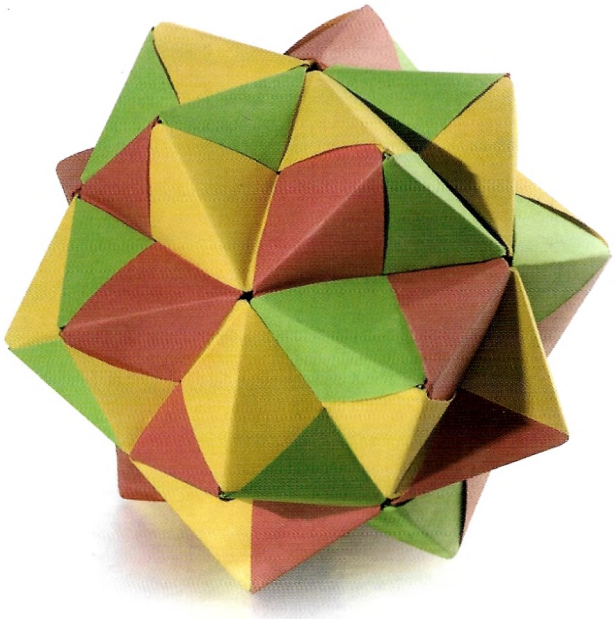
# Las mil caras de la belleza geométrica

## Los poliedros

**Claudi Alsina**



*El mundo es matemático*

# Las mil caras de la belleza geométrica

## Los poliedros

Unas figuras con especial *glamour* destacan en el mundo de los cuerpos geométricos: los poliedros. Viven entre nosotros y nos ofrecen formas artísticas de gran belleza, pero también soluciones funcionales muy útiles. Han interesado desde siempre a los geómetras, pero también a cristalógrafos y arquitectos, a pintores y escultores, a fabricantes de cajas y joyeros... Verlos es admirarlos.

# Las mil caras de la belleza geométrica

## Los poliedros

**Claudi Alsina**

*El mundo es matemático*

© 2010, Claudi Alsina por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Babel, disseny i maquetació, S.L.
Fotografías: age fotostock, gettyimages

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6973-7
Depósito legal: NA-1667-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

# Sumario

**Prefacio** ..... 11

**Capítulo 1. Invitación a los poliedros** ..... 13
Noticias de Poligolandia ..... 13
¿Qué es un poliedro? ..... 17
Poliedros en la naturaleza ..... 20
Una breve historia de los poliedros ..... 24
Prehistoria poliédrica ..... 24
Poliedros grecorromanos ..... 25
Un apartado clave del *Timeo* de Platón ..... 26
La gran obra de Euclides ..... 28
Poliedros renacentistas ..... 34
Poliedros 1700-2000 ..... 40
Poliedros hoy ..... 43

**Capítulo 2. Las grandes familias de poliedros** ..... 45
Los cinco cuerpos platónicos ..... 45
Tetraedro ..... 48
Cubo ..... 50
Octaedro ..... 51
Dodecaedro ..... 52
Icosaedro ..... 52
Pirámides y bipirámides ..... 53
Prismas y antiprismas ..... 55
Deltaedros ..... 57
Poliedros de Arquímedes ..... 59
Poliedros de Catalan ..... 61
Poliedros estrellados ..... 63
Otras familias poliédricas ..... 66
Paralelepípedos ..... 66
Policubos ..... 66
Poliedros con ciertas igualdades ..... 66
Zonoedros ..... 68
Trapezoedros ..... 68

Poliedros ortogonales ..... 68
Poliedros derivados ..... 68
Poliedros irregulares ..... 68
Hipercubos en dimensión 4 ..... 69
Los tres politopos regulares ..... 72

**Capítulo 3. Secretos poliédricos sorprendentes** ..... 77
La fórmula de Euler ..... 77
La fórmula $C+V=A+2$ ..... 78
Euler versus Descartes vía Pólya ..... 80
La fórmula de Euler con sólo caras y vértices ..... 82
Siempre hay un triángulo, un cuadrilátero o un pentágono ..... 82
No todas las caras pueden ser diferentes ..... 83
Los tres poliedros austeros ..... 84
Los diversos desarrollos planos ..... 85
Poliedros flexibles ..... 88
Parejas sorprendentes ..... 88
El misterio de la caja perfecta ..... 90
Tetraedrización de poliedros ..... 91
Un rompecabezas imposible ..... 92
Empaquetamientos curiosos ..... 92
La esponja de Menger ..... 94

**Capítulo 4. Poliedros en arquitectura y arte** ..... 97
Mallas, encofrados y andamiajes ..... 97
Módulos poliédricos habitables ..... 98
El módulo L de Leoz ..... 99
El módulo cúbico de Bofill ..... 100
El módulo de Blom ..... 100
Maravillosas cúpulas geodésicas ..... 101
Las cúpulas de Fuller ..... 103
La cúpula del Epcot Center ..... 104
Una cúpula de Isozaki ..... 105
La cúpula de La Villette ..... 105
Una cúpula daliniana y otras obras ..... 107
Gaudí y los poliedros ..... 108

Algunas obras singulares ..... 110
Pirámides egipcias, mayas y modernas ..... 111
El Baptisterio de Florencia ..... 112
La estructura octogonal de Brunelleschi ..... 112
El Atomium de Waterkeyn ..... 114
Los prismas oblicuos de Kio y otras obras ..... 114
Poliedros y arte ..... 115

**Capítulo 5. Poliedros y diseño** ..... 119
La pelota de fútbol ..... 119
Poliedros lúdicos ..... 120
El cubo Soma ..... 120
El cubo de Rubik ..... 121
Dados y sorteos ..... 122
Rompecabezas ..... 125
Dolos y tetrápodos ..... 125
El imperio de las cajas ..... 126
Tetra Pack® ..... 128
Poliedros caseros ..... 128
Lámparas geométricas ..... 129
Paraguas piramidales ..... 130
Objetos de cartón ..... 131
Mobiliario urbano ..... 131
Poliedros en joyería ..... 132
Origami poliédrico ..... 134
Construcción de una caja, un cubo y un tetraedro ..... 135

**Epílogo** ..... 137

**Bibliografía** ..... 139

**Índice analítico** ..... 141

*¿Por qué no consideramos los poliedros tal como*
*los encontramos, admirándolos por su belleza*
*y las cosas maravillosas que representan?*
Marjorie Senechal

# Prefacio

En el mundo que nos rodea hay formas de excepcional belleza y complejidad, desde una simple flor a un fiordo. Dentro de él hemos ido creando también nuevas formas artísticas, industriales o arquitectónicas, desde una columna barroca a un coche de Fórmula 1. Las matemáticas, a través de la geometría, se han interesado desde siempre por estudiar figuras aptas para describir y representar las formas naturales o crear nuevas formas artificiales. Y en esta aventura matemática, hoy ya milenaria, se ha optado por un determinado repertorio de figuras geométricas.

Es en el pequeño mundo de los cuerpos geométricos donde destacan, con luz propia, arropados por un pedigrí histórico excepcional, unas figuras con especial glamour llamadas *poliedros*. El presente volumen le invita a visitar este rincón poliédrico, gozar de su belleza formal y descubrir las sorprendentes aplicaciones y presencias que estos sólidos tridimensionales tienen. Los poliedros han interesado desde siempre a los geómetras, pero también a cristalógrafos y arquitectos, a pintores y escultores, a fabricantes de cajas y joyeros..., y forman parte de las formas geométricas que le rodean a usted. Incluso es posible que usted viva dentro de una de ellas. Mucho nos gustaría que con la lectura de estas páginas y la visión de sus imágenes usted pueda recorrer los lugares más emblemáticos del mundo poliédrico y enamorarse de ellos.

El principio de la obra es una invitación amable al mundo general de los poliedros. Tras una breve escala en *Poligolandia,* se podrán discutir las diversas definiciones de poliedros con el fin de apreciar la riqueza de sus variedades. Se observará la presencia de los poliedros en la naturaleza y a través de un detallado recorrido histórico se podrá notar la gran creatividad geométrica y artística que ha permitido, a lo largo de los siglos, ir descubriendo curiosos secretos en algunos de estos cuerpos a la par que ir construyendo muchos otros. Y, como se verá, el estudio de los poliedros sigue hoy vivo y activo.

A continuación se ofrece una visita (inevitable) a la familia más noble del lugar: los cinco tipos de poliedros regulares. Estos objetos, también popularizados como sólidos platónicos, tienen su propia génesis y sus leyendas, misticismos que han elevado estos cinco cuerpos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) a la categoría de figuras geométricas de gran belleza. También de forma muy descriptiva, se podrá conocer toda la corte que rodea a los monarcas-regulares. Son familias que van desde las sencillas pirámides o los altivos prismas a los sofisticados poliedros

estrellados. Y descubriremos como en espacios de dimensiones superiores a tres es posible también, en un alarde imaginativo, descubrir nuevos poliedros.

El siguiente apartado permite ir descubriendo, uno tras otro, secretos poliédricos sorprendentes, desde la famosa fórmula de Euler, con sus jugosas consecuencias, al conocimiento de hermosos ejemplares poliédricos o de propiedades inesperadas que nos revelan la gran diferencia entre estos cuerpos tridimensionales y sus parientes pobres del plano (los polígonos).

Conocidos ya muchos poliedros, se podrá realizar un recorrido por las elegantes presencias poliédricas en nuestros entornos arquitectónicos, en edificios singulares o maravillosas cúpulas, en sofisticados diseños gaudinianos o en módulos espectaculares, donde podrá apreciar su esplendor, exterior o interior. Verlos es admirarlos.

En el último capítulo se podrá apreciar la presencia entre nosotros de numerosos diseños basados en poliedros, desde la pelota de fútbol a los diamantes de un anillo, desde juegos como el cubo Soma o el cubo de Rubik a los grandes diseños de envases y embalajes. Los poliedros viven entre nosotros ofreciendo formas artísticas pero también soluciones funcionales muy útiles. Y a través del origami o papiroflexia para montar poliedros se le invitará a que usted forme su propia colección y descubra un nuevo hobby apasionante.

Culmina el libro con un epílogo a modo de despedida, una sucinta bibliografía en la que descubrir muchas más realidades poliédricas y un índice analítico para facilitar la consulta.

Los poliedros aguardan su visita, ¡que disfrute de ella!

Capítulo 1

# Invitación a los poliedros

*La razón principal para estudiar los poliedros regulares es todavía la misma que la de los tiempos de los pitagóricos, es decir, que sus formas simétricas resultan atractivas a nuestro sentido artístico.*
H.S.M. Coxeter

¿Qué es un poliedro? ¿Dónde hay poliedros? ¿Qué historia tienen? Éstas son las tres cuestiones de partida a las cuales se dedica este primer capítulo. Nuestro itinerario se inicia en un rincón del plano, Poligolandia, donde residen desde hace siglos los polígonos. Ellos son los que en un humilde asalto al espacio tridimensional permiten configurar los poliedros. Estos cuerpos han sido modelos ideales para poner a prueba todo tipo de proyectos, desde los métodos perspectivos de Brunelleschi hasta los rigurosos trazados de Monge en geometría descriptiva. Sorprendentemente, el interés por los poliedros sigue vigente hoy en día.

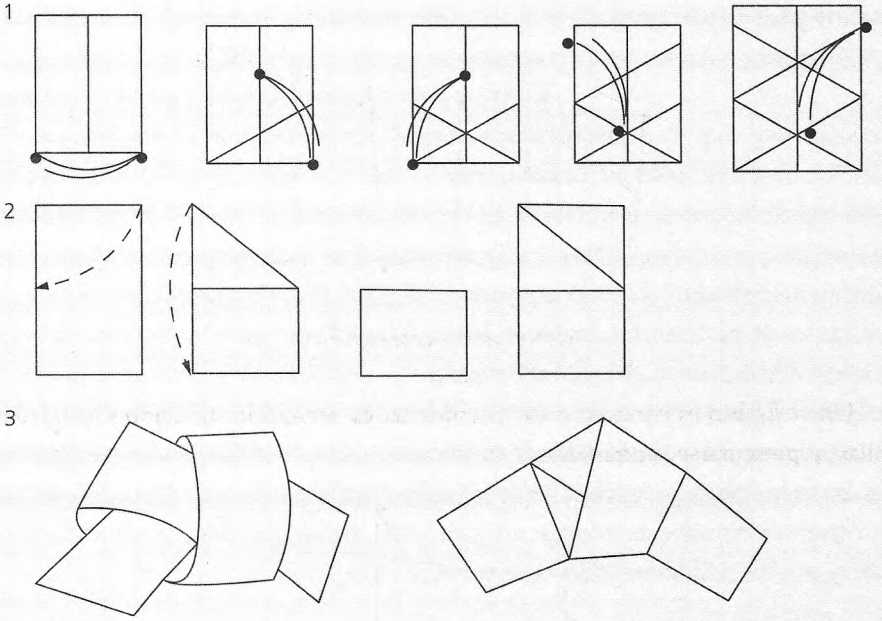
## Noticias de Poligolandia

Poligolandia forma parte de nuestro mundo, en el que multitud de objetos presentan formas poligonales. Triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, estrellas pentagonales, etc. son omnipresentes en nuestro entorno, en edificios y pavimentos, en logos y banderas...Un polígono es una figura geométrica del plano determinada por una sucesión de vértices $V_1, V_2 \ldots, V_n, V_{n+1} = V_1$, y una sucesión de lados (consecutivos y no alineados) $V_1V_2$, $V_2V_3 \ldots, V_nV_1$. El extraño nombre de «polígono» tiene etimología griega, donde *poli* hace referencia a «muchos» y *gonos* a «ángulos».

*Polígonos: convexo, cóncavo y complejo.*

## POLÍGONOS CON PAPIROFLEXIA

La técnica de papiroflexia para construir polígonos mediante tiras de papel es una alternativa a los dibujos con regla, compás y transportador de ángulos.

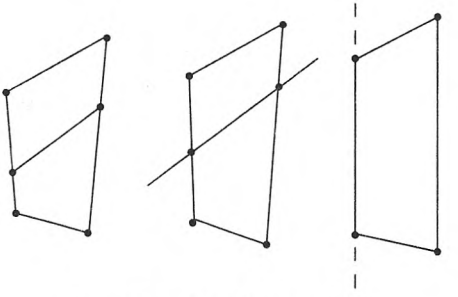



*Polígonos con tiras de papel.*

Con las figuras del grupo 1 se pueden obtener triángulos equiláteros y con ellos construir hexágonos; en las del 2 se marcan cuadrados, y mediante el truco del lazo dibujado, con las del 3 se puede construir un exacto pentágono regular (es un ejercicio interesante justificar que en efecto este lazo da precisamente el pentágono regular: obviamente la anchura de la tira de papel garantiza la igualdad de los lados del pentágono, pero hay que verificar que los ángulos son iguales). En la página web http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/papiroflexia/ se ofrece abundante información de la relación de este antiguo arte con las matemáticas.

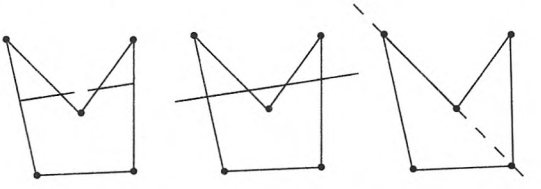
En las figuras de la página anterior se pueden observar dos tipos de polígonos simples (uno convexo sin entradas y uno cóncavo) al lado de un polígono complejo, en el que hay cinco vértices y cinco lados, los cuales pueden cortarse en puntos que no son vértices. Los polígonos clásicos son los simples, pero los complejos tienen también su interés. Con el fin de aclarar nomenclaturas lea las siguientes definiciones.

Un polígono es convexo si dados dos puntos cualesquiera del polígono el segmento que los une siempre queda dentro del polígono. Ello equivale a decir que toda recta lo cortará como máximo en dos puntos, o que el polígono siempre quedará en un semiplano determinado por cualquiera de las rectas que contengan sus lados.



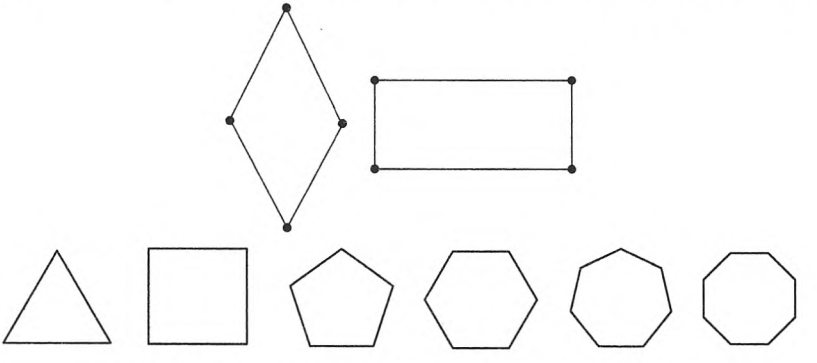
*Tres formas de ver la convexidad.*

Un polígono es cóncavo si no es convexo, es decir, si las anteriores propiedades fallan al presentarse «entradas».



*Tres formas de ver la concavidad.*

Un polígono es equilátero si sus lados son iguales, y es equiangular si sus ángulos son iguales. Cuando ambas virtudes se dan a la vez se habla de polígono regular.



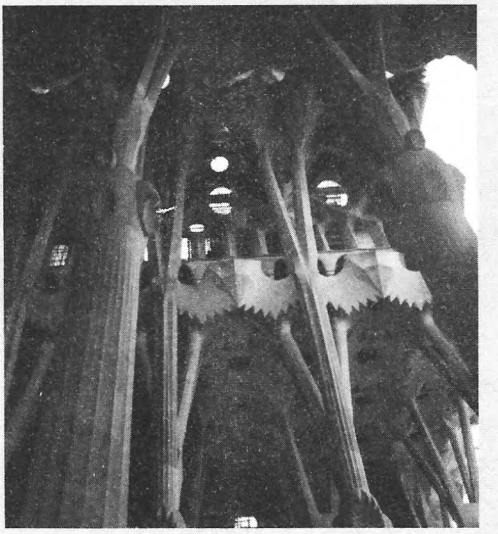
*Arriba, a la izquierda, un polígono equilátero no equiangular;*
*a la derecha, un polígono equiangular no equilátero. Debajo, polígonos regulares.*

Por supuesto, vértices y lados pueden formar también los llamados polígonos alabeados situados en el espacio.

Habiendo privilegiado la geometría clásica los trazados con regla y compás, no es de extrañar que el tema de dibujar polígonos regulares en una circunferencia fuera un reto. Resultó muy fácil inscribir triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos..., pero apareció el problema de dibujar el heptágono, de siete lados. Tras muchos siglos de pesquisas matemáticas se pudo demostrar que ello no era posible. Afortunadamente hay maneras de hacer estos trazados usando otros instrumentos.

## POLÍGONOS DE GAUDÍ

Las formas poligonales planas convexas o estrelladas son omnipresentes en la obra de Gaudí en dos ámbitos diferentes: como formas determinantes de elementos constructivos (plantas, ventanas, separadores, baldosas...) y como formas generadoras de decoración (cerámica, letras...). En la obra gaudiniana, los polígonos planos regulares más usuales son los triángulos, los cuadrados, los pentágonos, los hexágonos, los octágonos, los decágonos y los dodecágonos. Son ejemplos emblemáticos, muchos de ellos presentes en edificios de Barcelona, los triángulos de ladrillo de Bellesguard, las baldosas cuadradas de la Casa Vicens, las ventanas pentagonales del Capricho o las baldosas hexagonales del Paseo de Gracia. Pero es en las columnas de la nave de la Sagrada Familia donde Gaudí hizo uno de los usos más sorprendentes que nunca se hayan realizado de los polígonos. Las columnas de la Sagrada Familia nacen de un juego geométrico finísimo moviendo polígonos e intersecando volúmenes, convirtiéndose sin duda en una culminación del medido y profundo itinerario geométrico de Gaudí. Dos polígonos regulares idénticos se desplazan hacia arriba girando en sentidos contrarios y generando una columna cuyas secciones a diferentes alturas son secuencias de polígonos cada vez con un mayor número de lados. En el capítulo 4 se analiza con mayor detalle la obra del genial arquitecto.



*Columnas de la Sagrada Familia.*

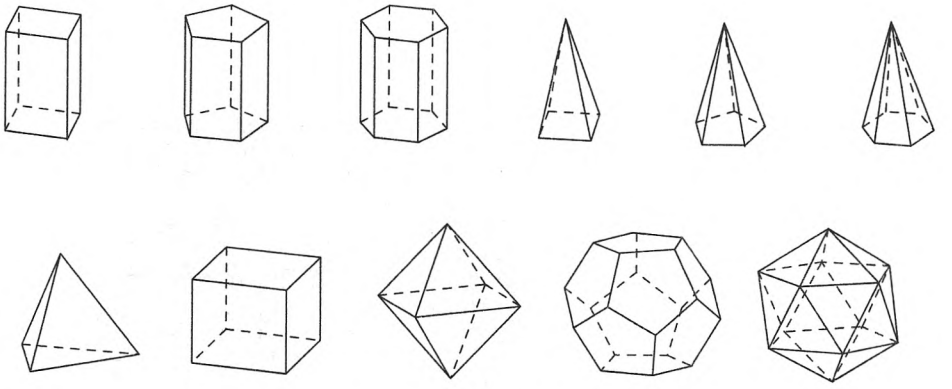
A pesar de que hay infinitos tipos de polígonos, el más importante es el triángulo, pues tanto los polígonos cóncavos como los convexos siempre se pueden triangularizar (de varias maneras), es decir, dividirlos en piezas triangulares. En la tabla siguiente se detallan los nombres de los polígonos de hasta veinte lados.

| Nombre | Número de lados |
|---|---|
| Triángulo | 3 |
| Cuadrilátero | 4 |
| Pentágono | 5 |
| Hexágono | 6 |
| Heptágono | 7 |
| Octágono | 8 |
| Eneágono | 9 |
| Decágono | 10 |
| Endecágono | 11 |

| Nombre | Número de lados |
|---|---|
| Dodecágono | 12 |
| Tridecágono | 13 |
| Tetradecágono | 14 |
| Pentadecágono | 15 |
| Hexadecágono | 16 |
| Heptadecágono | 17 |
| Octodecágono | 18 |
| Encadecágono | 19 |
| Isodecágono | 20 |

## ¿Qué es un poliedro?

La visión más popular de un poliedro es la de un cuerpo geométrico con caras poligonales planas, aristas rectas que articulan estas caras y vértices donde concurren las aristas.



*Poliedros de toda la vida.*

Si deseando una respuesta rápida a esta cuestión aparentemente simple de qué es un poliedro acude a la versión online del diccionario de la Real Academia Española, encontrará:

**poliedro.** (Del gr. πολύεδρος). **1.** m. *Geom.* Sólido limitado por superficies planas.

## NOMBRES DE POLIEDROS

A menudo los poliedros son designados en relación al número de sus caras siguiendo la nomenclatura griega (tetraedro: 4, pentaedro: 5, hexaedro: 6, heptaedro: 7, etc.). Pero también se combinan nombres que describen mejor el sólido: prisma pentagonal, dodecaedro rómbico, cubo truncado, etc. En algunos casos tienen asociado un nombre propio: poliedro de Lord Kelvin, monstruo de Miller...

Se trata de una definición muy general que, sin embargo, no hace ninguna alusión a las aristas, los vértices y las caras poligonales que cualquiera espera poder identificar en un cuerpo de este tipo. Como siempre ocurre en matemáticas, deberemos fijar bien qué definición se da al objeto matemático y a partir de ella ser conscientes de qué casos quedan arropados bajo la definición dada y cuáles quedan excluidos.

Si en Poligolandia había problemas para precisar las tipologías poligonales, ya puede suponer que en el espacio la situación aún se complica más. Una definición corriente de superficie poliédrica es:

> Figura formada por un número finito de polígonos, de forma que cada arista de éstos pertenezca a dos de ellos, que a su vez deberán estar en planos diferentes.

Fig. 1

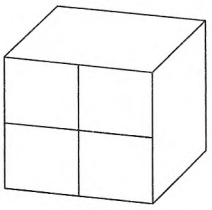
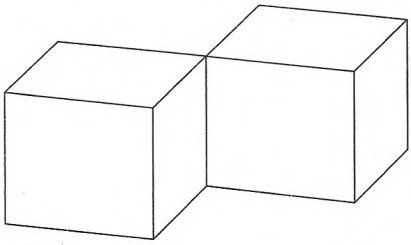


Fig. 2



En la figura 1 se puede observar un cubo con una cara dividida en cuatro partes. Según la definición «académica», sería un poliedro. Pero según la reciente definición de superficie poliédrica esta figura no lo sería, pues hay «caras» adyacentes situadas en un mismo plano. ¿Consideraría la figura 2 como un poliedro?

Un tema interesante es distinguir bien los poliedros convexos de los cóncavos. Para determinar que un poliedro es convexo, puede verse si dados dos puntos del interior o de la frontera, el segmento recto determinado por ellos está totalmente contenido en el poliedro. También puede verificarse si todo el poliedro queda

siempre en uno de los semiespacios determinados por los planos que contienen a sus caras o exigir que la intersección del poliedro convexo con cualquier plano sea un polígono convexo.

A lo largo de la historia de las matemáticas se han dado diferentes nociones de poliedro, lo que ha provocado la sarcástica afirmación de que «lo único que tienen en común todos los poliedros es el nombre». Por ejemplo, en la Grecia clásica los poliedros eran considerados cuerpos sólidos, pero más tarde se tendió a mirarlos como superficies.

Evidentemente, según los polígonos que se deseen usar para formar las caras de los poliedros (polígonos cóncavos, polígonos convexos, polígonos que se autointersecan...) surgirán diferentes clases de poliedros. Aquí consideraremos esencial que nuestros poliedros presenten estas tres características: caras poligonales en un número finito (compartiendo dos caras que se corten o un vértice o una arista), aristas que pertenecen sólo a dos caras y vértices en los que concurren diversas aristas y caras (al menos tres).

Algo muy atractivo es el concepto de dualidad: ¿qué poliedro resulta al unir los centros de gravedad de las caras de un poliedro dado? A partir de cualquier pieza siempre se generan infinitas figuras derivadas de la configuración inicial.

## UN POLIEDRO SEGÚN GRÜNBAUM

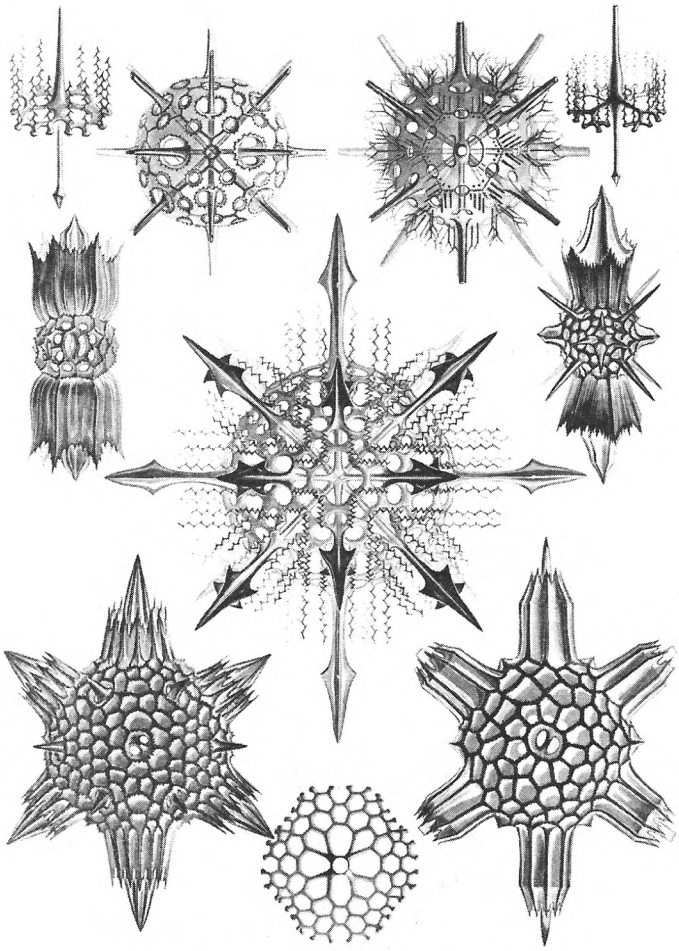
Hay una definición de poliedro debida a Branko Grünbaum que se considera muy importante, ya que abarca una clase muy amplia de estas figuras. Ésta afirma que un poliedro $P$ es una familia de polígonos (llamadas caras de $P$) con las siguientes tres propiedades:

1. Cada arista de una de las caras sólo es arista de otra cara.
2. Para cada par de aristas $A$ y $A'$ de $P$ existe una cadena $A = A_0, C_1, A_1, C_2, A_2 \ldots, C_n, A_n = A'$ de aristas ($A_i$) y caras ($C_i$) de $P$ en la cual cada $C_i$ es incidente con $A_{i-1}$ y con $A_i$.
3. Cualquier conjunto compacto del espacio (conjunto acotado que cabe dentro de una esfera y contiene todos sus puntos frontera) sólo puede cortar un número finito de caras de $P$.

Naturalmente, la clase privilegiada y muy peculiar de los poliedros convexos puede especificarse muy bien y muy simplemente como un conjunto acotado del espacio expresable como intersección de un número finito de semiespacios cerrados..., pero estos poliedros convexos sólo son la punta visible de un iceberg enorme. La definición de Grümbaum abarca una clase muy amplia de poliedros.

## Poliedros en la naturaleza

Las formas naturales, botánicas, zoológicas o geológicas, son siempre sorprendentes y a menudo son también muy complejas e irregulares. Por este motivo llaman especialmente la atención las formas simples o con determinada simetría. Las formas poliédricas naturales no son especialmente abundantes, pero las hay. Así, por ejemplo, en el mundo de los organismos existen formas de tipo esférico con subestructuras poliedrales. Los radiolarios descritos por Ernst Haeckel, compañero de aventuras de Charles Darwin, son criaturas unicelulares cuyas formas se aproximan a las de los poliedros regulares y estrellados.



*Radiolarios dibujados por Haeckel.*

## SIMETRÍA, POLIEDROS Y POMPAS DE JABÓN

Un hecho muy relevante que justifica en gran medida la supuesta belleza de determinados poliedros es su simetría. Como en toda figura espacial se puede determinar para cada caso cuáles son los movimientos rígidos o isometrías que actuando sobre la figura la dejan «igual» en apariencia. Piénsese en un cubo: hay multitud de planos de simetría pasando por su centro y hay muchos giros alrededor de determinados ejes que dejan la forma cúbica invariante. En relación a esta simetría pueden hacerse interesantes experiencias geométricas, por ejemplo, con una parte del poliedro situada en medio de una configuración de espejos y entonces observar todo el poliedro. Si dispone de poliedros regulares con sólo aristas y vértices y los sumerge en agua con jabón (50% de agua, 40% de jabón y 10% de glicerina), al sacar la estructura de esta solución jabonosa podrá observar las maravillosas películas de jabón visualizando planos de simetría.

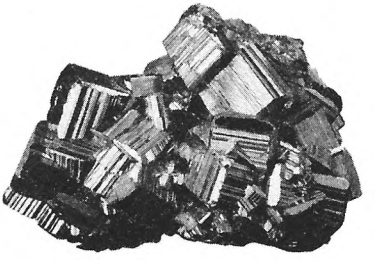
Ciertos peces, corales, etc., presentan formas cercanas a las de las cúpulas o los poliedros estrellados. También animales como las abejas, al construir sus colmenas, recurren a los prismas hexagonales compactificados.

Diversos tipos de semillas presentan igualmente formas geométricas poliédricas y hay frutos que crecen agrupados con una distribución muy poliedral. Piénsese, por ejemplo, en las piñas de los pinos.

Hoy sabemos que multitud de virus son estructuras con proteínas de estructura poliédrica (los de la polio fueron los primeros en los que se observó esta geometría). La estructura básica del virus VIH es un icosaedro regular.

Diversos compuestos orgánicos como el $C_{60}$ («fullereno») presentan 60 átomos de carbono distribuidos como en una pelota de fútbol (icosaedro truncado) y el $C_8H_8$ está ligado al cubo.

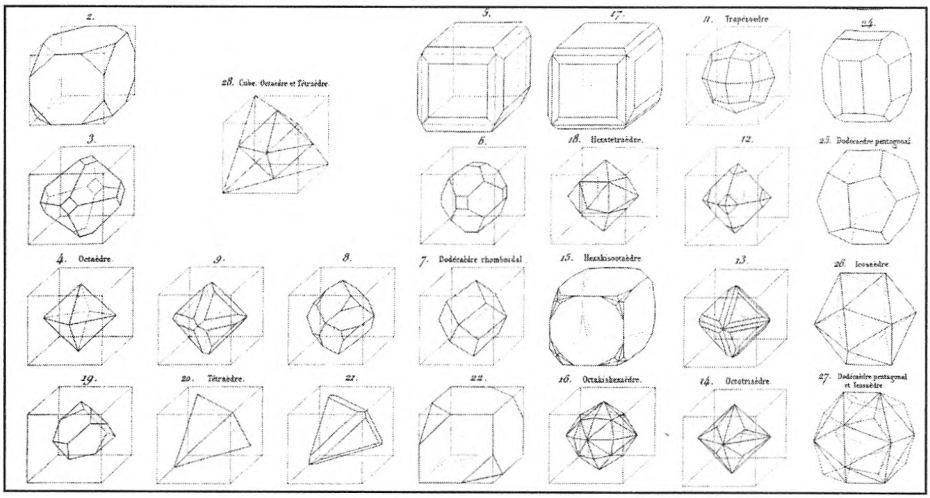
En el mundo mineral son frecuentes las moléculas poliédricas, pero es en el crecimiento de cristales donde la realidad poliédrica macroscópica resulta más espectacular.



*Cristales de pirita.*

El 98,5% del peso de la corteza de la Tierra se encuentra constituido por ocho elementos geoquímicos, los cuales se combinan para dar lugar a unos 3.000 compuestos de materia mineral. Si los minerales presentan una estructura atómica desordenada, se les llama amorfos, pero si poseen una estructuración geométrica atómica entonces son llamados cristalinos. Un ópalo es amorfo, una pirita es cristalina. Y dentro de los minerales cristalinos se halla la clase especial de los cristales, los cuales presentan igualmente esta estructura atómico-modular ordenada como una forma externa geométrica. Estos cristales son poco abundantes pues precisan no sólo de una composición peculiar sino también de espacio para desarrollar sus caras y de tiempo para ir creciendo como resultado de determinados procesos (precipitación en una disolución, enfriamiento de magma, sublimación de gas, etc.).

Cuando los átomos presentan una estructura geométrica básica dispuesta regularmente en el espacio configuran la denominada celda unidad, la cual da lugar a la red cristalina por repetición tridimensional. El análisis geométrico de estas redes cristalinas da pie a la conocida clasificación actual de los sistemas cristalinos. Cada celda unidad es un prisma con unas medidas (a, b, c) y unos ángulos ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) característicos (denominados constantes cristalográficas). Siete ejemplos paradigmáticos de estos sistemas de cristalización son la pirita, la vesuvianita, la siderita, el berilio, la barita, la tiza y la aximita.




*Fragmento de una tabla cristalográfica del siglo XIX.*

En cada uno de los siete sistemas cristalinos pueden encontrarse varias formas poliédricas que tienen en común, necesariamente, los mismos elementos de simetría. Así, en el sistema cúbico no sólo hay cubos, sino, por ejemplo, octaedros, pues éstos

tienen los mismos ejes y planos de simetría que un cubo. En la siguiente tabla se listan algunos ejemplos de formas poliédricas de minerales presentes en los diferentes grupos cristalinos.

| Sistema | Ejemplos de formas poliédricas |
|---|---|
| Cúbico | Cubos, octaedros, rombododecaedros, icositetraedros |
| Tetragonal | Tetraedros, prismas, pirámides |
| Trigonal | Romboedros, pirámides trigonales y pinocoides |
| Hexagonal | Prismas hexagonales, trapezoedros hexagonales |
| Rómbico | Paralelepípedos y pinacoides |
| Monoclínico | Paralelepípedos |
| Triclínico | Paralelepípedos |

Entre los minerales geométricamente más espectaculares en su apariencia externa cabe citar: el cuarzo con formas prismáticas acabadas en punta; la pirita con formas de dodecaedros; el azufre con formas de prismas rómbicos; el lapislázuli con formas de rombododecaedros; la galena, la sal gema, el platino y los diamantes con formas cúbicas; la fluorita, la magnetita, el oro y el cobre con formas de octaedros; y el cinabrio, la calcita y el bismuto con formas de romboedros.

En el famoso *Atlas der Krystallformen* de 1912 escrito por Victor Goldschmidt se llegan a describir dieciséis formas geométricas correspondientes al oro. En algunos casos, la joyería actúa geométricamente sobre formas aproximadas poliédricas realzando sus regularidades (como veremos más adelante, es el caso del tallado de diamantes).

La teoría matemática de la simetría (y de su importancia en la naturaleza) surgió en el siglo XIX precisamente por el interés de los geólogos por estudiar la cristalografía y con ella la clasificación geométrica de los sistemas cristalinos. Fue entonces cuando surgió la sorprendente restricción cristalográfica que muestra cómo en los cristales la simetría rotacional sólo puede ser generada por giros de 180°, 120°, 90° o 60°, pero, por ejemplo, no aparece el giro de 72° ni tampoco otros valores. Por esto cuando en 1984 se descubrieron los cuasicristales, que, en ciertos puntos presentan simetrías pentagonales, causaron gran sorpresa.

La cristalografía estudia el crecimiento, la forma y la geometría de los cristales y atiende tanto a conocimientos químicos (que permiten ver las relaciones entre composición química y distribuciones atómicas) como a experimentos físicos (difracción de los rayos X) que ponen en evidencia las disposiciones atómico-geométricas de los cristales. Los cristalógrafos son, pues, grandes amantes de los poliedros.

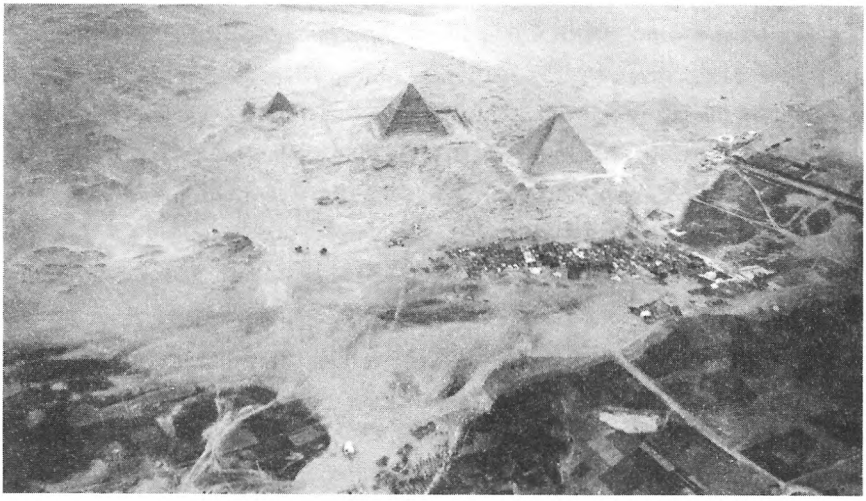
# Una breve historia de los poliedros

La existencia singular de formas poliédricas en la naturaleza (cubos, rombododecaedros, prismas, pirámides, etc.) permite decir que los poliedros han acompañado a la historia del mundo. Pero lo que nos interesa aquí es intentar esbozar las etapas más creativas de la humanidad en sus invenciones poliédricas, así como las grandes contribuciones de los matemáticos en el descubrimiento de los secretos más íntimos de estas atractivas criaturas.

## Prehistoria poliédrica

Los trabajos arqueológicos han permitido descubrir en Escocia una serie muy numerosa de piedras esféricas esculpidas. Se les atribuye una antigüedad de 4.000 años y existe un gran debate sobre su posible uso y si realmente eran representaciones burdas de poliedros regulares.

Formas poliédricas en joyas y objetos milenarios aparecen en África, Mesopotamia y Egipto. Y es en el esplendor de las culturas faraónicas donde surgen las numerosas y admiradas pirámides de Egipto. Si bien la mítica Gran Pirámide de Gizeh es uno de los monumentos antiguos más estudiados, para el mundo matemático lo que se ha llegado a calificar como «la gran pirámide de Egipto» es el cálculo del volumen de la pirámide truncada que aparece en el llamado *Papiro de Moscú* (1890 a.C.).



*Las pirámides egipcias de Gizeh, fotografiadas desde un globo aerostático a principios del siglo xx por Eduard Spelterini.*

Por otra parte, algunos autores apuntan que el tetraedro, el octaedro y el cubo eran poliedros ya conocidos en Babilonia y Egipto.

En el ámbito lúdico, los poliedros pronto fueron figuras consideradas ideales para producir dados, habiéndose localizado un dado etrusco en forma de dodecaedro datado en el año 1000 a.C.

## Poliedros grecorromanos

Pitágoras de Samos (hacia el 582 a.C.-507 a.C.) inició lo que se ha denominado una cosmogonía poliédrica, relacionando los poliedros regulares con las distribuciones cósmicas del universo. Del pitagorismo nació la visión mística de identificar los poliedros con los cuatro elementos esenciales de la naturaleza: el tetraedro con el fuego, el cubo con la tierra, el octaedro con el aire, el icosaedro con el agua..., quedando el dodecaedro identificado con la esfera celeste. En el espíritu pitagórico, en el que todo es número, en el que los números recogen la esencia de todo lo existente, no es de extrañar que las singulares regularidades de los poliedros y las relaciones numéricas escondidas en ellos suscitaran gran interés. Recuérdese, por ejemplo, que el propio símbolo de la secta pitagórica fue el pentagrama o estrella de cinco puntas asociada al pentágono regular. No obstante, si bien parece claro que Pitágoras conocía tres poliedros regulares, hay razones para dudar de si realmente conoció los otros dos.

La primera teoría de los cinco sólidos regulares se debe al gran matemático griego Teeteto (415 a.C.-369 a.C.). Sus principales contribuciones se centraron en los números irracionales, y fueron recogidas en los *Elementos* de Euclides en relación a los cinco poliedros regulares. Platón lo coloca como interlocutor principal de Sócrates en dos de sus diálogos, el *Sofista* y el llamado, precisamente, *Teeteto*.

Al igual que Platón, Teeteto estudió bajo la dirección del matemático Teodoro de Cirene. Este último desarrolló la teoría de las cantidades inconmensurables y Teeteto continuó sus estudios, clasificando varias formas de números irracionales como expresiones de raíces cuadradas. Pero la popularización de estos poliedros vino de la mano de Platón al incluirlos en su famoso diálogo *Timeo* y al hacer de su Academia un lugar de culto geométrico.

En el *Timeo,* Platón menciona la asociación (supuestamente de origen pitagórico) entre los poliedros y los cuatro elementos naturales, elevando el dodecaedro a símbolo místico del cosmos. A la par, Platón asocia poliedros con belleza («Hace falta explicar qué propiedades deberían tener los cuerpos más bellos...»), pero no se trata de una belleza ligada a las formas geométricas de estos cuerpos, sino a las

## PLATÓN (427/428 A.C.-347 A.C.)

Eminente filósofo griego, discípulo de Sócrates y maestro de Aristóteles, Platón ha ejercido una enorme influencia en el pensamiento filosófico occidental. Su Academia fue todo un referente y sus obras, como *El banquete*, *La República*, *Fedro*, *Timeo* o *Teeteto*, introdujeron importantes concepciones metafísicas, políticas, filosóficas, científicas, etc.

Hubiese sido más razonable citar a este pensador con su verdadero nombre, Aristocles Podros, pues el mote «Platón» significa «el de la espalda ancha».

*Platón rodeado de sus discípulos en un mosaico hallado en Pompeya y conservado en el Museo Arqueológico Nacional de Nápoles.*

propiedades e ideas matemáticas relacionadas con estos sólidos. Es la regularidad geométrica como metáfora del orden del universo: ciencia y belleza en coalición.

Platón combina sabiamente ideas de tipo filosófico con ideas estrictamente matemáticas. Sirvan de muestra estas dos citas: «Y por lo que respecta a las relaciones numéricas que se hallan en sus números, en sus movimientos y en sus demás propiedades, hay que considerar siempre que Dios [...] las ha realizado en todo de manera exacta, y así ha armonizado matemáticamente los elementos»; «... ciertamente, debemos explicar cuáles serían los cuatro cuerpos más perfectos, que, aunque, disímiles entre sí, podrían nacer unos de otros cuando se desintegran. En efecto, si lo logramos, tendremos la verdad acerca del origen de la tierra y el fuego y de sus medios proporcionales. Pues no coincidiremos con nadie en que hay cuerpos visibles más bellos que éstos, de los que cada uno representa un género particular. Debemos, entonces, esforzarnos por componer estos cuatro géneros de cuerpos de extraordinaria belleza y decir que hemos captado su naturaleza suficientemente...». El filósofo define poliedro regular del siguiente modo: «... si tiene la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que está inscrito». Por todo ello no es de extrañar que la denominación *sólidos platónicos* acabara imponiéndose.

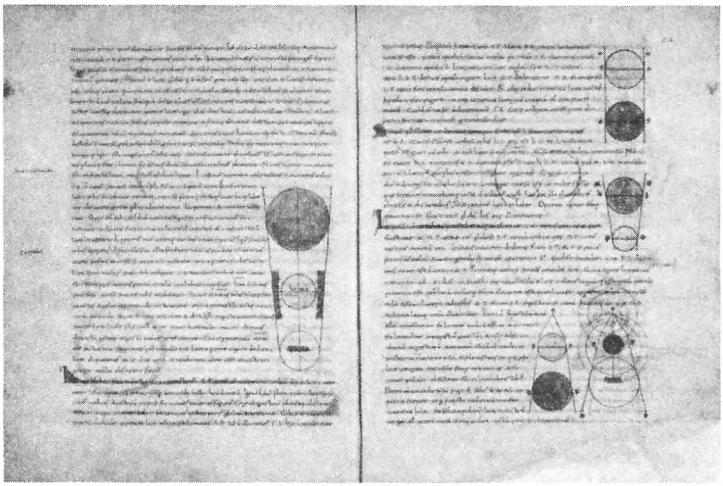
### Un apartado clave del *Timeo* de Platón

Reproducimos a continuación un largo pasaje del *Timeo*, puesto que se trata de un texto clave para comprender la aproximación platónica a los poliedros.

«Los principios de todo lo que ha tenido nacimiento son la materia como objeto y la idea como razón de la forma. Los cuerpos engendrados por estos principios son la tierra, el agua, el aire y el fuego, cuya generación es la siguiente.

»Todo cuerpo se compone de superficies y toda superficie, de triángulos. Estos triángulos o son rectángulos isósceles, es decir, la mitad del cuadrado, o rectángulos de lados desiguales, en los que el mayor ángulo es triple que el más pequeño, el más pequeño es la tercera parte del recto, y el ángulo medio, doble del más pequeño, puesto que es igual a los dos tercios del ángulo recto; el mayor ángulo, que es el ángulo recto, tiene una tercera parte más que el ángulo pequeño. Esta especie de triángulo es la mitad del triángulo equilátero, dividido en dos partes iguales por una perpendicular tirada desde la cúspide a la base. Estos dos triángulos son también rectángulos; pero en el primero los lados entre los que se encuentra comprendido el ángulo recto son iguales y sólo ellos lo son; y en el segundo, los tres lados son desiguales. Llamemos al último escaleno y al primero, semitetrágono. El semitetrágono es el principio de composición de la tierra; porque de él procede el cuadrado, compuesto a su vez de cuatro semitetrágonos; y del cuadrado nace el cubo, el más estable y el menos móvil de los cuerpos, que tiene seis lados y ocho ángulos. Por esta razón la tierra es el más pesado de los cuerpos y el más difícil de mover, sin que pueda convertirse en otros elementos, porque sus triángulos son de una especie muy diferente de la de los demás. La tierra es, en efecto, el único cuerpo que se compone de semitetrágonos; los otros cuerpos, el fuego, el aire y el agua, se forman del elemento escaleno; porque reuniendo seis triángulos escalenos, se forma el triángulo equilátero de que se compone la pirámide de cuatro lados y cuatro ángulos iguales, que constituye la naturaleza del fuego, el más sutil y el móvil de los cuerpos. Después de esta pirámide viene el octaedro, que tiene ocho lados y seis ángulos, y que es el elemento del aire; en fin, el icosaedro, que tiene veinte lados y doce ángulos y que es el más espeso y más tosco de estos tres elementos, es el del agua. Estos tres cuerpos, como están compuestos del mismo elemento, se trasforman unos en otros. En cuanto al dodecaedro, él es la imagen del mundo, porque es la forma que más se aproxima a la esfera. El fuego, por su gran sutileza, lo penetra todo sin excepción; el aire, todo excepto el fuego; en fin, el agua penetra la tierra de manera que todo lo llena y no deja ningún vacío. Todos estos cuerpos son arrastrados en el movimiento universal; y estrechados y empujados los unos por los otros, experimentan las alternativas continuas de la generación y de la corrupción.

»Éstos son los elementos de que se ha valido Dios para crear este mundo, que es tangible a causa de la tierra y visible a causa del fuego; ellos son los dos extremos; y



*Manuscrito medieval de la traducción al latín realizada por Calcidio del* Timeo *de Platón.*

ha empleado el agua y el aire para unirlos por medio de un lazo poderoso, que es la proporción, la cual se mantiene por su propia fuerza y el mundo está sometido a ella. Para ligar superficies un solo término medio hubiera bastado, pero han sido precisos dos para los sólidos. Dios ha dispuesto los dos medios y los dos extremos de tal manera que el fuego es al aire, como el aire es al agua y el agua a la tierra; o bien, reduciendo la progresión, el fuego es al agua, como el aire a la tierra; o aun, invirtiendo el orden de los términos, la tierra es al agua como el agua es al aire y el aire al fuego; y reduciéndolos, la tierra es al aire como el agua es al fuego; y como todos estos elementos son iguales en fuerza, es ley de sus relaciones el ser siempre iguales. Y así este mundo es uno a causa del lazo divino de la proporción. Cada uno de estos cuatro elementos comprende muchas especies. El fuego es llama, luz, rayo brillante, a causa de la desigualdad de los triángulos que hay en cada uno de estos objetos. De igual modo hay aire puro y seco, húmedo y nebuloso; agua fluida o compacta, como la nieve, la escarcha, el granizo, el hielo. Hay fluido húmedo, como el aceite y la miel; otro denso, como la pez y la cera; o sólidos fusibles, como el oro, la plata, el hierro, el estaño, el acero; o desmenuzables, como el azufre, el betún, el nitro, las sales, el alumbre y las piedras que entran también en el mismo género.»

### La gran obra de Euclides

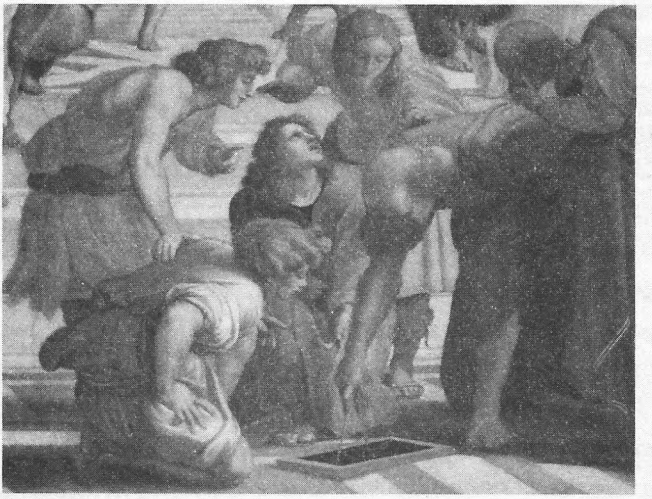
La gran obra euclidiana no solo constituyó una síntesis completa del conocimiento geométrico alcanzado hasta aquel momento, sino que ofrece una magnífica presentación ordenada del saber geométrico a través de una secuencia lógica coherente, en un

alarde de rigor deductivo. Euclides puede seguir las ideas pitagóricas, los resultados de Eudoxo, etc., pero, además, del platonismo extrae la idea del valor de la abstracción y de Aristóteles hereda el rigor del método deductivo. A lo largo de trece libros, Euclides parte de nociones comunes o axiomas sobre hechos evidentes que no precisan justificación, luego establece cinco postulados geométricos que dan las reglas del juego y a partir de ahí el autor demuestra, paso a paso, 465 proposiciones o teoremas.

En los *Elementos*, Euclides recoge las aportaciones de Teeteto, tanto en el Libro IV como en el X, y también recopila de Teeteto las propiedades métricas de los poliedros

## EUCLIDES DE ALEJANDRÍA (CA. 325 A.C.-CA. 265 A.C.)

De Euclides no quedaron datos de su vida (ni tan sólo de su lugar y año de nacimiento), siendo lo único que se puede afirmar con seguridad que ejerció de profesor en la entonces floreciente Alejandría. Se formó con seguidores de la escuela platónica y dejó un gran legado bibliográfico (en parte perdido) sobre una docena de temas muy diversos: geometría, óptica, música, astronomía, cónicas, mecánica, etc. Por supuesto, los *Elementos* fueron el primer gran libro de texto de la historia de las matemáticas y llevaron a que el nombre de su autor se identifique con la propia disciplina geométrica (*geometría euclidea*). La influencia de los *Elementos* en la enseñanza de la geometría ha sido enorme durante más de dos milenios, lo cual ha posibilitado en todas las épocas disponer de numerosas traducciones (primero al árabe y luego al latín). Se calcula que después de la Biblia los *Elementos* es el libro más editado y distribuido.



*Euclides representado por Rafael.*

en el Libro XI. En el Libro XII discute los volúmenes de prismas y pirámides, y en el XIII presenta todo lo relativo a los poliedros regulares. Quizás Aristeo había mejorado previamente los resultados de Teeteto. Se ha llegado a afirmar que de alguna manera todo el texto euclidiano se vertebra para poder culminar precisamente con esta descripción poliédrica. Prodo exclama: «Euclides era platónico..., mejoró los trabajos de Teeteto..., se propuso como objetivo final del conjunto de sus *Elementos* la construcción de los cinco poliedros regulares».

Reproducimos a continuación las 28 definiciones del Libro XI:

Definición 1. Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.

Definición 2. Y el extremo de un sólido es una superficie.

Definición 3. Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano.

Definición 4. Un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas dibujadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la intersección común a los dos planos forman ángulos rectos con el plano que queda.

Definición 5. Cuando desde el extremo de una recta elevado sobre un plano se dibuja una perpendicular al plano y se traza otra recta desde el punto que va hasta el extremo que está en el plano de la primera recta, el ángulo comprendido por la recta dibujada y la que está sobre el plano es la inclinación de la recta con respecto al plano.

Definición 6. La inclinación de un plano respecto a un plano es el ángulo comprendido por las rectas dibujadas a un mismo punto formando ángulos rectos con la sección común en cada uno de los planos.

Definición 7. Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro plano se inclina sobre otro, cuando los ángulos de inclinación son iguales entre sí.

Definición 8. Planos paralelos son los que no concurren.

Definición 9. Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número.

Definición 10. Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño.

Definición 11. Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: un ángulo sólido es el que está comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.

Definición 12. Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.

Definición 13. Un prisma es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás planos son paralelogramos.

Definición 14. Cuando, estando fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición inicial, la figura comprendida es una esfera.

Definición 15. Y el eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la que gira el semicírculo.

Definición 16. Y el centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo.

Definición 17. Y diámetro de la esfera es cualquier recta dibujada a través del centro y limitada en las dos direcciones por la superficie de la esfera.

Definición 18. Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un cono. Y si la recta que permanece fija es igual a la que queda del ángulo recto, el cono será rectángulo, y si es menor, obtusángulo y si es mayor, acutángulo.

Definición 19. Y el eje del cono es la recta que permanece fija en torno a la que gira el triángulo.

Definición 20. Y la base es el círculo que describe la recta que gira.

Definición 21. Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un cilindro.

Definición 22. Y el eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.

Definición 23. Y las bases son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giran.

Definición 24. Conos y cilindros semejantes son aquellos en los que ejes y diámetros de las bases son proporcionales.

Definición 25. Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.

Definición 26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.

Definición 27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.

Definición 28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida per doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.

Por su parte, el Libro XIII consta de 18 proposiciones. Tras analizar diversas cuestiones clave sobre polígonos, a partir de la proposición 13 Euclides se centra exclusivamente en lo que han de ser las proposiciones culminantes sobre los poliedros. A continuación mostramos las últimas proposiciones de los *Elementos*:

Proposición 13. Construir una pirámide inscrita en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

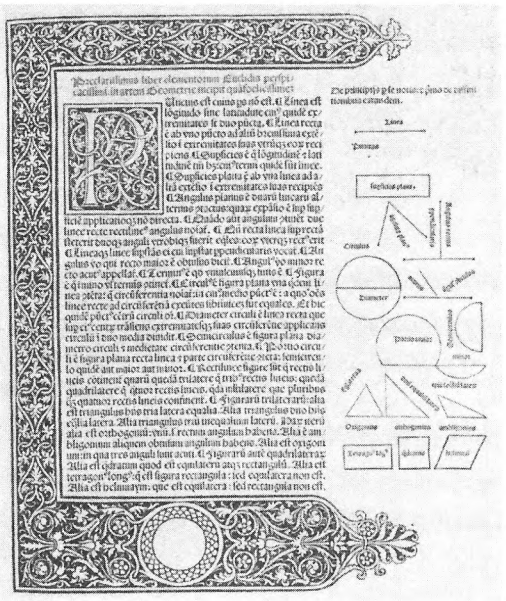
Proposición 14. Construir un octaedro inscrito en una esfera como en la proposición anterior, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro.

Proposición 15. Construir un cubo inscrito en una esfera como en la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo.

Proposición 16. Construir un icosaedro inscrito en una esfera, como en las figuras anteriores, y demostrar que el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada menor.

Proposición 17. Construir un dodecaedro inscrito en una esfera como en las figuras anteriores, y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.

Proposición 18. Colocar los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.

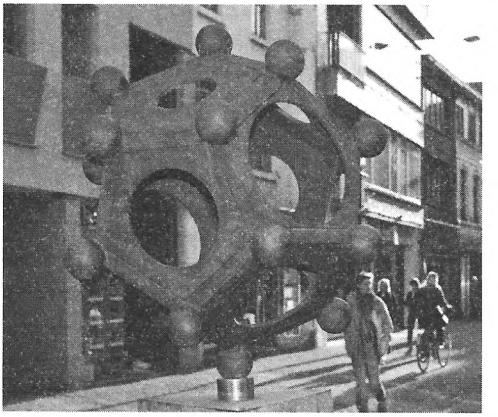


*Página perteneciente a la edición veneciana de 1482 de los* Elementos *de Euclides.*

Así pues, elevados los poliedros regulares por Euclides al altar de grandes figuras geométricas de referencia, el interés de los matemáticos griegos por estos cuerpos se acrecentó. Surgió así la descripción de los trece poliedros semirregulares dada por Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.) y el posterior estudio de los poliedros arquimedianos hecho por Pappus (320 d.C.).

Al margen de la tradición griega y de forma independiente, también la floreciente cultura china se interesó por los poliedros. Volúmenes de poliedros elementales fueron dados en el texto matemático *Chiu-Chang Suan-Shu* (100 d.C.) y Liu Hiu estudió volúmenes poliédricos (263 d.C.).

Entre los años 200 y 500 los romanos fabricaron una enorme cantidad de dodecaedros de bronce (12 caras) con agujeros circulares de distintos tamaños que tienen círculos alrededor de los agujeros y adornos esféricos en los vértices. Se han encontrado ejemplares en lugares muy diversos (Gran Bretaña, Alemania, Francia, Suiza, Hungría...).

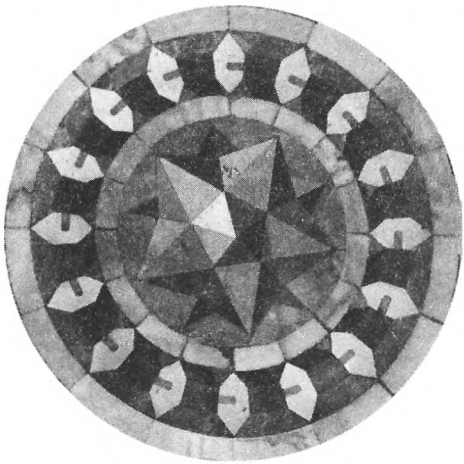


*Escultura urbana que reproduce un dodecaedro romano en la ciudad belga de Tongeren.*

Queda el lector invitado a especular sobre cuál podía ser el uso de estas bonitas piezas. Nadie hasta hoy ha logrado aclarar este misterio: ¿eran esculturas de adorno?, ¿soportes de cirios?, ¿un juguete infantil?, ¿un florero para ramilletes diversos?... También se han encontrado piezas similares en forma de icosaedro. Desafortunadamente, en la etapa medieval europea hubo muy poco interés por el conocimiento geométrico, destacando sólo a nivel artístico los poliedros semirregulares en la catedral de Aachen (1170). Sin embargo, los estudios medievales árabes sobre polígonos y poliedros y las aproximaciones con poliedros a formas complejas, sí que tuvieron esplendor. En el siglo x, Abu'l Wefa se interesó por los poliedros esféricos. Y los árabes hicieron una gran labor de traducción y difusión tanto de la cultura griega como de las orientales.

## Poliedros renacentistas

Paolo Uccello (1397-1475), pintor de Florencia, se interesó por la nueva perspectiva y los puntos de fuga, dibujando aproximaciones poliédricas de cuerpos. La siguiente figura, que incluye un poliedro estrellado y corresponde a una composición hecha en mármol para la Basílica de San Marcos de Venecia, se ha atribuido a Uccello, dado que este tipo de composiciones fueron una de sus especialidades. Algunos autores consideran también la posibilidad de que la obra fuese muy posterior.



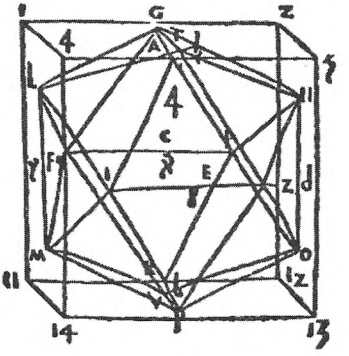
*Poliedro estrellado veneciano.*

La diferencia geométrica esencial entre el arte medieval (o de periodos anteriores) y el arte del Renacimiento es la introducción de la tercera dimensión en pintura. El deseo de aquella fascinante época fue romper con todo el misticismo medieval y el sentido trágico-religioso para contemplar el mundo con una mirada renovada, arropada por el desarrollo de la ciencia y el humanismo. El mundo clásico griego, tanto en sus manifestaciones artísticas como filosóficas, volvió a ser de nuevo paradigma de referencia. Y todo ello llevó en el ámbito de la pintura al ambicioso objetivo del realismo, para representar la naturaleza y las personas mediante técnicas que permitieran observar el carácter tridimensional de la realidad. En este punto, la tradición geométrica griega no aportaba solución alguna. Ninguno de los desarrollos de la geometría de Euclides daba pistas sobre cómo desarrollar una nueva geometría que diese un método riguroso para la representación de 3D en 2D. Curiosamente, nadie del mundo matemático se planteó el tema y, por tanto, las soluciones tuvieron que venir del propio oficio de pintar, buscando un sistema «óptico» de representación.

Unas primeras aportaciones intuitivas se encuentran ya en las obras de Duccio (1255-1319), Giotto (1276-1337) y Ambrogio Lorenzetti (ca. 1290-1348). Pero el fundador de una nueva teoría de la perspectiva fue el arquitecto y artista Brunelleschi (1377-1446), el genial joven constructor de la cúpula de Santa Maria del Fiore en Florencia.

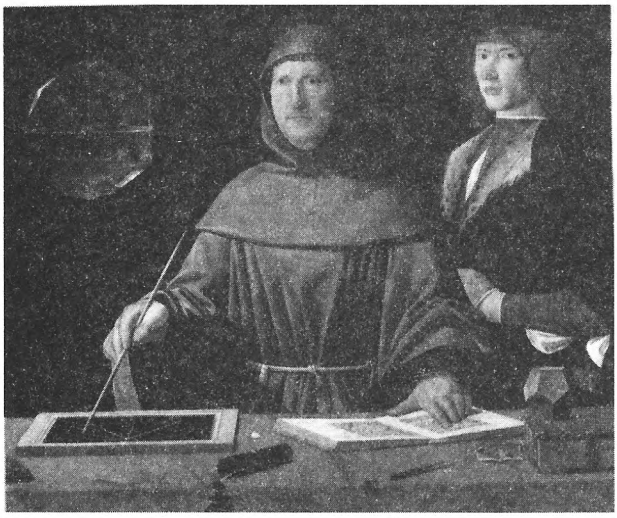
Brunelleschi entendió que el cuadro (vertical) debía pensarse como un cristal-ventana en el que plasmar lo que el ojo del artista observa al otro lado: todas las rectas paralelas en la realidad deben confluir en el cuadro en un mismo punto, el punto de fuga (pudiendo coexistir en el cuadro diversos puntos de fuga). Los puntos en el infinito pasan en la perspectiva de Brunelleschi a ser puntos de fuga y por ello el observador del cuadro experimenta la misma visión óptica que tiene cuando contempla la realidad. El primer asalto a la tridimensionalidad estaba dado.

Piero della Francesca (ca. 1410-1492) fue un gran matemático y pintor renacentista que publicó el influyente tratado *De Prospectiva Pingendi*, que estaba ilustrado con algunos poliedros toroidales (rosquillas facetadas) y cúpulas poliédricas. Este genial artista redescubrió diversos tipos de poliedros semirregulares o de Arquímedes y supo aplicar las novedosas técnicas de la perspectiva tomando los poliedros como modelos para dibujar. Pero su afán matemático también le permitió descubrir a través de sus imágenes nuevas relaciones entre poliedros, en especial las inscripciones de unos dentro de otros.




*Dibujo de Piero della Francesca dedicado a un icosaedro inscrito en un cubo.*

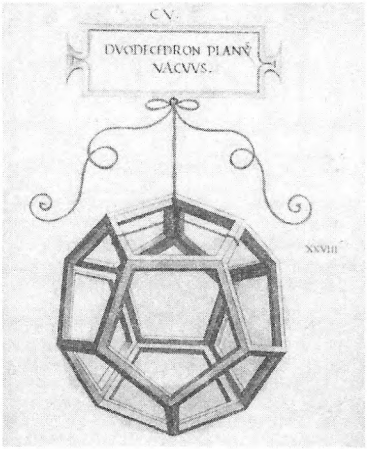
Luca Pacioli (1445-1517) estudió la representación de poliedros, cubooctaedros (truncados) y poliedros estrellados. En *De Divina Proportione* se inspiró en manuscritos no publicados de Piero della Francesca e incluyó dibujos de Leonardo da Vinci sobre modelos de aristas de poliedros. También describió poliedros en su obra *De Architectura*.



*Pacioli en un cuadro de Jacopo de Barbari de 1495.*

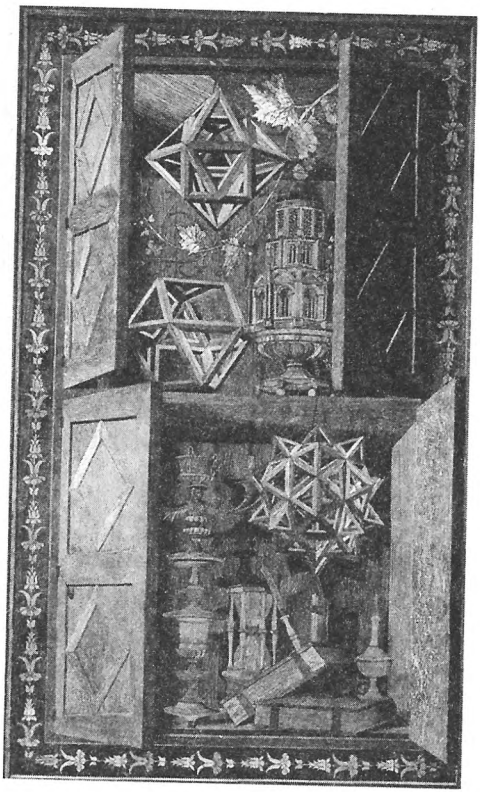
En este famoso cuadro aparece el franciscano Pacioli junto a otro personaje desconocido (¿era el propio pintor, que no quiso perder la oportunidad de salir junto a Pacioli?, ¿era Durero?...). En esta obra puede apreciarse no sólo un dodecaedro, sino un poliedro semirregular transparente: Pacioli estudió las secciones de poliedros con modelos de cristal parcialmente llenos de agua.

Leonardo da Vinci (1452-1519) fue el primero en representar poliedros con aristas dejando ver aristas traseras. Leonardo también representó agregaciones de poliedros y en sus famosos cuadernos dejó bellas ilustraciones de propiedades poliédricas.




*Uno de los dibujos que Leonardo da Vinci realizó para Pacioli.*

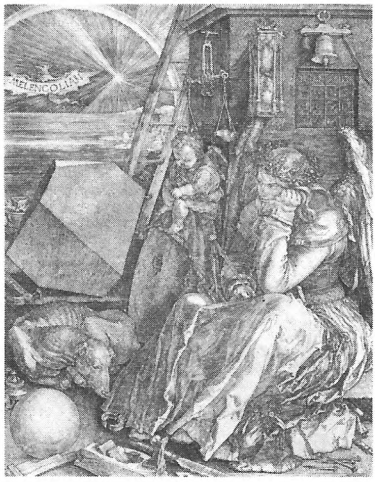
Hacia fines del siglo XV aparecieron algunas composiciones de marquetería en las cuales se representaron complicados poliedros. Las obras de Fra Giovanni da Verona, realizadas a principios del siglo XVI, son las más espectaculares tal y como puede apreciarse en la ilustración adjunta.



*Obra del multifacético artista y arquitecto italiano Fra Giovanni da Verona que rinde homenaje a la perspectiva pero también a los poliedros.*

Daniele Barbaro (1513-1570) contribuyó enormemente al conocimiento geométrico-artístico de las nuevas técnicas de representación a través de su obra de 1568 *La práctica de la perspectiva*, y en la tradición de Piero della Francesca recurrió a los poliedros para enseñar las técnicas de representación, aunque no pudo superar en claridad los dibujos de Leonardo.

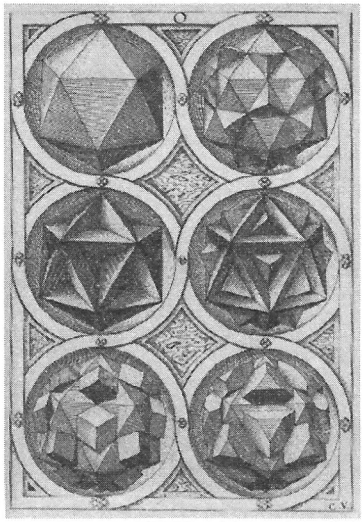
Durero (1471-1528) ilustró en 1525 poliedros como si sus caras fueran transparentes, usó métodos de perspectiva y presentó la primicia de los desarrollos planos. Una de sus obras más famosas es la *Melancolía I*, en la que representa diversos objetos matemáticos, incluyendo un fascinante y misterioso poliedro no regular.



Melancolía I *de Durero.*

Johann Neudörfer (1497-1563) fijó la caligrafía alemana y se interesó por el cubo y el dodecaedro (como puede apreciarse en un cuadro de Nicolas Neufchâtel de 1561), realizando cálculos sobre poliedros.

Wenzel Jamnitzer (1508-1585) representó en su *Perspectiva Corporum Regularium* (1557) bellísimas formas poliédricas, siendo a la par un gran artista y un eminente descubridor de nuevas formas poliédricas. Jost Amman (1539-1591) realizó numerosos grabados basados en los dibujos de Jamnitzer.



*Dibujos de Wenzel Jamnitzer.*

Lorenz Stoer publicó *Geometria et Perspectiva* en 1567, donde aplicó la técnica de la perspectiva a la representación de poliedros, y Hans Leucker editó *Perspectiva* en 1622, representando poliedros en relación a instrumentos. En esta época diversos escultores, como Lorenz Zick (1594-1666), y artesanos mostraron interés por este tema y los instrumentos correspondientes. Independientemente se desarrolló una «artesanía poliédrica» en China.

El gran matemático y astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) se interesó tanto por las leyes físicas relativas al movimiento de los planetas como por hacer un estudio sistemático de los poliedros, descubriendo con ello dos poliedros estrellados, los antiprismas, y redescubriendo los poliedros de Arquímedes. Curiosamente, Kepler unió sus aficiones astronómico-poliédricas y creó un curioso modelo relacionando la cosmología con los poliedro regulares.

En el grupo 1 figuran estrellas keplerianas, otros poliedros y la ilustración platónica de la asociación de los poliedros regulares con los cuatro elementos y el universo. En el grupo 2 se representan cuerpos arquimedianos y la figura 3 corresponde al fantástico e imaginativo modelo cosmológico de Kepler. El siguiente texto del catedrático de ma-

Fig. 1

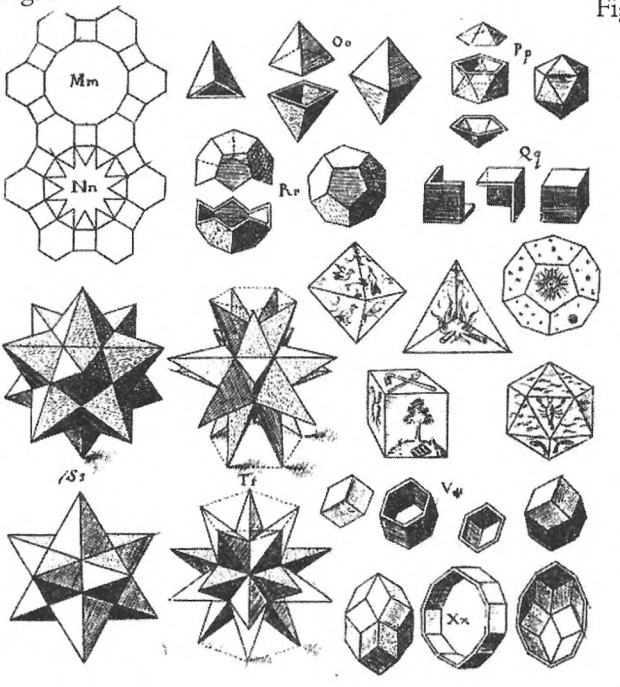



Fig. 2

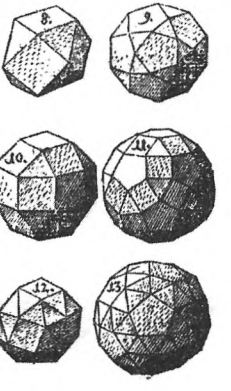
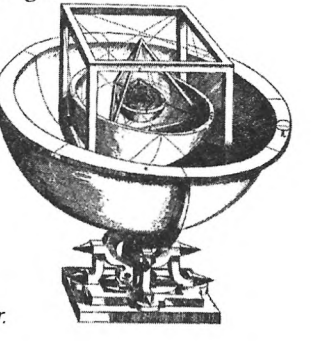


Fig. 3



*En las ilustraciones, tres conjuntos de dibujos pertenecientes a las obras del matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler.*

temáticas P.M. González describe muy bien las ideas de Kepler relacionando universo y geometría: «Kepler fue de tal modo seducido por la cosmogonía pitagórico-platónica que elaboró una Cosmología basada en los cinco sólidos regulares, en la creencia de que éstos serían la clave utilizada por el creador para la construcción de la estructura del Universo. En la época de Kepler sólo se conocían seis planetas, Mercurio, Venus, la Tierra, Marte. Júpiter y Saturno. Mientras que hay infinitos polígonos regulares sólo existen cinco poliedros regulares. No podía ser una casualidad, la mano del *Dios geómetra* no improvisa. Según Koestler, Kepler pensó que los dos números estaban vinculados: "*hay sólo seis planetas porque hay sólo cinco poliedros regulares*" y da una visión del sistema solar que consiste en sólidos platónicos inscritos, encajados o anidados unos dentro de otros, relacionando los radios de las esferas concéntricas circunscritas que intervienen con las órbitas de los planetas. Al creer que había reconocido el esqueleto invisible del Universo en esas estructuras perfectas que sostenían las esferas de los seis planetas, llamó a su revelación *El Misterio Cósmico*. Dentro de la órbita o esfera de Saturno Kepler inscribió un cubo; y dentro de éste la esfera de Júpiter circunscrita en un tetraedro. Inscrita en éste situó la esfera de Marte. Entre las esferas de Marte y la Tierra estaba el dodecaedro; entre la Tierra y Venus, el icosaedro; entre Venus y Mercurio, el octaedro. Y en el centro de todo el sistema el astro rey, el Sol. Según Lawlor, la geometría pitagórica tamizada por el idealismo místico y filosófico de Platón y por la estructuración euclidea, permitió a Kepler vislumbrar una imagen de la perfección esplendente del Cosmos trasunto de la excelsitud del Creador a través de la Sagrada Geometría.»

## Poliedros 1700-2000

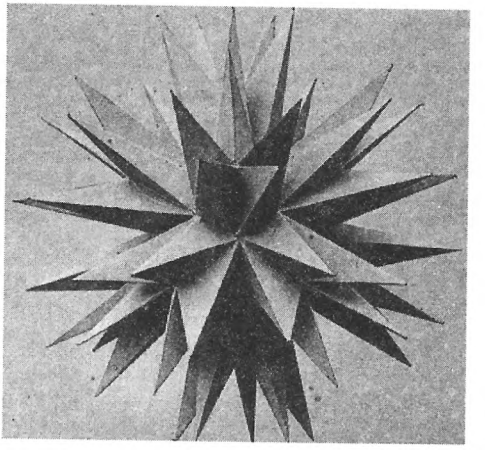
Si en los siglos anteriores fue el arte el auténtico motor del interés por los poliedros, en el periodo 1700-2000 el epicentro de su estudio vino motivado por el interés matemático. Mención especial merece René Descartes (1596-1650), quien demostró el genial teorema según el cual la suma de los defectos angulares en vértices (diferencias entre 360° y la suma de los ángulos concurrentes en los vértices), para todos los poliedros convexos, vale siempre lo mismo: 720°.

El siguiente resultado que fue trascendente para los estudios de los poliedros fue hallado por el gran Leonhard Euler (1707-1783). La famosa fórmula de Euler $C + V = A + 2$ (caras más vértices igual a aristas más 2), sorprendentemente válida en todos los poliedros convexos, permitió iniciar nuevas aproximaciones a estas figuras. En el capítulo 3 tendremos ocasión de examinar con detalle las implicaciones de tan poderoso resultado.

Los poliedros fueron también importantes para Gaspard Monge (1746-1818) al crear éste la geometría descriptiva, un método riguroso de representación que de nuevo, como en la perspectiva renacentista, encontró en los poliedros los modelos ideales.

Louis Poinsot (1777-1859) describió los otros dos poliedros estrellados que resultan derivados de los dos ya descritos por Kepler, completando así la reducida colección de poliedros regulares no convexos. Pero fue Augustin Louis Cauchy (1789-1857) quien demostró que estos cuatro poliedros de Kepler-Poinsot eran los únicos posibles en el ámbito regular. También Cauchy estudió el tema de la rigidez poliédrica y los grafos asociados a poliedros. Eugène C. Catalan (1814-1894) estudió poliedros duales de los arquimedianos y descubrió con ello los que se han denominado poliedros de Catalan (véase capítulo 2).

J. Rondelet publicó desarrollos planos de poliedros regulares (1812); J. Bertrand describió en 1848 diversas generaciones de poliedros estrellados, y el gran matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) dio nuevas demostraciones y generalizaciones de la fórmula de Euler abriendo nuevos caminos al estudio de los poliedros y, con ellos, de la topología. Se debe a Ludwig Schläfli (1814-1895) las nuevas notaciones combinatorias para simbolizar poliedros; este geómetra inició con ello unas primeras aproximaciones al estudio de los llamados politopos o poliedros en espacios de dimensión superior a 3. Notaciones para casos de estalación fueron dadas por Patrick du Val (1903-1987) y para poliedros uniformes, por Willem A. Wythoff (1865-1939).



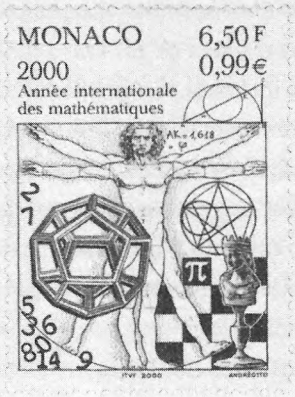
*Poliedro fotografiado por Max Brückner.*

Max Brückner (1860-1934) dibujó y fotografió en 1900 su colección de 146 modelos poliédricos de papel que se guardan como colección; D.M.Y. Sommerville

## FILATELIA POLIÉDRICA

La filatelia matemática tiene una gran popularidad. Por ello no es de extrañar que a menudo aparezcan en los sellos de este tipo figuras poliédricas que enfatizan el carácter matemático del evento que se conmemora.

Sirva de ejemplo este sello de Mónaco, dedicado al Año Internacional de las Matemáticas (2000), que presenta un collage en el que ajedrez, proporciones, números, dibujos de polígonos y un dodecaedro de da Vinci exaltan a toda la matemática.




(1879-1934) estudió el pseudorombo-cuboctaedro, y E. Steinitz (1871-1928) estudió poliedros mediante análisis combinatorios.

El eminente David Hilbert (1862-1943) en su famosa conferencia de París del año 1900, donde presentó los 23 problemas que consideró muy importantes para guiar la investigación matemática en los inicios del siglo XX, incluyó también retos con poliedros. Por ejemplo, planteó el problema de si poliedros de igual volumen deben ser congruentes por disección. Max Dehn (1878-1952) demostró que no.

Harold S.M. Coxeter (1907-2003) aporta nuevos conceptos, generalizaciones y extensiones dimensionales, convirtiéndose en el gran referente de la teoría de politopos. Colaborando con grandes geómetras de la época, Coxeter descubrió también numerosos poliedros nuevos. Por ejemplo, en 1938 logró la descripción completa de los 59 icosaedros al estudiar todas las posibles estelaciones y sus procesos inversos (Bridge encontró otro en 1974). También descubrió con Miller doce poliedros «uniformes» nuevos.

Una aportación muy interesante de Victor Schlegel (1843-1905) fue inventar una forma de proyección para asociar a los poliedros unos diagramas planos que pudiesen facilitar el estudio topológico de los mismos. Por su parte, G. Dantzig en 1947 también contribuyó a realizar aproximaciones vía grafos, iniciando con ello el llamado método simplicial.

La clasificación completa de los 92 poliedros convexos no uniformes con caras regulares fue lograda por Norman W. Johnson en 1966, si bien fue Victor Zalgaller en 1969 quien realmente justificó que la lista de los 92 de Johnson era exhaustiva.

N.J. Bridge enumeró en 1974 numerosos nuevos poliedros asociados al dodecaedro y en 1978 Robert Connelly hizo avances muy importantes en la construcción y el

estudio de estructuras poliédricas flexibles. Estudios combinatorios y de regularidades realizados por H. Freudenthal, B.L. van der Waerden, B. Grünbaum, J.A. Zalgaller, G. Inchbald, L. Fejes-Tóth, M. Brückner, J. Malkevitch, M. Senechal y otros, han contribuido a que los poliedros hayan sido interesantes objetos de estudio a lo largo del siglo XX. También en este siglo, las aportaciones de R. Buckminster Fuller, creador de cúpulas geodésicas, y las obras artísticas y arquitectónicas que incluyen poliedros, las cuales se analizarán en los últimos capítulos de este libro, han hecho posible que el mundo de los poliedros siga acaparando la atención en muchos ámbitos de la creatividad humana.

## Poliedros hoy

Desde siempre el estudio de los poliedros ha formado parte de la educación escolar. Seguro que usted tiene recuerdos más o menos buenos de los poliedros regulares y de lo difícil que resultó memorizar sus nombres o dibujarlos con cierta gracia. Hoy siguen formando parte de los currículos de geometría y de plástica, al ser figuras espaciales simples, pero sobre las que pueden aprenderse muchas situaciones tridi-

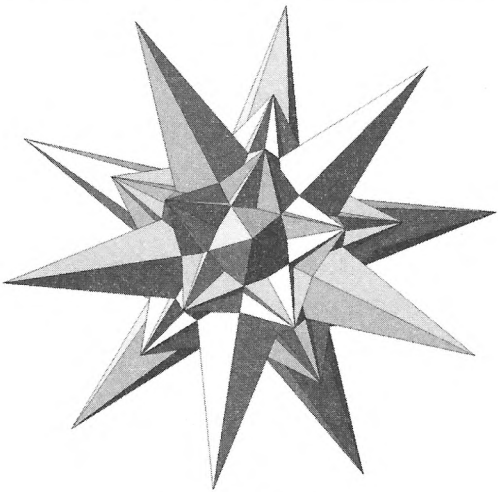
### LA GEOMETRÍA COMPUTACIONAL

La aparición de los ordenadores y de los potentes programas actuales ha motivado desde 1971 el desarrollo de una nueva rama matemático-informática: la geometría computacional. Es de hecho una especialidad dentro de las ciencias de la computación y se dedica al estudio general de algoritmos relacionados (en su formulación o en su finalidad) con temas geométricos. Esta geometría va ligada a los gráficos por ordenador, a los diseños por ordenador (CAD/CAM) y se aplica también en robótica (movimientos y visión), diseño de circuitos integrados, sistemas de información geográfica, temas de ingeniería, etc. Por ejemplo, problemas típicos de geometría computacional podrían ser:

- Dados *n* puntos del plano encontrar algoritmos rápidos para saber qué par está a la menor distancia posible.
- Dados *n* puntos en el espacio hallar el menor poliedro convexo que los contenga.
- Conectar dos puntos por un camino mínimo si entre ellos hay obstáculos poliédricos.
- Triangulaciones de polígonos con determinados criterios.
- Decidir puntos que están dentro o fuera de zonas poligonales dadas.

Son retos que con regla y compás no tenían ningún futuro.

mensionales y dan pie a realizar interesantes talleres prácticos con material manipulativo. Al inicio de este siglo las investigaciones matemáticas sobre poliedros siguen su curso y nuevas familias son exploradas en profundidad (poliedros topológicos, poliedros abstractos en otros espacios, poliedros tratados mediante grafos, poliedros compuestos y ortogonales, generalizaciones...). Pero un nuevo impulso al interés por los poliedros ha sido dado por los gráficos por ordenador y en particular por la geometría computacional. De nuevo la historia se repite: los poliedros, por su simplicidad geométrica, son modelos idóneos para poner a prueba programas de dibujo 3D o para aproximarse a otras formas que se deben representar. Los actuales programas (Google SketchUp, Mathlab, Mathematica, Cabri3D, Stella, etc.) o las actuales presentaciones JAVA (A Plethora of Polyhedra, Hyperspace Star Polytope Slices...) o en flash (World of Polyhedra), permiten no sólo representar figuras poliédricas sino moverlas, disecarlas, hacer intersecciones y composiciones... y ponerlas a disposición del diseño y la creación de todo tipo de imágenes y realidades virtuales, cuyo interés va de la química molecular a los videojuegos o la animación de películas.



*Poliedro virtual.*

Internet posee un inmenso repertorio de webs dedicadas a los poliedros. Sirvan de pista estas dos direcciones: http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html y http://mathworld.wolfram.com/topics/Polyhedra.html.

Euclides culminó sus *Elementos* con los poliedros; poco podía sospechar que tantos siglos después sus admirados sólidos platónicos seguirían acaparando nuevas atenciones, mostrando nuevas utilidades... y planteando nuevos retos al pensamiento matemático. ¡Los viejos poliedros nunca mueren!

Capítulo 2

# Las grandes familias de poliedros

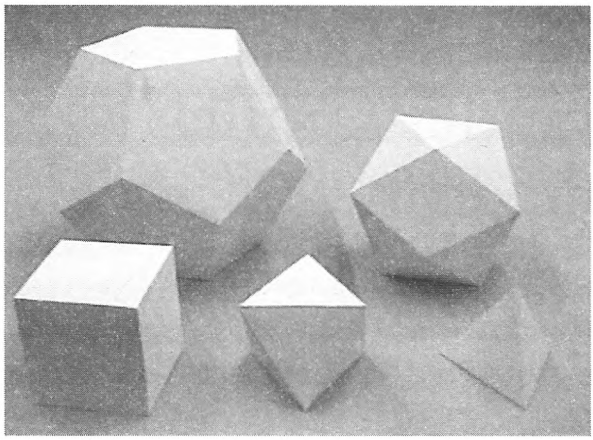
*Se puede decir que la existencia de los tres primeros poliedros (tetraedro, octaedro y cubo) es un hecho geométricamente simple, pero el descubrimiento de los otros dos (dodecaedro e icosaedro) es uno de los más bellos y singulares de la historia de la matemática.*
H. Weyl

En este capítulo se realiza una visita detallada a las grandes familias poliédricas. Metafóricamente podría decirse que el mundo de los poliedros es un reino en el que hay cinco reyes (título que corresponde a los poliedros regulares) y una corte de numerosas familias nobles. Las regularidades, tan poco frecuentes en la naturaleza, han sido siempre admiradas por los ojos humanos. Y dotados como estamos de imaginación y capacidad para inventar, hemos ido creando a lo largo de los siglos una auténtica devoción casi mística por las figuras más regulares, simétricas y armoniosas. Ello ha llevado a que filósofos, geómetras, artistas, etc. hayan encontrado en las formas más genuinamente geométricas, como los poliedros, un referente de belleza y perfección.

Estas ideas han calado en nuestras culturas y aunque nadie se atreve a discutir la belleza de un caballo a galope o de una isla en la Polinesia, se concibe a menudo un cubo o un octaedro truncado como formas cuya simplicidad y simetría reinan en el mundo de los ideales estéticos. Algunos de los poliedros que le esperan a la vuelta de la página han formado parte de su formación escolar, pero otros puede que le resulten novedosos. ¡Ojalá le gusten todos!

## Los cinco cuerpos platónicos

Los poliedros regulares son poliedros convexos tales que todas sus caras son idénticas, son polígonos regulares y todos sus vértices reciben el mismo número de aristas.



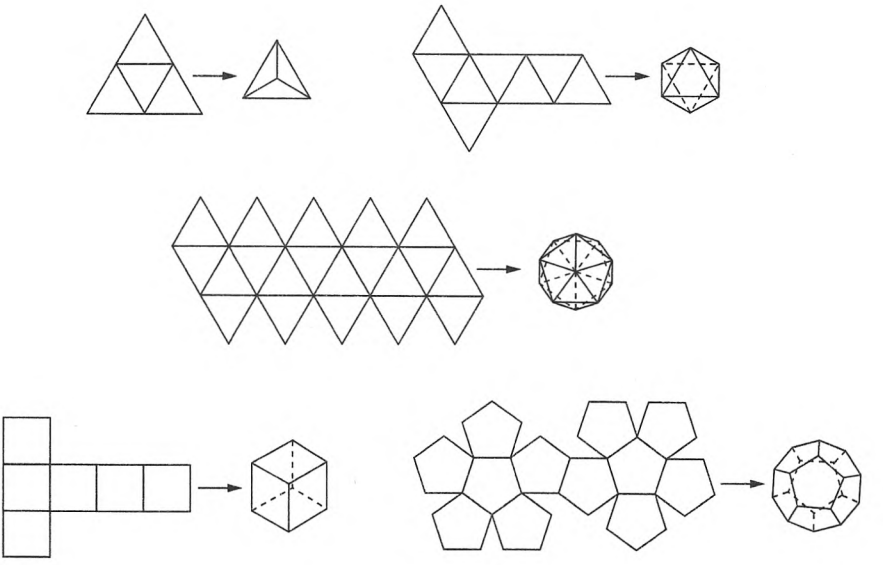
*Los cinco poliedros regulares.*

La siguiente tabla resume los datos principales de estos cuerpos.

| | Tetraedro | Cubo | Octaedro | Dodecaedro | Icosaedro |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de caras | 4 triángulos | 6 cuadrados | 8 triángulos | 12 pentágonos | 20 triángulos |
| Número de vértices | 4 | 8 | 6 | 20 | 12 |
| Número de aristas | 6 | 12 | 12 | 30 | 30 |
| Ángulo diedral | 70°32′ | 90° | 109°28′ | 116°34′ | 138°11′ |

Es curioso que si se buscan los poliedros duales de los regulares que surgen al unir los centros de sus caras... renace la misma colección (con tamaño diferente): los centros de las caras del tetraedro dan un tetraedro regular; los centros de las caras de un cubo determinan un octaedro y, cómo no, los centros de las caras del octaedro dan un cubo. La misma dualidad se da entre icosaedro y dodecaedro, de uno surge el otro y al revés. Este hecho es muy trascendente, pues poliedros duales tienen el mismo tipo de simetría y, por tanto, en el reino de los cinco magníficos sólo hay de hecho tres tipos de grupos de simetría: el del tetraedro, el del cubo (idéntico al del octaedro) y el del icosaedro (idéntico al del dodecaedro).

Dada la perfecta distribución de sus polígonos resulta que siempre hay una esfera exterior que pasa por todos sus vértices, una interior tangente a todas sus caras y una intermedia que toca todas las aristas.



*Desarrollos planos de los poliedros regulares.*

En las figuras anteriores puede apreciar cinco desarrollos planos muy populares (aunque hay muchos más). Éstos son ideales para hacer modelos de cartulina, pero si piensa en usar barritas y nudos para hacer el esqueleto de aristas de estos cuerpos recuerde que con tetraedros, octaedros e icosaedros no tendrá problemas, pues las caras triangulares dan rigidez a las estructuras; sin embargo, con cubos y dodecaedros prepárese a añadir diagonales que le den rigidez al montaje.

Una cuestión relevante es, por supuesto, la pregunta: ¿por qué son sólo cinco? Que hay cinco está claro y ya ha visto cómo son. Pero ¿no podría haber más? La respuesta es no y la razón es muy simple. Si $m$ polígonos regulares con $n$ lados han de coincidir en un vértice (y no aplanarse), al valer cada ángulo del polígono regular $180° - 360°/n = 180° (n-2)/n$, deberá ser $m \cdot 180° (n-2)/n < 360°$, lo que lleva a la desigualdad $(m-2)(n-2) < 4$. Las posibles soluciones son:

| $m$ | $n$ | Figura |
|---|---|---|
| 3 | 3 | Tetraedro |
| 3 | 4 | Cubo |
| 4 | 3 | Octaedro |
| 3 | 5 | Dodecaedro |
| 5 | 3 | Icosaedro |

Puede meditarlo más manualmente: tres hexágonos se aplastan y no forman vértice espacial; dados sus ángulos los polígonos regulares con siete lados o más tampoco podrán acoplarse para formar un «buen vértice». Sólo quedan triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos..., y ahí tiene los cinco posibles.

| Poliedro | Área | Volumen |
|---|---|---|
| Tetraedro | $A=a^2\sqrt{3}$ | $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ |
| Cubo | $A=6a^2$ | $V=a^3$ |
| Octaedro | $A=2\sqrt{3}a^2$ | $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ |
| Dodecaedro | $A=3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$ | $V=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$ |
| Icosaedro | $A=5\sqrt{3}a^2$ | $V=\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$ |

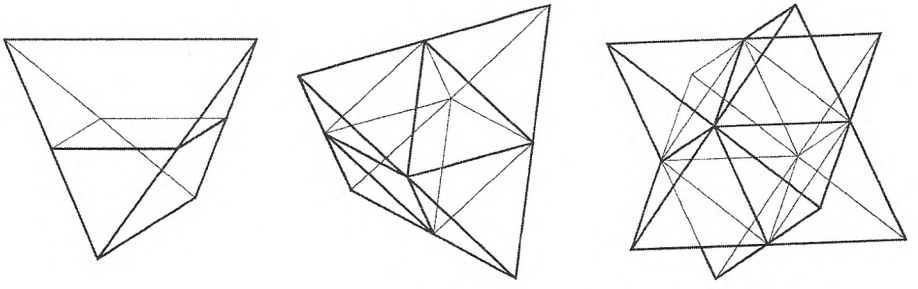
En la tabla anterior se dan los valores del área y volumen para los cinco poliedros regulares en función del valor *a* de la arista correspondiente. La tabla pone en evidencia el hecho de que Teeteto se interesara especialmente por los números irracionales cuando el objetivo real eran los poliedros regulares. Nótese también que para la misma arista *a* los volúmenes difieren notablemente y éste es el motivo por el cual cuando se miran modelos de sólidos platónicos siempre se tenga la impresión de que hay grandes diferencias entre el pequeño tetraedro y el gran icosaedro: es la elección de una misma arista la culpable. Como los cinco magníficos son todos inscribibles en una esfera, si se parte de cinco esferas idénticas de radio *R* entonces los correspondientes cinco poliedros inscritos se ven mucho más uniformes en tamaño.

Vista la familia globalmente podemos hacer ahora unos pequeños descubrimientos sobre cada uno de los cinco.

## Tetraedro

Este hermoso pero discreto poliedro tiene sus aristas opuestas, que se «cruzan» en el espacio perpendicularmente (con un ángulo de 90°). Su centro geométrico se

encuentra en la intersección de sus cuatro alturas (rectas de los vértices a los centros de las caras opuestas) y a una altura respecto a la base que es una cuarta parte de una altura. Pero el mismo centro también está en el punto medio de los segmentos que unen los puntos medios de dos aristas opuestas.

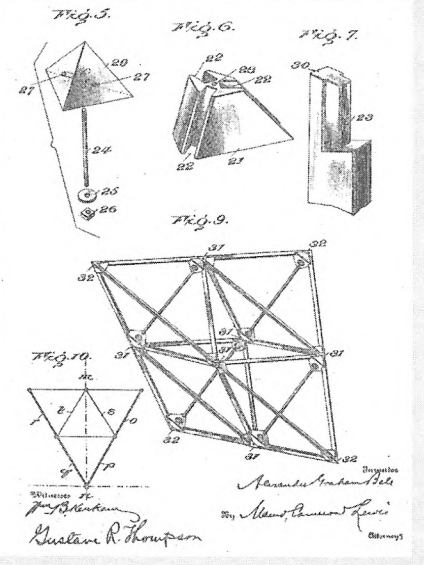


*Tetraedro y algunas de sus secciones.*

En la figura también puede observar una curiosa sección que es un cuadrado, cómo éste forma parte de un octaedro situado dentro del tetraedro y cómo nace a partir de dos tetraedros un bello poliedro cóncavo que tiene en la parte central un octaedro.

## TELÉFONOS Y TETRAEDROS

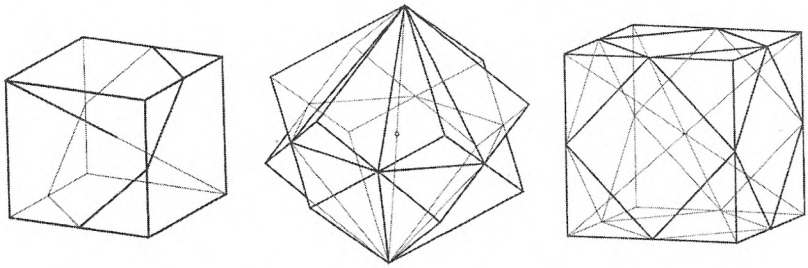
El gran investigador de los tetraedros y sus combinaciones para formar estructuras rígidas fue el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922), a quien le interesó este tema en relación a la aeronáutica, con el fin de obtener buenas estructuras de soporte. De hecho, las denominadas cometas tetraédricas son otra de las invenciones de este genial científico de origen escocés.




*Dibujos pertenecientes a la patente de la cometa tetraédrica de Alexander Graham Bell.*

## Cubo

Las diagonales de las caras de un cubo de lado unidad miden $\sqrt{2}$ y su diagonal principal $\sqrt{3}$. Entre sus secciones destacan triángulos equiláteros... y un magnífico hexágono regular que divide el cubo en dos partes iguales.



*Cubo y algunas de sus secciones.*

En la figura vemos el poliedro cóncavo determinado por los cubos que comparten una misma sección hexagonal y también podemos ver cómo las diversas secciones hexagonales determinan un poliedro: el cuboctaedro.

Merece la pena describir aquí uno de los tres grandes problemas clásicos griegos, la duplicación del cubo, que plantea si es posible, dado un cubo de arista 1, construir con regla y compás la arista de un cubo de volumen doble. Obviamente si $x$ es la arista que se debe construir, debe ser $x^3 = 2$ y, por tanto, dicho problema

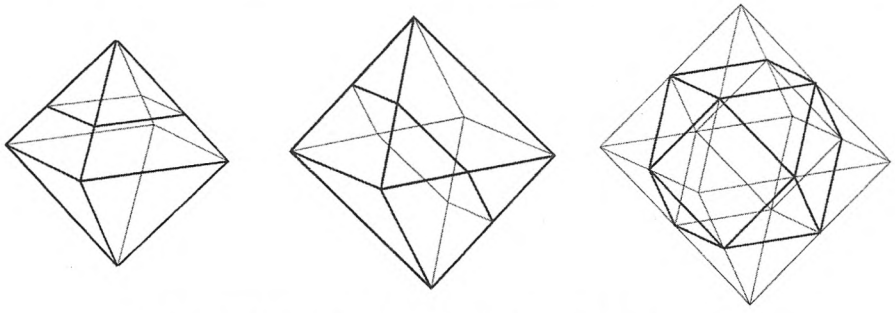
### CUBITOS DE SOPA

La forma cúbica es común incluso en concentrados de sopa. Los terrones cúbicos u ortoédricos de azúcar son un clásico, pero que la sopa acabe en cubos no deja de ser sorprendente. Se dice que ya el capitán Cooke en 1772 se llevó «sopas trasladables» en formas cúbicas, pero la fecha clave fue 1838. Aquel año Carl Heinrich Knorr fundó una compañía dedicada al café que pronto se especializó en «sopas compactadas» que pudieran disolverse en agua caliente. Knorr hizo primero sopas en tabletas, pero alcanzó gran éxito con las formas de salchicha (la sopa se cortaba a trozos, como el embutido, y muchos comían la sopa a rodajas). La forma cúbica llegó en 1912 y, desde aquella época, muchos han sido los productores de cubos o tabletas para sopas. Comprimir, compactar, moler, granular, secar, etc. y en particular producir la forma de los cubitos de sopa, es una actividad comercial de primer orden aplicable a productos farmacéuticos, químicos o alimentarios.

exige ver si con regla y compás es dibujable un segmento de longitud $x=\sqrt[3]{2}$. El problema se difundió arropado de diversas leyendas, las cuales siempre tenían en común la exigencia de una divinidad (ya fuera el rey Minos o el dios Apolo) de poseer una tumba o un altar cúbico doble. El problema era importante porque ponía a prueba los instrumentos en una situación espacial, más allá del plano. El tema interesó a Platón y a su escuela, y a grandes geómetras como Hipócrates de Chios (ca. 440 a.C.), Arquitas (ca. 400 a.C.), Eudoxo (ca. 370 a.C.), Menaechmus (ca. 350 a.C.), Eratóstenes (ca. 230 a.C.), Apolonio (ca. 225 a.C.), Diocles (ca. 180 a.C.), etc. Nadie pudo resolver el problema (ni demostrar que la solución no era posible) y muchos idearon soluciones ampliando el uso de la regla y el compás con otros instrumentos complementarios, como rectángulos deslizantes, escuadras y curvas diversas. Cabe notar que partiendo de la unidad 1, dibujar $\sqrt{2}$ es inmediato como diagonal del cuadrado de lado 1; así pues, el misterio era por qué el caso $\sqrt[3]{2}$ se resistía a ser resuelto. Hasta el siglo XIX no se logró demostrar por métodos algebraicos que el problema era irresoluble usando solamente regla y compás.

## Octaedro

Si observa un octaedro, tanto puede interpretar que éste surge de dos pirámides regulares cuadradas unidas por sus bases (bipirámide) como de dos triángulos paralelos (girados media vuelta), entre los cuales se han añadido caras triangulares (antiprisma).



*Octaedro con sección cuadrada, sección hexagonal y cuboctaedro.*

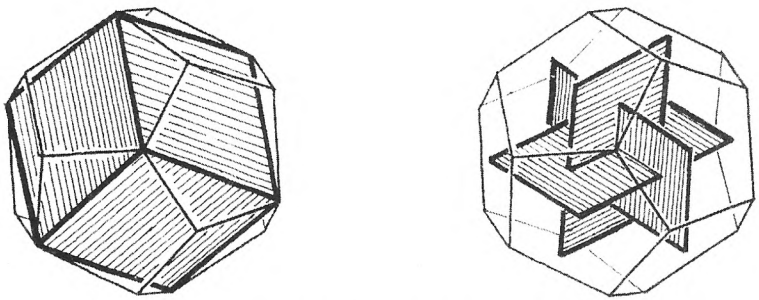
Una curiosa sección hexagonal aparece al unir puntos medios de seis aristas sabiamente escogidas, es decir, al cortar la pieza por un plano medio paralelo a dos caras paralelas. Al considerar cuatro secciones hexagonales, nace dentro del octaedro un nuevo poliedro con caras cuadradas y triangulares (cuboctaedro).

### MESAS Y OCTAEDROS

Un octaedro sólido, o con sólo aristas, apoyado en el suelo en una de sus caras triangulares y con la otra cara paralela a 70 cm de altura le ofrece una aparatosa base para una mesa de jardín, apoyando en el octaedro un círculo de vidrio o madera. Prescinda ahora de las barras de las caras triangulares de apoyo y descubrirá una liviana y resistente estructura que se encuentra en el mercado.

## Dodecaedro

El dodecaedro puede obtenerse acoplando los doce pentágonos regulares (...y con ellos llega el número de oro) o como un cubo central al cual se han añadido estratégicamente seis tejados, que a su vez están diseñados mediante trozos de pentágonos.



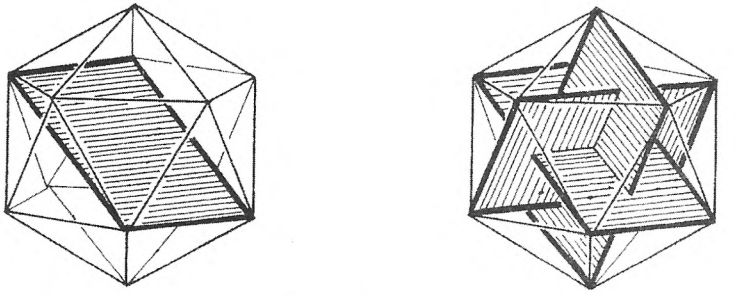
*Dodecaedro y su relación con el cubo y el icosaedro.*

### DODECAEDROS CASEROS

Medios dodecaedros se venden hoy como fruteros de diseño con seis caras pentagonales metálicas. Hay contenedores de basura con esta forma. También se hacen dodecaedros de hormigón armado de 30 cm de altura para ser usados como pilonas de tráfico (aunque tienen el problema de que la cara superior pentagonal queda horizontal y los peatones tienden a sentarse en ellas, lo cual es peligroso si circulan coches muy cerca).

## Icosaedro

En la figura siguiente puede apreciarse como tres rectángulos áureos subyacen en el icosaedro, permitiendo expresar bien las coordenadas de sus vértices.



*Icosaedro y secciones áureas.*

Los doce vértices de tres rectángulos iguales situados como los de la figura determinarían un poliedro convexo con caras triangulares, pero lo curioso es que para que las caras sean triángulos equiláteros los rectángulos deben tener de proporción el número de oro.

Recordemos que el número áureo $\Phi = (1+\sqrt{5}) / 2 = 1{,}618...$ es la relación que existe entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de éste. Esto justifica su aparición en icosaedros y dodecaedros. Y como se ha considerado desde antaño una de las proporciones más bellas, su fama se ha trasladado a los cuerpos platónicos. Por su parte, la famosa sucesión de Fibonacci es generada por dos primeros términos que valen 1 y luego por la suma de los dos términos consecutivos anteriores (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...), resultando que los cocientes entre cada término y su anterior tienden al número de oro. Hoy el número de oro es una proporción omnipresente en numerosos objetos, como las tarjetas magnéticas (las de crédito por ejemplo) o los documentos identificativos.

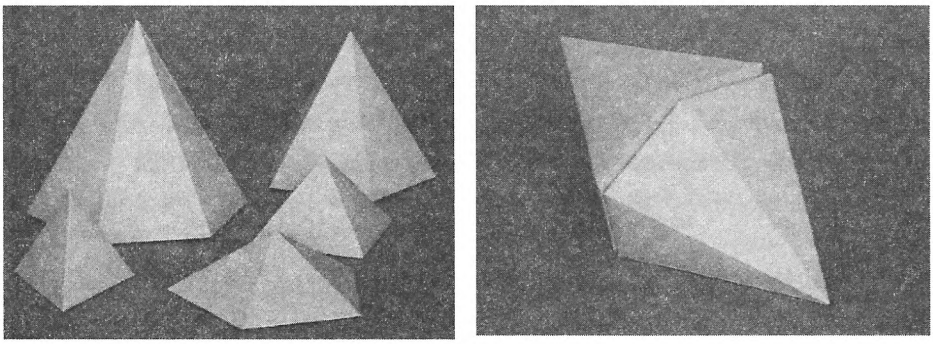
### ICOSAEDROS DESMONTABLES

En la actualidad, existen en el mercado americano unas curiosas piezas de cartón rígido plegado con las cuales se puede montar un icosaedro sin una base piramidal y así obtener un módulo apoyado sobre una cara pentagonal que por su oportuno tamaño sirve como tienda de campaña (recubriendo las caras con telas).

## Pirámides y bipirámides

Mitificadas por las arquitecturas egipcia y maya, las pirámides son poliedros convexos determinados por una base poligonal convexa plana y los segmentos rectos que unen

un punto exterior al plano con los puntos de la base. La única pirámide que es un poliedro regular es el famoso tetraedro regular (todas sus caras son triángulos equiláteros idénticos). Pero si se renuncia a la igualdad de todas las caras, aun manteniendo la exigencia de que todas las caras sean regulares, se obtienen dos casos interesantes: la pirámide de base cuadrada con sus cuatro triángulos equiláteros laterales, y la de base pentagonal con sus cinco caras triangulares equiláteras. Obviamente, con base regular y caras laterales isósceles las pirámides son infinitas.



*Pirámides y bipirámides.*

Si el punto culminante o vértice superior de una pirámide se desplaza por el espacio, entonces nacen las pirámides oblicuas, y al unir (por sus bases poligonales idénticas) dos pirámides surgen las bipirámides. Por ejemplo, el octaedro regular es una bipirámide resultado de unir dos pirámides iguales de base cuadrada y caras laterales formadas por triángulos equiláteros. Nótese que al unir dos tetraedros iguales por una cara surge una bipirámide con todas sus caras iguales, que son triángulos equiláteros, pero donde dos vértices reciben tres aristas y los otros reciben cuatro (lo que deja a esta figura fuera del mapa de los sólidos platónicos).

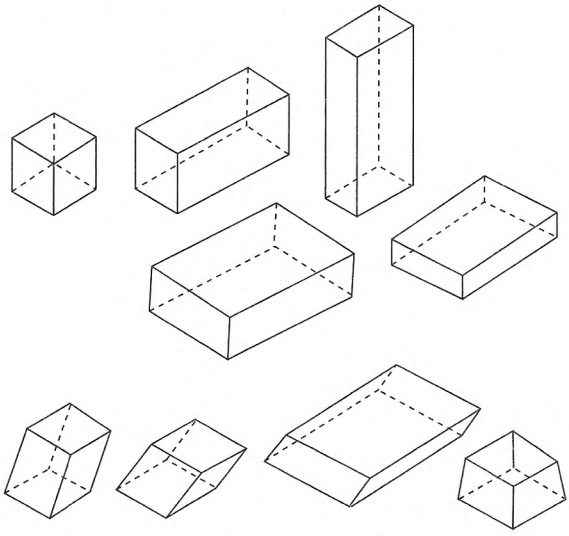
## PIRÁMIDES VIRTUALES Y VISIÓN

Al margen de las pirámides corpóreas, estas figuras también han jugado un papel en el estudio de la visión humana. Durante siglos fue un misterio el funcionamiento de la visión y a menudo se analizaban las «pirámides visuales» determinadas por el ojo humano como vértice y las rectas entre este ojo y los objetos contemplados. Cuando éstos eran baldosas o formas poligonales cualesquiera, aparecían estas pirámides virtuales. Lo mismo apareció con la fotografía con el objetivo y los rayos de luz que inciden en él.

El volumen de cualquier pirámide es un tercio del área de la base por la altura (el de las bipirámides es el doble). Las pirámides se aproximan bien a los conos, lo cual es una propiedad muy útil. Cabe notar que al cortar una pirámide, por ejemplo por un plano paralelo a la base, la figura queda dividida en una pirámide y un tronco de pirámide.

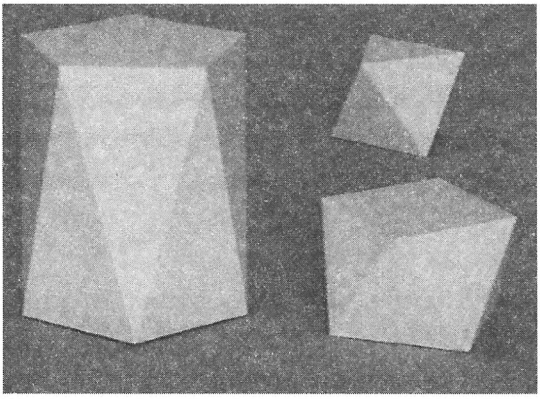
## Prismas y antiprismas

Si se eleva un polígono del plano de dibujo, perpendicularmente a éste, nace un prisma recto, el cual está determinado, pues, por dos bases poligonales idénticas y paralelas y unas caras laterales que son rectángulos. Evidentemente, el caso más regular es el del cubo. Por ello en estas figuras es trivial calcular el volumen como área de una base por la altura correspondiente.



*Diversos modelos de prismas.*

Si las dos bases están desplazadas en sus planos paralelos entonces entran en escena los prismas oblicuos. Nótese que hay infinitos prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares y las caras laterales, cuadradas..., pero al aumentar el número de lados de las bases los cuadrados son cada vez más pequeños. Dado un prisma, al unir los centros de gravedad de sus caras nace una bipirámide, que es su dual. Los antiprismas, también denominados prismatoides, nacen al considerar dos caras paralelas que son polígonos convexos iguales, con la cara de arriba girada respecto a la de abajo, pudiéndose unir cada vértice de la de arriba con dos vértices correspondientes de la de abajo. Se forma así un cuerpo con bases poligonales idénticas pero giradas y caras laterales triangulares.

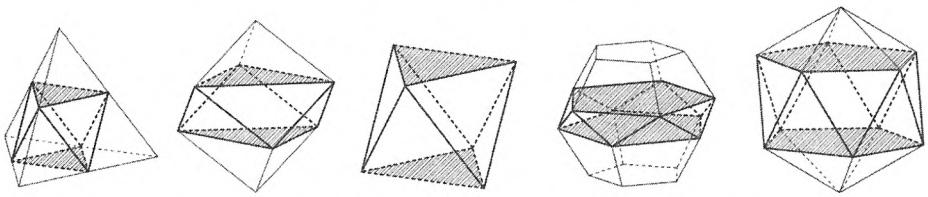


*Antiprismas.*

Los antiprismas más regulares son rígidos, inscribibles en esferas y particularmente bellos: son aquellos en los que las dos bases son polígonos regulares de $n$ lados paralelos girados y los triángulos laterales son todos equiláteros. Hay infinitos, pero, por supuesto, si $n$ es grande, los correspondientes antiprismas son cada vez más bajitos. ¿Pero cuál es el primero? Para $n = 3$ se obtiene... ¡el octaedro! El octaedro es el único antiprisma que es poliedro regular.

El mundo de los antiprismas reserva una sorpresa mayúscula:

Todo poliedro regular o es una pirámide o es un antiprisma o es reunión de un antiprisma con pirámides o troncos de pirámides.



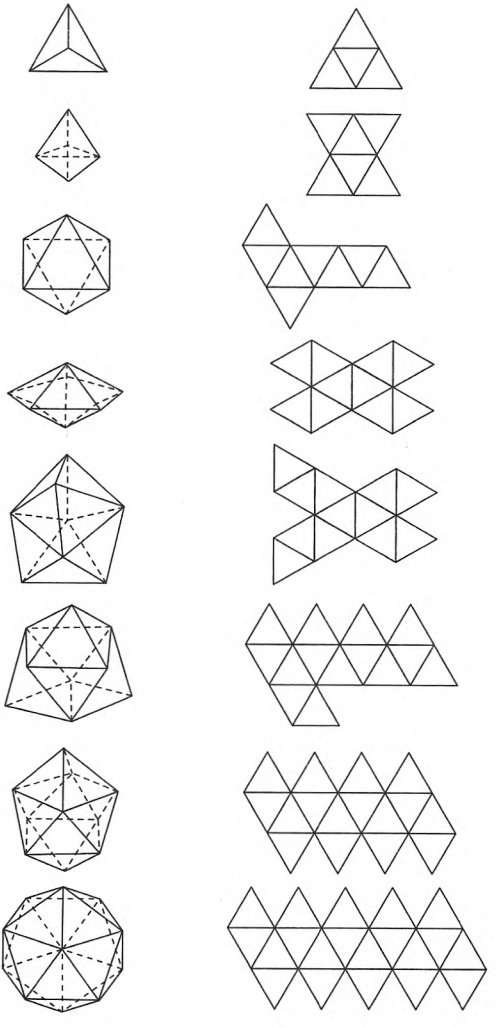
Observe las figuras anteriores atentamente. El tetraedro es una pirámide. El octaedro es un antiprisma. El icosaedro es un antiprisma de bases pentagonales sobre las cuales se han añadido dos pirámides pentagonales. El dodecaedro también es un antiprisma pentagonal (nótese la relación entre triángulos laterales y pentágonos) con dos troncos de pirámide añadidos. Finalmente, el cubo resulta ser un antiprisma triangular con dos pirámides triangulares añadidas.

¿Qué descubre al considerar el polígono paralelo a las bases de un antiprisma que está a media altura? Si las bases tienen $n$ lados, hay $2n$ triángulos laterales y, por

tanto, el polígono intermedio tiene $2n$ lados... Luego el polígono intermedio de un octaedro es un hexágono (la sección hexagonal de un octaedro al descubierto) y el del antiprisma del cubo también. Y tanto en icosaedros como en dodecaedros, al poseer antiprismas pentagonales, tendrá localizadas sendas secciones decagonales.

## Deltaedros

Los deltaedros son aquellos poliedros convexos con todas las caras iguales, que son triángulos equiláteros. Hay ocho tipos de deltaedros, como se puede apreciar en las figuras siguientes, que incluyen también sus desarrollos planos.



En esta familia se reconocen inmediatamente tres poliedros: el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, que como ya sabe pertenecen a la nobleza de los poliedros regulares. Aprovechando la fórmula de Euler puede plantearse de forma combinatoria todas las relaciones que deben valer en los deltaedros, resultando la tabla siguiente:

| Nombre | $C$ | $V$ | $A$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | 4 | 4 | 6 | 4 | 0 | 0 |
| Bipirámide triangular | 6 | 5 | 9 | 2 | 3 | 0 |
| Octaedro | 8 | 6 | 12 | 0 | 6 | 0 |
| Bipirámide pentagonal | 10 | 7 | 15 | 0 | 5 | 2 |
| Dodecadeltaedro | 12 | 8 | 18 | 0 | 4 | 4 |
| Tetracaidecadeltaedro | 14 | 9 | 21 | 0 | 3 | 6 |
| Hexacaidecadeltaedro | 16 | 10 | 24 | 0 | 2 | 8 |
| ??? | 18 | 11 | 27 | 0 | 1 | 10 |
| Icosaedro | 20 | 12 | 30 | 0 | 0 | 12 |

De los ocho casos, $C = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20$ tiene un modelo en la figura, pero aquí acaba de aparecer un inesperado deltaedro «fantasma» de 18 caras del que lo sabemos casi todo: $C = 18$, $V = 11$, $A = 27$, $V_3 = 0$, $V_4 = 1$, $V_5 = 10$. Pero este «fantasma» no puede corresponder a una figura poliédrica de verdad. Aquí puede apreciarse cómo la fórmula de Euler y su descendencia «vale» en poliedros convexos (supuesto que éstos existen), pero que tenga soluciones numéricas para $C$, $V$, $A$, etc. no garantiza la real existencia poliedral. Por ejemplo, dos caras coplanarias en un poliedro convexo son absurdas, pero en criterios combinatorios sí que podrían contarse. Con 18 triángulos equiláteros iguales de plástico rígido encajables, como sólo tenemos $V_4 = 1$, forme para éste singular vértice una pirámide de cuatro caras. Pase al segundo nivel: cada uno de los cuatro vértices piramidales a los que ya llegan tres aristas deben ser de orden 5; luego debe añadir dos. Así nace después de la pirámide un segundo nivel con un anillo (antiprisma) de ocho triángulos y boca cuadrada. Ya sólo le restan seis triángulos por colocar, pero no los podrá encajar con esta restricción de vértices de orden 5 que está arrastrando. (También puede meditar

## UN PROBLEMA ABIERTO

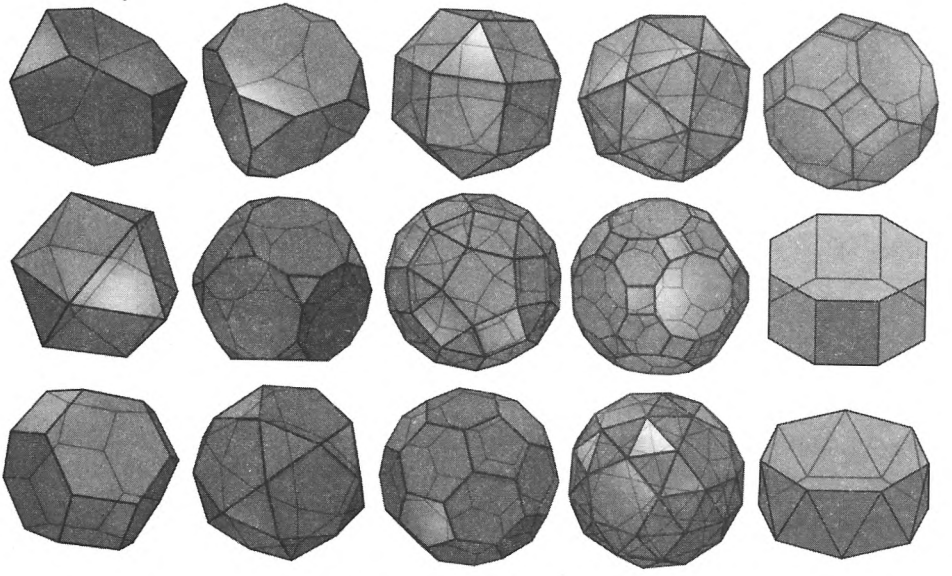
Hace unos años el geómetra americano Joe Malkevitch lanzó el reto de buscar todos los poliedros convexos con todas las caras iguales que fuesen triángulos isósceles (no equiláteros). Muchos son los ejemplos encontrados, pero la clasificación completa aún no se ha conseguido.

a partir del deltaedro de 16 caras viendo la imposibilidad de añadir dos nuevas caras manteniendo convexidad.) El tema de los ocho deltaedros fue resuelto hace unos años por Hans Freudenthal y Van der Waerden.

## Poliedros de Arquímedes

Según lo afirmado en la *Colección matemática* de Pappus, obra escrita a mediados del siglo IV, cabe atribuir a Arquímedes un tratado sobre los trece poliedros semirregulares (o arquimedianos).

Los poliedros semirregulares son poliedros convexos (que no son ni prismas ni antiprismas) cuyas caras son polígonos regulares idénticos de dos o tres tipos diferentes y en los que cada vértice recibe el mismo número de aristas. Es decir, son una extensión de los regulares al admitir más de un tipo de cara regular, pero mantienen la exigencia de iguales incidencias en los vértices.



*Poliedros arquimedianos.*

Nótese que prismas y antiprismas pueden ser semirregulares en el sentido anterior (y entonces habría infinitos arquimedianos), pero los hemos excluido para centrar la atención en los otros posibles. En el dibujo anterior figuran quince modelos. Once derivan de los cinco poliedros regulares aplicando procesos sucesivos de truncación de esquinas o aristas. Los modelos del cubo romo y el dodeaedro romo se obtienen

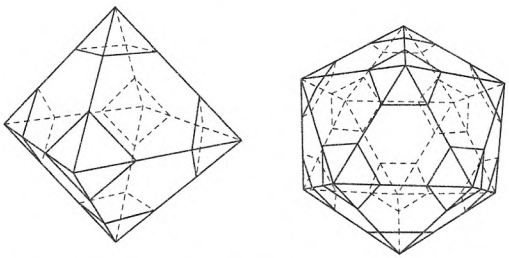
por «explosión» de la correspondiente figura regular y la colocación de triangulitos equiláteros entre estas caras separadas por la citada explosión. Pero éstos pueden tener dos versiones, una espejo de la otra (como nuestras manos), y, por tanto, podría incluso añadirse estas versiones y hacerse un cuadro de quince modelos, adicionales a prismas y antiprismas regulares. ¿Infinito, trece o quince? ¡Contar es siempre difícil!

Los trece tipos ya fueron representados por Kepler, a quien se debe la justificación de que sólo estos trece tipos sean posibles. Algunos de ellos habían ya sido representados en obras de Pacioli y Jannitzer.

En la tabla siguiente pueden apreciarse los peculiares nombres de los trece poliedros arquimedianos y cómo aparecen combinados triángulos ($C_3$), cuadrados ($C_4$), pentágonos ($C_5$), hexágonos ($C_6$), octágonos ($C_8$) y sólo en dos casos, decágonos ($C_{10}$).

| Nombre | $C$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_8$ | $C_{10}$ | $V$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cuboctaedro | 14 | 8 | 6 | – | – | – | – | 12 | 24 |
| Icosidodecaedro | 32 | 20 | – | 12 | – | – | – | 30 | 60 |
| Tetraedro truncado | 8 | 4 | – | – | 4 | – | – | 12 | 18 |
| Cubo truncado | 14 | 8 | – | – | – | 6 | – | 24 | 36 |
| Poliedro de Lord Kelvin | 14 | – | 6 | – | 8 | – | – | 24 | 36 |
| Dodecaedro truncado | 32 | 20 | – | – | – | – | 12 | 60 | 90 |
| Icosaedro truncado | 32 | – | – | 12 | 20 | – | – | 60 | 90 |
| Gran rombicuboctaedro | 26 | – | 12 | – | 8 | 6 | – | 48 | 72 |
| Gran rombicosidodecaedro | 62 | – | 30 | – | 20 | – | 12 | 120 | 180 |
| Pequeño rombicuboctaedro | 26 | 8 | 18 | – | – | – | – | 24 | 48 |
| Pequeño rombicosidodecaedro | 62 | 20 | 30 | 12 | – | – | – | 60 | 120 |
| Cubo romo (o chato) | 38 | 32 | 6 | – | – | – | – | 24 | 60 |
| Dodecaedro romo (o chato) | 92 | 80 | – | 12 | – | – | – | 60 | 150 |

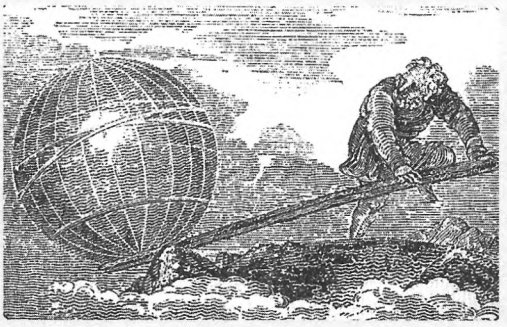
Por su especial interés fijemos la atención en dos casos. El poliedro de Lord Kelvin, que combina hexágonos y cuadrados, surge simplemente truncando el octaedro regular después de haber dividido sus aristas en tres partes iguales. Es el único del grupo que, repetido, llena el espacio.



*Generación del poliedro de Lord Kelvin y del icosaedro truncado.*

### ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287-212 A.C.)

No se conocen muchos detalles biográficos sobre este matemático. Se sabe que viajó por Egipto y que tuvo ocasión de conocer las ideas y trabajos de los matemáticos sucesores de Euclides en Alejandría. Arquímedes de Siracusa fue un reconocido geómetra e inventor de instrumentos militares que supo unir su genialidad matemática con el espíritu técnico y aplicado. Ello le permitió destacar en campos diversos (mecánica, hidrostática, etc.) y sus diversos libros demuestran que en geometría y cálculo fue, posiblemente, la mente más potente de la antigüedad.



*Grabado publicado en* Mechanics Magazine *en 1824 como ilustración de una frase atribuida a Arquímedes: «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo».*

Por su parte, el icosaedro truncado o troncoicosaedro combina doce pentágonos y veinte hexágonos surgiendo de truncar el icosaedro, después de haber dividido sus aristas en tres partes iguales. ¿No tiene uno en casa? ¿No dedica varias horas a la semana para ver como 22 jugadores le dedican 90 minutos a este cuerpo?... Más adelante se describirá como la auténtica pelota de fútbol.

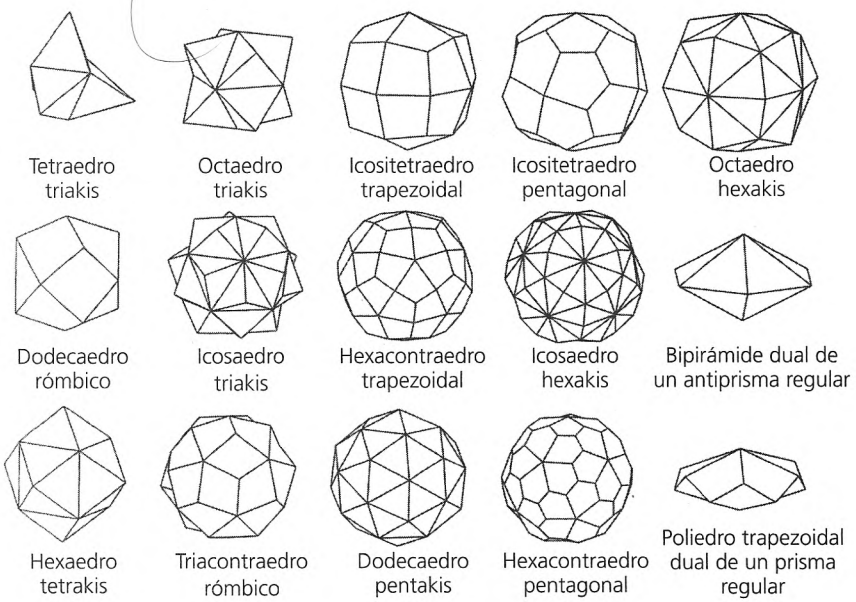
## Poliedros de Catalan

Eugène Charles Catalan (1814-1894) fue un notable matemático belga cuyo nombre ha quedado asociado a una importante sucesión de números y a una curiosa clase de poliedros. Los números de Catalan son 1, 1, 2, 5, 14, 132, 429..., y se corresponden con los números combinatorios $(2n)! / (n + 1)!n!$. De la misma manera que Fibonacci tuvo la inmensa suerte de que su sucesión de números 1, 1, 2, 3, 5... saltara a la fama por su innumerable presencia en la naturaleza y por su relación con el número de oro, Catalan también tuvo la gran fortuna de que su sucesión apareciera en multitud de cálculos combinatorios.

Con los poliedros Catalan también tuvo suerte. Los poliedros de Catalan son los trece tipos de poliedros duales de los arquimedianos, es decir, que se obtienen a

partir de los trece poliedros arquimedianos. Mientras los duales de los cinco poliedros regulares volvían a ser la misma familia, los de Arquímedes daban nacimiento a otros trece totalmente nuevos. No deja de ser curioso que hasta el siglo XIX nadie hubiese prestado atención a estos poliedros, pero la historia a veces presenta estas sorpresas. A continuación figuran los trece poliedros de Catalan.

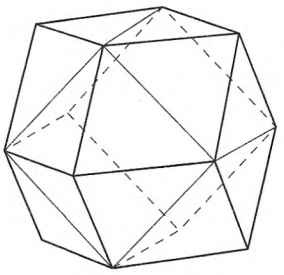
| Nombre | C | V | A | Tipo de caras |
|---|---|---|---|---|
| Dodecaedro rómbico | 12 | 14 | 24 | Rombos |
| Triacontraedro rómbico | 60 | 32 | 90 | Rombos |
| Tetraedro triakis | 12 | 8 | 18 | Triángulos isósceles |
| Octaedro triakis | 24 | 14 | 36 | Triángulos isósceles |
| Hexaedro tetrakis | 24 | 14 | 36 | Triángulos isósceles |
| Icosaedro triatrakis | 60 | 32 | 90 | Triángulos |
| Dodecaedro pentakis | 60 | 32 | 90 | Triángulos |
| Octaedro hexakis | 48 | 26 | 72 | Triángulos escalenos |
| Icosaedro hexakis | 120 | 62 | 180 | Triángulos escalenos |
| Icositetraedro trapezoidal | 24 | 26 | 48 | Cuadriláteros |
| Hexacontraedro trapezoidal | 120 | 62 | 180 | Cuadriláteros |
| Icositetraedro pentagonal | 24 | 38 | 60 | Pentágonos |
| Hexacontraedro pentagonal | 60 | 92 | 150 | Pentágonos |




*Poliedros de Catalan.*

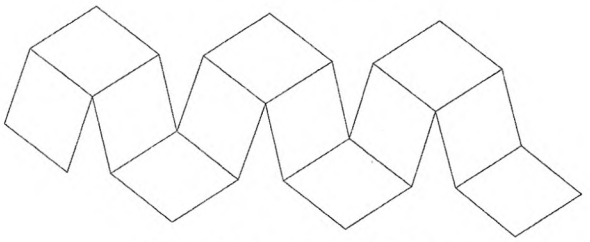
Cabe observar que en cada uno de ellos todas las caras son iguales pero no regulares. Así pues, el número de vértices de un poliedro de Catalan coincide con el número de caras de su correspondiente arquimediano y el número de sus caras, con el de los vértices de su asociado. Curiosamente, todos los poliedros de Catalan admiten una esfera inscrita tangente a todas sus caras, mientras que los arquimedianos de los que provienen admiten una esfera circunscrita pasando por todos sus vértices.

Para entender bien esta familia veamos con detalle a uno de sus destacados miembros: el rombododecaedro formado por doce caras idénticas que son rombos, obtenido a partir del cubo tal y como muestra la figura siguiente.



*Rombododecaedro y su generación.*

En la figura adjunta podemos apreciar un atractivo desarrollo plano de esta figura.

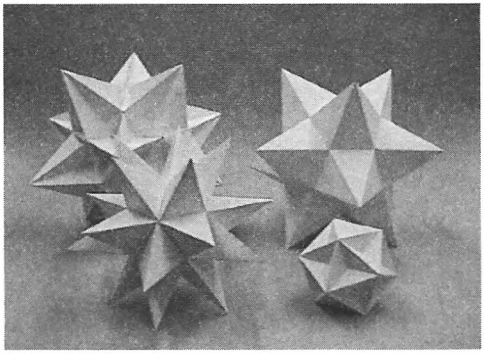


*Desarrollo del rombododecaedro.*

## Poliedros estrellados

Algunos polígonos estrellados, como el pentagrama y la estrella de David, tuvieron un valor místico y decorativo en la antigüedad. El pentagrama nace al unir los vértices de un pentágono o al prolongar las aristas de un pentágono. Análogamente, la estrella de David puede describirse como resultado de prolongar aristas de un hexágono o como superposición de dos triángulos equiláteros girados media vuelta.

Los primeros estudiosos de polígonos estrellados fueron Thomas Bradwardine (1290-1349), Charles de Bovelles (1479-ca. 1566) y Kepler (1571-1630). Pero fue este último quien se preocupó de buscar analogías tridimensionales e intentar describir poliedros estrellados. Kepler se enfrentó a dos procesos alternativos para generar estelaciones poliédricas partiendo de un poliedro: la estelación por aristas, al extender aristas del poliedro de partida, y la estelación por caras, al extender éstas. Y en este proceso Kepler descubrió la primera pareja de poliedros estrellados obtenidos a partir de extensiones de un dodecaedro y de un icosaedro (notando él mismo que los otros tres regulares no daban lugar a ninguna estelación).



*Los cuatro poliedros estrellados de Kepler-Poinsot.*

En 1854 Arthur Cayley bautizó los dos poliedros de Kepler como el pequeño dodecaedro estrellado (12 puntas) y el gran dodecaedro estrellado (20 puntas), los cuales presentan enormes regularidades: son poliedros regulares cóncavos.

Cabe notar que una forma de estelación capaz de generar infinitas «estrellas» es simplemente la colocación de pirámides sobre las caras de poliedros convexos. También maclando poliedros o considerando pirámides con base un polígono estrellado nacen bellas «estelaciones».

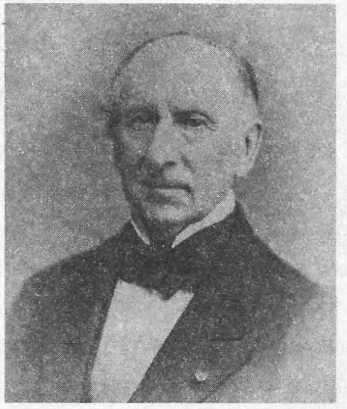
Louis Poinsot inició, sin conocer los estrellados de Kepler, un riguroso y exhaustivo estudio de los poliedros estrellados, admitiendo combinar tanto polígonos usuales como polígonos estrellados en los que las aristas se cortan en puntos que no son vértices (como el pentagrama, la estrella de David, etc.). Al hacer este estudio en casos regulares Poinsot no sólo redescubrió los dos poliedros de Kepler sino que encontró dos nuevos: el gran dodecaedro y el gran icosaedro.

El propio Poinsot conjeturó que los cuatro poliedros estrellados descritos quizás eran los únicos posibles dentro del ámbito más regular. Gracias a los resultados

## LOUIS POINSOT (1777-1859)

Ilustre y reconocido matemático y físico francés, Poinsot supo unir a sus importantes contribuciones sobre mecánica geométrica (en relación a como un sistema de fuerzas actúa en un cuerpo rígido) una obra de 1809 sobre polígonos y poliedros, en la que completó los poliedros estrellados de Kepler añadiendo dos de nuevos. Curiosamente, un cráter lunar lleva su nombre, una calle en París también... y, por supuesto, sus dos joyas poliédricas.

## AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857)



Este brillante parisiense estudió matemáticas en la École Polytecnique e ingeniería de caminos en la École des Ponts et Chaussés. En matemáticas dejó una sorprendente labor investigadora con 789 artículos que dieron pie a una obra completa de 27 tomos. Profundamente católico, con ideas conservadoras y con un carácter difícil (y no exento de épocas depresivas), tuvo grandes admiradores y también un nutrido grupo de enemigos intelectuales.

de Cayley se pudo extender la fórmula de Euler a una nueva relación válida para estrellados. Sin embargo, no fue hasta 1812 cuando Augustin Louis Cauchy pudo demostrar fehacientemente que la conjetura de Poinsot era cierta. Estas cuatro estrellas que hoy denominamos de Kepler-Poinsot eran las únicas regulares posibles.

Como ya se ha dicho, otras estelaciones son posibles, y a lo largo del siglo xx diversos autores han realizado labores concluyentes sobre estas nuevas figuras que van desde tetraedros maclados a las 59 estelaciones icosaédricas. Max Brückner, Albert H. Wheeler, Patrick Du Val, H.S.M. Coxeter y Joseph Bertrand hicieron grandes avances en la creación de estos cuerpos estrellados (en su enumeración, en la descripción de sus posibles generaciones, en el estudio de su simetría, etc.).

## Otras familias poliédricas

Al margen de los cinco reyes y de la corte celestial de familias que se mueven a su alrededor, también hay otros grupos interesantes de figuras poliédricas. Aquí tendrá noticia de algunas de ellas.

### Paralelepípedos

Cubos, prismas de base cuadrada, prismas con todas las caras rectangulares..., todos son casos particulares de los paralelepípedos convexos con sus seis caras formadas por paralelogramos, paralelas dos a dos. Estos poliedros son muy populares, ya que son fácilmente describibles mediante los tres vectores que coinciden en un vértice, siendo su volumen el valor positivo del determinante de dichos vectores. Con las coordenadas cartesianas correspondientes a referencias oblicuas se tiene un lenguaje privilegiado para hacer todo tipo de cálculos con paralelepípedos.

### Policubos

Los populares poliominos son figuras planas formadas por cuadrados idénticos, cada uno de los cuales tiene al menos una arista en común con otro. Su equivalente espacial son los policubos formados por cubos idénticos, cada uno de los cuales comparte al menos una cara con otro. Si usted ha jugado con piezas Lego ya tiene hecho un máster en policubos. La misma idea se puede aplicar para considerar politetraedros, polioctaedros, etc.

### Poliedros con ciertas igualdades

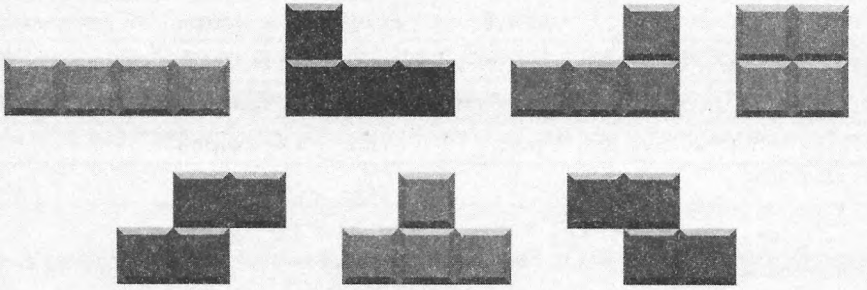
Tiene su interés describir y clasificar familias de poliedros emparentados por alguna regularidad sin necesidad de llegar a exigir todas las condiciones de los poliedros regulares. De este modo se estudian los poliedros convexos con todas las caras polígonos regulares, de los cuales hay 92, tal y como descubrieron N.W. Jonson y V.A. Zalgaller.

En este grupo hay 14 que se obtienen cortando poliedros regulares y arquimedianos; 15, que surgen juntando regulares o bien regulares o arquimedianos con los primeros 14 de la serie; 26, que salen de unir algunos de los anteriores con prismas regulares; 11, que son producto de combinar los primeros con antiprismas regula-

## TETRIS

El rompecabezas interactivo Tetris es, con sus diversas variantes, uno de los videojuegos más célebres y difundidos desde 1984. Su invención se atribuye al ruso Alexey Pajitnov y su nombre procede de la palabra «tetraomino» (cuatro cuadrados). Inicialmente estaba constituido por siete piezas de cuatro cuadrados: tira, cuadrado, pódium, dos piezas L simétricas y dos piezas Z simetrizadas.

A medida que se popularizó el juego y surgieron patentes diversas se introdujeron diversas formas de Tetris 3D, es decir situaciones espaciales donde los tetraominos del plano han dado paso a tetracubos.



*Las siete piezas originales del Tetris.*

res, y 8 que son configuraciones especiales de triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. Los restantes, hasta completar la colección de 92, son combinaciones de dos o tres figuras de las anteriores.

Esta somera descripción ya le puede hacer intuir que es problemático ordenar y enumerar bien los poliedros, eliminando repeticiones y aclarando siempre si lasfiguras que son mutuamente simétricas (acuérdese de las dos L del Tetris) se consideran «dos» piezas o se consideran equivalentes.

También están los poliedros de caras uniformes en los que todas sus caras son iguales, o los poliedros convexos con vértices uniformes (que reciben el mismo número de aristas), etc. Cada exigencia lleva a un tipo de figuras.

Imagine un antiprisma pentagonal regular al cual se ha pegado en una base una pirámide pentagonal regular: este cuerpo tiene diez caras que son triángulos equiláteros y una base pentagonal; por tanto, es uno con caras regulares aunque sus vértices reciben un número distinto de aristas.

## Zonoedros

Son poliedros convexos en los que cada cara tiene el tipo de simetría de un paralelogramo (es invariante por giros de 180°). Piense por ejemplo en paralelogramos como caras.

## Trapezoedros

Se obtienen al unir los centros de las caras de los antiprismas.

## Poliedros ortogonales

Todas sus caras se encuentran formando ángulos de 90° y todas sus aristas son paralelas a los tres ejes cartesianos de referencia. Si se exige convexidad, sólo se obtendrán cajas prismáticas, pero si se entra en la concavidad hay muchos otros (los policubos, por ejemplo).

## Poliedros derivados

A partir de cualquier poliedro, por el principio de dualidad, al unir determinados puntos, surgen nuevas piezas. También al truncar (cortando con planos) nacen diferentes clases de poliedros truncados. Y al separar las caras y rellenar los espacios vacíos con triángulos surgen novedosas figuras.

## Poliedros irregulares

Evidentemente, si no se restringe la atención a las regularidades, entonces hay un campo infinito por explorar. El mundo de los poliedros cóncavos esconde aún grandes misterios. Por ejemplo, existen los poliedros con agujeros: en el caso de policubos se puede formar un «anillo» con siete u ocho cubitos... y luego combinar estas piezas entre ellas o con otras. Y si aún se desea explorar casos más sofisticados, se pueden considerar cuerpos en los que en lugar de caras poligonales planas existan polígonos alabeados situados espacialmente, o se puede optar por situar trozos de superficies regladas o incluso deformaciones topológicas... Si se visitan las numerosas páginas webs dedicadas a los poliedros se podrá encontrar muchísimos tipos clasificados..., y una infinidad de cuestiones abiertas que esperan solución.

## Hipercubos en dimensión 4

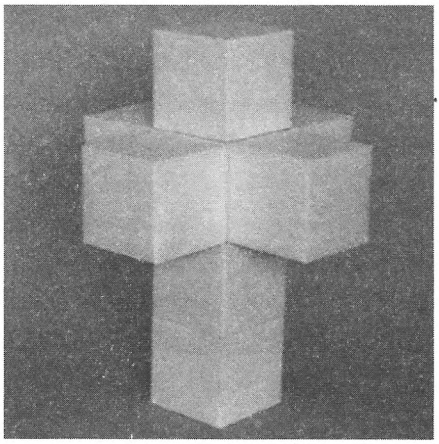
Partiendo de nuestro contexto, que es el de la dimensión 3 (largo-ancho-alto), una figura especialmente emblemática para montar es el cubo: caras cuadradas idénticas, igualdad de aristas y ángulos, perfecta perpendicularidad entre aristas y caras, paralelismos ideales, indicación de tres direcciones espaciales, etc. Parece obvio que por su simplicidad y belleza preferimos pensar en un cubo tridimensional en lugar de considerar otras alternativas más sofisticadas. ¿Cuál es la figura correspondiente al cubo en dimensión 2? Un cuadrado. ¿Y en dimensión 1? Un segmento. ¿Y en dimensión 0? Un punto. La secuencia es mostrada en la tabla adjunta.

| Dimensión | Figura | Vértices | Aristas | 2-caras | 3-caras |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Punto | 1 | – | – | – |
| 1 | Segmento | 2 | 1 | – | – |
| 2 | Cuadrado | 4 | 4 | 1 | – |
| 3 | Cubo | 8 | 12 | 6 | 1 |

A partir de aquí es normal dar el siguiente paso ¿Qué es un cubo en dimensión 4? La respuesta rápida es considerar el tiempo como la cuarta dimensión y conformarse con que «un cubito terrenal cronometrado» ya incluye cuatro dimensiones. Pero la coherencia matemática enseguida susurra al oído: «con cuatro segmentos formé un cuadrado, con seis cuadrados formé un cubo, con... ocho cubos formaré un hipercubo». Y si observa la columna de los vértices en la tabla anterior (1, 2, 4, 8) puede decidir con buen criterio que el hipercubo tendrá 16 vértices, 32 aristas y 24 caras planas...

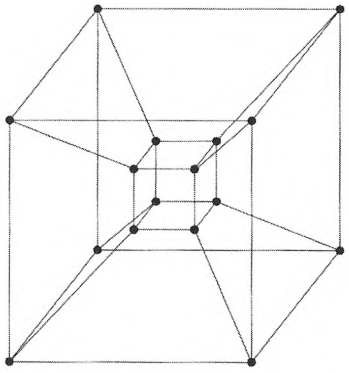
| Dimensión | Figura | Vértices | Aristas | Caras | 3-caras | 4-caras |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | Hipercubo | 16 | 32 | 24 | 8 | 1 |

Conocemos, pues, muchas cosas de un hipercubo. Entonces es normal que se pretenda además «ver» a esta criatura. Por un momento piense en el cubo y como «ve» al cubo desarrollado en el plano formando una cruz de seis cuadrados, disponibles para ser montados en un cubo. Ahora tiene ocho cubos para «montar» su hipercubo. Forme una pila de cuatro cubos y alrededor del tercero enganche los otros cuatro... Ya tiene su cruz en 3D, desarrollo en el espacio del hipercubo. Algo es algo.



Esta fue la «cruz» que Salvador Dalí consideró en diversos cuadros en los que representó a la figura de Jesucristo levitando en el espacio. Pero puede seguir buscando. Un cubo se identifica fácilmente cuando muestra sus caras cuadradas. ¿Qué mostrará un hipercubo? ¡Cubos! Puede imaginar esculturas cúbicas que en cada «cara» muestre un cubo en perspectiva.

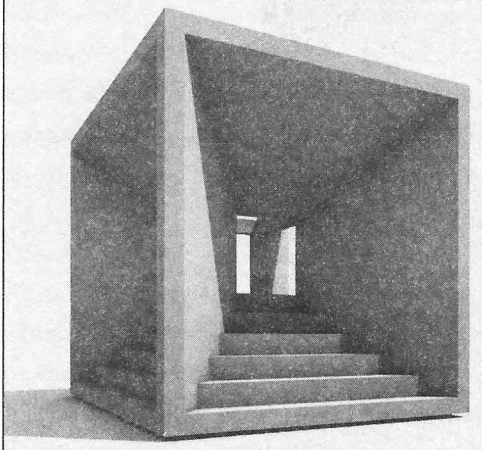
También se puede pensar en que las figuras «por sus secciones se conocerán» e imaginar las secciones «espaciales» de su hipercubo.



*Representación de un hipercubo en el plano.*

Puede darse rienda suelta a la imaginación y creer en una cuarta dimensión como el color y pintar adecuadamente un modesto cubo blanco de un rojo explosivo... ¿Acaso las «dimensiones» de la arquitectura son sólo largo-ancho-alto? ¿No hay otros parámetros independientes de éstos, medibles e interesantes: color, luminosidad, temperatura, reverberación acústica, etc.?

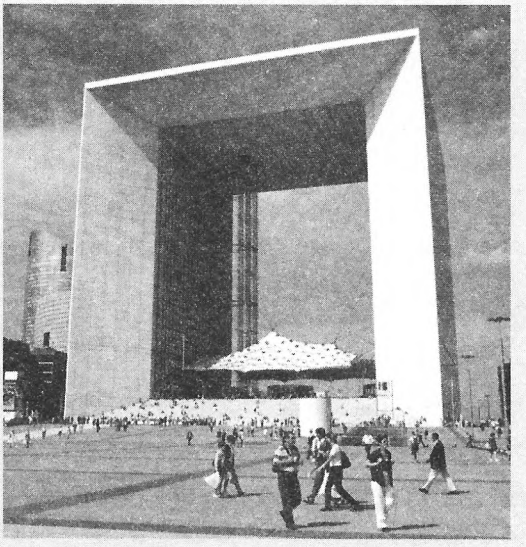
## EL MONUMENTO A LA CONSTITUCIÓN



El arquitecto Miguel Ángel Ruiz-Larrea diseñó este bello monumento a la Constitución española de 1978 para los jardines del Museo de Ciencias Naturales del Paseo de la Castellana de Madrid. La obra fue planificada como un cubo de hormigón blanco de 7,75 m de lado. Escaleras al margen, se trata de una visualización del hipercubo, pues en cada una de las «caras» de este monumento se puede ver un cubo en perspectiva.

## EL GRAN ARCO DE LA DEFENSA

El monumento de París llamado Grande Arche de la Fraternité, pero popularmente conocido como La Défense (por encontrarse en el distrito que lleva este nombre), fue un proyecto del danés Otto von Spreckelsen, quien superó con creces en 1982 a los otros 423 arquitectos que se presentaron al concurso de ideas. Entre 1982 y 1989 se construyó este nuevo arco de triunfo que evoca un hipercubo. Al mirar por las caras vacías del cubo edificado, lo que se ve es un «cubo en perspectiva». Lo sorprendente son las medidas y la funcionalidad. Mide 108 m de ancho, 110 m de alto y 112 m de profundidad; pesa 300.000 toneladas soportadas por doce pilares... y a izquierda y derecha hay 35 plantas de oficinas gubernamentales; además, la parte superior acoge un centro de conferencias y exposiciones, un museo de informática, un restaurante y un mirador.



## Los tres politopos regulares

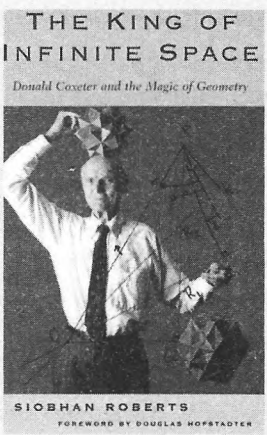
La propuesta de este apartado es visitar con detalle los politopos regulares en los diferentes espacios de dimensión: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Empecemos nuestra visita en el plano, la dimensión 2. Los polígonos regulares son figuras convexas (contienen cualquier segmento determinado por dos puntos de la figura) cuyos lados y ángulos son iguales: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, polígono regular de $n$ lados... Existen infinitos polígonos regulares. Éstos servirán para ser las caras de las figuras regulares de dimensión 3. Así, creyendo disponer de un enorme taller de polígonos regulares, pasamos a trabajar tridimensionalmente y... ¡sorpresa! En dimensión 3 los poliedros regulares son figuras convexas cuyas caras son todas polígonos regulares iguales y cuyos vértices reciben el mismo número de aristas..., pero sólo hay cinco poliedros regulares. Esto es un hecho sorprendente: al aumentar una dimensión... ¡hemos pasado de infinitos casos a cinco!

Las 2-caras de los poliedros regulares eran polígonos regulares, las 1-caras (lados o aristas) eran segmentos..., luego las figuras regulares en dimensión 1 serán segmentos. Por lo tanto, en dimensión 1, la recta, sólo hay, de hecho, un tipo de figura regular: el segmento.

Pasemos a la dimensión 4: tenemos a disposición los cinco tipos de poliedros regulares para «pensar» las 3-caras de los politopos regulares. Nos encontramos las siguientes figuras estudiadas por H.S.M. Coxeter:

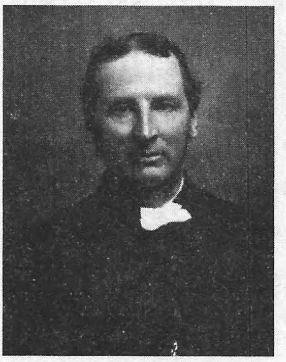
### HAROLD SCOTT MACDONALD COXETER (1907-2003)

Nacido en Londres, Coxeter estudió matemáticas en el Trinity College de Cambridge, pero desarrolló toda su carrera académica en la universidad canadiense de Toronto. Se le considera uno de los grandes geómetras del siglo xx, habiendo escrito multitud de trabajos con grandes eminencias de la geometría y doce influyentes libros. El estudio de los poliedros y del caso de poliedros en espacios de dimensión superior a 3 le debe contribuciones extraordinarias. Coxeter tuvo gran amistad con el famoso artista holandés M. Escher, quien recibió de él numerosas sugerencias para convertir en arte muchas propiedades que Coxeter había ideado.




*Portada de la biografía de Coxeter realizada por Siobhan Roberts.*

## EDWIN ABBOTT ABBOTT (1838-1926)



Profesor, escritor y teólogo inglés, Abbott se educó en la City of London School y en el St John's College de la Universidad de Cambridge, donde alcanzó altos honores en obras clásicas, matemáticas y teología. En 1862 tomó los hábitos religiosos y tuvo una intensa vida docente. Su trabajo más famoso, *Flatland: A Romance of Many Dimensions* (*Planilandia, una novela de muchas dimensiones*), lo publicó en 1884 bajo el pseudónimo de A. Square. El libro ha visto muchas ediciones. *Flatland* es un cuento de las aventuras de un cuadrado en Linealandia y Espaciolandia. Así, el protagonista explica cómo son los seres poligonales de la sociedad plana. En un momento de la narración, figuras tridimensionales cruzan el plano apareciendo en él sólo sus secciones planas, que son lo «único» visible por los habitantes de Planilandia. El cuadrado se atreve a salir del plano y a viajar por el espacio tridimensional, e intenta la misión imposible de hacer comprender a sus colegas bidimensionales que más allá de «su lugar» hay otra realidad con más dimensiones. En este libro Abbott buscó popularizar las nociones de geometría multidimensional, pero el texto es también una sátira de los valores sociales, morales y religiosos de la época. Abbott se retiró en 1889, y se dedicó a la literatura y a la teología, campos en los que escribió numerosas obras.

El hipercubo, ya visitado en el apartado anterior, teóricamente determinado por ocho cubos como 3-caras, tiene 24 2-caras, 32 1-caras y 16 0-caras.

El simplejo regular es la figura que generaliza la secuencia «segmento, triángulo equilátero, tetraedro». Si el tetraedro nacía como pirámide de un triángulo equilátero y un punto convenientemente situado en la tercera dimensión, el simplejo regular nacerá como una pirámide de base un tetraedro tridimensional y un punto en la cuarta dimensión bien situado. El simplejo regular tiene 5 3-caras (tetraedros), 10 2-caras, 10 1-caras y 5 0-caras.

El politopo de 16 3-caras es el recíproco del hipercubo, es decir, la versión 4D del octaedro que nacía de unir los centros de gravedad de las caras de un cubo.

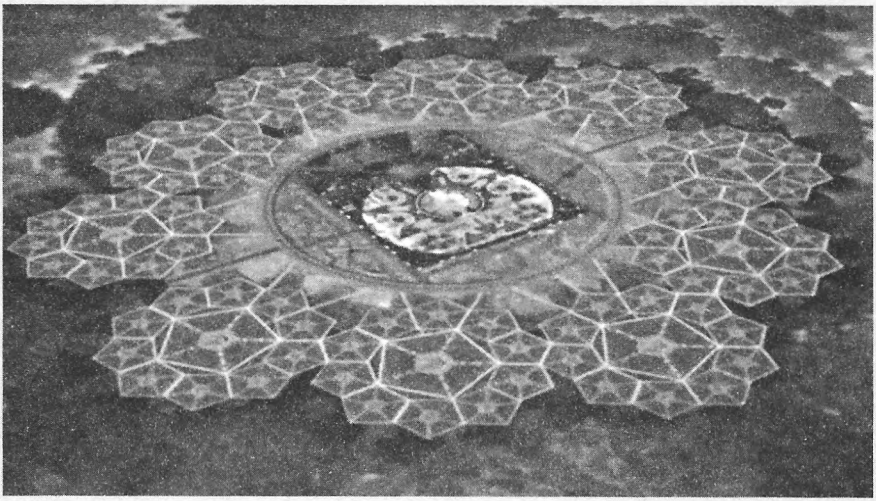
El politopo de 24 3-caras tiene por 3-caras a 24 octaedros regulares y no tiene un análogo tridimensional.

El politopo de 600 3-caras es una extraña criatura (cuya figura análoga será la formación del icosaedro a partir de un antiprisma pentagonal añadiendo dos pirámides pentagonales). Tiene 120 0-caras, 720 1-caras y 1.200 2-caras.

## POLIEDROS Y FICCIÓN

El *Planilandia* de Abbot influyó en muchas otras narraciones de ficción, en las que el tema de sumergir el espacio «real» en uno de dimensión 4 o más se ha explotado con mucha imaginación. Este interés alcanzó su culminación entre 1870 y 1920. En esos años se convirtió en tema frecuente en la literatura fantástica, el arte e incluso las teorías científicas. La cuarta dimensión, entendida como dimensión espacial adicional (no como dimensión temporal, como en la teoría de la relatividad) apareció en las obras literarias de Oscar Wilde, Fiódor Dostoyevski, Marcel Proust, H.G. Wells, Lewis Carroll y Joseph Conrad. Se citan a menudo como clásicos del tema *Into the Fourth Dimension*, novela de 1926 de Ray Cummings; el cómic *Eugene the Jeep*, que apareció en 1936 como un personaje de la tira protagonizada por *Popeye*, y el relato de 1941 *And He Built a Crooked House*, de Robert A. Heinlein. Este interés pronto trascendió al cine, donde abundan las películas en las que la cuarta dimensión juega un papel esencial en el argumento, y actualmente en los videojuegos está ocurriendo el mismo fenómeno.

Desde el punto de vista académico, el estudio general de la geometría de la cuarta dimensión se debe a los trabajos de Bernhard Riemann. El matemático americano Thomas Banchoff ha realizado magníficas películas sobre las seciones de un cubo de dimensión cuatro vistas en la tercera dimensión y una versión moderna en DVD de *Planilandia*. En el fondo, en este tema subyace el viejo mito de la caverna de Platón, en el cual el protagonista sólo ve como realidad inmediata las sombras de todo lo que circula por el exterior.



*Fotograma perteneciente a la versión de* Planilandia *dirigida por Thomas Banchoff.*

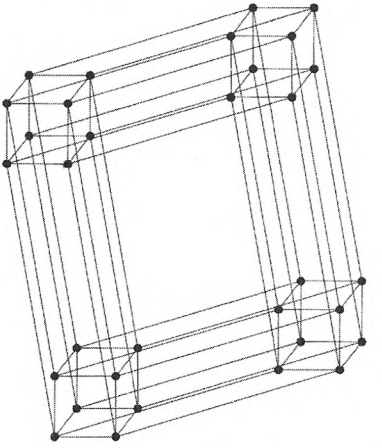
El politopo de 120 3-caras nace como recíproco del anterior: sus 600 vértices son los centros de los 600 tetraedros-caras.

En total, seis politopos regulares en dimensión 4: al aumentar una dimensión (de 3 a 4) hemos aumentado de cinco poliedros regulares a seis politopos regulares. Parece «razonable» y esto nos predispone a la predicción plausible de que en dimensión 5 debería haber siete politopos regulares... Pero en cualquier espacio de dimensión $n$, con $n \geq 5$ , sólo hay tres politopos regulares: el $n$-cubo, el $n$-tetraedro y el $n$-octaedro.

El $n$-cubo tiene $2^{n-p}\binom{n}{p}$ $p$-caras, el $n$-simplejo cuenta con $\binom{n+1}{p+1}$ $p$-caras y el $n$-octaedro es recíproco del $n$-cubo. El siguiente cuadro resume la situación.

| Dimensión | Figuras Regulares | Tipos |
|---|---|---|
| 1 | Segmento | 1 |
| 2 | Polígonos regulares | Infinitos |
| 3 | Poliedros regulares | 5 |
| 4 | Politopos regulares | 6 |
| $n \geq 5$ | Politopos regulares | 3 |

Así, la regularidad omnipresente para $n \geq 3$ es la del $n$-cubo, $n$-tetraedro y $n$-octaedro; la regularidad en la línea es simple convexidad; el plano es rarísimo; el icosaedro y el dodecaedro son dos regalos del cielo, auténticas patologías espaciales, y el espacio de cuatro dimensiones es muy extraño respecto a todos los espacios que están más allá de la tridimensionalidad.



*Una representación plana del cubo de dimensión 5.*

Los trabajos matemáticos sobre geometrías multidimensionales y geometrías no euclídeas habían sido considerados durante años como simples abstracciones matemáticas hasta que Henri Poincaré probó que el grupo de transformaciones de Lorentz que dejaban invariantes las ecuaciones del electromagnetismo podían ser interpretadas como «rotaciones» en un espacio de cuatro dimensiones. Más tarde, los trabajos de Einstein y la interpretación geométrica de éstos por parte de Hermann Minkowski llevaron a la aceptación de la cuarta dimensión como una descripción necesaria para explicar los hechos observados relacionados con el electromagnetismo. Sin embargo, aquí la «cuarta dimensión» no era un lugar separado del espacio tridimensional, ni tampoco una dimensión espacial análoga a las otras tres dimensiones espaciales, sino una dimensión temporal. En la teoría general de la relatividad el campo gravitatorio es explicado como un efecto geométrico de la curvatura de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

Capítulo 3

# Secretos poliédricos sorprendentes

*Los ojos captan los más sutiles cálculos matemáticos a despecho de las deformaciones de la perspectiva. Y aquí reside uno de los secretos de la melancólica belleza de ciertos cuadros.*
Salvador Dalí

Visitadas ya las familias nobles del mundo de los poliedros, se le invita ahora a descubrir algunos de los secretos mejor guardados. Son resultados, relaciones, propiedades o ejemplos que resultan sorprendentes. Un componente importante de estas sorpresas es el hecho de que los poliedros son tridimensionales y, por tanto, presentan grandes diferencias con las figuras planas que nos resultan más familiares. Piénsese en un caso bien conocido: hay infinitos polígonos regulares en el plano pero sólo cinco poliedros regulares; que el salto de la dimensión 2 a la dimensión 3 haga pasar de infinitas posibilidades a sólo cinco ya es un aviso estremecedor. Considérese también los pentágonos regulares, con los cuales nunca se podrá hacer un mosaico (pues no hay manera de que los ángulos se acoplen bien); sin embargo, con doce pentágonos regulares en el espacio se puede encerrar un maravilloso cuerpo que es el dodecaedro.

Durante la visita anterior a los diversos poliedros se ha tenido ocasión de apreciar descriptivamente algunas de sus características mas relevantes. En este apartado se descubrirán muchas más, pero además se podrá apreciar a través de sencillos cálculos cómo se analiza este mundo, cómo se hace el trabajo investigador en esta área.

## La fórmula de Euler

¿Qué tienen en común un cubo, una pirámide gigante, un dodecaedro, un prisma minúsculo de base hexagonal y un rombododecaedro? Aparte de ser poliedros, sus características métricas son muy diferentes; sus caras, diversas, sus ángulos varían, sus medidas también son dispares..., pero tienen una mágica relación que se verifica en todos los casos:

### LEONHARD EULER (1707-1783)

Euler ha sido uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos. Nació en Suiza, pero pasó gran parte de su vida en las Academias de San Petersburgo y Berlín. Publicó 886 trabajos, la edición de sus contribuciones precisó de 87 tomos... y tuvo trece hijos. Brilló especialmente en álgebra, teoría de números, geometría, análisis, mecánica, astronomía, física, etc. y numerosos son los teoremas, fórmulas y conceptos que hoy llevan su nombre. Se ha hecho popular la frase sobre Euler: «Él es el maestro de todos nosotros».

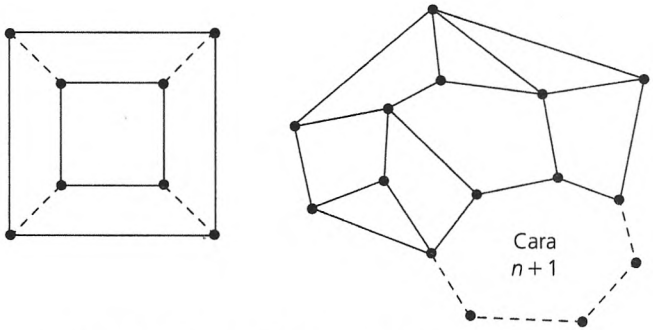
Caras + Vértices = Aristas + 2,

la sorprendente fórmula que descubrió Euler para *todos* los poliedros convexos.

## La fórmula $C + V = A + 2$

Considérese un polígono convexo con sus $n$ vértices $v_1, v_2 \ldots, v_n$ y las correspondientes aristas $v_1v_2, v_2v_3 \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. Al margen de las longitudes de los lados, de los ángulos, de la rectitud de las aristas, etc., una relación que siempre vale es que el número de aristas es igual al número de vértices, relación tan trivial que hasta podría pasar desapercibida.

Pasemos ahora al espacio y consideremos un poliedro convexo cualquiera determinado por $V$ vértices, $A$ aristas y $C$ caras poligonales. Si desde un punto interior se proyecta el poliedro en una esfera grande que lo incluya, quedan marcadas en dicha esfera las líneas y los vértices correspondientes, de forma que los valores de $V$, $A$ y $C$ se mantendrán en la configuración esférica.




*Grafo asociado a un cubo y al crecimiento de grafo poligonal.*

También puede hacerse corresponder el poliedro con un mapa poligonal con el mismo número de aristas $A$, el mismo número de vértices $V$ y $C$ caras: $C-1$ son polígonos y una es la región del plano externa al mapa (cara que limita al mapa con un polígono). Entonces puede observarse inductivamente que si $C=2$ se tiene un triste polígono y $V=A$, o lo que es lo mismo $C+V=A+2$. Si con $C=n$ se tienen $V_n$ vértices, $A_n$ aristas y se supone inductivamente que $n+V_n=A_n+2$, entonces con $C=n+1$ deberá fijarse la atención en una cara (la $n+1$). Esta configuración se obtiene al añadir una cierta cantidad de $K$ vértices y $K+1$ aristas a un mapa con $n$ caras, $V_n$ vértices y $A_n$ aristas. Por tanto,

$$C+V_{n+1}=n+1+V_n+K=(n+V_n)+(K+1)=(A_n+2)+(K+1)=$$
$$=(A_n+K+1)+2=A_{n+1}+2,$$

y así queda establecido el famoso teorema:

En todo poliedro convexo vale la fórmula de Euler $C+V=A+2$.

Si se piensa un poco, aunque en primera instancia pueda parecer un resultado vulgar (¡hace años que se recita el «caras más vértices igual a aristas más dos»!), se trata de una relación sorprendente: es algo que vale para cualquier poliedro convexo, no importa ni el tipo de caras, ni los ángulos en las caras poligonales, ni los ángulos entre los planos de las caras, ni las longitudes de las aristas... Una fórmula para una familia infinita y dispar es algo que debe llamar la atención. No es normal. Apenas existen

## LA CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

A partir de la fórmula de Euler en poliedros convexos asociados a la esfera se puede considerar la llamada característica de Euler-Poincaré: $\chi = V - A + C$. En el caso esférico se ha visto que $\chi = 2$. Si se considera un toro (superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de un eje exterior a la misma), se obtiene $\chi = 0$ y, por lo tanto, en «poliedros toroidales» $C+V=A$. El género de una superficie $g = \frac{1}{2}(2-\chi)$ se corresponde con el número de «agujeros» de la misma (en la esfera $g = 0$, en el toro $g = 1$...). Así, la $\chi$ o $g$ son características de la superficie, es decir, el «2» en el $C+V=A+2$ esconde la presencia del «carácter esférico» de los poliedros convexos. Esta relación, en cambio, no juega bien con los poliedros cóncavos.

### VALORES RAZONABLES DE $C$ Y $V$

Si se tiene un poliedro convexo, entonces $C + V = A + 2$ y, por tanto, $A = C + V - 2$, pero ¿qué valores razonables para $C$ y $V$ pueden tenerse? ¿Hay algunas restricciones que se deben tener en cuenta para $C$ y $V$? ¿Se imagina $C = 1.000$, $V = 2$? Evidentemente, $V \geq 4$, pues con menos de cuatro vértices no se tendrá un poliedro, y por lo menos en cada vértice concurrirán tres aristas, así que $3 \cdot V \leq 2A$, al ser cada arista determinada por dos vértices. Por tanto, $3V \leq 2C + 2V - 4$, de lo que resulta $4 \leq V \leq 2C - 4$. También $C \geq 4$, pues al menos se necesitan cuatro caras para cerrar un trozo de espacio y como mínimo se necesita disponer de tres aristas para cada cara, o sea $3C \leq 2A = 2C + 2V - 4$, de donde $4 \leq C \leq 2V - 4$. Las relaciones anteriores son las que corresponden a los poliedros convexos del espacio.

fórmulas que valgan para figuras tan distintas. Es una fórmula subversiva que se ríe de las características métricas para dar una relación numérica puramente combinatoria.

## Euler versus Descartes vía Pólya

Considérese un poliedro convexo $P$. Para cada vértice $v_i$ se calcula su defecto angular $\Delta_i$, que es la diferencia entre $2\pi$ y la suma $S_i$ de los ángulos concurrentes en $V_i$. En cualquier vértice de un tetraedro el defecto angular será de $2\pi - 3\frac{\pi}{3} = \pi$ y en el vértice de un cubo valdrá $2\pi - 3\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Se indica como $\Delta$ el defecto angular total del poliedro $P$, es decir, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ si $P$ tiene $n$ vértices $V_1, V_2 \ldots, V_n$. ¿Cuánto vale $\Delta$? El descubrimiento de René Descartes fue que $\Delta$ vale siempre $4\pi$ radianes (o $720^\circ$ si se trabaja en grados).

El siguiente resultado es, francamente, sorprendente en sí mismo:

$$\Delta = 2\pi(C + V - A).$$

El siguiente argumento, muy, muy simple, fue dado por George Pólya. Sea $P$ un poliedro convexo con $C$ caras, $A$ aristas y $V$ vértices, y sean $\Delta_1 = 2\pi - S_1$, $\Delta_2 = 2\pi - S_2, \ldots \Delta_v = 2\pi - S_v$ los $V$ defectos angulares de los vértices. Si $S$ indica la suma total de todos los ángulos de las caras de $P$ se tendrá:

$$S = \sum_{i=1}^{V} S_i = \sum_{i=1}^{V} (2\pi - \Delta_i) = 2\pi V - \sum_{i=1}^{V} \Delta_i = 2\pi V - \Delta.$$

Por otra parte, también se puede calcular el mismo $S$ de la siguiente manera. Si $C = C_3 + \ldots + C_k$, donde cada $C_i$ indica el número de caras con $i$ aristas, resultará (puesto que en una cara poligonal de $i$ aristas los ángulos suman $i \cdot \pi - 2\pi$ al descomponerse el polígono en $i$ triángulos):

$$S = \sum_{i=3}^{k} (i-2)\pi C_i = \left( \sum_{i=3}^{k} iC_i - 2\sum_{i=1}^{k} C_i \right)\pi = (2A - 2C)\pi,$$

e igualando con la expresión $S = 2\pi V - \Delta$ anterior, se obtiene:

$$(2A - 2C)\pi = 2\pi V - \Delta$$

es decir, $\Delta = 2\pi(C + V - A)$, como se quería demostrar.

Nótese que si vale el teorema de Descartes, es $\Delta = 4\pi$ y, por lo anterior, $C + V - A = 2$, es decir, vale la fórmula de Euler. Y al revés, si $C + V - A = 2$ resulta $\Delta = 4\pi$. Así pues, de forma independiente Descartes y Euler descubrieron dos hechos equivalentes.

## RENÉ DESCARTES (1596-1650)

René Descartes nació en Descartes (entonces era La Haye en Touraine) y se educó en el colegio jesuita de La Flèche en Anjou, especializándose en lenguas clásicas, lógica, filosofía y matemáticas. Por su poca salud fue autorizado a levantarse cada día a las 11 de la mañana, costumbre que pudo mantener a lo largo de su vida. Se graduó en la Universidad de Poitiers en 1616, estuvo en escuelas militares y viajó por toda Europa. Interaccionó con Mersenne, Huygens, von Schooten, Beckman..., y mantuvo contactos epistolares con muchos científicos. Entre 1628 y 1648 se instaló en Holanda.

Aportó ideas novedosas en filosofía, lógica, óptica, meteoritos, física, etc., publicando obras de gran impacto en el pensamiento de la época y también en el de los siglos siguientes. Su obra matemática culminante es *La geometría*, un apéndice a su popular *Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans les sciences.* Cometió el error de ir en 1649 a dar clases en Estocolmo a la reina Cristina de Suecia, quien requería sus lecciones a las cinco de la madrugada. Descartes cumplió su compromiso, pero murió de neumonía pocos meses después.

## La fórmula de Euler con sólo caras y vértices

Ya hemos visto las limitaciones sobre el número de caras $C$ y el número de vértices de un poliedro convexo. El número de aristas $A$ dependía totalmente de $C$ y $V$. Para la total eliminación del número $A$, el precio que se deberá pagar es simplemente ser «más explícito» con $C$ y $V$, concretando lo que se esconde detrás de dichos números.

A partir de un poliedro convexo $P$ con $C$ caras y $V$ vértices se indica por $C_n$ el número de caras con $n$ aristas y por $V_n$ el número de vértices con $n$ aristas. Así, se pueden escribir sumas (¡finitas!) del siguiente estilo:

$$C = C_3 + C_4 + C_5 + C_6 \ldots \tag{1}$$

Y también:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 \ldots \tag{2}$$

Como una arista pertenece a la vez a dos caras se deberá tener:

$$3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 \ldots = 2A. \tag{3}$$

Y como cada arista une dos vértices, también será:

$$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 \ldots = 2A. \tag{4}$$

Si nos ayudamos entonces de la fórmula de Euler doblada, $2C + 2V = 4 + 2A$, usando (1), (2), (3) y (4) resultará la maravillosa expresión siguiente:

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 = 12 + 2V_4 + 4V_5 + \ldots + C_7 + 2C_8 + \ldots \qquad (\star)$$

## Siempre hay un triángulo, un cuadrilátero o un pentágono

Piense un poco en el mundo poliédrico que habita en su mente, ¿recuerda algún poliedro convexo que no tenga ni un solo triángulo, cuadrilátero o pentágono? Claro que no, este poliedro convexo no existe. Observe la fórmula anterior (*) y note que en la parte derecha al menos se tendrá un 12, es decir, siempre

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 \geq 12.$$

Luego los números $C_3$, $C_4$ y $C_5$ no pueden ser simultáneamente nulos..., y resulta que:

En todo poliedro convexo hay siempre por lo menos un triángulo o un cuadrilátero o un pentágono.

Podrá haber otras caras, pero al menos una cara de este tipo de tres, cuatro o cinco aristas debe estar. Si recuerda ahora que un poliedro regular es un poliedro convexo que tiene todas las caras poligonales regulares idénticas y todos sus vértices reciben el mismo número de aristas, puede revisar de nuevo el conocido resultado:

Los únicos poliedros regulares son el tetraedro, el octaedro, el icosaedro, el cubo y el dodecaedro.

En efecto, por lo que acaba de ver (siempre hay un triángulo o un cuadrilátero o un pentágono) y por la definición de poliedro regular, los únicos regulares estarán formados enteramente o por triángulos equiláteros o por cuadrados o por pentágonos regulares (pues los hexágonos ya no forman ángulo sólido).

Si sólo se tienen triángulos equiláteros para combinar, recordando sus ángulos de 60°, la fórmula (*) lleva a $3C_3 = 12 + 2V_4 + 4V_5$. El tetraedro tiene $C_3 = 4$ (y, por supuesto, $V_3 = 4$, $V_4 = V_5 = 0$). El octaedro corresponde al caso $V_4 = 6$, $V_3 = V_5 = 0$ y $C_3 = 8$. El icosaedro tiene $C_3 = 20$ y $V_5 = 12$. Con cuadrados sólo pueden tenerse vértices con tres aristas, luego $V_4 = V_5 = 0$ y por (*) $2C_4 = 12$, o sea $C_4 = 6$, el cubo. Con pentágonos regulares sólo se podrán formar vértices de grado 3, luego por (*) $C_5 = 12$, que es el dodecaedro. Nótese que este teorema combina la relación general euleriana con las características angulares de los polígonos implicados que delimitan los posibles rincones espaciales que pueden formarse con triángulos, cuadrados o pentágonos.

## No todas las caras pueden ser diferentes

Si usted es una persona inquieta, es posible que ante las tradicionales repeticiones geométricas intente plantear la búsqueda de figuras en las que no se den tales repeticiones. Por ejemplo, puede plantearse cómo formar un poliedro convexo en el que todas sus caras sean polígonos diferentes (un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono...). Sería como tener un poliedro-muestrario. La sorpresa es que nunca podrá existir este poliedro.

Pase de la sorpresa a la convicción contando así. Sea $P$ un poliedro convexo con $C(P)$ caras y considérense los dos parámetros siguientes:

$r(P)$ es la cantidad de números naturales $i$ para los cuales hay en $P$ una cara con $i$ aristas.
$K(P)$ es el número de lados de la cara que tiene más vértices o aristas en $P$.

Así, con un cubo $P$ tendría $r(P) = 1$, $K(P) = 4$, pero una pirámide recta $P$ de base pentagonal sería $r(P) = 2$, $K(P) = 5$.

Si $P$ tiene una cara con $K(P)$ lados, como cada uno de estos lados es una arista de otra cara, en total tendrá por lo menos $K(P) + 1$ caras, es decir,

$$C(P) \geq K(P) + 1.$$

Como el mismo $r(P)$ no podrá superar nunca al cardinal del conjunto $\{3, 4, 5\ldots, K(P)\}$, será:

$$r(P) \leq K(P) - 2.$$

De este modo, las desigualdades anteriores para $C(P)$ y $r(P)$ llevan a:

$$C(P) - r(P) \geq K(P) + 1 - (K(P) - 2) = 3.$$

Si usted pudiera construir un poliedro convexo con todas las caras poligonales de diferente tipo, entonces debería tener que el número total de caras $C(P)$ debería coincidir con $r(P)$ (cantidad de naturales $i$ para los que hay una cara con $i$-aristas), lo que llevaría a la aberrante contradicción $C(P) - r(P) = 0 \geq 3$. ¡Siempre hay algún tipo de cara poligonal repetida!

## Los tres poliedros austeros

El cubo con seis cuadrados, una caja con seis rectángulos, una pirámide con tantos triángulos (al menos tres) como lados tiene la base, en los prismas rectos diversos (más de tres) rectángulos... No será evidente encontrar uno en el que al menos una cara no se repita al menos tres veces... De hecho, sólo hay tres tipos de poliedros convexos con caras que no se repitan al menos tres veces. Las figuras siguientes se los presenta vistos desde arriba:

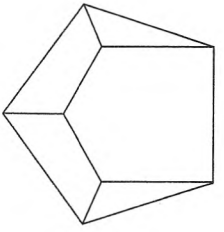


Fig. 1

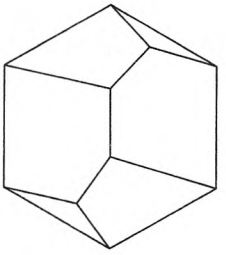


Fig. 2

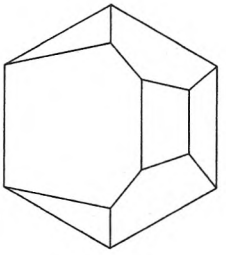


Fig. 3

Si $C_i$ indica las caras con $i$-aristas, verá que en la fig. 1 tiene $C_3 = C_4 = C_5 = 2$; en la fig. 2, $C_3 = C_4 = C_5 = 2$ y $C_6 = 1$, y en la fig. 3, $C_3 = C_4 = C_5 = 2$ y $C_6 = 2$. El motivo de esta escasez es el siguiente: sabemos que $C + V = A + 2$ y como en cada vértice hay por lo menos tres aristas, también sabemos que $3V \leq 2A$; por tanto, se tiene (si $C_n \leq 2$ para todo $n$):

$$12 = 6C + 6V - 6A \leq 6C - 2A = 6\sum_{n\geq 3} C_n - \sum_{n\geq 3} nC_n =$$

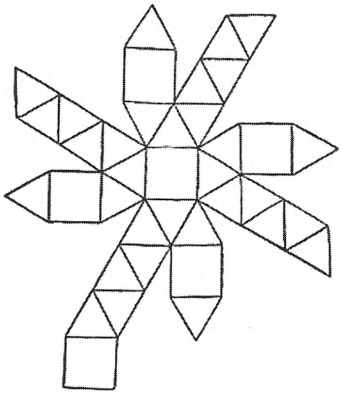
$$= 3C_3 + 2C_4 + C_5 + \sum_{n\geq 7}(6-n)C_n \leq 3C_3 + 2C_4 + C_5 + 0 \leq 3\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2 = 12,$$

lo cual le lleva a la maravillosa conclusión $C_n = 0$ para $n \geq 7$, $C_3 = C_4 = C_5 = 2$. Así que de heptágonos en adelante ni uno. De triángulos, cuadriláteros y pentágonos siempre habrá dos... y de hexágonos podrá haber ninguno, uno o dos, y de ahí salen los tres modelos de las figuras anteriores. Modelos ciertamente excepcionales en el mundo poliédrico.

## Los diversos desarrollos planos

Cortar poliedros y observar algunas disecciones sofisticadas de los mismos no siempre es una tarea fácil. Son divisiones-rompecabezas que no siempre resultan ni evidentes de entrada ni fáciles de montar una vez se han desperdigado las partes. En general, es mucho más sencillo montar poliedros a partir de sus desarrollos planos.

En el breve recorrido histórico del primer capítulo ya se ha indicado que fue Durero (1471-1528) el primero en incluir en su manual de pintura de 1525 algunos desarrollos planos de poliedros, es decir, figuras del plano que convenientemente recortadas permitían hacer maquetas tridimensionales de los poliedros correspondientes. Visto al revés, al partir de un poliedro (por ser sus caras polígonos) siempre podrá asociarse su desarrollo plano correspondiente.

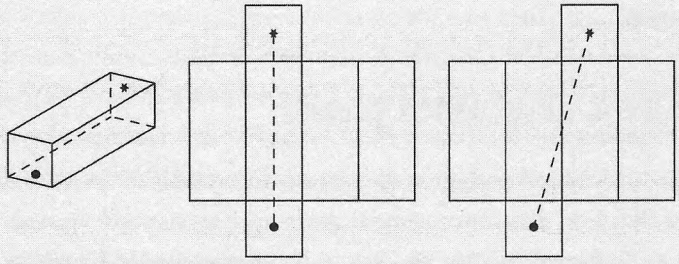


*Desarrollo de Durero.*

Los desarrollos planos de poliedros no son únicos y, por tanto, es interesante estudiar en cada caso la riqueza que puede darse para una misma figura.

## GEODÉSICAS EN POLIEDROS

Dados dos puntos en las caras de un poliedro ¿cuál es el camino más corto que puede unir dichos puntos, estando el camino totalmente contenido en la superficie del poliedro? Henry Ernest Dudeney (1857-1930) hizo famosa esta cuestión, presentándola de forma recreativa como el problema del mínimo camino que debe recorrer una araña moviéndose por encima de una caja para atrapar a una mosca situada en otra cara.

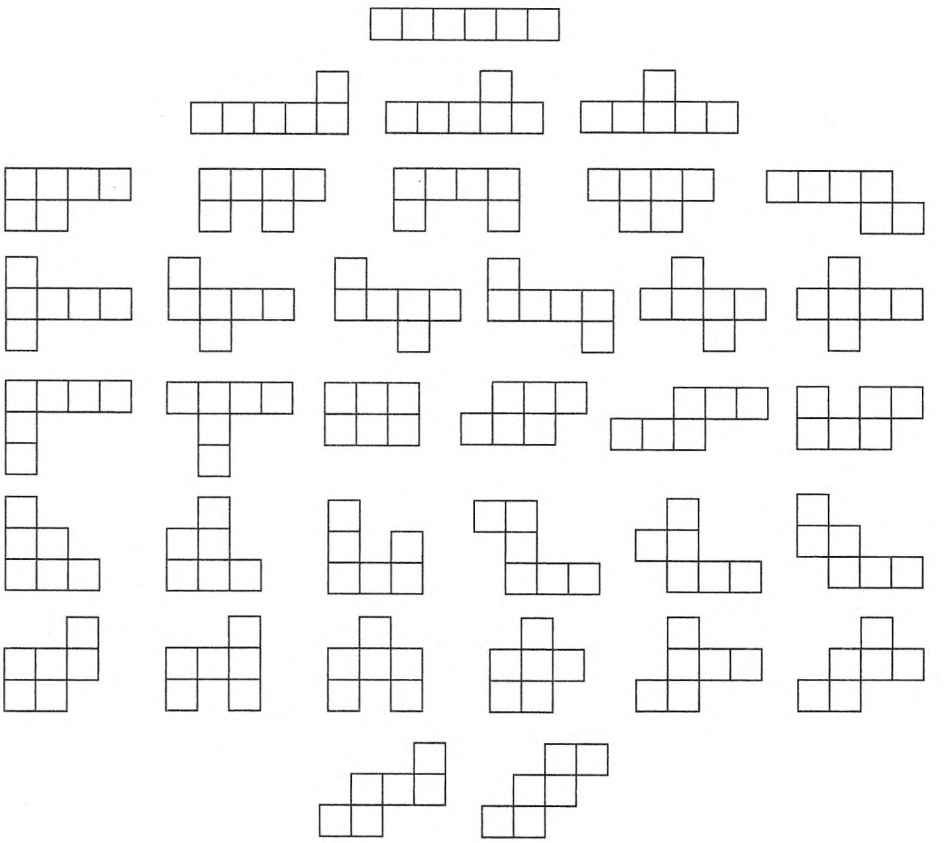


Como se puede apreciar en las figuras, una caja admite diferentes desarrollos planos. Localizados aquellos en los que sea posible trazar el segmento recto uniendo los puntos dados, entonces bastará ver entre los posibles segmentos cuál es el más corto. Más allá del carácter de rompecabezas que tiene este problema, el tema es muy interesante para electricistas, fontaneros... o en cableados informáticos donde los conductos o hilos deben situarse en paredes o techos y parece razonable gastar el mínimo material posible.

En la ilustración adjunta puede observar los 35 tipos de hexaminos del plano, es decir, figuras formadas por seis cuadrados idénticos que siempre comparten al menos una arista con otro. ¿Cuántos servirían como desarrollo plano de un cubo? Pues exactamente once.

El tema de los desarrollos planos ha dado pie al magnífico ejercicio de recortar y pegar para así obtener bonitos modelos tridimensionales (existen estupendas colecciones de láminas en el mercado y hay numerosas webs que permiten imprimir los desarrollos).

Dado un poliedro no es difícil hallar «uno» de sus desarrollos planos, pero al revés la situación es más compleja, en el sentido de que no siempre es evidente «imaginar» qué tipo de poliedro resultará a partir de la malla plana impresa antes de proceder a su montaje.



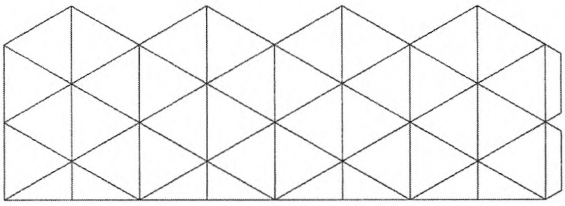
*Los 35 hexaminos.*

### SUPERFICIES DESARROLLABLES

Los poliedros, los conos, los cilindros, etc. tienen superficies formadas por segmentos rectos que pueden ser «desarrollados» en el plano. Sin embargo, hay muchas superficies, como la esfera o el hiperboloide de una hoja (formado por rectas), que no tienen esta propiedad. El gran problema de los mapas terrestres ha sido precisamente esta imposibilidad de «desarrollar» bien la esfera en un plano.

## Poliedros flexibles

A partir del esquema mostrado en la figura siguiente se puede montar un poliedro que es flexible.



La sorpresa es que doblando y pegando se obtienen anillos de tetraedros (caleidociclos) que se pueden «hacer girar» en el espacio. El famoso diseño IsoAxis® de Wallace Walker inició la moda de estos poliedros que son movibles en el espacio, pero que tienen un desarrollo plano triangular en el plano.

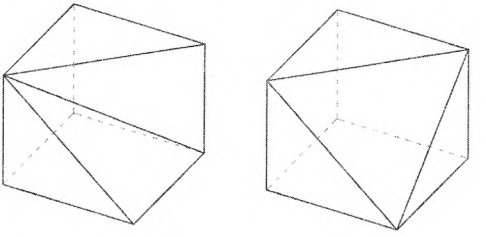
Si se decoran, como hizo Escher, las caras de estas figuras girables se podrán observar secuencias de imágenes muy bellas. Nótese que al «girar» un anillo de tetraedros entran en juego simultáneamente diversos ejes de rotación a la vez: el volumen de la figura no se altera, las superficies de los tetraedros tampoco..., pero las distancias entre vértices sí que van cambiando. Ninguna posición del anillo es isométrica a otra y, no obstante, hay muchos parámetros que se conservan.

Otro tema es la «rigidez estructural» de formas poliédricas, lo cual es un problema físico y constructivo interesante. El problema vital no es aguantar minipoliedros de sobremesa, sino ¡estructuras habitables!

## Parejas sorprendentes

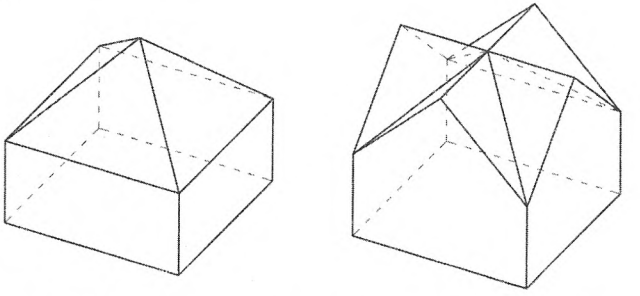
El espacio tridimensional puede ser sorprendente, y los poliedros muestran por qué. Una primera sorpresa es que muchos poliedros muy diferentes pueden tener los

mismos vértices, es decir, los vértices en el espacio no determinan «el poliedro». Las figuras siguientes son un ejemplo de una primera pareja de poliedros.



Los dos poliedros tienen siete vértices idénticos, cinco caras idénticas, poseen igual número de aristas y caras... ¡pero no son iguales! (uno es cóncavo y el otro es convexo).

¿Recuerda la conocida definición de polígono como intersección de los semiplanos determinados por las rectas (que contienen las aristas)? Si salta al espacio y considera todos los planos que contienen las caras de un poliedro, ¿pueden cohabitar varios poliedros bajo esta misma colección de planos? La respuesta es afirmativa. El siguiente ejemplo es definitivo.

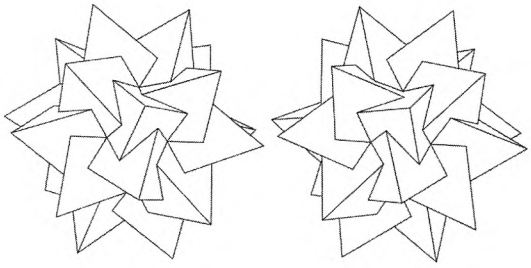


Los suelos son iguales; los planos de las paredes también, y los planos de los tejados, idénticos... Sin embargo, son poliedros bien distintos.

## TENSEGRIDAD

Las estructuras tensadas por hilos donde por compresión y tensión se logra mantener unas barras formando una estructura rígida tienen gran interés en ingeniería y arquitectura. Fueron inicialmente estudiadas por K. Snelson y R. Buckminster-Fuller a partir de 1948. Este tipo de figuras han sido usadas por numerosos escultores, así como en diseños de carpas, en los que a través de la tensión se mantienen correctamente situadas las lonas que configuran las cubiertas.

Las dos sorpresas anteriores han puesto de manifiesto que los vértices y planos de las caras por separado no aseguran igualdad de poliedros. Inevitablemente, puede pensarse que si se juega con ambas condiciones, posiblemente ya no surgirán ejemplos raros. Parece razonable..., pero no es el caso. Obsérvense, sino, los dos poliedros siguientes.

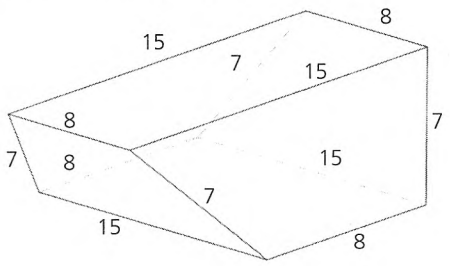


## El misterio de la caja perfecta

Considere simples rectángulos y denomine «perfectos» a todos aquellos en los que tanto los lados como las diagonales tengan valores enteros. Esta condición de perfección corresponde a tener triángulos rectángulos en los que catetos e hipotenusa tengan valores enteros (tripletes pitagóricos). El famoso triángulo de lados 3, 4 y 5 es el caso más simple, y le será fácil construir infinitos rectángulos perfectos.

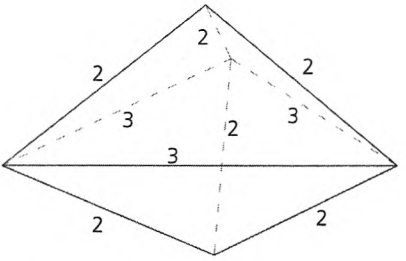
Haga ahora el salto a la tridimensionalidad. ¿Sabría hacer una caja (ortoedro perfecto) tal que todos sus lados y todas sus diagonales, tanto en las caras como en el interior, fuesen números enteros? Nadie hasta hoy ha logrado encontrar una caja perfecta. Ni tampoco nadie ha sabido justificar que no puedan existir.

Lo más genuino de una caja es que se trata de un poliedro convexo con ocho vértices y seis caras rectangulares. ¿Se conocen poliedros convexos con seis caras y que sean perfectos? Sí..., pero no son cajas. La perfección entera parece jugar mejor con formas raras que con las cartesianas cajas de zapatos. En la figura puede ver el hexaedro entero de B.E. Peterson y J.H. Jordan.



Esta maravilla tiene seis caras que son todas ellas cuadriláteros, ocho vértices, diagonales en las caras de 13 y 17, diagonales interiores todas de longitud 17, sumando todas sus aristas 120 y sus diagonales, 240.

Si no busca figuras perfectas con seis caras, pero sí con cinco o seis vértices, puede considerar el doble tetraedro de H. Harboth y A. Kenniz con aristas de valor 2 y 3, tal y como indica la figura y cuya diagonal interior vale 2.

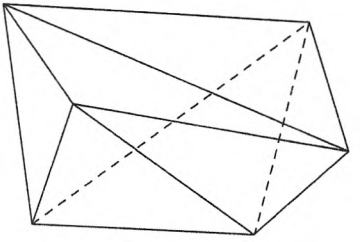



El reto de la caja perfecta sigue esperando, paciente, su final.

## Tetraedrización de poliedros

Dividir figuras planas, en especial poligonales, en triángulos es una idea excelente para el cómputo de superficies: el área total pasa a ser la suma de las áreas de los triángulos de «cualquier» triangulación. Las triangulaciones de polígonos no sólo son posibles, sino que además son diversas. Si se piensa en el caso paradigmático de los polígonos regulares, es un auténtico placer hacer disecciones triangulares de los mismos desde un punto interior, desde un vértice, combinando puntos interiores y de la frontera, etc.

La triangulación de polígonos le invita a la tetraedrización de poliedros, pero... hay poliedros que no pueden dividirse en tetraedros, como el de la figura siguiente.



La tetraedrización de poliedros convexos es siempre posible, pero la de poliedros cóncavos no siempre puede realizarse.

## Un rompecabezas imposible

¿Puede un cubo ser una reunión finita de cubos todos diferentes? Ésta es la cuestión. En general, un cuadrado no es diseccionable como una reunión finita de cuadraditos de lados enteros positivos diferentes dos a dos, pero con mucho ingenio es posible encontrar al menos algunos cuadraditos excepcionales que sí pueden cuadricularse con piezas de lados enteros todas ellas diferentes. Así, John Wilson construyó un complicado cuadrado con 25 cuadraditos y T.H. Willcocks encontró otro con 24.

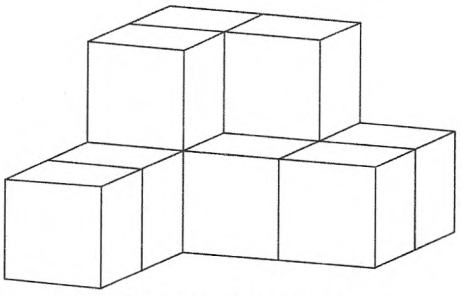
Sin embargo, la división en cubitos diferentes no puede valer nunca para ningún cubo. Se trata de un argumento muy simple. Supóngase que un cubo fuese una reunión finita de cubos todos ellos diferentes. Entonces podría empezarse a armar este puzle y se pondría el primer piso de cubitos. Entre ellos existiría uno $C_1$ que sería el más pequeño. Es inmediato que tratándose del menor y siendo los demás piezas cúbicas, $C_1$ no podría ocupar ni una esquina, ni tener una cara situada en el borde; por tanto, $C_1$ estaría colocado en el interior, rodeado totalmente de cubos más grandes. En el tejado de $C_1$ se verían trozos de caras de estos «rascacielos» cúbicos circundantes más altos. Luego, al seguir con el puzle, se debería cubrir este tejado con otra familia de cubos diferentes y entre ellos uno, $C_2$, sería el menor... y esto sigue indefinidamente, cuento que nunca podrá acabar con una reunión finita de cubos. Una auténtica lástima para geómetras... y para fabricantes de rompecabezas.

## Empaquetamientos curiosos

En el plano hay diversos tipos de mosaicos, es decir, configuraciones que involucran un solo tipo o varios de losetas poligonales que combinadas recubren totalmente la superficie. Los mosaicos regulares formados por cuadrados, triángulos equiláteros o hexágonos regulares son los más populares. Por ello resulta natural dar el salto al espacio tridimensional y preguntarse sobre qué tipos de poliedros (de una clase o varias) podrán tener la propiedad de «empaquetarse bien» y recubrir con su repetición todo el espacio. Ésta es la búsqueda de losetas 3D.

Obviamente, a partir de cualquiera de los infinitos mosaicos que recubren el plano pueden considerarse los prismas asociados a sus losetas, con lo que ya surgen infinitos empaquetamientos prismáticos. Lo que interesa es hacer piezas más singulares que empaqueten.

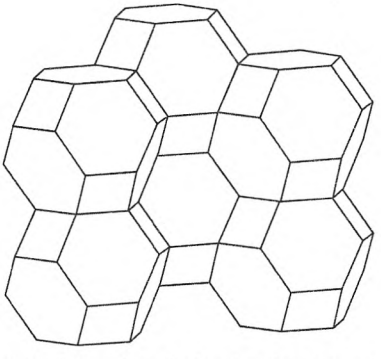
¿Cuáles de los cinco tipos de poliedros regulares empaquetan el espacio? Evidentemente, con el cubo es posible.



*Empaquetamiento cúbico.*

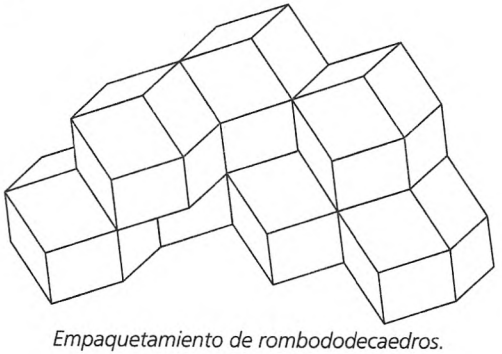
Pero lo sorprendente es que ninguno de los otros regulares (tetraedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro) sirve.

El siguiente caso interesante es el poliedro de Lord Kelvin (tetracaidecaedro) que es un arquimediano con caras cuadradas y hexagonales.



*Empaquetamiento de poliedros iguales de Lord Kelvin.*

El tercer tipo curioso es el rombododecaedro, que es el poliedro de Catalan con doce caras rómbicas.



*Empaquetamiento de rombododecaedros.*

Este caso es bien simple de justificar: si un cubo se disecciona en seis pirámides iguales (con base las caras del cubo y vértice el centro de éste) y éstas se colocan sobre otra copia idéntica del cubo, entonces surge el rombododecaedro.

Así, el rombododecaedro tiene un volumen doble del de su cubo generador, y las diagonales pequeñas de las caras rómbicas son las aristas del cubo. En consecuencia, en el «empaquetamiento» del romboedro subyace, de hecho, el empaquetamiento cúbico usual.

Otras posibilidades surgen de combinar, por ejemplo, dos o tres tipos de poliedros.

En las figuras siguientes podemos apreciar diversos ejemplos: en el caso 1 se combinan cubos truncados y octaedros; en el caso 2, tetraedros y troncotetraedros, y en el caso 3, octaedros y cubooctaedros.

Fig. 1

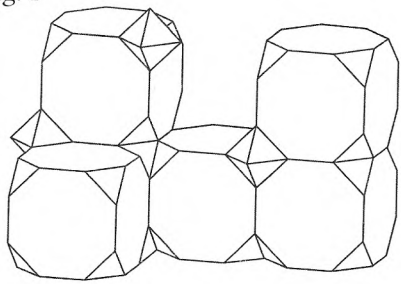


Fig. 2

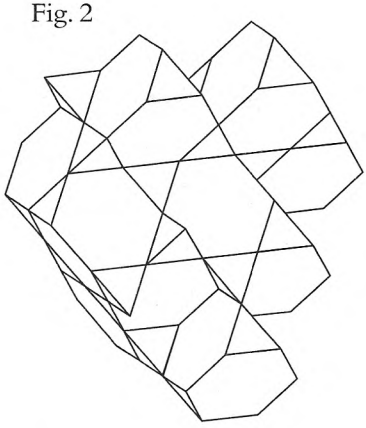
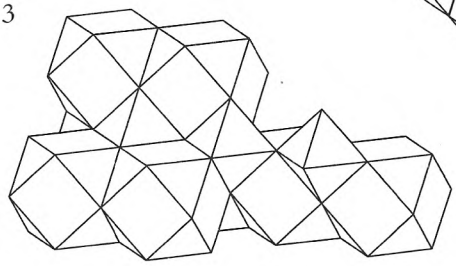


Fig. 3

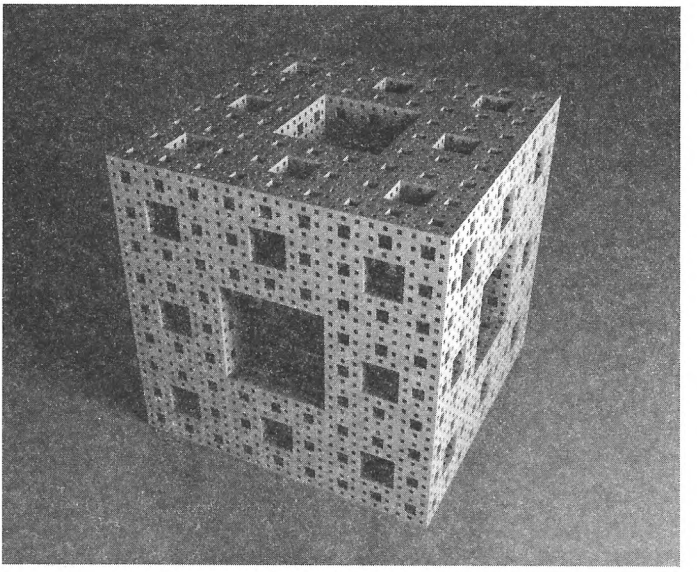


*Diversos tipos de empaquetamientos con dos piezas.*

## La esponja de Menger

El genial matemático Karl Menger ideó, muchos años antes de que Benoît Mandelbrot formalizara la idea de figura fractal, una sorprendente «esponja» poliédrica que hoy se presenta como el primer fractal en el espacio de dimensión 3.

Considérese un cubo de lado 1 y divídase en $3^3 = 27$ cubitos (recuérdese el cubo de Rubik). Si se saca el cubito central y los seis que tocan sus caras..., queda un cubo «agujereado» formado por 20 cubitos de lado 1/3. Si se hace lo mismo con cada uno de los 20, surgen $20 \cdot 20 = 400$ cubitos de lado $1/3 \cdot 1/3 = 1/9$. Luego se puede pasar a $400 \cdot 20 = 8.000$ cubitos de lado $(1/3)^3 = 1/27$ y proseguir este tipo de operaciones. Ésta es la idea de iteración fractal, en la que se van generando figuras en las que un trocito (un cubito) tiene la misma forma que la figura inicial. Sorpréndase: mientras la «superficie» de la esponja va creciendo hacia infinito, el «volumen» tiende a cero.



*Esponja de Menger.*

Obviamente, a partir de la idea de Menger uno puede inventar muchas otras esponjas asociadas a diferentes poliedros, dando siempre una regla iterativa que permita ir quitando piezas (siempre semejantes a la figura de partida). Quizá tenía razón Henry Poincaré cuando se refería a los conjuntos fractales como «la galería de los monstruos».

Capítulo 4

# Poliedros en arquitectura y arte

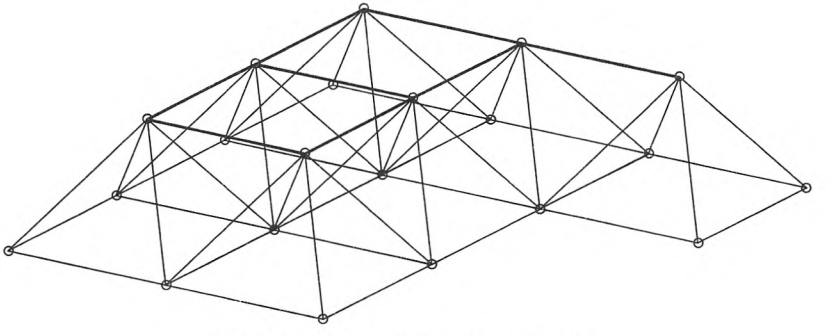
*La geometría es el propio lenguaje del arquitecto.*
Antoni Gaudí

La geometría ha sido siempre un componente esencial de la arquitectura para hacer posible que, de acuerdo con la feliz idea de Vitruvio, ésta sea «estructura, función y belleza». A la estructura, la geometría ha aportado un amplio repertorio de formas o figuras, medidas, proporciones... y también funcionalidad y estética.

Las formas prismáticas (¡mire la habitación donde está y la casa donde vive!) han sido emblemáticas en muchas edificaciones, pero, afortunadamente, también formas poliédricas más sofisticadas han dado lugar a interesantes proyectos. El objetivo de este capítulo es ofrecerle la posibilidad de apreciar algunos ejemplos muy sobresalientes de este fructífero diálogo entre geometría y arquitectura en el caso muy singular de los poliedros.

## Mallas, encofrados y andamiajes

Con estructuras de barras y nudos (para soldar las barras) se construyen hoy mallas espaciales que forman parte de módulos expositivos (como los stands feriales) o de recubrimientos de espacios de todo tipo. Estas mallas son versátiles, livianas, ampliables y, en algunos casos, desmontables y reutilizables.



*Malla de poliedros de interés constructivo.*

Los rígidos tetraedros o las redes cúbicas suelen ser los poliedros más utilizados en estas mallas. Los nudos esféricos (vértices), donde se articularan las barras, deben tener ya los agujeros con roscas estratégicamente distribuidos para poder enroscar o soldar las barras tubulares, que serán los transmisores de los esfuerzos que debe soportar la estructura. Si bien podrían distinguirse las barras que trabajan a tracción de las que lo hacen a compresión, en general se tiende a iguales modelos de cilindros huecos.

También se observan formas poliédricas (que aproximan otras superficies) en encofrados para hacer construcciones o incluso en los típicos andamiajes desde los cuales se limpian y rejuvenecen las fachadas. Sin olvidar que la alternativa oriental a nuestros andamios metálicos son los andamiajes hechos artesanalmente con maderas o con bambúes típicos de la ciudad de Hong-Kong.

Igualmente son de interés para lugares donde se desee maximizar la luz las mallas «planas» de tetraedros y/o octaedros que primero se montan en el suelo de la obra y luego se colocan verticalmente para soportar fachadas de cristal, o en el techo para sostener lámparas, cableados, tubos de instalaciones..., o simplemente dar un aspecto bello al lugar y dejar pasar la luz cenital.

## Módulos poliédricos habitables

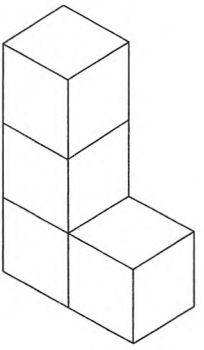
La idea de crear viviendas de forma modular, es decir, diseñar un módulo que por «repetición» genere los espacios habitables, es una idea relativamente moderna y muy ligada en origen a las necesidades del siglo XX (ya sea para poder ofrecer muchas viviendas o para industrializar al máximo la construcción de viviendas y así reducir costes). La creatividad arquitectónica puede favorecer que el módulo geométrico sea original y adecuado pero, además, la forma de repetir dicho módulo también ofrece un amplio margen imaginativo (desde la monotonía repetitiva de los módulos «adosados» a distribuciones que combinen giros, simetrías, traslaciones, intersecciones, etc.).

Por supuesto, los módulos poliédricos que son los primeros candidatos a ser considerados son los cubos y sus agregaciones o colocaciones de tipo diverso. Vamos a contemplar aquí ejemplos paradigmáticos de modulación cúbica, pero hay que dejar constancia de que otros tipos de módulos, como los poliedros de Lord Kelvin, que se han ensayado en Canadá, o las formas tetraédricas, con las que se han realizado construcciones en Israel. La sinagoga en el desierto de Negev fue una obra realizada en 1970 por Zvi Hecker en la que se combinaron poliedros acoplados con caras hexagonales y cuadradas creando un complejo espacio exterior y un más interesante

recinto interior facetado poligonalmente. Este mismo arquitecto realizó en 1980, usando casas-dodecaedro, todo un complejo residencial.

## El módulo L de Leoz

El arquitecto Rafael Leoz ideó un curioso módulo: cuatro cubos idénticos formando una L con la cual se generan una gran variedad de espacios habitables.



*Módulo L.*

El nombre de «módulo L» corresponde, pues, a la forma de articular los cuatro cubos y no a la inicial de Leoz.

Cabe hacer notar que Leoz llegó a la elección de la forma característica del módulo L al observar su versatilidad frente a otras combinaciones de cuatro cubos.

### RAFAEL LEOZ DE LA FUENTE (1921-1976)

Este singular arquitecto madrileño diseñó 218 viviendas experimentales en el polígono de Las Fronteras de Torrejón de Ardoz y la embajada de España en Brasilia, entre otras obras. Preocupado por la construcción masiva de edificios para erradicar el chabolismo, a partir de 1960 investigó la industrialización del proceso constructivo. Inventó el módulo L formado por cuatro cubos y publicó dos obras de referencia: *División y organización del espacio arquitectónico* en 1965 y *Redes y ritmos espaciales* en 1970. También se dedicó a la escultura, en la que los poliedros ocuparon un lugar privilegiado en su creatividad artística. Recibió numerosos premios y distinciones. La Fundación Rafael Leoz para la Investigación y Promoción de la Arquitectura Social se encarga hoy de difundir sus ideas.

Leoz evaluó que tan sólo con dos L idénticas con al menos una cara en común podía obtener cerca de 3.000 combinaciones. Toda la teoría sobre este módulo la dejó desarrollada en su libro *Redes y ritmos espaciales*.

En periodos de posguerra o ante grandes inmigraciones, la idea de crear módulos para hacer arquitectura en serie ha sido siempre tentadora. Le Corbusier ideó un «módulo» que era una medida (183 cm o 6 pies ingleses) y una forma de dividir o repetir esta «unidad» (vía el número de oro). Leoz fue directamente a la creación de un módulo geométrico. Por supuesto, ambas ideas podían fusionarse.

## El módulo cúbico de Bofill

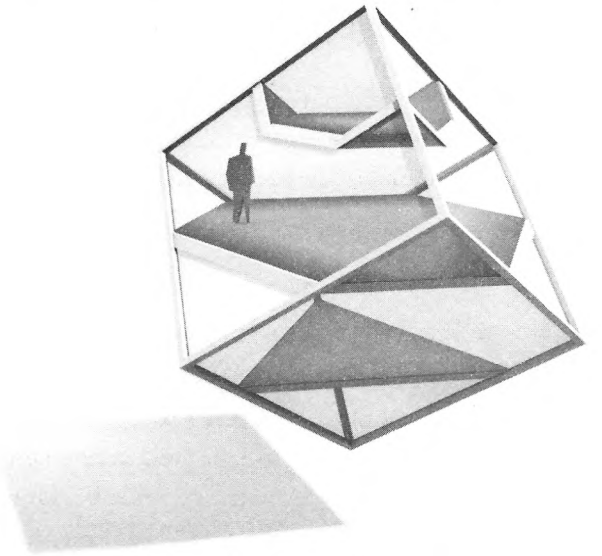
Los arquitectos Anna y Ricardo Bofill realizaron en 1970 un singular proyecto de viviendas en Sant Just Desvern (Barcelona): el Walden 7. La originalidad geométrica del proyecto fue que el módulo del inmenso complejo de apartamentos era un cubo. La tesis doctoral de Anna Bofill se basó precisamente en el análisis de la generación de los espacios del Walden 7 a partir de un cubo. Uno o varios cubos forman cada apartamento según su tamaño (no necesariamente todos al mismo nivel). La idea sugestiva fue que desplazando unos cubos respecto a otros se creaba el espacio de circulación entre apartamentos: el movimiento del propio cubo creaba el acceso, en lugar de la tradicional construcción de pasillos, rellanos, etc. La idea de reforzar la convivencia vecinal quedaba también incentivada. Además, los espacios centrales vacíos del edificio dan a la base la posibilidad de convertirse en un espacio vecinal.

Un proyecto más atrevido de la misma época fue el complejo de viviendas de Moshe Safdie en Montreal, Quebec, donde casas prismáticas se amontonan en el espacio formando varios pisos, espacios vacíos, entradas y salidas de los módulos, etc.

## El módulo de Blom

Rotterdam es una ciudad holandesa cuyo centro urbano exhibe atrevidos proyectos arquitectónicos. Desde 1980 posiblemente el proyecto más espectacular desarrollado en la ciudad es el Kuboswoning de Piet Blom, un complejo de 32 viviendas situadas en la calle Overblaak. Lo sorprendente no es que cada vivienda sea un cubo, sino que el cubo esté girado 45° respecto a la posición tradicional, siendo soportado por una columna que es un prisma hexagonal. Cada casa tiene tres plantas con un total 100 $m^2$ de espacio útil. La planta principal es hexagonal, pues corresponde

a la sección plana que aparece en un cubo uniendo una secuencia adecuada de puntos medios de sus lados, tal y como se ha visto en el segundo capítulo.

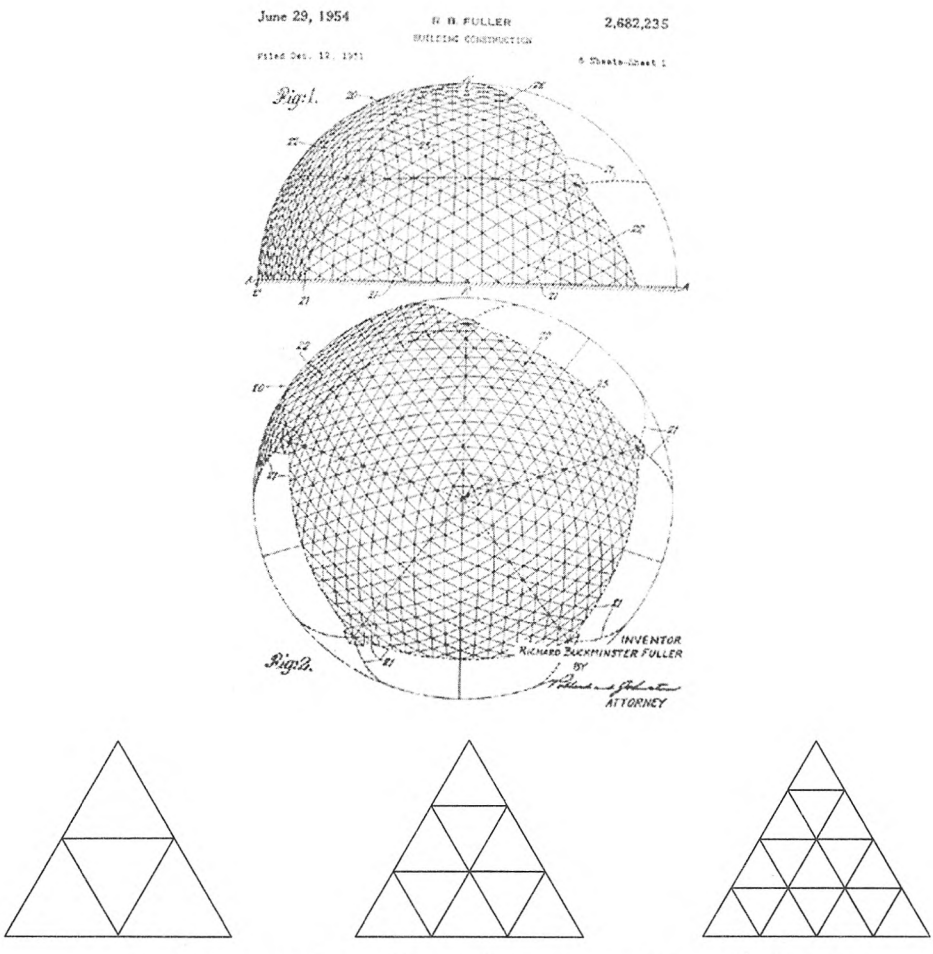


*Esquema de las viviendas de Blom.*

## Maravillosas cúpulas geodésicas

En el pasado los arquitectos mostraron especial interés por las grandes cúpulas que culminaban edificios singulares. Sin embargo, su construcción fue siempre muy complicada, precisando a menudo la edificación previa de encofrados de madera sobre los cuales construir la cúpula (con ladrillos, con hormigón armado, etc.) para luego tener que retirar el encofrado de apoyo. Afortunadamente, los poliedros permitieron dar un paso adelante y descubrir las cúpulas modernas, que permiten cubrir cines o estadios, hacer pabellones de exposiciones, mercados, etc. Ya no son las cúpulas-cielo o cúpulas-institucionales, sino cúpulas para cobijar actividades civiles, desde un partido de baloncesto a un concierto de rock.

La idea clave para realizar estas cúpulas partió de las «cúpulas geodésicas». El icosaedro regular es una de las cinco joyas poliédricas. Sus veinte caras son triángulos equiláteros y todos sus vértices están en una esfera «virtual» que acoge con firmeza la distribución regular de estos elementos. Sucesivas triangulaciones de las caras del icosaedro (y derivados), que se proyectan en la esfera envolvente, crean cúpulas geodésicas de gran rigidez (sin apoyos interiores suplementarios).

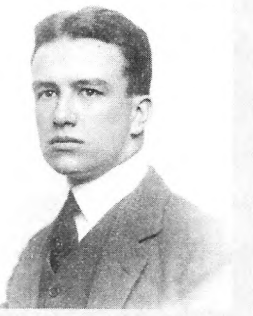



*Generación de una cúpula geodésica y, arriba, un proyecto de R.B. Fuller de 1954.*

Cabe notar que en el primer paso de una cara triangular del icosaedro delimitada por tres barras se obtienen cuatro triángulos con dos tipos de vértices y dos tipos de aristas. En un siguiente paso se obtendrán dieciséis caras triangulares de seis tipos de caras, cinco de aristas y cuatro de vértices, etc. Por tanto, estas cúpulas geodésicas no son el simple resultado que daría un único tipo de barra y de nudo, sino que precisan de una construcción compleja al involucrar diversos tipos de nudos y de barras. Cuando las triangulaciones van aumentando, la semejanza del poliedro a una esfera es visualmente enorme y, por tanto, a veces nos equivocamos al creer que se trata de una esfera cuando en realidad es siempre una aproximación poliédrica triangularizada.

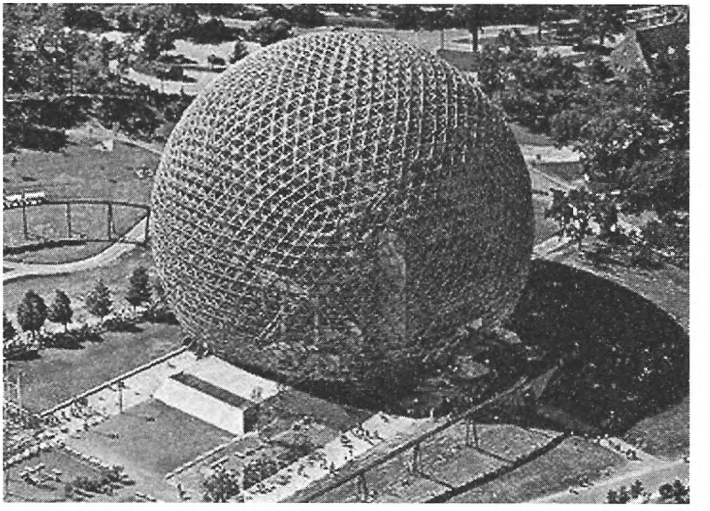
## RICHARD BUCKMINSTER FULLER (1895-1983)

Singular intelectual americano dedicado al diseño, la ingeniería y la arquitectura, Fuller también se dedicó a los inventos más diversos y a la redacción de libros en defensa del medioambiente. Sus cúpulas geodésicas son su máxima obra; incluso hay compuestos químicos que por su estructura son denominados *fulerenos* en honor a él. La figura preferida de Fuller siempre fue el tetraedro y con tetraedros ideó numerosos diseños.



## Las cúpulas de Fuller

Richard Buckminster Fuller fue un genial arquitecto-ingeniero americano que revolucionó (y patentó) formas novedosas de hacer mallas espaciales con tetraedros o espectaculares cúpulas, como la del pabellón americano de la Exposición Universal de 1967 de Montreal. La idea de la cúpula geodésica patentada por Fuller en 1947 era renunciar a la construcción en piedra u hormigón (que exigía ingeniosos apoyos) para privilegiar la estabilidad estructural de formas poliédricas triangulares, ya fueran determinadas por barras de acero o por la yuxtaposición de módulos tridimensionales adecuados.



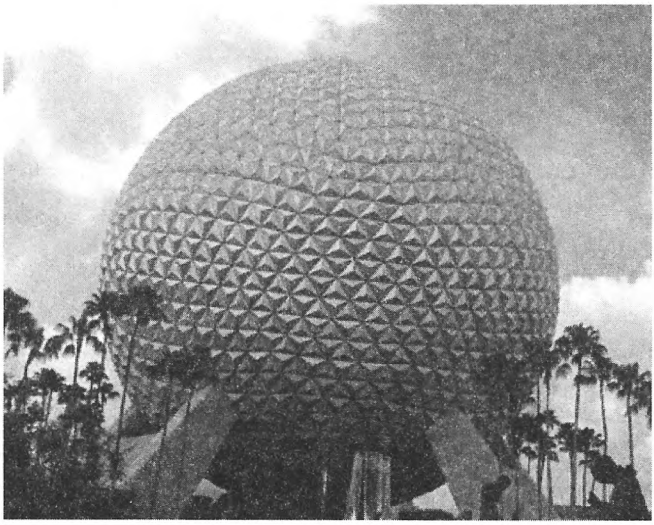
*Una cúpula de Fuller.*

## La cúpula del Epcot Center

Construido en 1982 en Orlando, una vez finalizado el Magic Kingdom de Disney, el parque temático Epcot Center contiene interesantes visiones sobre la historia de la tecnología y su futuro, así como representaciones temáticas de diversos lugares del planeta. Su nombre corresponde a las siglas de Experimental Prototype of Community of Tomorrow.

La joya del parque se halla justo a su entrada: una inmensa esfera que posee dieciocho pisos en su interior. Técnicamente, esta figura «de tipo esférico» es en realidad un dodecaedro pentakis de sesenta caras triangulares que a su vez se han dividido cada una en dieciséis triángulos equiláteros, lo que lleva casi a una división en 11.520 trozos.

No sólo se trata de una escultura que anuncia el Epcot Center desde lejos, sino que es una original atracción. Accediendo por la base y a través de una cinta de movimiento suave, los visitantes acceden por parejas a unas vagonetas, las cuales van subiendo circularmente por las paredes interiores de la esfera donde diversos dioramas presentan escenas sobre la evolución de la comunicación. Hacia el final del recorrido hay que bajar de nuevo a la base, para salir y dejar las vagonetas libres para otros visitantes. ¿Cuál ha sido la solución para la vuelta? La vagoneta gira 180° y así los visitantes bajan de espaldas hasta la salida. Al final, un nuevo giro resitúa la vagoneta.



*Spaceship Earth en Epcot Center.*

## Una cúpula de Isozaki

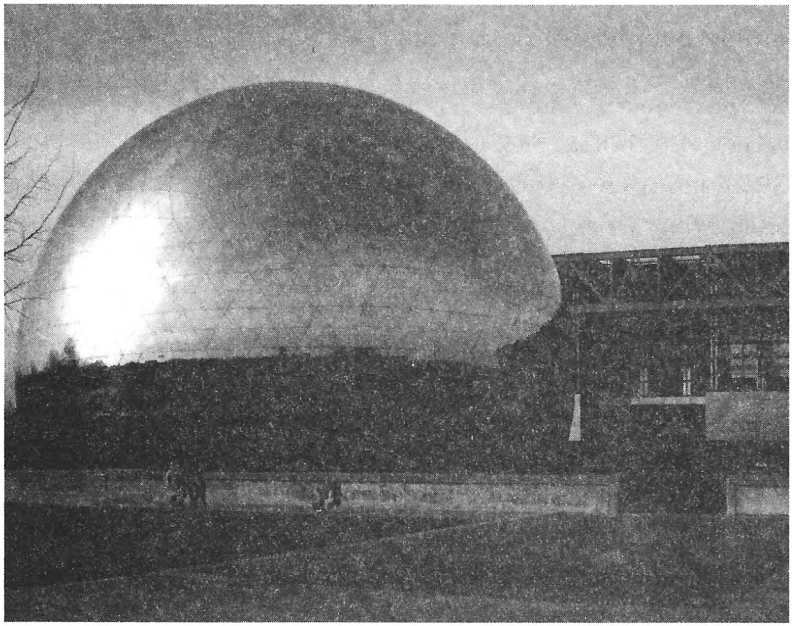
El reconocido y original arquitecto japonés Arata Isozaki (1931) ha realizado celebrados proyectos internacionales con ingeniosos recursos geométricos. Inició su carrera como colaborador de otro maestro de la arquitectura nipona, Kenzo Tange. Una de sus construcciones es un espacio emblemático de las Olimpiadas de Barcelona de 1992, el Palacio Sant Jordi. Se trata de un domo de 45 m de altura cuya cúpula fue montada en el suelo y luego elevada por grúas y encajada en diez días. La cúpula cubre un gran recinto que tiene usos polivalentes, culturales y deportivos, y en su concepción Isozaki usó una malla de tipo poliédrico con barras y nudos metálicos: un triunfo de los tetraedros. Isozaki hizo un recubrimiento lateral alabeado con mallas que forman una superficie curva para luego culminar en la parte central de la cubierta con una nueva malla de tubos y nudos no plana, sino de doble curvatura.

*El Palacio Sant Jordi de Barcelona diseñado por Arata Isozaki.*

En otros proyectos Isozaki ha realizado también innovadoras formas basadas en la tecnología, con posibilidades de movimiento, en escenarios, gradas, techos, etc.: un ambiente tecnológico y geometrizado variable en formas, luz, sonido...

## La cúpula de La Villette

París cuenta con una serie de monumentos referenciales en diversas partes de la ciudad; así, en el noreste, se observa desde muchos lugares una gigantesca esfera-espejo: es la Géode de 1985, situada en la Ciudad de las Ciencias y la Industria, museo de ciencia y tecnología popularmente conocido como La Villette. Dicho museo es un referente en Europa por su modernidad, su bello edificio acristalado y sus contenidos.



*La Géode en la parisina Ciudad de las Ciencias y la Industria.*

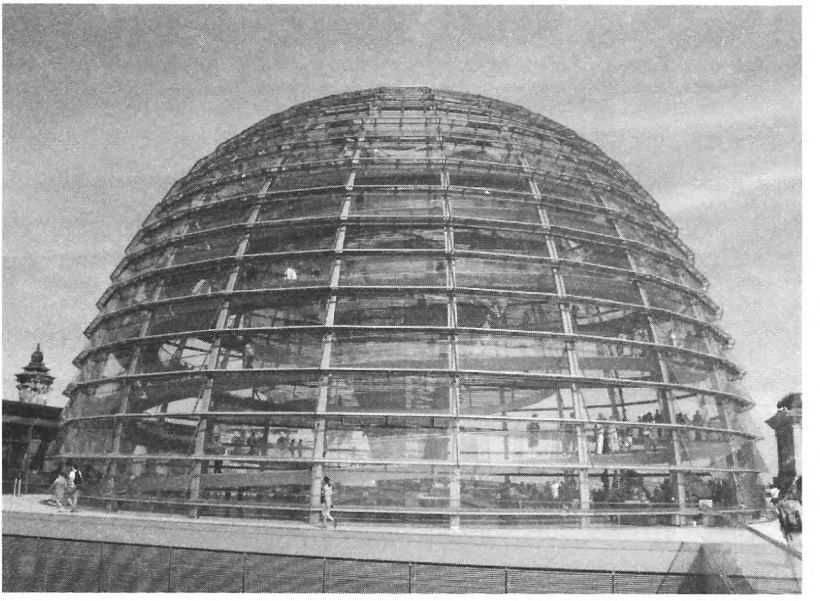
Basta mirar las cifras de la Géode para comprender su impacto: 36 m de diámetro y 230 toneladas de peso apoyadas en un pilar de 6.000 toneladas. Fue proyectada por el arquitecto Adrien Fainsilber y del ingeniero-escultor Gérard Chamayou. Éste último, como buen discípulo del gran diseñador de estructuras geodésicas Richard Buckminster Fuller, determinó la Géode (abreviatura de geodésica) considerando un icosaedro regular con sus veinte caras triangulares y sus vértices en una esfera circunscrita; cada cara se divide en cien triángulos equiláteros y éstos se proyectan en la esfera virtual envolvente, lo que da una aproximación esférica espectacular con 2.000 caras triangulares idénticas y con todos los vértices en la esfera. Chamayou truncó la esfera por la base y, por tanto, la estructura de barras de acero que montó tenía 1.670 triángulos con 835 nudos. Una segunda triangulación dividía cada triángulo en cuatro y con 6.435 placas triangulares (bombeadas de acero inoxidable) cubriendo el conjunto logró formar esta aparente esfera.

La sorpresa mayúscula es el interior de este lugar. No es un monumento emblemático en un espacio de ciencia, sino un cine con 363 asientos interiores inclinados 30° para ver las proyecciones de películas en una pantalla gigante semiesférica de 26 metros de diámetro. Se accede al cine por debajo de la cúpula, desde el museo, y la distribución escalonada de asientos asegura una perfecta visión.

## Una cúpula daliniana y otras obras

Salvador Dalí, referente del surrealismo, hablaba de dos puntos cósmicos fundamentales: el centro de la bóveda de la estación de trenes de Perpiñán y la cúspide de la cúpula del Teatro-Museo Dalí de Figueres. En la comarca catalana del Empordá, donde Dalí vivió, existe hoy un triángulo daliniano muy visitado: la Casa-Museo Salvador Dalí de Port Lligat, el Castillo Gala Dalí de Púbol y, desde 1974, el concurrido Teatro-Museo Dalí de Figueres. Este último posee una cúpula de hierro y cristal que es una estructura poliédrica. La actual es una restauración de 1998 de Talleres Inox S.A. con dirección de los arquitectos Clotet y Paricio. Se trata de una típica cúpula geodésica de caras triangulares.

En otros casos se han construido cúpulas transparentes (con hierros acristalados) sin seguir formas poliédricas, sino directamente a través de formas esféricas (aunque éstas se aproximan por elementos lineales). Así, el líder del *high-tech style* Norman Foster fue el encargado de transformar el Reichstag de Wallot en un renovado parlamento alemán. Restaurando pero conservando las fachadas, Foster introdujo en el techo central una cúpula de acero y cristal. La gran cúpula semiesférica acristalada queda definida por meridianos y paralelos metálicos, y posee un gran elemento central con mirador y una sugestiva rampa interior transitable.



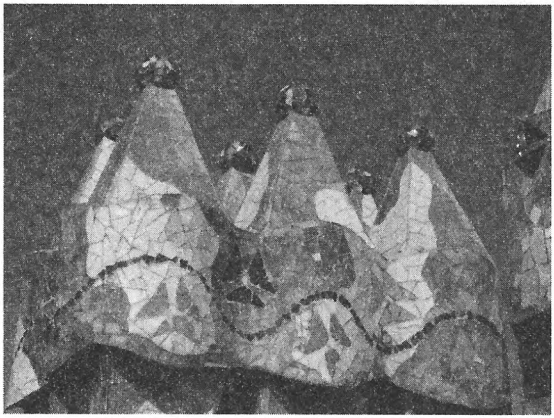
*La cúpula del Reichstag en Berlín.*

## Gaudí y los poliedros

Antoni Gaudí se familiarizó con los poliedros durante sus estudios de arquitectura al cursar la asignatura de geometría descriptiva siguiendo un libro de Léroy que los describía con detalle. También conoció los poliedros al estudiar un curso sobre ciencias naturales; su libro de texto, *Cuadernos de historia natural* de Milne-Edwards y Aquiles Comte, editado en Madrid en 1859, le permitió familiarizarse con los grupos cristalográficos.

El sistema de proporciones en la Sagrada Familia de Barcelona se basa en los divisores de 12 (1:1, 1:4, 1:2, 3:4, 1:3, 2:3). Así, no es de extrañar que para los doce campanarios Gaudí fijara su atención en algunos poliedros regulares, pues cubo y octaedro tienen doce aristas, el dodecaedro tiene doce caras y el icosaedro, doce vértices; además, al simbolizar en los pináculos de los doce campanarios los anillos obispales, Gaudí conocía perfectamente que en joyería se usaban siempre formas poliédricas para cortar los brillantes o las piedras preciosas de los anillos.

Las formas poliédricas no elementales están poco presentes en la obra gaudiniana, pero no obstante tienen un claro protagonismo en los pináculos de la Sagrada Familia. Es lógico pensar que Gaudí, como buen aficionado a la papiroflexia, practicó la construcción de poliedros en papel. En el obrador de Gaudí, así como en la Cripta de la Sagrada Familia y en la Catedral de Palma de Mallorca, se aprecian modelos poliédricos colgados. Formas poliédricas elementales se encuentran en habitaciones ortoédricas, y la forma piramidal caracteriza el mirador de Bellesguard, mientras que las chimeneas de la casa Batlló o el Palau Güell poseen formas de pirámide o de troncos de pirámide.

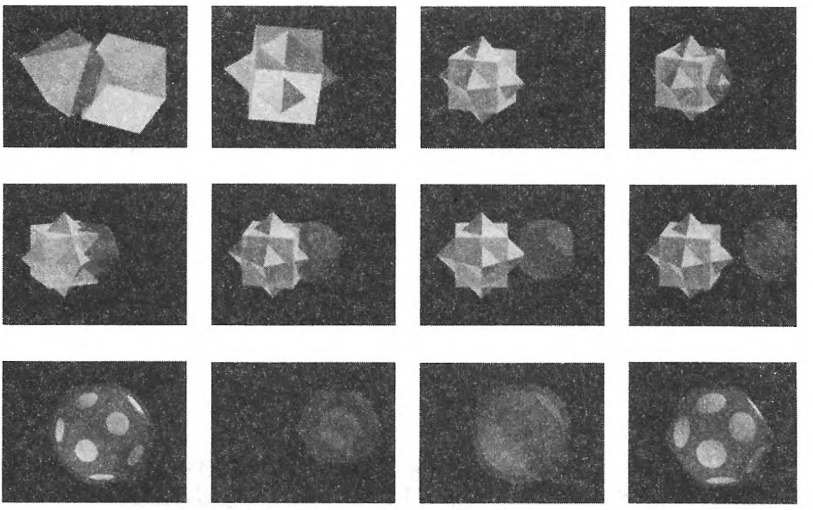


*Chimeneas de la casa Batlló.*

El mismo Gaudí afirma (equivocadamente) que:

> Las formas poliédricas y las equivocadamente llamadas geométricas abundan poco en la naturaleza. Aun las que el hombre hace planas (puertas, mesas, tableros), con el tiempo acontecen alabeadas.

Pero esto no excluye que precisamente se apoye en la excepcionalidad poliédrica para hacer un uso en su obra singular de estos cuerpos geométricos. La fachada de Levante, la primera en construirse, se dedicó al Nacimiento, a «la Encarnación, el Poder y el Padre». En sus cuatro campanarios la piedra que debe simbolizar el anillo episcopal se obtiene de una intersección de un cubo con un octaedro, tal y como se ve en la ilustración siguiente.



*Recreación de la intersección de un cubo y un octaedro.*

Evidentemente, el poliedro resultante no es regular, pero tiene seis caras cuadradas y ocho hexagonales. Esta figura se interseca con una esfera que determina en sus catorce caras un casquete esférico vaciándose siempre la zona cilíndrica (determinada por dos casquetes paralelos situados en las caras hexagonales) a efectos de contener elementos eléctricos de iluminación. En el viejo simbolismo platónico, el cubo representa la tierra y el octaedro, el aire, y, por lo tanto, en clave mitológica, el poliedro de estos campanarios sería una síntesis entre la tierra y el cielo: «el cielo interacciona/aparece en la tierra»... el nacimiento de Cristo.

### ANTONI GAUDÍ CORNET (1852-1926)

Este genial arquitecto nacido en Reus supo crear un estilo propio basado en gran parte en la investigación geométrica tridimensional y estructural que llevó a cabo a lo largo de toda su vida. Un amplio repertorio de curvas, superficies regladas y también poliedros, que Gaudí empleó (ya fuera inspirándose en las formas naturales o como resultado de sus pesquisas empíricas), le permitieron crear una arquitectura singular y única cuya culminación fue (y es) la Basílica de la Sagrada Familia en Barcelona.

Al observar detenidamente los campanarios de la fachada de la Pasión se ve que sus constructores siguieron los modelos preparados por Gaudí y también las formas de los pináculos de la fachada del Nacimiento. Los poliedros simbolizando las piedras de los anillos son, en estos cuatro campanarios, los que marcan la diferencia. Si en el Nacimiento el octaedro, dual del cubo, crecía y maclaba a éste en el poliedro de caras cuadradas y hexagonales (no regulares), en la Pasión el juego geométrico tenía que ser exactamente el dual. Partiendo del octaedro y de su cubo dual (determinado por los centros de las caras del octaedro), al crecer el cubo éste macla al octaedro en un poliedro que tiene seis caras octogonales regulares y ocho caras triangulares. De nuevo simbólicamente, «de la tierra hacia el cielo»... la Pasión de Cristo.

En la fachada de la Gloria, que será la entrada central, aparecerán dodecaedros en los cuatro pináculos de los campanarios. El pináculo del cimborrio de la Virgen María tendrá un poliedro estrellado de doce puntas y cuatro icosaedros formarán parte de las torres de los Evangelistas. Así pues, una vez esté completada la gran obra de la Sagrada Familia, se podrán contemplar muchas formas poliédricas en la Basílica: «la geometría es el propio lenguaje del arquitecto».

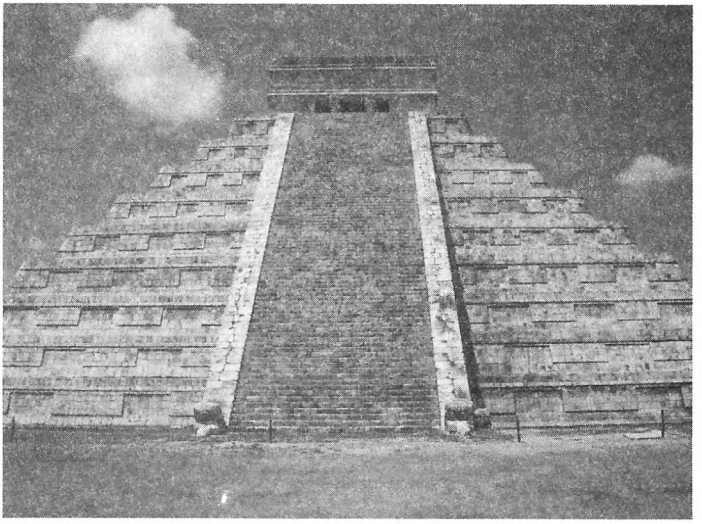
## Algunas obras singulares

Polígonos y poliedros aparecen también en otras obras singulares de arquitectura. Bien podría decirse que una de las ideas ancestrales para delimitar el espacio humano fue hacer cabañas cuya estructura era una pirámide de finos troncos de madera

ligados en su extremo superior y luego recubiertos por pieles, paja o vegetación. Formas muy primitivas de habitáculos con estructura de prisma triangular (al apoyar en una viga elevada los recubrimientos laterales) fueron típicas de cabañas de pastor o de zonas rurales de Madeira, de Hungría, Valencia...

## Pirámides egipcias, mayas y modernas

Las diversas pirámides de los faraones o los templos piramidales escalonados mayas constituyen formas que elevaron los simples poliedros a una categoría mítica. En Egipto se pueden visitar ochenta pirámides, entre las que destacan las de Gizeh. Junto a la forma geométrica y las inclinaciones de 51° de las caras laterales, destaca su perfecta orientación solar y sus cuidadas medidas y proporciones. Entre las pirámides mayas, por su parte, destacan las de Tulum, Chichen Itzá, Palenque, Yaxchilán y Tikal, configuradas por diversos troncos piramidales decrecientes.



*La pirámide maya de Chichen Itzá.*

En épocas recientes ha aparecido un curioso diseño piramidal en grandes hoteles (y no sólo en Las Vegas, donde todo es posible). Las «paredes de la pirámide» son los espacios de habitaciones y salas, creándose un enorme espacio interior vacío, con un gran hall en la base, desde donde se contempla el colosal interior, los ascensores que suben y bajan, etc. El Hyatt Regency Hotel en San Francisco o el Hotel Granada Center en Granada son dos ejemplos de referencia.

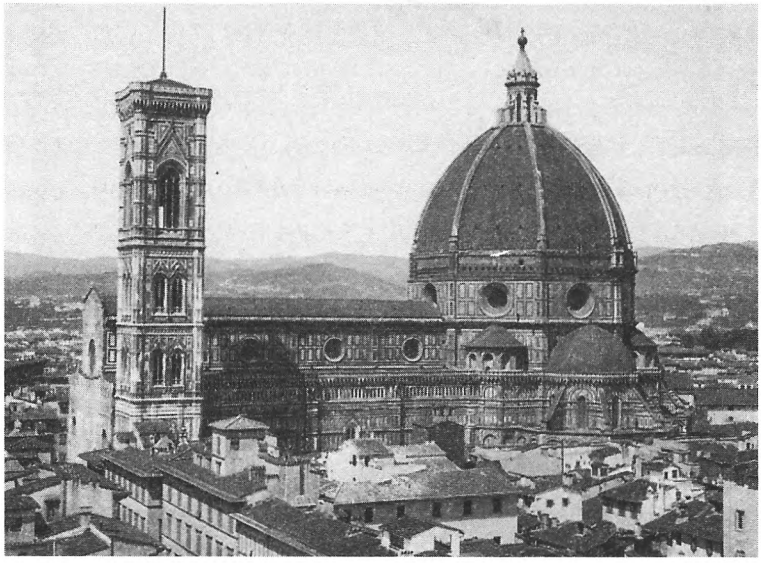
Entre las pirámides de última generación sobresale la del Museo del Louvre en París. Su original pirámide de barras metálicas y cristales fue diseñada por el arquitecto chino I.M. Pei. Cuenta con 673 paneles de vidrio, 603 de los cuales son rombos y 70 triángulos, y sus paredes poseen una perfecta inclinación egipcia: 51°.

## El Baptisterio de Florencia

En diversas ciudades italianas (Pisa, Florencia, etc.) hay espectaculares baptisterios con formas de prismas octogonales culminados por pirámides (de base octogonal). Su pura geometría se ve resaltada por la originalidad de sus decoraciones a color: éste es el caso del Baptisterio de San Giovanni en Florencia. Algo más bello y esbelto que el macrocomplejo en forma de prisma pentagonal del famoso Pentágono estadounidense.

## La estructura octogonal de Brunelleschi

Santa María del Fiore, la catedral de Florencia, es una joya constructiva única del gótico florentino. Su edificación se inició sobre la vieja iglesia de Santa Reparata en 1296, pero los últimos detalles no se dieron hasta 1883. De un intervalo histórico tal ya se puede deducir inmediatamente que muchos fueron los arquitectos



*Santa María del Fiore en una fotografía realizada por Giorgio Sommer (1834-1914).*

y artistas que contribuyeron a este singular monumento. El exterior en sí es una muestra compleja de elementos geométricos (triángulos, arcos apuntados, círculos, rosetones...). Pero lo que realmente hace admirable esta catedral es la cúpula que entre 1420 y 1436 construyó el gran Filippo Brunelleschi y que influyó sobre muchas otras cúpulas.

El concurso que ganó Brunelleschi tenía un condicionante que era todo un reto: la base sobre la cual debía hacer la cúpula era un octógono y las otras cúpulas menores ya habían sido construidas con base octogonal, usando ladrillos vistos y con unos perfiles del llamado *a quinto acuto*. De hecho, desde que la base octagonal se acabara en 1394 nadie creía que una gran cúpula (semejante a las otras) pudiese realmente edificarse: ¿cómo se iba a soportar el gran peso de la estructura hasta el cierre culminante de la misma?

La genialidad del joven Brunelleschi fue hacer una maqueta mostrando que sin complicadas estructuras centrales de madera para hacer la cúpula era posible edificarla. Dedicó dieciséis intensos años a llevar adelante este gran proyecto, cuyo secreto fue el siguiente: construir dos cúpulas (una interior y otra exterior) y para ello crear un esqueleto de hierro adecuado entre el octógono base y un octágono de hierro culminante. Colocó los cuatro arcos *a quinto acuto* en los vértices del octágono y sobre cada lado dos tiras complementarias de gruesos perfiles decrecientes hacia arriba (en profundidad, pero no en anchura). También se realizó a una cuidadosa elaboración y cocción de los ladrillos (cuya composición se reforzó con hierro). De esta forma, y como puede apreciarse recorriendo las galerías que quedan entre las dos cúpulas, aunque se trata de estructuras octogonales, los «meridianos» y algunos «paralelos» de hierro situados estratégicamente aseguran que la construcción se comporta a todos los efectos de edificabilidad y solidez como una cúpula esférica. Por eso Brunelleschi no precisó de apoyos centrales: en cada paso los anillos «paralelos» sirven para que el conjunto ya construido se aguante. La linterna que culmina la cúpula se apoyó en el anillo octogonal superior de hierro.

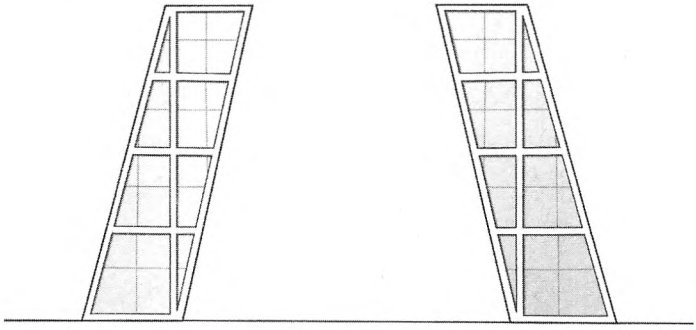
La gran basílica cristiana es la de San Pedro en el Vaticano. En 1547 se encargó a Miguel Ángel la culminación del templo con una gran cúpula. Pero suerte tuvo Miguel Ángel de que Brunelleschi hubiese resuelto con «doble» cúpula la de Florencia y de esta manera pudo seguir el mismo modelo. Miguel Ángel diseñó una cúpula de base circular con robustas «costillas» que transmiten bien el peso de la cúpula al soporte circular y a la vez delimitan una serie de quince ventanas desde donde penetra la luz del sol. Hay, por supuesto, «a la Brunelleschi», una simple cáscara externa y una robusta estructura interior.

## El Atomium de Waterkeyn

En 1958 el Atomium de Bruselas sobrevivió a la Expo. El ingeniero André Waterkeyn ideó esta estructura, inspirándose en el modelo didáctico de un cristal de hierro. Como era de prever, esta obra pensada para el medio año de la Expo quedó como patrimonio belga (habiéndose restaurado en el 2006). El Atomium es una estructura cúbica con los vértices y el centro del cubo y sus correspondientes aristas. El cubo se halla verticalmente colocado según una diagonal principal. Consiste pues en nueve esferas (de 18 m de diámetro) conectadas mediante veinte tubos. Esta pesada estructura (2.400 toneladas de acero) posee 103 m de altura y alberga en sus interiores transitables espacios, escaleras, escaleras mecánicas y un ascensor (que en 1958 era el más rápido del mundo).

## Los prismas oblicuos de Kio y otras obras

Madrid posee hoy una notable colección de grandes edificios que son puntos referentes en la ciudad: la Torre Europa, la Torre de Madrid, la Torre Picasso, Torrespaña, las nuevas torres de Repsol, Sacyr Vallehermosos, Cristal, Espacio de Convenciones.... Y desde 1996 destacan con geometría propia las dos gemelas Torres Kio o Puerta de Europa, que fueron diseñadas por el arquitecto Philip C. Johnson en colaboración con John H. Burgee.



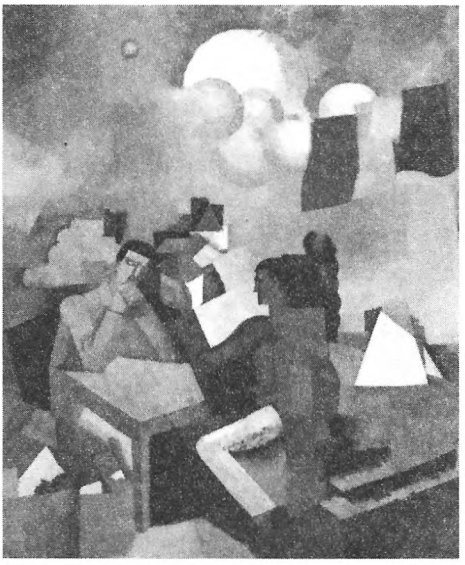
*Torres Kio en Madrid.*

Las torres son perfectamente simétricas respecto del plano central de la plaza donde se ubican; combinan cristal, granito y metal, acogen 27 plantas, llegan a 114 m de altura... y están inclinadas 15° respecto a la vertical. Johnson hizo célebre la frase «hay que acabar con el ángulo recto si no nos queremos morir de aburrimiento».

Otras formas prismáticas diversas y espectaculares pueden contemplarse en el Futuroscope de Poitiers y, por ejemplo, en los últimos proyectos de Enric Miralles en Barcelona (el dificio de Gas Natural en la zona de la Villa Olímpica).

## Poliedros y arte

En nuestro recorrido histórico por el mundo de los poliedros hemos tenido ocasión de ver como muchos artesanos y artistas se interesaron por la representación de poliedros en sus objetos, cuadros o dibujos. Las relaciones ente creatividad geométrica y creatividad artística han posibilitado originales aportaciones en pintura y escultura. Si en el Renacimiento la presencia de poliedros era un recurso para enfatizar los nuevos métodos de la perspectiva, muchos siglos después los poliedros dieron pie a tendencias más abstractas. Sirva el cubismo de Pablo Picasso como ejemplo ilustrativo. El objetivo ya no era el retrato de la realidad tridimensional en el cuadro, sino buscar esencias geométricas para hacer arte. Así, en *Muchacha con mandolina*, de 1910, Picasso representa la escena mediante una estructura poligonal y poliédrica. Roger de la Fresnaye en su *Conquista del aire*, de 1913, siguió directamente a Picasso con la representación de un picnic al aire libre a través de la intersección de prismas y pirámides. Obras de Georges Braque o de Josef Albers son hitos en esta poliedrización artística.



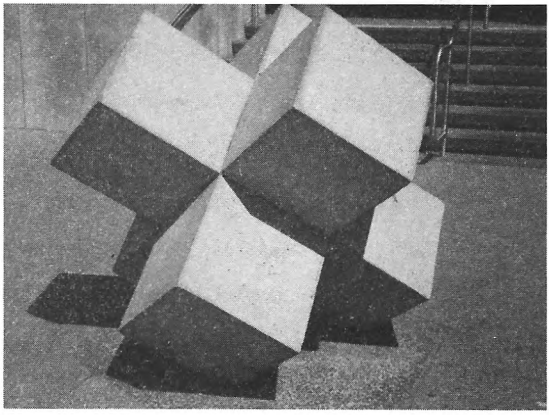
*La* Conquista del aire *de Roger de la Fresnaye.*

Salvador Dalí pintó muchos cuadros en los que subyacen diversos recursos geométricos: simetrías, deformaciones topológicas, poliedros, hipercubos. En la obra daliniana hay tres obras maestras de base poliedral. En *El Corpus Hypercubicus*, Dalí sustituye la cruz latina por una cruz de ocho cubos (el hipercubo). En *El Sacramento de la Última Cena* la escena tiene lugar en el interior de una estructura de dodecaedro (¿homenaje a las ideas platónicas?) que a pesar de mostrar sus aristas representa un cuerpo transparente que permite apreciar un paisaje de mar al fondo y una figura fuera de él que asciende hacia el cielo. Quizás el caso más curioso es el de la *Contemplación cósmica*, una acuarela con tinta en la que aparece un poliedro, pero se trata de un poliedro imposible al ser la combinación de sus caras pentagonales y hexagonales absurda para cerrar una figura convexa.

M.C. Escher fue un imaginativo creador de realidades 3D imposibles, de sorprendentes mosaicos y de pinturas ilustrativas de las geometrías no euclideas. A esto último contribuyó la interacción entre Escher y H.S.M. Coxeter. Los poliedros regulares decorados por Escher han sido popularizados a través de recortables que hoy están en el mercado.

En la creación de figuras imposibles ha contribuido notoriamente el matemático español Vicente Meavilla, quien no sólo ha sistematizado toda una teoría para producir dichas figuras, sino que ha ideado muchas nuevas.

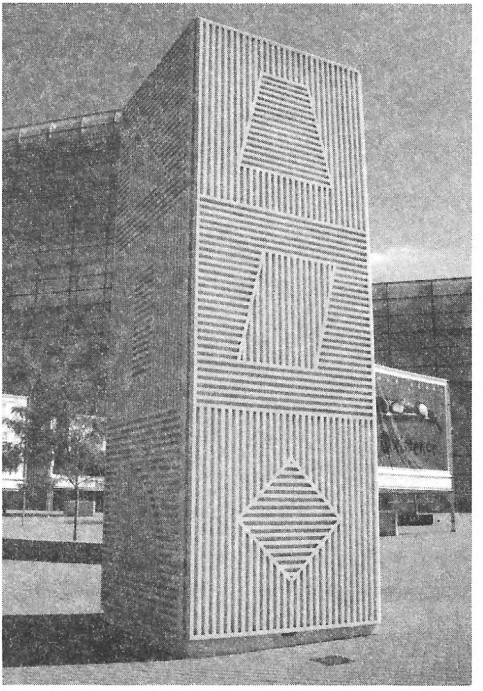
Evidentemente, es en la escultura moderna abstracta donde las formas poliédricas han tenido un merecido protagonismo. Su simplicidad y su tridimensionalidad manifiesta, junto al hecho artístico de jugar con el color, los materiales, las texturas, los grandes tamaños, las simetrías resaltadas o rotas, etc., han elevado a los poliedros a piezas fundamentales de la creatividad escultórica.



*Policubos en Atlanta.*

En la ilustración anterior puede verse uno de los muchos policubos de hormigón que, como caídos del cielo, se encuentran en plazas de Atlanta. Pocas son las ciudades donde no se encontrará alguna escultura cúbica en un parque, en una fuente, o en un lugar dedicado a algo o a alguien. Así, Isamu Noguchi colocó su inmenso cubo rojo frente al Marine Midland Bank Building de Nueva York, que se apoya en sólo un vértice y muestra sus caras con una interesante perspectiva rómbica. C.D. Perry logró con su *Eclipse* metálico gigante llenar el gran hall de Hotel Hyatt Regency de San Francisco; y este eclipse presenta superficies saliendo de un esqueleto metálico de dodecaedro hacia un icosidodecaedro y un pequeño rombicosidodecaedro. Max Bill en su *Construcción con treinta elementos iguales* creó una gran escultura metálica sobre un pedestal que combina tetraedros que crean tiras en diferentes direcciones.

Hugo F. Verheyen, A. Lee Burns, E. Haner, A. Holden, R. Fredenthal y muchos otros artistas han legado piezas únicas con base poliedral. Pero a veces la complejidad de la escala de la escultura, así como su construcción y emplazamiento, requieren las intervenciones de arquitectos o ingenieros. Sol Lewitt creó numerosos murales, obras a las cuales denominaba «estructuras»: pensaba en su creación, hacía planes para la misma y dirigía finalmente su ejecución ayudado de ingenieros y obreros



*La escultura* Torre, *de Sol Lewitt, situada en el exterior del Figge Art Musem de Davenport, Iowa.*

especializados. Su *Pirámide de los cuatro lados* de 1999, situada en la National Gallery of Art de Washington, sintetiza a través de bloques de piedra blanca lo que podría ser tanto un homenaje a las antiguas construcciones como al desarrollo moderno de los rascacielos. En otras esculturas con cubos Lewitt jugó combinando cubos macizos y espacios cúbicos vacíos. Minimalismo geométrico, color, textura.

En tiempos recientes, Javier Carvajal ha realizado como escultor interesantes exploraciones sobre mallas-celosías. Tom Carr, gran explorador de las formas básicas geométricas y su situación en el espacio, ha incluido numerosos poliedros en sus obras. Valga de ejemplo un impresionante prisma hexagonal (*Axis*, de 2007) de varios metros de altura hecho en cristal y situado en un prado rodeado de árboles, donde se ve paisaje a través del prisma y los árboles del entorno se reflejan en sus caras. Sus cubos de hormigón medio pintados formando un arco de triunfo en Tarragona o una pirámide con escalones en el *Homenaje a la Unidad Europea* (Sant Boi de Llobregat) forman parte de su ya dilatada experiencia en dotar de grandes esculturas los espacios públicos.

Capítulo 5

# Poliedros y diseño

*La mejor manera de tener una*
*buena idea es tener muchas ideas.*
Linus Pauling

¿Vive rodeado de poliedros? ¿Son los poliedros importantes en su forma de vivir? Las dos preguntas tienen una respuesta afirmativa, y el objetivo de este último capítulo es convencerle de la apabullante presencia poliédrica que existe a su alrededor. Sus variadas formas, sus diferentes funciones, sus estridentes colores, sus diversas texturas y materiales, etc., contribuyen a que no todas las personas aprecien la omnipresencia de los poliedros. Pero ya que viven con nosotros y los diseñadores nos ofrecen nuevos poliedros a diario, vale la pena ser conscientes de su papel y de su utilidad.

## La pelota de fútbol

A pesar de que multitud de periodistas deportivos hacen referencia «al esférico», el balón de fútbol no es una esfera, sino un poliedro, que al ser hinchado con aire adopta una forma cercana a la esfera.

*Pelota de fútbol reglamentaria.*

Como se ve en la figura, el balón es un icosaedro truncado que combina 20 hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares. Este poliedro de Arquímedes tiene 32 caras, 90 aristas y 60 vértices. Como poliedro ocupa el 86,74% de la esfera circunscrita a él, pero al ser inflado llega casi al 95%. Si bien se han estudiado (y realizado) otros diseños, hoy por hoy este icosaedro truncado sigue siendo la opción ideal para la práctica del fútbol.

### LA FIFA Y EL ICOSAEDRO TRUNCADO

Los balones oficiales son sometidos a estrictas normativas en cuanto a tamaños y grado de hinchamiento. En 2008 la revista *Consumer* de Eroski informó de lo siguiente: «Para determinar la esfericidad de un balón se hincha y se mide su diámetro en 16 puntos diferentes para calcular el diámetro medio. Después, se calcula la diferencia entre el diámetro máximo y el mínimo. Así, el número que se obtiene es la diferencia en porcentaje entre el diámetro máximo y el mínimo sobre el diámetro medio. A los balones oficiales para las competiciones de la FIFA se les exige que no superen el 2%. Umbro, con un 2,2%, no es lo suficientemente redondo. Matt (2%) y Joma (1,9%) mostraron valores de esfericidad aceptables, pero elevados. Las esferas más perfectas fueron las de Astore (1,3% de esfericidad) y Diadora (1,3%)». Toda una ciencia al servicio del deporte rey.

## Poliedros lúdicos

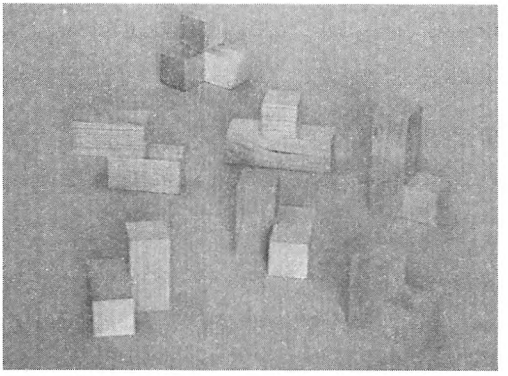
Jugar ha sido desde siempre una forma amable de distraerse. Hay personas que juegan por ambición crematística, confiando que el azar dejará de ser equitativo y se fijará en ellas. Otras personas más sensatas juegan por simple placer o para poner a prueba sus destrezas, sus conocimientos o su suerte (sin esperar nada a cambio). También en el mundo de los juegos los poliedros han desempeñado un papel. Ya se ha hecho referencia en páginas anteriores al Tetris 3D y a cómo hacer poliedros con papel. A continuación se describen algunos juegos más.

### El cubo Soma

Sólo personajes singulares pueden desarrollar creaciones en varios campos a la vez. Éste fue el caso de Piet Hein (1905-1996), un danés que fue físico, matemático, inventor, escritor... y reconocido poeta. En 1972 recibió un doctorado honorífico de la Universidad de Yale. Hein inventó las superelipses (que se usaron en diseño urbano de plazas y rotondas), los superhuevos (al girar estas superelipses), los populares juegos *Hex, Grangloids, Morra, Tower, Polytaire, Tac Tix, Nimbi, Qrazy Qube, Pyramystery, Astro calendar*..., y el cubo Soma.

Se trata de una disección del cubo en siete piezas, cada una de las cuales tiene como máximo cuatro cubitos (excluyendo formas convexas). Es como un Tangram tridimensional cuyo reto es formar un cubo de $3 \times 3 \times 3$; al estar formado por po-

licubos es una extensión 3D de los populares poliominos. Martin Gardner y John Horton Conway colaboraron a hacer popular este rompecabezas y su análisis: admite 240 soluciones distintas (salvo simetrías y rotaciones).



*Piezas del cubo Soma.*

## El cubo de Rubik

El escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernö Rubik inventó en 1974 el rompecabezas cúbico más famoso (¡y vendido!) de la historia.

*Sello húngaro de 1982 dedicado al cubo de Rubik.*

Su sencillo diseño permite manipular (girando) los cubos, siendo el objetivo del juego lograr que en cada cara aparezcan los nueve cuadrados del mismo color. Una idea similar con $2 \times 2 \times 2$ cubos sostenidos por imanes ya había aparecido en 1970 de la mano de Larry Nichols, y diversas patentes posteriores a 1974 han generado multitud de variantes, pero el diseño mecánico de Rubik con la pieza central que permite todos los giros de los otros cubos marcó un antes y un después.

El número de permutaciones posibles en el cubo de Rubk se ha evaluado en la escalofriante cifra de:

43.252.003.274.489.856.000

y, por ello, al margen de competiciones diversas, el cubo ha dado lugar a interesantes estudios matemáticos sobre algoritmos eficientes y rápidos para resolver, a partir de una situación cualquiera, la ordenación de caras con igual color. David Singmaster ideó, capa por capa, un método para solucionar el reto en un minuto. Petrus, Fridrich y Hein han dado métodos de resolución con un número limitado de movimientos. En 2007 D. Kunkle y G. Cooperman justificaron computacionalmente que el cubo podía ser resuelto con un máximo de 26 movimientos. En 2008 T. Rokicki describió una solución en 25 movimientos, y en 2010 un equipo dirigido por M. Davidson demostró que el juego puede resolverse en 20 movimientos (que pueden ser incluso menos dependiendo de la posición de salida).

Pero junto al problema de los mínimos movimientos aparece el reto temporal de su resolución. Erik Akkersdijk tiene actualmente el récord mundial en brevedad resolutoria: 7,08 segundos. Incluso hoy existen divertidas competiciones usando los pies, con los ojos vendados, con una mano, etc.

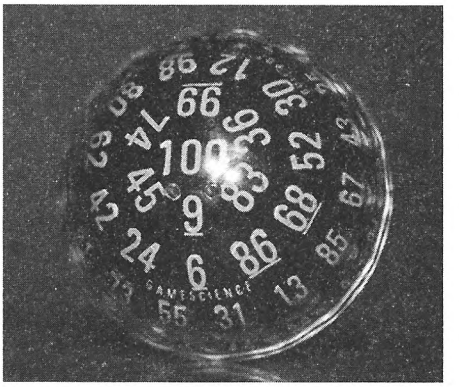
## Dados y sorteos

Los dados poliédricos (cúbicos en especial) se remontan a la noche de los tiempos. Tirados al azar por una mano inocente van dando los correspondientes resultados numéricos según los números asignados a las diferentes caras. En la época de griegos y romanos los juegos de dados tuvieron gran popularidad, y se atribuye al emperador Claudio un tratado (hoy perdido) de cómo jugar con dados.

En el siglo XVII, fueron las tiradas con dos dados las que impulsaron a Antoine Gombard, el Caballero de Méré, a preguntar a dos grandes matemáticos, Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662), sobre las estrategias convenientes. Y de las reflexiones de ambos nació el importante cálculo de probabilidades, una interesante rama de las matemáticas que también ha ayudado al desarrollo de la estadística.

Los dados normales son cubos con caras numeradas del 1 al 6 de forma que caras opuestas siempre suman 7 ($7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$), con los números 1, 2, 3 dispuestos en sentido antihorario. Dichos dados están presentes en numerosos juegos de tablero. Pero más allá de los dados cúbicos tradicionales, en las últimas décadas

han aparecido unas nuevas generaciones de dados con otras formas poliédricas y, por tanto, con otro tipo de numeraciones en juego. Hoy existen en el mercado dados con 6, 8, 10, 12, 20... y hasta 100 números, con formas de poliedros que tienen este número de caras (poliedros regulares, prismas, antiprismas, bipirámides, etc.).




*Dado con cien caras.*

El dado japonés espectacular de cien caras es, de hecho, una esfera de plástico en la que se han realizado cortes de caras circulares uniformemente distribuidas (y paralelas por parejas para que el número-resultado quede arriba). Con dos dados de diez caras puede jugar a 100 números: uno da las decenas y el otro, las unidades.

Junto a los dados numéricos también existen los dados cúbicos para póquer o para juegos de rol.

## UN DADO MISTERIOSO

La perfecta simetría de los cubos hace posible ver de forma evidente que todas sus caras tienen igual probabilidad de salir; en caso de que se detecte que ciertos valores salen más que otros, se deducirá inmediatamente que el dado tiene trampa (sobrepeso de alguna parte) o que la mano inocente que tira el dado es totalmente malévola.

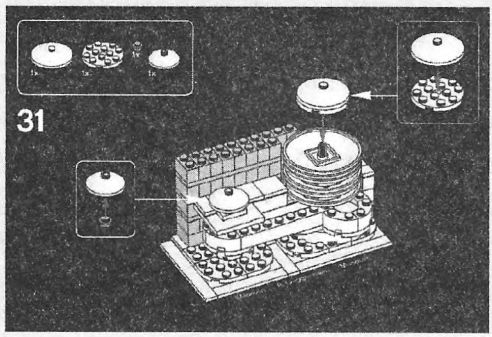
Considérese ahora un dado que tenga forma de prisma (por ejemplo, pegando dos dados normales por una cara y distribuyendo los seis números en las caras del prisma). ¿Cuál es la probabilidad de que salgan las caras de la base o las caras laterales más largas que las otras? Este problema aún no ha podido resolverse con un cálculo teórico y sólo haciendo muchas tiradas, apuntando sus resultados y realizando un cálculo estadístico de las frecuencias con las que salen las diferentes caras se han podido evaluar las probabilidades como límites de estas frecuencias.

## EL FAMOSO LEGO

La idea de los policubos nace de la necesidad de tener módulos. Un caso de sorprendente juego modular ha sido el de Lego, cuya raíz geométrica reside en los cubos de madera. En 1918 Ole Kirk Christiansen inició un negocio de carpintería en Billund, Dinamarca, construyendo casas y muebles para granjeros; tras unos años de dificultades, con el objetivo de minimizar costos de producción comenzó a producir versiones en miniatura de sus productos como ayuda de diseño. Las escaleras y las tablas de planchar en miniatura fueron las que le inspiraron a producir juguetes. En 1934 el nombre Lego fue acuñado por Christiansen a partir de la expresión danesa *leg godt*, que significa «juega bien». Cuando el plástico alcanzó un uso masivo, su empresa se adaptó a los cambios y comenzó a producir juguetes de plástico. Uno de los primeros juguetes modulares producidos por Lego fue un camión desmontable. En 1949 se empezaron a producir los bloques de plástico conectables que llevaron a la compañía a la fama internacional. Estos «bloques», fabricados primero con acetato de celulosa y luego, con plástico ABS, fueron desarrollados al estilo de los bloques de madera tradicionales, los cuales podían ser apilados unos sobre otros; el concepto revolucionario fue que los bloques de plástico podían ser «trabados» entre sí. Cada bloque poseía varios botones planos en su cara superior y un fondo ahuecado rectangular; conectando las caras superior e inferior de dos bloques era posible mantenerlos unidos.

Con un desarrollo cada vez más sofisticado de piezas, en 1968 fue inaugurado el parque temático Legoland en Billund con modelos en miniatura de ciudades reales, construidas enteramente con ladrillos Lego. Una de las características esenciales de estos ladrillos a través de su historia ha sido que cada uno es, ante todo, parte de un sistema: cada nueva serie o juego lanzado es compatible con el resto del sistema; las piezas Lego, sin importar su tamaño, forma o función, encajan con todas las demás piezas de alguna manera. Para mantener el grado adecuado de agarre, las piezas son fabricadas con un grado de tolerancia de dos milésimas de milímetro.

Los ladrillos Lego han sido considerados desde siempre de gran ayuda por los educadores gracias a su capacidad de desarrollar las habilidades creativas y de resolución de problemas en niños. Este material puede ser lúdico y a la vez instructivo.




*La página web de Lego ofrece instrucciones para construir numerosos edificios, como esta ilustración, que pertenece al montaje del Guggenheim Museum de Nueva York.*

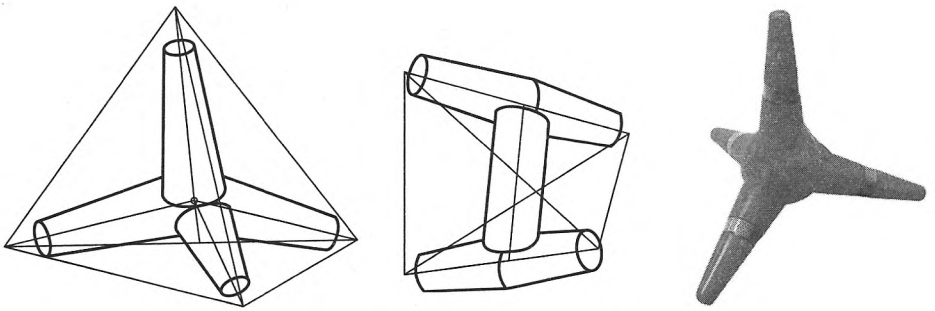
### Rompecabezas

Disecciones poliédricas (como el cubo Soma) dan pie a multitud de puzzles en los que el objetivo es montar el propio poliedro a partir de todas las piezas implicadas. Juegos como *Tak-it-Apart, Plato's Plight, Burrs, Bun Box*, etc. ponen sin duda a prueba la perspicacia espacial. En tiendas especializadas y mercados de artesanía de madera podrá adquirir juegos de este tipo. También puede confeccionar uno mismo cuatro cubos iguales (con cartulina o piezas de Lego) con caras de colores diferentes y montar con ellos policubos que tengan todas «sus caras» del mismo color. Además del cubo Rubik, existen en el mercado multitud de variantes con diferentes poliedros; las reglas son las mismas que las del cubo, pero la geometría de cada caso cambia la dificultad.

## Dolos y tetrápodos

Proteger las escolleras marítimas ha sido desde siempre un problema clásico en la construcción de puertos. El objetivo es preservar los muros construidos para que éstos no cedan a la fuerza de los temporales. Diversos fueron los métodos ensayados, como colocar montones de grandes piedras o cubos de hormigón, pero una solución muy especial fue la constituida por formas basadas en tetraedros. Éstas, al encajarse entre sí, dan más solidez a la protección que el apilamiento cúbico.

Un curioso diseño de la década de 1950, basado en el tetraedro, es el módulo francés llamado tetrápodo, que está formado por cuatro troncos de cono distribuidos según los ejes interiores de un tetraedro. Construidos en hormigón, son apilados entrelazados en escolleras marítimas. Los *dolos* de Eric Merrifield de 1970, fabricados en Sudáfrica, servían para el mismo fin, pero aprovechaban las aristas opuestas del tetraedro.



*Tetrápodo, dolo y tetrápodo de tráfico.*

Más adelante, la forma del tetrápodo ha servido para hacer una señalización de tráfico alternativa a los viejos conos, siendo mucho más fáciles de colocar: basta tirarlos al suelo y siempre quedan de pie. Este truco también se ha empleado con mini tetrápodos de acero con puntas en sus extremos, que al ser esparcidos por el suelo aseguran que ningún coche podrá escapar al control policial que los ha dispuesto.

## El imperio de las cajas

Todos vivimos inmersos en el imperio de las cajas. En las cajas se archivan papeles, en las cajas se almacenan la mayoría de productos, las cajas aseguran el transporte en condiciones y el posterior reparto, las cajas son el gran intermediario entre el producto de su interior y nosotros, los consumidores. En efecto, además de su misión intrínseca de guardar bien el producto, las caras de las cajas comerciales incluyen hoy una enorme cantidad de información (contenido, composición del producto, caducidad, código de barras para escanear, precio, etc.) y una gran dosis de seducción (imágenes, colores, nombres y eslóganes publicitarios...). Entre la venta al detalle con bolsitas plegables de papel (que exigían atención personalizada) y las estanterías de cajas que se ofrecen al voraz consumidor en grandes superficies hay un abismo en eficiencia, rapidez y calidad de conservación.

### MARLBORO FLIP-TOP

La forma tradicional de empaquetar veinte cigarrillos ha sido colocarlos de la forma más compacta posible (en tres filas de siete, seis y siete) con envoltorio de papel de aluminio, un envoltorio o caja de papel personalizada según marca y producto, más un envoltorio transparente de celofán. Un diámetro de 0,8 cm y una altura de 8,5 cm para cada cigarrillo ha concluido en un paquete cuyas dimensiones son generalmente de $5 \times 8{,}5 \times 2$ cm, quedando la cara rectangular mayor de proporción: $8{,}5/5 = 1{,}61$, es decir, el número de oro.

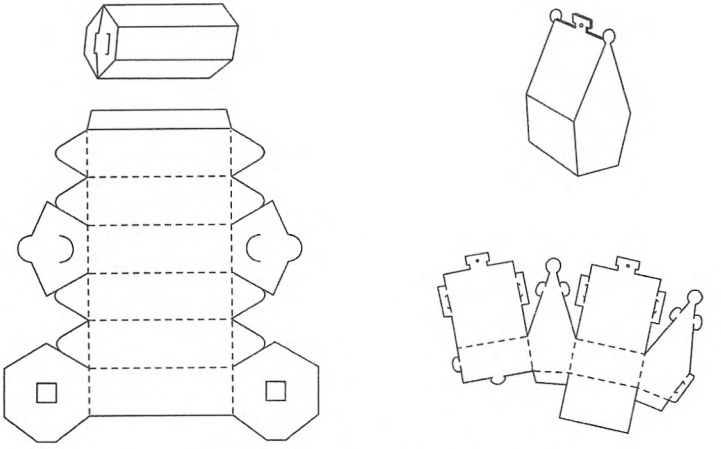
El diseño que revolucionó el empaquetado del tabaco fue el del diseñador Frank Gianninoto para Philip Morris en 1955. El objetivo era dar un cambio de imagen a la marca Marlboro, por aquel entonces una marca de cigarrillos con filtro pensados para «señoritas». Así nació la *flip-top box,* una caja cuya tapa se abre y se cierra. Si a la magia de esta tapa se une la resistencia del contenedor a doblarse y una rotulación en la que los colores rojo y blanco son característicos, se puede entender el éxito mundial del producto y que haya pasado a ser un diseño americano emblemático para el país productor.

El arte de fabricar cajas e imprimir en ellas información tiene también su pequeña-gran historia. La primera caja «montable» producida en Estados Unidos la hizo Bird & Company en 1850 para que los vendedores empaquetaran los productos ya comprados. La primera caja montable y ya impresa la hizo Robert Gair en 1879. Este último llegó a producir 7.500 «cajas» por hora y tuvo la genialidad de combinar el proceso de imprimir con el de recortar el desarrollo plano de la caja, posibilitando pues el almacenaje de «cajas vacías» y, a la vez, informativas del producto.

Geométricamente, las cajas son la mayoría de las veces simples prismas, pero aun en este caso, más allá de las caras rectangulares, deben contar con complejos sistemas de pestañas, dobles caras, tapas, bases, etc., que permitan montar una caja final muy sólida. También hay contenedores con sofisticadas formas geométricas.

En las figuras siguientes puede observar interesantes ejemplos de cajas basadas en la simplicidad de los poliedros, pero convenientemente reforzadas y aseguradas.

Las cajas más apreciadas son las montables cuyos desarrollos planos se guardan apilados y cuyo montaje se puede hacer fácilmente al momento. Los casos de las cajas de cereales o de pizzas han sido científicamente estudiados. Su uso comercial les da un enorme volumen de negocio.



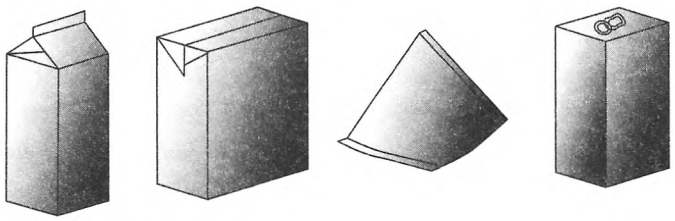
*Cajas poliédricas y sus desarrollos.*

También aparece en este imperio consumista de las cajas el tema de «envolver» cajas para regalo. Por algún motivo regalar una caja sin envolver produce sospechas y el envoltorio con etiquetas certifica que «ha sido comprada». La superficie del papel que hay que usar siempre es superior a la superficie de la caja, pues debe haber márgenes suficientes para cerrar con dignidad el regalo, añadir cintas, etc. ¡Todo un ritual prismático!

## Tetra Pack®

Los diseñadores suecos Ruben Ransing y Eric Akerhund crearon hace más de cincuenta años los célebres Tetra Classic, Tetra Rex, Tetra Top y Tetra Brik Aseptic.

El Tetra Classic tiene forma de tetraedro, con sus cuatro caras triángulos equiláteros; el Tetra Brik Aseptic tiene forma de caja (ladrillo) y su base de $6{,}66 \times 10$ cm permite que en una superficie de $30 \times 40$ cm se puedan colocar verticales dieciocho envases; el Tetra Rex es un prisma de base cuadrada con tapa inclinada o no, y el Tetra Top tiene también forma de prisma cuadrado, pero posee tapa de polietileno.



Estos ligeros envases son producidos a partir de capas de papel que aseguran la consistencia, plástico que aporta hermeticidad, aluminio que aísla de la luz y el oxígeno, y finalmente, la capa de polietileno, que es la única que se encuentra en contacto directo con el líquido (vino, zumo, leche, caldo...). El proceso genérico del envasado permite una total esterilización interior y una perfecta conservación antes de la abertura, sin necesidad de refrigerar (lo que representa un gran ahorro). El poco peso del envase y su capacidad de apilamiento se ha calculado que ahorra un 75% de los costes de transporte.

Una sorprendente geometría permite la producción de estos envases. A partir de rollos de material (ya impresos), y por medio de unos ingeniosos mecanismos, se produce por ejemplo el Tetra Clasic, en cadena, doblando bordes, procediendo al llenado (por abajo) y doblando y sellando bordes para cortar y separar los envases posteriormente.

## Poliedros caseros

No sólo las habitaciones pueden tener formas tipo caja, sino que muchos elementos aparentemente «planos» tienen en realidad un grueso que les da el volumen necesario. Piénsese en las piezas del parquet, en las baldosas, en todas las partes de los muebles que tienen formas prismáticas, en las puertas y sus montantes, en las ventanas, en una

### CAJAS DE KLEENEX®

En 1872 John A. Kimberly, Havilah Babcock, Charles B. Clark y Frank C. Shattuck montaron en Neenah, Wisconsin, la corporación Kimberly-Clark Coorporation; años más tarde de esta empresa surgió la producción de Kleenex. En sus inicios la compañía fue una gran productora de papel higiénico y más tarde de toallas de papel, vendas y un primitivo tipo de compresas llamadas Kotex. El 12 de junio de 1924 nació Kleenex® Brand, la toallita facial desmaquilladora, aunque dos años después fue el mercado masculino el que descubrió su uso alternativo como pañuelo de bolsillo. Desde entonces ha habido una carrera meteórica mundial de producción de estos cuadrados blancos y suaves (y desechables).

El nombre Kleenex (con K de Kimberly) provine de *cleaner* alterando las letras pero no el sonido en inglés, añadiendo al final «ex», dado el éxito que tuvo el Kotex. La famosa caja Pop-Up® característica de los Kleenex® data de 1928, pero los primeros paquetes para bolsillo no surgieron hasta 1932.

El secreto de la caja prismática de Kleenex es que por el orificio de arriba se van extrayendo, uno tras otro, los pañuelos estratégicamente plegados y secuenciados para que siempre haya uno dispuesto a cumplir su alta misión.

chimenea prefabricada... Puestos a resaltar algunos ejemplos, se han elegido piezas hogareñas especialmente ricas en geometría.

## Lámparas geométricas

Existen en el mercado infinidad de lámparas para colgar con formas poliédricas, desde simples cubos de cristal a dodecaedros, estrellas de Kepler-Poinsot, etc.

Un ejemplo destacado en este ámbito son las económicas lámparas Lampan de Ikea, distribuidas según la simetría de un poliedro con 52 caras. También es fácil distribuir las lámparas como un dodecaedro o un icosaedro. Por su parte, el diseñador danés Holger Stron se basó en el triacontaedro rómbico (poliedro con treinta caras rómbicas y vértices que reciben tres o cinco aristas) para crear un modulo de plástico irregular que permite montar la lámpara IQLight.

En muchos lugares, de Granada a Estambul, se producen bellísimas lámparas de cristales de colores y con aristas metálicas que tienen forma de poliedro estrellado. Incluso Gaudí colocó lámparas con forma de dodecaedro en la Cripta de la Basílica de la Sagrada Familia.

## Paraguas piramidales

Los paraguas como instrumentos individuales para evitar mojarse no surgieron en Europa hasta el siglo XVI y fueron considerados inicialmente sólo para uso femenino. Pasarían varios siglos hasta que los hombres admitieran también el interés del artefacto. Por ejemplo, en la lluviosa Gran Bretaña, no existió una tienda de paraguas hasta 1830, siendo los materiales usados madera, tela, ébano para el mango, etc. La estructura de hierro fue introducida en 1852 por Samuel Fox.Vale la pena notar que Fox logró con su diseño rentabilizar grandes partidas de varillas para fajas femeninas a las que pudo así dar salida.

*Calle de París bajo la lluvia, lienzo de Gustave Caillebote realizado en 1877, cuando los paraguas con estructuras de hierro todavía eran una novedad en muchos lugares.*

La geometría del paraguas normal es simple: una anilla se desplaza hacia arriba del bastón central forzando a sus ocho varillas a subir, las cuales, a su vez, obligan a las ocho varillas mayores a abrirse y tensar, de esta manera, la tela que las cubre. Se descubre así una bipirámide octogonal. La estructura que se asemeja a una *pirámide octagonal* es próxima al círculo. De este modo, la «pirámide» anti-lluvia presenta una perfecta simetría que funciona con lluvia vertical, aunque no sirve de nada para luchar contra ráfagas inclinadas de lluvia y viento. Recientemente, al carácter «flexible» de los paraguas se ha unido la virtud «plegable», existiendo hoy mini estructuras que una vez desplegadas, como en los trucos de magia, dan lugar a un paraguas.

### CORTINAS POLIÉDRICAS

Lo último en cortinas se debe a la diseñadora holandesa Hanna Allijn, quien dando a las telas divisiones triangulares y plegando las cortinas de lado y hacia arriba logra crear formas poliédricas con las mismas. En Internet se puede encontrar múltiple información sobre los trabajos de esta vanguardista diseñadora.

En la actualidad, hay una nueva generación de paraguas. En Santiago de Chile se venden a precio elevado nuevos diseños que se han saltado el principio omnipresente de las ocho varillas. Hay de cuatro varillas (dando una pirámide cuadrada) y de seis varillas (dando una pirámide hexagonal). Evidentemente, los paraguas para golf son los más grandes del mercado. Pero si aun los quiere más grandes siempre puede refugiarse (aunque resulta aparatoso) bajo una sombrilla de playa o de mesa de restaurante. El principio es el mismo.

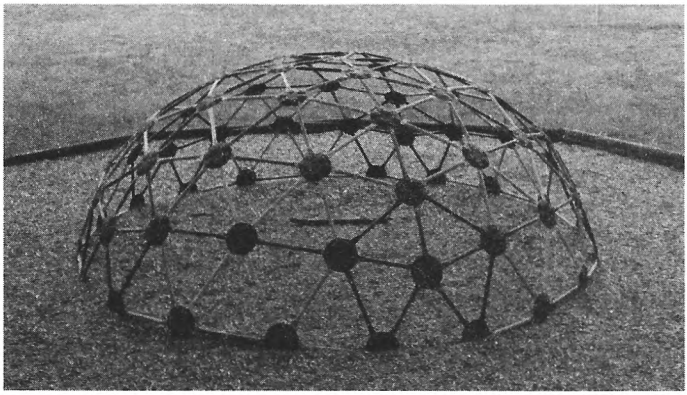
### Objetos de cartón

Con el creciente interés por los objetos caseros que sean plegables, de fácil montaje y reciclables, han aparecido multitud de objetos de cartón que se venden planos y que con los correspondientes encajes dan lugar a interesantes formas geométricas de usos bien diversos. Un ejemplo son los dodecaedros de cartón en los que falta una cara pentagonal y son casitas para gatos.

En el mercado también se pueden adquirir (si el peso y volumen de sus futuros usuarios son muy limitados) mesas y sillas de cartón reforzado y plegado listo para montar una cena o un picnic.

## Mobiliario urbano

En calles y plazas son frecuentes la colocación de asientos, mesas, jardineras, juegos infantiles, paradas, barandillas, objetos para impedir el tráfico rodado, quioscos, etc., formando las figuras poliédricas parte de estos elementos. Nada más simple que un banco con forma de un paralelepípedo de piedra o una losa apoyada en dos losas menores. Para el disfrute de los niños hay «casitas» en parques que son como «arquitecturas» en gigante o pequeñas cúpulas de barras de hierro en las que hacer divertidos itinerarios circenses.



*Estructura poliédrica en un parque infantil.*

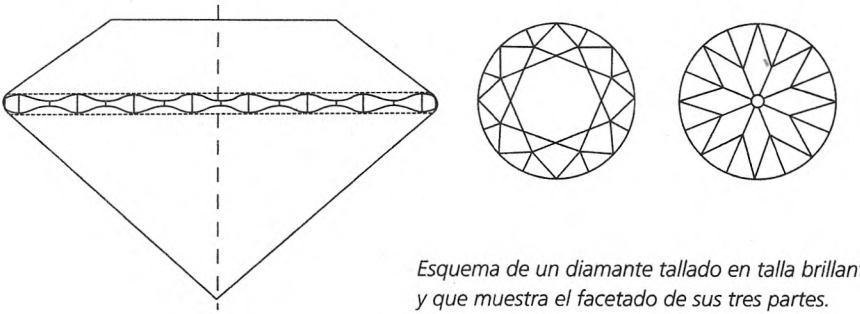
Dodecaedros en hormigón se han usado en lugar de pilonas esféricas para delimitar zonas peatonales e incluso en París se han usado dodecaedros como contenedores de vidrio. En el caso de los contenedores de basura, se usan formas de troncos de pirámide o paralelepípedos.

Otro ejemplo destacado es la aparente pirámide situada en la plaza del Cosmocaixa de Barcelona. En realidad, son sólo dos caras triangulares de hierro pero colocadas de forma que su sombra actúa como reloj de sol. En el suelo de esta Plaza de la Ciencia están marcadas las horas correspondientes para poder «leer» la información horaria de las sombras.

## Poliedros en joyería

Australia, Sudáfrica y Brasil tienen los yacimientos en donde hay diamantes. Luego esta valiosa materia prima va a parar a todos los lugares donde habilidosos joyeros transforman el mineral en bruto en piezas geométricas únicas, brillantes que seducirán a humanos que pueden permitirse el lujo de pagarlos o que están dispuestos a aceptarlos. En los diamantes se une el alto valor derivado de su escasez y el valor añadido de su geometrización. Peso, pureza, tallado y facetado son su tarjeta de presentación.

El diamante es la sustancia natural más dura y cristaliza en el sistema cúbico, adoptando los cristales en origen formas cercanas al octaedro y siendo sus colores diversos. Es usual distinguir nueve formas en las tallas de diamante, las cuales reciben los nombres de talla sencilla, brillante, corazón, oval, marquesa, pera, baguette, cuadrado y esmeralda. Es preciso remarcar que siendo el diamante el material más duro, lograr hacer estas tallas perfectamente geométricas exige un proceso tecnológico avanzado.



*Esquema de un diamante tallado en talla brillante y que muestra el facetado de sus tres partes.*

El nombre clave en la historia del tallado de diamantes es el de Marcel Tolkowsky, quien en 1919 publicó *Diseño de diamantes, un estudio sobre la reflexión y refracción de la luz en un diamante.* A partir de referencias históricas, Tolkowsky planteó y resolvió una propuesta para el corte ideal de diamantes desde el punto de vista óptico, maximizando brillantez, fuego y color. Usó los principios ópticos básicos (leyes de incidencia y refracción) y mediante simples cálculos trigonométricos, determinó unas formas y proporciones que resultaban óptimas para los objetivos buscados. Jasper Paulsen hizo correcciones técnicas a los resultados de Tolkowsky, pero, esencialmente, los cortadores de diamantes han seguido durante gran parte del siglo XX los resultados de 1919.

La punta inferior del poliedro es insertada en el anillo y la parte truncada, convenientemente facetada, responde a los efectos maximizadores de brillantez, fuego y color. Los ángulos de 40°45' del pabellón, 34°30' para la corona y un tamaño de la tapa del 53% son los datos clave del modelo. Cabe notar que Tolkowsky induce con su estudio a primar la belleza geométrica por encima del tamaño: si se hubiese primado el peso los diamantes no se cortarían.

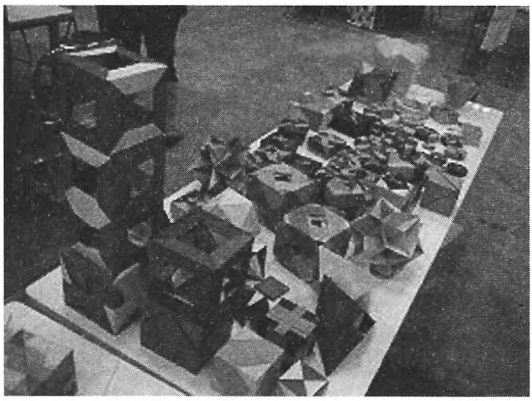
El siguiente paso en la industria de los diamantes fue dado entre 1977 y 1984 en Japón, con una nueva forma de tallar diamantes (ideada por Yasuhito Shigetomi), un nuevo aparato (el FireScope®) y un nuevo planteamiento en la producción y venta (desarrollado por Taruhiro Tamura). El nuevo modelo se denominó EightStar®, al basarse en una estrella de ocho puntas, presentando 58 caras y siendo Kiyowhi Higuchi su tallador-inventor. Una vez más, la simetría tridimensional poliédrica, las formas estrelladas del nuevo tallado han dado una nueva dimensión al esplendor del diamante.

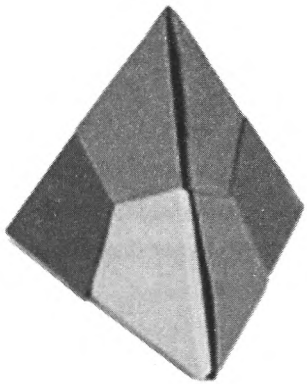
Pero sin llegar a los fastuosos diamantes, también en la joyería normal y, por supuesto, en sus imitaciones hay un uso enorme de poliedros para fabricar collares, broches, pendientes, anillos, etc. Sirvan como referencia unos originales diseños de colgantes consistentes en una «jaula» curvada de finos barrotes de plata en cuyo interior se mueven, pero no pueden escaparse, los distintos sólidos platónicos.

## Origami poliédrico

Si bien el arte de formar figuras doblando papel se inició en China en los principios de nuestra era, este distraído entretenimiento triunfó especialmente en Japón a partir del siglo VI. Fue allí donde se originó la denominación de origami, palabra derivada de *ori* (doblar) y de *kami* (papel). Como el papel era caro, los inicios del origami tuvieron lugar en círculos distinguidos, pero más tarde su práctica se hizo extraordinariamente popular, cruzó fronteras y hoy es una afición universal. El uso de papeles cuadrados de colores de $10 \times 10$ cm y el desarrollo de modelos de flores, papiros, animales, barcos, etc., siempre otorgó a estas construcciones manuales un glamour especial. El primer libro monográfico (y muy difundido) sobre construcciones de pájaros de origami se publicó en Japón en 1797.

La técnica se difundió en Oriente y también los árabes contribuyeron, como en tantas otras cosas, a su difusión en Occidente, y se asegura que ya alrededor del año 1000 era practicado en España e Italia. Al respecto cabe aclarar que aquí ha hecho fortuna la palabra papiroflexia, que si bien denota el mismo fin, presenta a menudo la sutil diferencia de que en papiroflexia se parte de hojas de papel (rectangular) y se hacen cortes (e incluso a veces se pegan bordes), mientras que en la estricta tradición japonesa todo se compone con los cuadraditos de colores de papel y se procede modularmente, produciendo piezas que pueden ser el resultado de «encajar» diversas partes.





*Origamis poliédricos.*

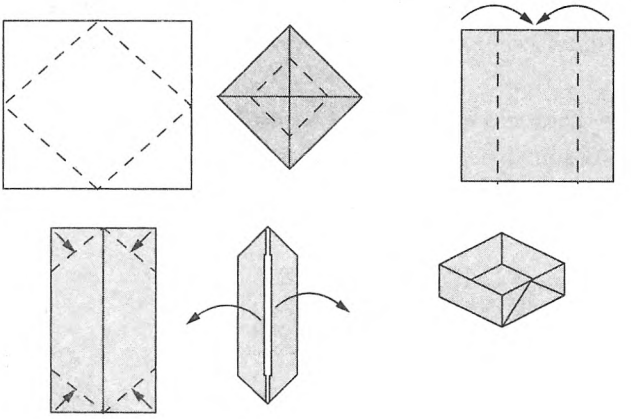
Una especialidad del origami ha sido desde siempre crear figuras poligonales y módulos con polígonos que permitan montar poliedros, ya sea con finalidades didácticas escolares, como creación de adornos o como forma de crear vistosos

envoltorios. En los grandes almacenes de Tokio se venden revistas para aprender a crear bellísimos envoltorios de papel para pequeños regalos y los vendedores utilizan sutiles técnicas para lograr presentaciones exquisitas.

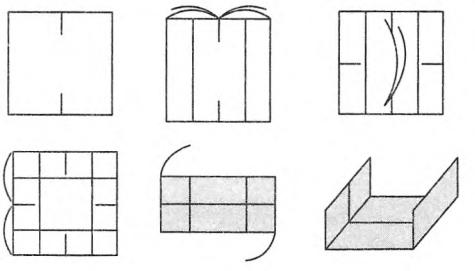
Obviamente, el origami es un pasatiempo muy entretenido y económico, existiendo grandes aficionados, clubs que lo practican, concursos e infinitas webs en las que aprender desde figuras muy simples a complejos montajes. Esta afición ha contado así entre sus especialistas a grandes personajes, como Miguel de Unamuno o Antoni Gaudí, quienes en un encuentro en la Basílica de la Sagrada Familia se retaron a hacer determinadas pajaritas con gran rapidez.

## Construcción de una caja, un cubo y un tetraedro

A continuación, se detallan los diagramas necesarios para construir una serie de poliedros. El primero ilustra la construcción de una caja partiendo de un solo papel cuadrado.



Aquí pueden verse los seis pasos que permiten construir el módulo fundamental; con seis copias de éste (para las que se pueden usar colores diferentes) se ensambla un cubo.



## EUCLIDES VERSUS HUZITA-HATORI

En la geometría de dibujo con regla y compás Euclides estableció unos postulados y axiomas para guiar los trazados. En la geometría con origami hay también siete axiomas sobre lo que es permisible hacer. Seis fueron dados por Humiuki Huzita en 1992 y el séptimo fue añadido por Koshiro Haroti diez años después.

Axioma 1. Dados dos puntos *A* y *B* hay una única doblez (recta) que pasa por los dos puntos.

Axioma 2. Dados dos puntos *A* y *B* hay una única doblez que superpone a ambos.

Axioma 3. Dadas dos rectas *L* y *M* hay una doblez que superpone *L* a *M*.

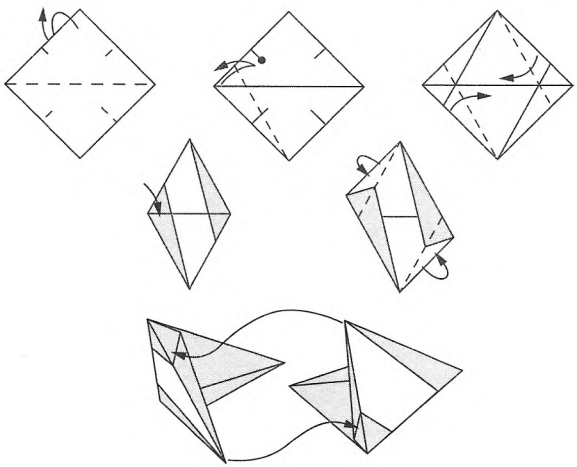
Axioma 4. Dado un punto *A* y una recta *L* hay una única doblez (recta) perpendicular a *L* que pasa por *A*.

Axioma 5. Dados dos puntos *A* y *B* y una recta *L* hay una doblez que lleva a *A* sobre *L* y pasa por *B*.

Axioma 6. Dados dos puntos *A* y *B* y dos rectas *L* y *M*, hay una doblez que sitúa *A* en *L* y *B*, en *M*.

Axioma 7. Dado un *punto A* y dos rectas *L* y *M* hay una doblez que sitúa *A* sobre *L* y es perpendicular a *M*.

Por último, figura el algoritmo de David Petty para construir un tetraedro con dos cuadrados, aunque éste precisa afinar bien para que queden triángulos equiláteros.



Finalmente, quiero citar, para quien desee profundizar en esta materia, el magnífico tratado de origami matemático *Mathematical Origami* de David Mitchell y el clásico *Origami for the Connoisseur* de Kasahara y Takahama. Los poliedros de origami quieren estar en su casa. ¡Deles una oportunidad!

# Epílogo

Aquí acaba la visita al mundo poliédrico. Deseamos que le haya resultado placentera y estimulante, y que a través de ella haya adquirido especial habilidad para «ver» en todos los sitios a estas entrañables figuras geométricas y sus curiosas peculiaridades. Si esto ha sido posible, a partir de ahora se sorprenderá de los muchos poliedros que se cruzarán en su vida.

Con los recursos geométricos aquí expuestos estará en situación de apreciar propiedades poliédricas e incluso podrá llegar a plantearse la creación de otros cuerpos nuevos. Aunque la abundancia poliédrica es hoy ya enorme, sigue vigente la sospecha de que estamos sólo ante la punta del iceberg de un mundo geométrico en el que posiblemente nos aguardan muchas novedades.

A través de publicaciones y excelentes páginas web queda cordialmente invitado/a a profundizar en el conocimiento de los poliedros. Descubrirlos es amarlos. Que la suerte (que es poliédrica) le acompañe.

# Bibliografía


ALSINA, C., *Geometría cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*, Barcelona, Rubes, 2005.

—: *Geometría para turistas*, Barcelona, Ariel, 2009.

COXETER, H.S.M., *Regular Polytopes*, Londres, Dover, 1973.

CROMWELL, P., *Polyhedra*, Nueva York, Cambridge University Press, 1997.

FERRER, J.L., *Superficies poliédricas*, Madrid, Paraninfo, 1999.

GIRALT-MIRACLE, D. (Ed.), *Gaudí. La búsqueda de la forma,* Barcelona, Lunwerg, 2002.

GONZÁLEZ, P.M., *Los sólidos pitagórico-platónicos. Geometría, arte, mística y filosofía*, Badajoz, FESPM, 2008.

GRÜNBAUM, B., *Convex Polytopes*, Nueva York, Wiley, 1962.

GUILLÉN, G., *Poliedros*, Madrid, Síntesis, 1997.

HARGITTAI, I. (Ed.), *Fivefold Symmetry*, Singapur, World Scientific Press, 1992.

JOHNSON, N., *Uniform Polytopes*, Nueva York, Cambridge University Press, 1999.

MALKEVITCH, J. (Ed.), *Geometry's Future*, Lexington, COMAP, 1998.

PEARCE, P., *Structure in Nature Is a Strategy for Design*, Cambridge, MIT Press, 1978.

PEDOE, E., *La geometría en el arte*, Barcelona, Gustavo Gili, 1978.

SENECHAL, M., FLECK, G. (Eds.), *Shaping Space, a Polyhedral Approach*, Boston, Birkhäuser, 1988.

SUTTON, D., *Sólidos platónicos y arquimedianos*, Barcelona, Oniro, 2005.

WENNINGER, M.J., *Polyhedron Models and Dual Models*, Londres-Nueva York, Cambridge University Press, 1983.

# Índice analítico


ángulo diedral 46
antiprisma 39, 55-60, 66, 67, 73
arista 17-19, 36, 45-52, 58-69, 78-91
Arquímedes de Siracusa 33, 35, 39, 59-62
arquitectura poliédrica 53, 97-118
axiomas del origami 136

balón de fútbol 119-120
bipirámide 53-55, 58
Blom, P. 100-101
Bofill, R. y A. 100
Bridge, N.J. 42
Brückner, M. 41, 43, 65
Brunelleschi, F. 35, 112-113

caja perfecta 90-91
cajas poliédricas 127
cara 17-19, 45-95, 100-111, 116-118, 121-133
característica de Euler-Poincaré 79
Catalan, E.C. 41, 61
Cauchy, A. L. 41, 65
Cayley, A. 64-65
clasificación cristalográfica 22-23
concavidad 15, 68
convexidad 15, 59, 68, 75
Coxeter, H.S.M. 42, 65, 72, 116
cristales 21-23, 133
cubismo 115
cubo 18, 45-51, 69-73, 92-95, 98-101, 135
  de Rubik 121-122
  romo (chato) 59-60
  Soma 120-121, 125
  truncado 18, 60
cuboctaedro 50-51, 60, 63
cúpula geodésica 101-107
cúpulas 35, 101-107, 113

dados poliédricos 122-123
Dalí, S. 70, 107, 116
defecto angular 80
Dehn, M. 42
della Francesca, P. 35, 37
deltaedro 57-59
desarrollos de poliedros 37, 47, 57, 63, 85-88, 108, 127
Descartes, R. 40, 80-81
diamante 23, 132-133
disecciones de poliedros 85, 125
dodecadeltaedro 58
dodecaedro 11, 25, 27, 31-33, 52, 64
  estrellado 64
  pentakis 62, 104
  rómbico 18, 62
  romo (chato) 60
  truncado 60
dolo 125-126
dualidad de poliedros 19, 47, 68
duplicación del cubo 50
Durero, A. 36-38, 85-86

*Elementos* de Euclides 25, 29-32, 44
empaquetamientos poliédricos 92-94
Escher, M.C. 72, 88, 116
esculturas con poliedros 33, 70, 116-118
esponja de Menger 94
Euclides de Alejandría 28-33, 44, 61, 136
Eudoxo 29, 51
Euler, L. 40, 78, 81

familias de poliedros 45-76
Fermat, P. 122
filatelia poliédrica 42
fórmula de Euler 41, 58, 65, 77-84
Freudenthal, H. 43, 59
Fuller, R.B. 43, 89, 102-103, 106

Gaudí, A. 16, 108-110, 130, 135
geometría computacional 43, 44
Giovanni da Verona 37
gran dodecaedro estrellado 64
gran rombicosidodecaedro 60
gran rombicuboctaedro 60
Grünbaum, B. 19, 43

Hein, P. 120, 122,
hexacaidecadeltaedro 58
hexacontraedro 62
hexaedro tetrakis 62
Hilbert, D. 42
hipercubo 69-71, 73, 116
historia de los poliedros 24-43

icosaedro 25, 27, 31, 42, 52-53, 56
  hexakis 62
  regular 21, 101, 106
  triakis 62
  truncado 21, 60, 61, 119, 120
icosidodecaedro 60, 117
icositetraedro 62

Jamnitzer, W. 38

Kepler, J. 39-41, 60, 64-65, 129

lámparas poliédricas 129-130
Leonardo da Vinci 35-36, 42
Leoz, R. 99-100

Liu Hui 33

malla poliédrica 87, 97-98, 103, 105
minerales 22-23
mobiliario urbano 131-132
módulos poliédricos 98-101
Monge, G. 13, 41

número de oro 52, 53, 61, 100, 126

octaedro 22, 25, 45-49, 51-52, 54, 56
  hexakis 62
  triakis 62
  truncado 45
origami 134-136
ortoedro 90

Pacioli, L. 35-36, 60
Pappus 33, 59
paralelepípedo 23, 66, 131
Pascal, B. 122
pequeño dodecaedro estrellado 64
pequeño rombicosidodecaedro 60, 117
pequeño rombicuboctaedro 60
Picasso, P. 115
pinturas con poliedros 115-116
pirámides 24, 51, 53-56, 111-112
Pitágoras de Samos 25
Platón 25-28, 40, 51, 74
Poinsot, L. 41, 64-65, 129
policubo 66, 68, 116, 117, 121, 124
poliedro
  con caras regulares 42, 67
  cóncavo 18-19, 49-50, 64, 89
  convexo 18-19, 40-43, 53-59, 78-84, 89-91
  de Arquímedes 35, 39, 59-61
  de Kepler-Poinsot 41, 64, 65, 129

de Lord Kelvin 18, 60, 93, 98
definición 19, 83
dual 41, 47, 61-62, 110
estrellado 21, 35, 39, 41, 63-65
flexible 88
ortogonal 68
regular 26, 39, 54, 56, 83
semirregular 36
uniforme 41-42
virtual 44
poliedros
caseros 128-131
en arquitectura 71, 97-118
en diseño 44, 52, 70-71, 119-136
en joyería 132-133
en la naturaleza 20-23, 24, 109
gaudinianos 108-110
lúdicos 120-125
y pompas de jabón 21
polígono 12, 13-19, 32, 45, 47-48
complejo 13-14
cóncavo 13-15, 17, 19
convexo 13-15, 17, 19, 55, 78
definición 89
estrellado 63, 64
regular 15, 47, 72
poliominos 66, 121
politopos 41, 42, 72-76
Pólya, G. 80-81
prisma 55, 114-115
prismatoide 55

radiolarios 20
representación de poliedros 35, 39, 115
restricción cristalográfica 23
rombo 62, 63, 112
rombododecaedro 23, 24, 63, 77, 93-94
romboedro 23, 94
rompecabezas poliédricos 67, 85, 121, 125
Rubik, E. 121-122

Sagrada Familia, Basílica de la 16, 108, 110, 130, 135
sección áurea 53
secciones de poliedros 36
simetría poliédrica 20-22, 45, 47, 67, 130, 133
simplejo regular 73, 75

Teeteto 25-26, 29-30, 48
tensegridad 89
teoremas sobre poliedros 40, 79, 81
tetracaidecadeltaedro 58
tetraedrización 91
tetraedro 25, 46-48, 73, 88, 103, 125, 135-136
regular 47, 54
triakis 62
truncado 60
tetrápodos 125-126
trapezoedro 23, 37
triacontaedro rómbico 130
triangulación 43, 91, 101, 102, 106
tronco de pirámide 55

Van der Waerden, B.L. 43, 59
vértice 13, 17, 40, 45-49, 59, 63, 78-85, 88-91

Zalgaller, J.A. 42, 43, 66
zonoedro 67