rumbos o tomar distancias alrededor de la anterior, puesto que la distorsión era pequeña tanto en ángulos como en distancias.



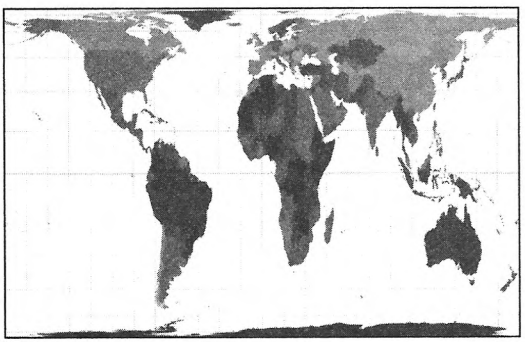
Carta aeronáutica de la ruta Chicago-Gander trazada con la proyección oblicua de Mercator.

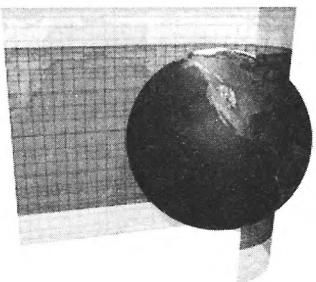
El lanzamiento de satélites espaciales que inició la NASA en 1972 traería una nueva aplicación cartográfica de esta proyección. Los satélites, cuya ruta sobre la Tierra no es un círculo máximo, aunque se acerca, empezaron a tomar imágenes. Éstas no eran como las típicas fotografías aéreas, sino que consistían en un complejo escaneado de la superficie terrestre que generaba gran cantidad de información. Y había que convertir esa información en imágenes planas, en mapas, con la menor distorsión posible. John P. Snyder, Alden P. Colvocoresses y John L. Junkins, de la USGS, desarrollaron en 1976 la proyección de Mercator oblicua espacial a partir de la proyección anterior, para resolver el problema de mostrar las imágenes por satélite.

Peters contra Mercator

La historia sobre la manipulación en cartografía con la que vamos a concluir este libro comienza hacia el año 1967, cuando el historiador alemán Arno Peters presentó su «nueva» proyección en un congreso celebrado en la Academia de Ciencias de Hungría, aunque no tendría ninguna repercusión hasta el año 1973, cuando la presentó ante los medios de comunicación en Bonn. Pero, vayamos primero con la proyección en sí misma.

El clérigo escocés James Gall (1808-1895) describió una proyección idéntica a la de Peters, conocida como la proyección ortográfica de Gall, en un congreso en 1855 y la publicó, junto con otras dos creaciones cartográficas suyas, en la Scottish Geographical Magazine en 1885. Donó de forma altruista sus tres proyecciones a quienes quisieran utilizarlas, y solamente pidió a cambio que llevasen su nombre.



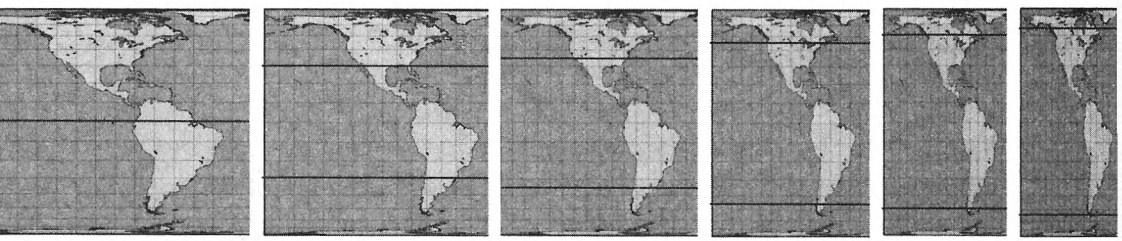


Mapa llevado a cabo con la proyección ortográfica de Gall, o de Gall-Peters, e imagen del cilindro secante a la esfera sobre el que se proyecta.

La construcción de esta proyección es similar a la proyección cilíndrica isoareal de Lambert que hemos visto en el capítulo 5, con la diferencia de que en lugar de considerar un cilindro tangente a la esfera de referencia en el ecuador (en su aspecto normal), utiliza un cilindro secante a la esfera de referencia, que cortará a ésta en dos paralelos. La proyección ortogonal de Gall, a la postre de Gall-Peters, considera que los paralelos de intersección, que serán curvas estándar del mapa, están situados a una latitud de 45° del ecuador. La proyección sigue siendo isoareal, al igual que otras similares que han sido construidas con otros paralelos estándar, como la de W. Behrmann en 1910, a 30°, las de Trystan Edwards en 1953, a 37° y 52°, o la de Hobo-Dyer de 2002, a 37°, cuyo mapa se haría famoso por ser utilizado con el Sur arriba.

ARNO PETERS (1916-2002)

Según su obituario, nació en Berlín en 1916 y estudió Historia, Historia del Arte y Periodismo en la Universidad de Berlín. Fue director de cine en la convulsa Alemania de la década de 1930, recibió el título de doctor en 1945 en una tesis sobre propaganda política, *El uso del cine como medio de propaganda*, y trabajó también como periodista. Consiguió pasar a la historia como el creador de un mapa solidario y justo del mundo, el conocido mapa de Peters, y recogió sus reflexiones sobre el mismo en su libro *La nueva cartografía*. Su trabajo principal no cartográfico es la *Historia del mundo sincronóptica*, en el que lleva a cabo una revisión de la historia dedicando el mismo espacio en el libro a cada siglo. En 1974 cofundó el Instituto para la Historia Universal en Bremen.



Paralelo 0° *Paralelo 30°* *Paralelo 37°* *Paralelo 45°* *Paralelo 50°* *Paralelo 55*

Proyecciones cilíndricas isoareales, con paralelos estándar a distintas latitudes, dependiendo del contacto de la esfera de referencia con el cilindro de proyección (fuente: Carlos A. Furuti).

Arno Peters presentó al mundo de la cartografía esta proyección como original, y la defendió como una creación novedosa e independiente cuando se le recordó que ya había sido desarrollada por Gall un siglo antes. La comunidad científica no hizo mucho caso de este mapa como creación del propio Peters, aunque no por motivos personales, sino porque en ciencia se da valor a las creaciones novedosas, ya sean ellas mismas originales (un teorema, una teoría o un mapa) o por su demostración o desarrollo (por ejemplo, es habitual que algunos resultados o teoremas matemáticos vuelvan a demostrarse, aportando sencillez y comprensibilidad a la prueba original, o nuevas técnicas de demostración). Y en el caso de la proyección de Peters, la comunidad cartográfica entendió que no era así.

La segunda parte, y más importante, de nuestra historia empieza en 1973, cuando Arno Peters convocó una conferencia de prensa en Bonn. A los periodistas les en-

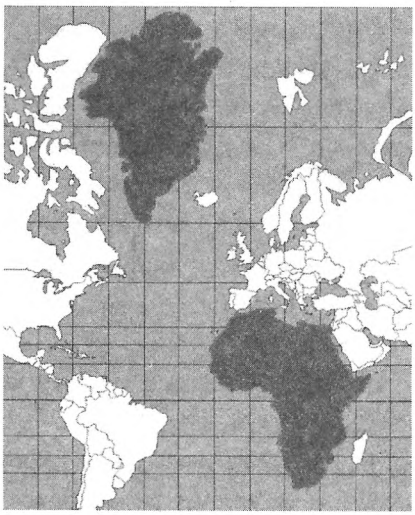
tregó una copia de su mapamundi y de su folleto «La naturaleza eurocéntrica de nuestra imagen geográfica del mundo y sus conquistas», y les presentó su mapa como la única alternativa posible, tanto desde el punto de vista de justicia social como cartográfico, al mapa «racista» e inadecuado de Mercator. El argumento principal de Peters era que la proyección de Mercator distorsiona el área de las diferentes partes del mundo, mostrando las naciones del llamado «tercer mundo» (África y centro y sur de América) pequeñas en comparación con las del llamado «primer mundo» (Norteamérica, Europa y Rusia). Las primeras están habitadas por personas de piel oscura, y las segundas, por personas de piel clara, por lo cual la proyección de Mercator es racista, y debe evitarse su uso. Tras su ataque al mapa de Mercator, mostró «su» mapamundi como la única alternativa posible.

Se originó un debate en el que, sin criterios científicos, los medios de comunicación (que le mostrarían como el David que lucha contra Goliath) y algunas organizaciones con preocupaciones humanitarias y religiosas defendieron y avalaron el mapa de Peters. En pocos años, organizaciones como el Consejo Mundial de Iglesias, la Iglesia Luterana Americana, diferentes agencias de las Naciones Unidas y algunas ONG internacionales empezaron a utilizarlo y a promover su uso. Se pudieron escuchar opiniones como:

> «La proyección de Mercator sobrevalora al hombre blanco y distorsiona la imagen del mundo para ventaja de los colonialistas». (Peters)
>
> «El mapa del futuro, por un mundo más solidario.»
>
> «Comprometido [Peters] siempre con la causa de la justicia, tomó el camino de la cartografía para restituir una imagen del mundo en la que cada pueblo tenga el lugar que le corresponde, tanto geográfica como políticamente.»
>
> «El mapa de Peters corrige los errores del de Mercator [...] es más riguroso desde el punto de vista científico.»

Peters se aprovechó de la buena fe de las personas y de su solidaridad, así como de su desconocimiento de las mínimas nociones de cartografía para que reconocieran su mapa como «el único mapa solidario», y lo que es peor, desde el punto de vista matemático y cartográfico, como «el único mapa correcto».

Conocedor de las técnicas de propaganda, Peters centró su discurso en una lucha entre el mapa racista de Mercator y su mapa solidario, ocultando una realidad cartográfica mucho más compleja, que incluye el estudio científico de los mapas y la existencia de cientos de ellos que pueden ser empleados con distintos fines, entre



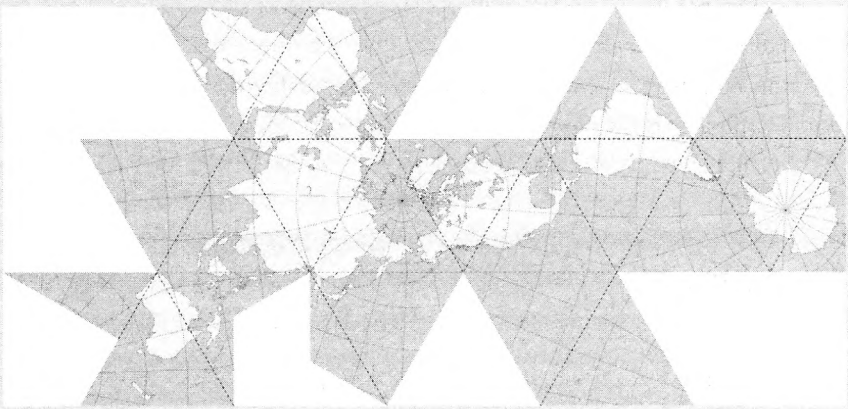
La distorsión en el área en las zonas cercanas a los polos es muy grande en el mapa de Mercator. Groenlandia, por ejemplo, aparece incluso mayor que África, si bien la extensión de Groenlandia es de unos 2.175.000 km², frente a los 29.800.000 km² del continente africano.

ellos bastantes que también son isoareales. Y, además, como podemos constatar al leer su libro *La nueva cartografía* (1983), las armas que utilizó fueron poner juntas afirmaciones correctas (por ejemplo, el mapa de Mercator distorsiona las áreas y está centrado en el meridiano de Greenwich, o que la proyección de Peters es isoareal) con otras falsas (como que las proyecciones isoareales anteriores a la suya «eran tan poco convincentes, tenían en realidad tantos fallos...», o que el mapa de Peters tiene «fidelidad de escala»), empleando un lenguaje pseudocientífico.

En aquel momento, la sociedad ya caminaba, aunque quizá demasiado lentamente, hacia el empleo de mapamundis distintos a los de Mercator, precisamente porque los cartógrafos eran conscientes de que se trataba de una excelente proyección, pero no para mostrar el mundo en su totalidad debido a la distorsión que se producía en las áreas. Por ejemplo, en el estudio de Snyder sobre las proyecciones que se utilizaban en los atlas del siglo XX se constató que apenas se empleaba ya la proyección de Mercator, sino que se estaban utilizando otras. Sin embargo, lo que hizo Peters fue conseguir que se sustituyera la decadente hegemonía del mapamundi de Mercator por el imperio del suyo, dejando fuera toda la riqueza cartográfica tanto de mapamundis en los que se preservaba el área (como los realizados con las proyecciones homolosena de Goode, Mollwaide, la senosoidal de Sanson-Flamsteed o Eckert IV), como de aquellos que preservaban otras propiedades (por ejemplo, la

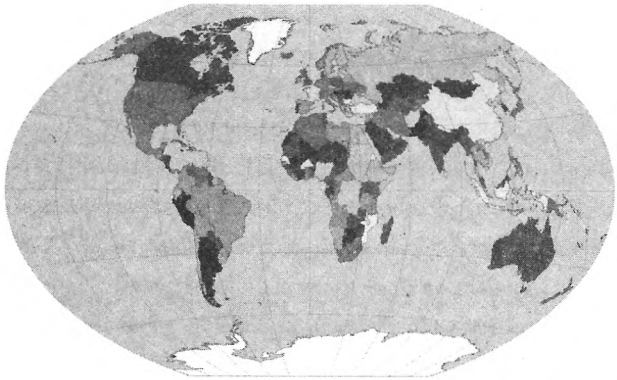
EL MAPA DYMAXION

Buckminster Fuller, creador de la cúpula geodésica, diseñó un mapa que intentaba ofrecer de algún modo una imagen plana de la superficie terrestre que fuera más universal que la de los otros mapamundis. Su idea era proyectar la superficie terrestre sobre un poliedro regular, o semirregular, y después desplegarlo sobre el plano. En su proyección Dymaxion (DYnamics MAXimum tensION; no se trata de una marca, sino su filosofía en su diseño, en su obra), patentada en 1946, utilizaba un cubo-octaedro (8 caras triangulares y 6 cuadradas), mientras que en su versión de 1954 utilizaba el icosaedro (20 caras triangulares) con una ligera modificación. La proyección utilizada no es la gnomónica, sino que se obtiene mediante una construcción similar a la manejada para la cúpula geodésica. El mapa generado por la proyección Dymaxion tiene una distorsión pequeña en áreas y formas, además de que dicha distorsión es bastante uniforme. Aunque puede desplegarse de varios modos, lo habitual es hacerlo con el Polo Norte más o menos en el centro. Nos ofrece una imagen del mundo en la que ya no existe Norte y Sur, sino que el mapa puede mostrarse en cualquier orientación, y los continentes ya no aparecen separados, sino que el conjunto se asemeja más a una isla rodeada por el océano.



Mapa dymaxion desplegado realizado a partir de un icosaedro y en el que están marcadas las líneas de pliegue (fuente: Eric Gaba).

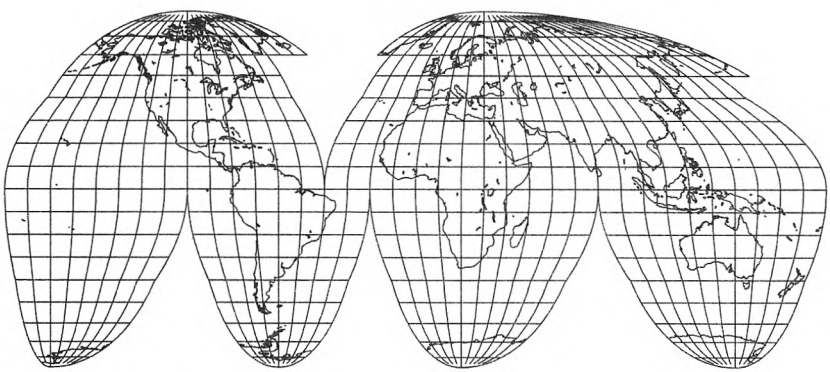
equirrectangular de Miller) u otros de compromiso (es decir, que no preservaban ninguna propiedad concreta, pero cuya distorsión era muy pequeña, en particular por lo que respecta a la forma y al área, como las utilizadas por la National Geographic Society, la proyección de Arthur H. Robinson, de 1961, y la de Winkel-Tripel,



La proyección de Winkel-Tripel es de compromiso, es decir, no preserva ninguna propiedad métrica, pero la deformación en todas ellas es pequeña.

de 1921). Ejemplos todos ellos de mapamundis que se estaban haciendo habituales en la segunda mitad del siglo XX.

La indignación de la comunidad cartográfica se debió en parte al menosprecio social a su ciencia y a su trabajo, así como a la manipulación en los argumentos en defensa del mapamundi de Peters. Para empezar, la existencia de mapas que preservan las áreas viene ya del artículo de 1772 de Lambert, en el que presentaba su proyección cilíndrica isoareal, así como otra azimutal, y desde entonces se han introducido muchas otras proyecciones isoareales. Además, es cierto que la proyección de Gall-Peters preserva las áreas, pero tiene el defecto de que la distorsión en

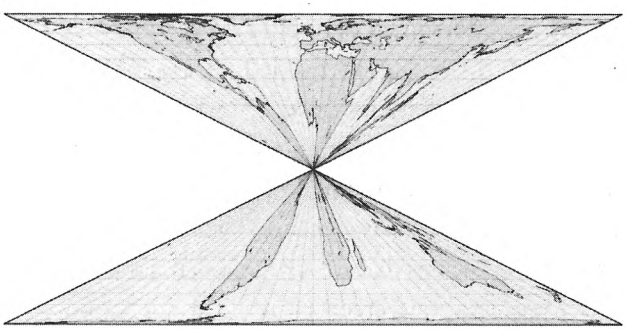


El mapamundi discontinuo realizado con la proyección homolosena de Goode, que es isoareal, se empezó a utilizar habitualmente en los atlas del mundo, así como en publicaciones científicas o divulgativas, en medios de comunicación o en la educación, y aún hoy sigue vigente.

las formas de los territorios es muy grande, estirándose mucho en la dirección Norte-Sur, en la zona central y encogiéndose más allá del paralelo 45° N y S. Irónicamente, la deformación en las formas es muy acentuada en África y el centro y sur de América, mientras que es más moderada en Europa, Estados Unidos y Canadá, que están cerca del paralelo 45° N. Un par de citas y un mapa de Snyder pueden ser interesantes en relación a esta polémica:

> «[El mapamundi de Peters] no es mejor que otros mapas similares que han sido utilizados en los últimos 400 años».
>
> «La promoción de la proyección de Peters parece haber adquirido la misma mentalidad simple de afirmaciones como "una única fe" o una patente de la panacea [medicina curalotodo]. En el proceso de intentar despertar la conciencia social con su mapa, Peters ha abandonado la objetividad e importantes hechos.»

El mapa de Snyder aquí ilustrado era su forma de expresar, con cierto humor e ironía, que no basta con el hecho de que un mapa sea isoareal, sino que hay que tener en cuenta otras cuestiones, y una muy importante es la propiedad de que se preserven las formas de continentes y países.



En cualquier caso, como hemos probado a lo largo de este libro, no existen mapas correctos de la superficie terrestre, sino que todos producen una mayor o menor distorsión. Además, existen cientos de mapas distintos; por ejemplo, en el libro *Flattening the Earth* de John P. Snyder aparecen del orden de 300. Lo ideal para confeccionar, por ejemplo, un moderno atlas del mundo con mapas de distintas escalas, es decir, desde mapamundis, pasando por mapas de continentes o países, hasta mapas de pequeñas regiones, es elegir para cada uno la proyección más adecuada.

Epílogo

Érase una vez un mapa. El mapa había sido utilizado durante años y años. Mucho tiempo. Trazó rutas, enseñó por dónde discurrían los caminos y ayudó a no perderse. Es la función que debe cumplir todo mapa: estar ahí cuando se lo necesita. Y éste, sin duda, lo estuvo. En los últimos tiempos se consultaba tan a menudo que alguien pensó que era mejor extenderlo sobre la mesa y dejarlo allí. De esta forma, quien quisiera, podría venir, mirar en él, suponerse informado y dar media vuelta sin perder un solo instante. Era un mapa, un buen mapa.

Pero he aquí que un día dejó de ser útil. Quién sabe a estas alturas por qué, pero dejó de prestar el servicio que con tanta diligencia había proporcionado a la comunidad a la que pertenecía. Quizás porque se hizo viejo. Quizás porque lo que en él estaba representado ya no se correspondía con la realidad.
Alber Vázquez, *Instrucciones para doblar un mapa* (2004)

El desarrollo tecnológico que se ha producido en los últimos años en el mundo de la cartografía con las imágenes por satélite, los navegadores GPS o la gran cantidad de herramientas que han aflorado en Internet, desde el conocido y potente Google Maps hasta el interesante SIGPAC (Sistema de Información Geográfica de Parcelas Agrarias del Ministerio de Medio Ambiente y Medio Rural y Marino, del Gobierno de España), pasando por otras quizá menos conocidas, como OpenStreetMap, Bing Maps, Yahoo Local Maps o Mappy.com, ha llevado a que muchas personas piensen que «el mundo de los mapas está muerto», y no se refieren simplemente a que estas modernas herramientas de cartografía digital hayan dejado anticuados los clásicos mapas de papel, sino que creen en realidad que ya no existe un proceso cartográfico detrás de ellas, y en particular, que ya no es necesario el uso de las proyecciones cartográficas para su desarrollo.

Sin embargo, nada más alejado de la realidad. Estas nuevas herramientas son muy potentes y ofrecen nuevas e increíbles posibilidades, insospechadas en la era de los mapas de papel, y además, suelen ser interactivas y te las puedes llevar contigo a cualquier sitio, pero detrás de ellas sigue vigente toda la cartografía. En cada una de estas herramientas digitales modernas sigue siendo necesario el uso de las proyecciones cartográficas y las demás técnicas propias de la cartografía. Así, por ejemplo,

las imágenes por satélite que vemos normalmente no son «fotografías» desde el espacio, sino que se obtienen de la siguiente forma: primero los satélites realizan un escaneado de la superficie terrestre, generando una gran cantidad de información que luego se transformará en una imagen por medio de una proyección cartográfica (ya sea la proyección de Mercator oblicua espacial o cualquiera de las que hemos visto a lo largo de este libro); la herramienta Google Maps utiliza la proyección de Mercator, que por ser conforme preserva las formas a nivel local, lo cual es muy conveniente para mapas interactivos sobre los que vamos a realizar zooms, como es el caso; por su parte, los navegadores GPS nos enseñan mapas trazados con el sistema de proyecciones UTM (Mercator Transversal Universal) o con alguna otra proyección cartográfica.

En definitiva, las nuevas herramientas digitales no dejan de ser nuevos y potentes medios de transmitir la información cartográfica, pero ésta no ha desaparecido, sino que sigue siendo la misma. Estas nuevas herramientas de cartografía digital no son más que el último paso, aunque el más visible, de todo el proceso cartográfico.

Bibliografía

DILLER, A., «The Ancient Measurements of the Earth», Isis, vol. 40, nº 1 (feb. 1949), págs. 6-9.

FEEMAN, T.G., *Portraits of the Earth, A mathematician Looks at Maps,* AMS, Providence, 2002.

FURUTI, C., *Map projections* (página web): http://www.progonos.com/furuti/MapProj/CartIndex/cartIndex.html

IBÁÑEZ, R., «Lo que Euler le dijo al cartógrafo» (1ª parte), Revista SIGMA, nº 27, págs. 81-106, 2005.

MONMONIER, M., *Rumb lines and map wars,* Chicago, The University of Chicago Press, 2004.

OSSERMAN, R., *La poesía del universo*, Barcelona, Crítica, 1997.

PETERS, A., *La nueva cartografía,* Barcelona, Vicens Vives, 1992.

POLKING, J.C., *Mapping the Sphere,* Houston, Rice University (página web): http://math.rice.edu/~polking/cartography/

RAISZ, E., *Cartografía General,* Barcelona, Omega, 1985.

RICKEY, V.F., «How Columbus Encountered America», Washington, Mathematics Magazine, 65, nº 4 (oct .1992), págs. 219-225.

ROBINSON, A.H. ET AL., *Elements of Cartography,* New Jersey, John Wiley and Sons, 1953 (sexta edición, 1995).

ROMERO, F., BENAVIDES, R., *Mapas antiguos del mundo,* Madrid, Edimat Libros, 1998.

RUIZ MORALES, M., RUIZ BUSTOS, M., *Forma y dimensiones de la Tierra: síntesis y evolución histórica,* Barcelona, Ediciones del Serbal, 2000.

SNYDER, J.P., *Map Projections, A Working Manual*, Reston, USGS Professional Paper 1395, 1987.

—: *Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections*, Chicago, The University of Chicago Press, 1993.

SOBEL, D., *Longitud*, Madrid, Debate, 1997.

TAYLOR, A., *El mundo de Gerard Mercator, el cartógrafo que revolucionó la geografía,* Barcelona, Ed. Juventud, 2007.

VV.AA., *Maps, Introduction to Pure Mathematics M203*, Open University (vídeo).

Índice analítico

Anaximandro 14
ángulo 26-42, 62-75, 87-1025, 107-124, 129-134
área 64-69, 74-76, 82-85, 129-133
Aristóteles 14, 15, 16, 25, 88
Arquímedes 25-26, 71-75
atlas 81, 100-102, 104, 150, 155
Azarquiel 117-118
azimut 96-97, 100

Biblia 20-21
Biblioteca de Alejandría 26-27, 30, 120
Blaeu, Joan 118

Carroll, Lewis 129
carta
  aeronáutica 163
  náutica 32, 102, 151, 157
cartografía matemática 51-52, 57, 139
cartograma 84
Cassini, Jean-Dominique 22, 33-34, 43, 113
cilindro 68-79, 95, 135-139, 155, 164
círculo máximo 35-50, 57-64, 92, 102, 162-163
cólera, mapa del 53
Colón, Cristóbal 20, 31-32, 42
conforme, proyección 67-69, 123, 151
cono 68-69, 95, 123-128, 135
coordenadas geográficas 13, 35, 37, 45
cúpulas geodésicas 48-49
curva (o línea) estándar 123, 144, 145, 148, 164
curvatura
  de Gauss 135-140
  de la circunferencia 49-50
  geodésica 50
  media 136-138, 140
curvaturas principales 138

distancia 26-31, 46-49, 57-66, 99-102
distorsión
  en la dirección de los meridianos 75, 91, 156
  en la dirección de los paralelos 75, 91

eclipse 16, 37, 43, 88, 118
eclíptica, plano de la 38-39, 114
ecuador 22-23, 77-80, 90, 155-160
ecúmene 12, 14, 141
elipsoide 13, 22-24, 30, 36, 56
Eratóstenes 26-30, 37, 41, 78, 145
escala 9, 23, 54-58, 82-83, 127, 144
escenográfica, proyección 66
esfera 23, 46-50, 57-79, 107-108, 142
Eudoxo 25-26
Euler, Leonhard 134-135

Finé, Oronce 126, 150
Flamsteed, John 104
fórmula
  de Gauss-Bonnet 140
  de la suma de los ángulos de un triángulo esférico 133, 139, 140
  de la suma de los ángulos de un triángulo plano 140
Fuller, Buckminster 48, 103, 168

Galilei, Galileo 43, 104
Gall, James 164-165
Gauss, Carl Friedrich 135-140, 154, 160
geodesia 11, 22, 24, 52, 122, 143
geodésica 36-37, 46-50, 64-69, 129-132
geoide 22-24
geometría 11, 46, 72, 74, 109, 121, 140
  diferencial 10, 52, 58, 62, 121, 139, 154
globo
  de referencia 56-57, 103
  terráqueo 16, 25, 36, 140-144, 150
gnomon 27-30, 39, 87
Google Maps 160, 171, 172
Goos, Peter 118
GPS 23, 38, 717, 172
gravedad 11, 22-24

Halley, Edmund 43, 111, 113
Harrison, John 44-45
Hiparco 12, 37, 43, 105
homotecia 57, 74
Hondius, Joducus 56, 106, 119, 120, 126, 155
husos esféricos 141, 142

indicatriz de Tissot 76, 92
Indicopleustes, Cosmas 20-21
isometría 58, 63, 64, 129-134, 139

Kepler, Johannes 102, 119

Lambert, Johann Heinrich 71-73, 123, 127, 160, 169
latitud 22-23, 35-40, 90, 156, 161, 165
ley de la gravitación universal 22, 33
Lindbergh, Charles 159
L'Isle, Guillaume de 114
longitud 25-29, 33-34, 40-45, 152
loxodrómica 102, 108, 122, 151, 157-158

mapa
  celeste 115
  de fantasía 55
  Dymaxion 7, 168

poliédrico 103
Topográfico Nacional de España 161
topológico 55
Maslama 105, 106
Mercator, Gerardus 81, 118, 141, 146, 149-156
meridiano 26-30, 35-50, 73-81, 123-125
de Greenwich 41-42, 85, 167
metro 30, 33, 34
mito cosmológico 15
Morgan, Augustus de 61, 87, 101

National Geographic Society 81, 83, 146, 168
Newton, Isaac 22, 33, 43, 44, 154

ojo de pez (lente fotográfica) 121
Ortelius, Abraham 151, 154
ortodrómica 87, 101, 102, 122, 151, 157, 163
ortofotografía 70

paralelo 35-40, 74-81, 124, 156, 164-165
Peters, Arno 164-170
Pitágoras 15
planisferio 12, 61, 105, 106
plano tangente a una superficie 136
Platón 15, 26
poliedro 103, 168
portulanas, cartas 149, 151, 153
portulanos 153
Posidonio 31-32
propaganda nazi 86
proyección
algorítmica 66, 68-69, 78, 96, 123
armadillo (o de Raisz) 96
azimutal 87, 97, 105, 108
equidistante 98, 99, 145-148, 158
isoareal de Lambert 71, 85, 99
cartográfica 10, 54-58, 67, 172
cilíndrica 71, 74-83, 156, 157, 165, 169
de Miller 79
isoareal de Lambert (o de Arquímedes) 71-87, 164
cónica 123-126, 128, 148
conforme bipolar oblicua 10, 123
conforme de Lambert 10, 71, 123, 127-128
equidistante 128, 148
isoareal de Albers 10, 68-69, 85, 124, 125, 128
de Braun 77-79
de Gall 77-79
Eckert IV 10, 85, 159, 167
en perspectiva general 66-67, 70
equidistante 97, 120, 144-148
equirrectangular (o rectangular) 144, 145, 168
estereográfica 69, 77, 78, 105-128
geométrica 68, 76, 78, 90
gnomónica (o central) 87, 90-94, 98-103
Hammer-Aitoff 69
Hobo-Dyer 164
homolosena de Goode (discontinua) 159, 167, 169
isoareal 65, 67-86, 97, 99, 130-131
de Behrmann 10, 77, 78
Lagrange 71, 123
Mercator 8, 85, 112, 149-170, 172
oblicua 162-163, 172
transversal 116, 149, 160-162, 172
Mollweide 10, 69, 81, 85
octaédrica (o de mariposa de Cahill) 103
ortográfica de Gall (o de Gall-Peters) 10, 77, 85, 164
Platé Carrée (o carta plana) 78, 144-145
policónicas 125
pseudocilíndrica 80-81, 85
pseudocónicas 125, 126
retroazimutal de Craig (o meca) 98
Robinson 10, 69, 81, 83, 159, 168
sinusoidal, o de Sanson-Flamsteed 69, 81, 85, 142, 150, 167
Trystan Edwards 164
Van der Gritten 10, 146, 159
Winkel-Tripel 10, 69, 83, 159, 168-169
Ptolomeo, Claudio 11-12, 22, 32, 105, 125, 126

radio de la Tierra 56
rumbo 54, 62, 102, 108, 151, 153, 157

Snyder, John 112, 120, 159, 163, 167, 170
Sociedad para la Difusión del Conocimiento Útil, SDUK 100
Speed, John 121, 126

Tales de Mileto 14, 87, 88
teorema
de los cuatro colores 61
de Tales 88, 93, 100, 110
Toscanelli, Paolo 32
triangulación 32-34
triángulo esférico 131-133, 139

UPS (Estereográfico Polar Universal) 116, 161
USGS (Servicio Geológico de Estados Unidos) 116, 121, 127, 145, 159, 161, 163
UTM (Mercator Transversal Universal) 116, 149, 161-162, 172

vector normal a la superficie 136

Waldseemuller, Martin 141-142
Werner, Johannes 43, 120, 126
Wright, Edward 155, 156