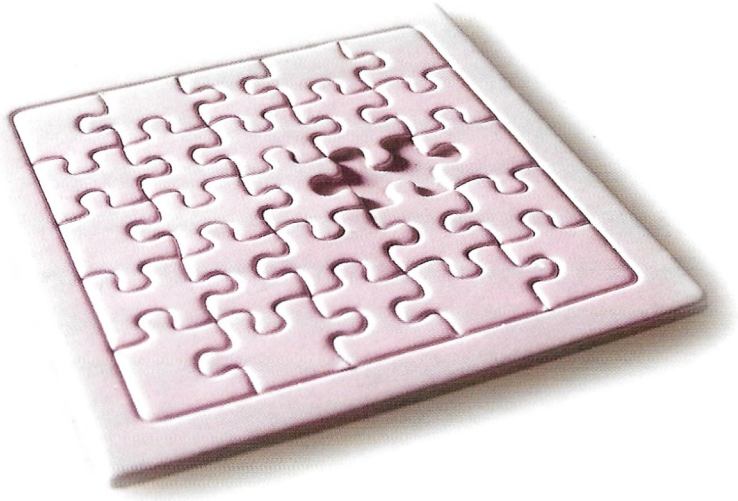
Ideas fugaces, teoremas eternos

Grandes problemas de las matemáticas

Joaquín Navarro



El mundo es matemático

Ideas fugaces, teoremas eternos

Grandes problemas de las matemáticas

¿Qué constituye un problema relevante en matemáticas? Este volumen intenta dar una respuesta a esta cuestión explorando decenas de problemas de la tipología más variada: fundamentales y accesorios, resueltos e irresolutos, sencillos pero que parecieron difíciles y difíciles que parecieron, en primera instancia, sencillos. El trayecto alumbra una apasionante historia de la disciplina a través de las cuestiones que han obsesionado a sus practicantes a lo largo de épocas y culturas.

Ideas fugaces, teoremas eternos

Grandes problemas de las matemáticas

Joaquín Navarro

El mundo es matemático

© 2010, Joaquín Navarro por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Babel, disseny i maquetació, S.L.
Fotografías: Corbis

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6976-8
Depósito legal: NA-1669-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 9

Capítulo 1. Grandes problemas de la Antigüedad 11
El problema imposible 11
Un problema griego con oráculo y todo 15
Otro problema clásico, sin oráculo y sin solución 17
El teorema primigenio 21
Hay infinitos números primos 23
Los números perfectos 25
La esfera y el cilindro 29
La maravillosa cicloide 32
¿Por qué los panales de miel tienen celdillas hexagonales? 37
Kepler y las naranjas 38

Capítulo 2. Una parada en la estación Euler 43
El problema que no le interesaba a Sherlock Holmes 43
El problema de Basilea 48
La conjetura de Goldbach 52
El problema de los tres cuerpos 56
La conjetura de Legendre 58
Un ladrillo inencontrable 61
Los puentes de Königsberg 63
Un genio de 19 años 66
En busca de la ecuación perdida 69
El teorema de los números primos 73
Y no se termina ahí la parada 77

Capítulo 3. La matemática se hace mayor 81
La conjetura más famosa 81
La muerte de un viajante 86
Cuatro colores bastan 87
Primos por parejas 90
La conjetura de Bieberbach 94
La conjetura de los 100.000 95

Más madera, que es la guerra 96
La conjetura de Tait 98
La conjetura de Catalan 98
La conjetura de los cuadrados mágicos primos 98
Y aún un último problema 99

Capítulo 4. Los problemas de Hilbert 101
Problema 1 101
Problema 2 106
Problema 3 108
Problema 4 108
Problema 5 108
Problema 6 108
Problema 7 109
Problema 8 109
Problema 9 109
Problema 10 110
Problema 11 110
Problema 12 111
Problema 13 112
Problema 14 113
Problema 15 113
Problema 16 113
Problema 17 114
Problema 18 115
Problema 19 116
Problema 20 116
Problema 21 118
Problema 22 119
Problema 23 120

Capítulo 5. Los problemas Clay 121
P versus *NP* 123
La conjetura de Hodge 129
La conjetura de Poincaré 132
La hipótesis de Riemann 138

Los verdes campos de Yang-Mills 144
Unas ecuaciones irresolubles 146
La madre de todas las conjeturas 148

Epílogo 151

Bibliografía 153

Índice analítico 155

Prefacio

Sólo sé que no sé nada.
Sócrates

¿Cómo se distingue un gran problema de otro que no lo es? Un ejemplo: A.C. Aiken, un conocido profesor de Edimburgo, se propuso calcular algunos decimales del cociente 4/47 en el curso de una discusión con sus colegas. Aiken empezó a recitar: «0,085106382...» y así hasta 26 decimales; se detuvo unos momentos y, acto seguido, Aiken recitó el periodo hasta el fin: total, 46 cifras, una tras otra. «Luego el periodo se repite. Si hay 46 cifras, es que tengo razón». Sus contertulios se apresuraron a responderle que sí. Pues bien, eso es una exhibición espectacular de las conocidas facultades calculísticas de Aiken, pero *no* es un problema. Con tiempo y un lápiz cualquiera (o casi cualquiera) lo resolvería.

¿Existe alguna clasificación de los problemas? En general, no, pero sí hay algún criterio, como la trascendencia: la influencia que ha tenido su resolución en el desarrollo de la ciencia o la supuesta influencia que tendría en caso de resolverse. Se trata, no obstante, de un criterio de difícil aplicación en un texto como éste, pues hay problemas que en su día debieron de parecer importantes y su resolución marcó realmente una época del pensamiento, pero que hoy son elementales. Por ejemplo, tomemos la afirmación «existen infinitos números primos», que es absolutamente fundamental, importantísima. En el siglo XXI se enuncia en la enseñanza secundaria, y en sus primeros años además. Como ya aparecía resuelta en los *Elementos* de Euclides, quizá pueda caerse en la tentación de pensar que es antiquísima, además de elemental, y que no merece la pena tratarla aquí. ¿Lo merece o no? Este hito del pensamiento, por cierto, pertenece al campo de la teoría de números, la disciplina ganadora en lo que a problemas se refiere; son problemas fáciles de enunciar y comprender, y pertenecen a un concepto que nos es próximo, pero son realmente difíciles.

Tomemos otro problema, esta vez planteado en lenguaje moderno: «Sea A una variedad proyectiva compleja. Entonces cada clase de Hodge de A es una combinación lineal a coeficientes racionales de las clases de cohomología de las subvariedades complejas de A». ¿Qué decir de este problema que aún no ha sido resuelto? La verdad es que no se sabe qué decir, pero no porque la cuestión sea trascendente o no —de hecho, la Fundación Clay ofrece un millón de dólares a quien aporte una respuesta—, sino porque puede resultar incomprensible para el no iniciado. El

presente libro está dedicado a divulgar y hacer accesible el mundo matemático a los no especialistas, y no parece que transcribir lo incomprensible sea uno sus objetivos.

Los grandes problemas matemáticos son eso, grandes problemas, y, por desgracia, son muchas veces incomprensibles si no se domina el lenguaje en el que están escritos, un lenguaje que dominan razonablemente los que han dedicado unos años a aprenderlo y que, desafortunadamente, tiene poco en común con el lenguaje de la calle.

Una tentación evidente es ocuparse de un número redondo de problemas; hacer una lista de, digamos, cien de ellos, y convertirla en arquetipo. Ahora bien, lo que se obtiene es una lista forzada y desigual. Lo sensato parece ser proceder basándose en el consenso universal y considerar problema importante a aquél que la mayoría lo considera así. Esta solución no proporciona resultados innovadores, pero garantiza algo muy apreciado: no hacer el ridículo. Además, gracias a Internet, la tarea adquiere un tamaño más humano, a la medida de la extensión sobre papel impreso de la que se disponga. Quien quiera profundizar, que busque en Internet. Seguiremos pues el sabio y accesible dictamen de la mayoría e intentaremos además que se entienda por qué un problema es importante.

Así y todo, no crean que la cosa es fácil. Michael Barnsley (n. 1972) aplicó unas transformaciones afines a ciertas estructuras fractales y resolvió de paso un problema de redundancia que posibilitó, nada menos, que la compresión de una película en un solo DVD; y también de pasada se hizo millonario (en dólares). ¿Merece la resolución de este problema su mención en nuestra lista?

Capítulo 1

Grandes problemas de la Antigüedad

Si he logrado ver más allá que otros hombres es
porque he estado a hombros de gigantes.
Sir Isaac Newton

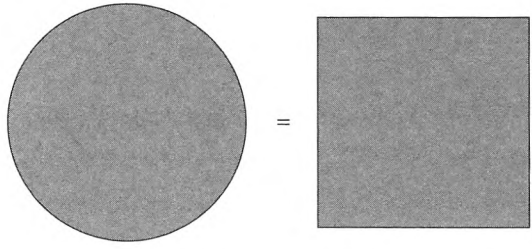
Muchos de los grandes problemas matemáticos que se ha planteado el hombre proceden de la Antigüedad, y sobre todo, en razón de su importancia y peso intelectual, de la Grecia clásica. En la actualidad, la mayor parte de estas cuestiones están resueltas, pero no todas. Mencionarlas no es ninguna concesión a la historia, sino un eficaz ejercicio intelectual, ya que, siguiendo la feliz expresión de Newton, somos quienes somos porque nos hemos alzado sobre los hombros de gigantes. Respetemos los logros de quienes nos precedieron, pues ellos nos señalaron el camino que teníamos que seguir. Tómese, por ejemplo, el caso de los números primos. Hoy nos parece legítimo y elegante preguntarnos por la supuesta infinitud de los números primos de la forma $2^{2^n}+1$, pero primero hay que probar que hay infinitos primos y ello no es evidente. Euclides ya lo demostró, pero pruebe usted a demostrarlo, y sin lagunas en el razonamiento. Así aprenderá a respetar a Euclides, quien nunca obtuvo un doctorado ni recibió un Premio Nobel, pero que era muy, muy inteligente.

Lo que sigue a continuación no es más que una pequeña muestra del significado de la palabra «progreso».

El problema imposible

La expresión «buscar la cuadratura del círculo» se ha convertido en sinónimo de intentar una tarea imposible. ¿Por qué? Cuadrar el círculo es encontrar un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado, problema de reminiscencias eminentemente prácticas que ya se plantearon hombres pertenecientes a culturas muy antiguas y de la que nos han quedado muestras, incluso escritas, de muy venerable

antigüedad. Este problema, acompañado de soluciones aproximadas, ya se encuentra tanto en la Biblia como en textos egipcios o babilónicos.



Un círculo y un cuadrado de áreas equivalentes.

Sistematicemos la nomenclatura para centrar las ideas, que es lo que se hizo en la antigua Grecia y lo que se hará aquí, modernizando un tanto las explicaciones. Llamemos π al número constante que resulta de dividir la longitud l de una circunferencia por su diámetro d:

$$\pi = \frac{l}{d},$$

y también a la constante que resulta de dividir el área a del círculo por el cuadrado del radio r (que es la mitad del diámetro):

$$\pi = \frac{a}{r^2}.$$

La constante es siempre la misma; eso se debe a Arquímedes, quien demostró real y fehacientemente las tres cosas: que π era constante y las dos fórmulas anteriores. Si se desea cuadrar el círculo, hay que hallar el lado L de un cuadrado cuya área sea a:

$$a = \pi r^2 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi},$$

es decir, hay que construir geométricamente $\sqrt{\pi}$, lo que equivale a construir π.

También a Arquímedes se debe el modo de abordar π con seriedad. El matemático griego se puso a calcularlo y lo hizo con mucho ingenio y bastante aproximación, sin pretender nunca haberlo hallado con exactitud, pero consiguiendo un resultado espléndido para su tiempo:

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7.$$

Arquímedes llegó a este resultado utilizando el método de exhaución, debido a la fértil imaginación del matemático Eudoxo de Cnido (ca. 390 a.C.-ca. 337 a.C.):

EL ORIGEN DE π

Aunque la denominación de π se suele atribuir a Leonhard Euler (1707-1783), éste tan sólo ratificó una notación debida en realidad a William Jones (1675-1749) y que no era otra cosa que la inicial en griego de las palabras περιφέρεια (periferia) y περίμετρος (perímetro).

William Jones, matemático autodidacta británico que propuso la utilización del símbolo π.

se encierra la circunferencia entre polígonos regulares inscritos y circunscritos, se calcula sus longitudes y, a medida que se añaden lados a las líneas poligonales, se va acotando al valor real de la circunferencia. Así se le pone cerco a π y se obtienen límites a su presunto valor exacto.

Valor exacto que no se encontraría jamás, aunque eso aún no lo sabían los devotos de π. Debutaba entonces una inigualada odisea del pensamiento, una caza y captura de la cuadratura del círculo que no se detendría ni tan siquiera con el anuncio realizado en 1753 por la Academia de París de que no se admitirían a examen más manuscritos presuntamente probatorios. Y no se detendría tampoco ante la afirmación de Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) de que la cuadratura era imposible. Curiosa situación, pues a pesar de que existe una prueba matemática irrefutable de que una determinada tarea es imposible, todavía quedan entre los iluminados energías suficientes para dedicarse a probarla. Incluso el autor de estas líneas tuvo que juzgar una de esas «demostraciones» en pleno siglo XX. Y, por cierto, era errónea casi desde el principio del escrito, que ocupaba unas 200 páginas.

Los métodos puramente geométricos cedieron el paso a los propios del análisis, más poderoso y abstracto, y éstos a los métodos de las computadoras, ante cuyo poderío hoy hay que rendirse. Pero eso no significa que en la actualidad se intente cuadrar el círculo; dejó de hacerse con Lindemann y ya no hay vuelta de hoja. Lo que se calcula ahora son cifras de π, algo en lo que vamos progresando (en 2009 se habían calculado más de 2,699 billones) en busca de pistas acerca de la normalidad de π (es un término de la teoría de números) y de su complejidad computacional.

En la siguiente tabla se ha buscado resumir en poco espacio los hitos de la azarosa historia de π, sin más pretensión que la de informar.

Fecha	Protagonista del acontecimiento	Aproximaciones de π
ca. 2000 a.C.	Egipto: Papiro Rhind	$(16/9)^2 = 3{,}160493...$
ca. 1900 a.C.	Especialistas babilonios	$25/8 = 3{,}125$
ca. 900 a.C.	India: *Shatapatha Brahmana*	$339/108 = 3{,}138888...$
ca. 250 d.C.	Arquímedes	$223/71 < \pi < 22/7$ $(3{,}140845... < \pi < 3{,}142857...)$
5	Liu Xin	3,154
150	Ptolomeo	$377/120 = 3{,}141666...$
480	Zu Chongzhi	$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$
499	Aryabhata	$62.832/20.000 = 3{,}1416$
800	Al Khwarizmi	3,1416
1150	Bhaskara	3,14156
1220	Fibonacci	3,141818
1400	Madhava de Sangamagrama usando una serie de potencias	11 dígitos decimales
1596	Ludolph van Ceulen	20 dígitos decimales
1615		32 dígitos decimales
1621	Willebrord Snell	35 dígitos decimales
1699	Abraham Sharp	71 dígitos decimales
1706	John Machin	100 dígitos decimales
1719	Thomas Fantet de Lagny (calculó 127 dígitos decimales, pero no eran todos correctos)	112 dígitos decimales
1794	Jurij Vega (calculó 140 dígitos decimales, pero no eran todos correctos)	137 dígitos decimales
1841	William Rutherford (calculó 208 dígitos decimales, pero no eran todos correctos)	152 dígitos decimales
1844	Zacharias Dase y Schulz von Strassnitzky (calcularon 205 dígitos decimales, pero no eran todos correctos)	200 dígitos decimales
1847	Thomas Clausen (calculó 250 dígitos decimales, pero no eran todos correctos)	248 dígitos decimales
1853	William Rutherford	440 dígitos decimales
1874	William Shanks (calculó 707 dígitos decimales, pero no eran todos correctos)	527 dígitos decimales
1949	D.F. Ferguson y John Wrench, utilizando una calculadora de sobremesa	1.120 dígitos decimales
1949	John W. Wrench Jr. y L.R. Smith, utilizando el ENIAC, una computadora electrónica, como en el caso de todos los investigadores siguientes.	2.037 dígitos decimales
1958	Francois Genuys	10.000 dígitos decimales
1961	Daniel Shanks y John Wrench	100,265 dígitos decimales
1973	Jean Guilloud y Martin Bouyer	1.001.250 dígitos decimales
1983	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura y Sayaka Yoshino	16.777.206 dígitos decimales
1987	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura y Yoshinobu Kubo	134.214.700 dígitos decimales
1989	Gregory V. Chudnovsky y David V. Chudnovsky	1.011.196.691 dígitos decimales
2009	Fabrice Bellard	2.699.999.990.000 dígitos decimales

El problema de la cuadratura radica en el concepto griego de constructibilidad. En principio, sólo se aceptaban como instrumentos de construcción geométrica la regla y el compás, y aun con ciertas restricciones; todo ello lleva a una categoría de números que sí pueden dibujarse: son los demoninados números construibles. Cuesta poco demostrar que todo número construible es algebraico, aunque éste es un conjunto más amplio que comprende números construibles y no construibles. La definición de número algebraico parece un tanto caprichosa y alejada del tema —aunque no lo está— y sólo se cita aquí por no dejar cabos sueltos: un número es algebraico cuando es solución de alguna ecuación a coeficientes racionales. Los números que no son algebraicos —que forman un inmenso conjunto infinito no numerable, incontable— se llaman trascendentes, denominación histórica que proviene de que «trascienden», por estar más allá de los algebraicos.

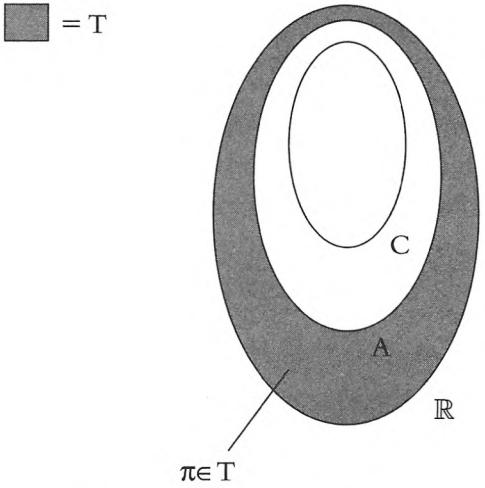


Diagrama de Venn que muestra la relación entre los números construibles, los algebraicos, los trascendentes y los reales.

Lindemann probó en 1882 que π era trascendente, luego éste no es algebraico, tampoco es construible y, por lo tanto, π no puede construirse con regla y compás.

Un problema griego con oráculo y todo

La cuestión que nos ocupa a continuación parece ser de origen divino, pues está involucrado el oráculo de Delfos —al que acudieron los habitantes de la isla griega de Delos—, el dios Apolo, Platón y, con posterioridad, mucha más gente. Advirtamos, antes de empezar, que para el alma griega clásica realizar una construcción geomé-

trica quería decir realizarla utilizando sólo regla y compás. Y con las restricciones siguientes: que el número de pasos fuera finito y que no se utilizara una regla en la que pudieran hacerse marcas; ello equivale a no determinar de antemano una unidad de medida sobre la regla. También modernizaremos un tanto la notación de las fórmulas que siguen para hacerlo todo más sencillo.

La historia —mitad leyenda— tiene por protagonista la duplicación del cubo. Cuando ciertas fiebres malignas azotaron Delos, allá por el año 430 a.C., sus habitantes, hartos del flagelo, recurrieron al oráculo de Delfos en busca de remedio. El oráculo habló y parece que pidió que un altar cúbico consagrado a Apolo engrosara su tamaño; en concreto, el oráculo solicitó que se doblara. Obedientemente, se procedió a doblar el lado del altar; si llamamos l a la arista del cubo primitivo y V a su volumen, lo que se hizo fue construir otro altar de volumen

$$(2l)^3 = 8l^3 = 8V,$$

es decir, ocho veces mayor. Las fiebres siguieron.

Los ciudadanos, ya acostumbrados a las sibilinas indicaciones del oráculo, especialista en decir cosas con doble sentido, recurrieron al sabio Platón para que les iluminara; y el ilustre filósofo (y geómetra) les abroncó debidamente. Lo que el oráculo les había pedido es que le dedicaran a Apolo un altar de volumen doble, no de arista doble. En concreto, un altar de arista l' y volumen V' que cumpliera

$$V' = (l')^3 = 2V = 2l^3,$$

o, lo que es lo mismo,

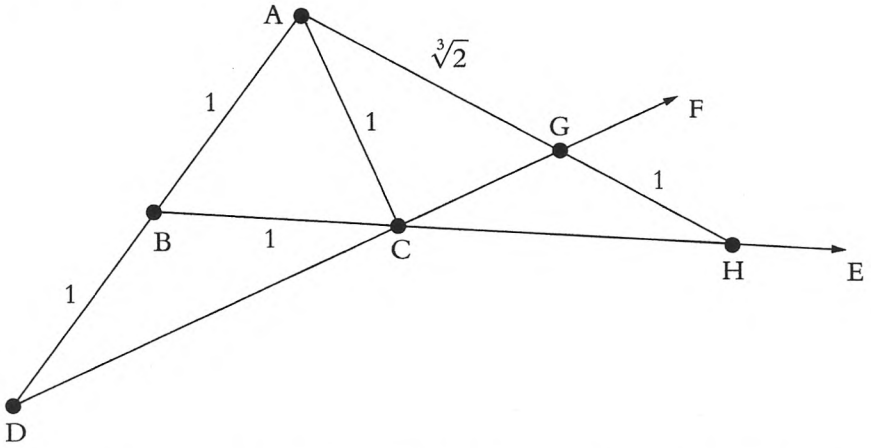
$$l' = \sqrt[3]{2l^3} = l\sqrt[3]{2}.$$

De modo que lo que realmente deseaba Apolo era que se le construyera un altar de arista $l\sqrt[3]{2}$, un altar mayor, pero no ocho veces mayor. Es más —les dijo Platón—, lo que realmente deseaba Apolo, y así lo había comunicado por boca del sibilino oráculo, era que en Delos se preocuparan un poco más de las matemáticas y mejoraran su oxidada geometría.

Explicado el problema, hay que suponer que las fiebres se curaron solas o que Apolo decidió cortarlas por su cuenta y riesgo, porque el llamado desde entonces problema délico no tiene solución, tal y como probó Pierre Wantzel (1814-1848) en 1837.

El problema délico equivale a construir geométricamente $\sqrt[3]{2}$ utilizando sólo la regla y el compás al modo griego. Ahora bien, aunque hay muchos modos de dibujar $\sqrt[3]{2}$

con regla y compás —citemos a Arquitas (428-347 a.C.), Menecmo (380-320 a.C.), Filón de Bizancio (280-220 a.C.), Nicomedes (280-210 a.C.), Diocles (240-180 a.C.) o Herón de Alejandría (10-75 d.C.)—, todos involucran un uso prohibido de la regla y el compás. Incluso una inteligentísima construcción debida al gran Isaac Newton (1643-1727), como la que aparece en el gráfico siguiente, requiere o marcar la unidad o la arista del altar sobre la regla.



Los números construibles con regla y compás pueden ubicarse en conjuntos sucesivos (en álgebra moderna se hablaría de extensiones de cuerpos):

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots,$$

donde los elementos de K_0 son de la forma $a_0 + \sqrt{b_0}$; los de K_1, de la forma $a_1 + \sqrt{b_1}$ con $a_1, b_1 \in K_0$ y así sucesivamente. En K_n están los de la forma $a_n + \sqrt{b_n}$ con $a_n, b_n \in K_{n-1}$. En esos cuerpos, todos ellos formados por los números construibles, están las combinaciones lineales de raíces cuadradas, las combinaciones lineales construidas a partir de las anteriores (que son en realidad raíces cuartas), las raíces octavas, etc., pero no están las raíces cúbicas.

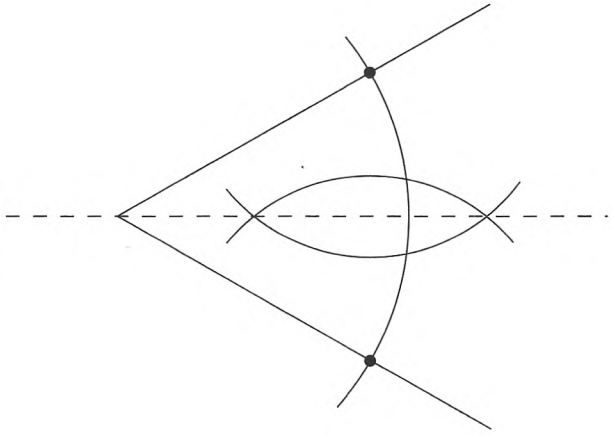
El altar solicitado por el oráculo no era construible porque $\sqrt[3]{2}$ no es una raíz cuadrada, ni cuarta, ni octava, ni de orden par; por tanto, no está en ninguna sucesión telescópica de cuerpos del tipo K_n. Apolo no debía de saberlo.

Otro problema clásico, sin oráculo y sin solución

Trisecar un ángulo es dividirlo en tres partes iguales. En la cultura griega clásica, trisecar un ángulo era dividirlo de acuerdo con las normas con las que se concebía

el cultivo de la geometría; es decir, dividir en tres partes iguales un ángulo α utilizando sólo regla y compás, con los condicionamientos impuestos a tales artilugios que ya hemos mencionado antes. Como es natural, el uso de normas tan estrictas no era caprichoso, sino consecuencia del deseo de máxima perfección y absoluta precisión. Los griegos evitaban las burdas aproximaciones y las técnicas de ensayo y error; buscaban la exactitud.

No les faltaba sentido común en sus exigencias. Mucho sabemos cómo bisecar un ángulo, como se muestra en la ilustración adjunta.



Pero llevémoslo al infinito: repitamos la bisección indefinidamente. Se obtienen así sucesivamente ángulos de amplitud $\alpha/2, \alpha/4, \alpha/8 \ldots, \alpha/2^n \ldots$, y si sumamos la serie

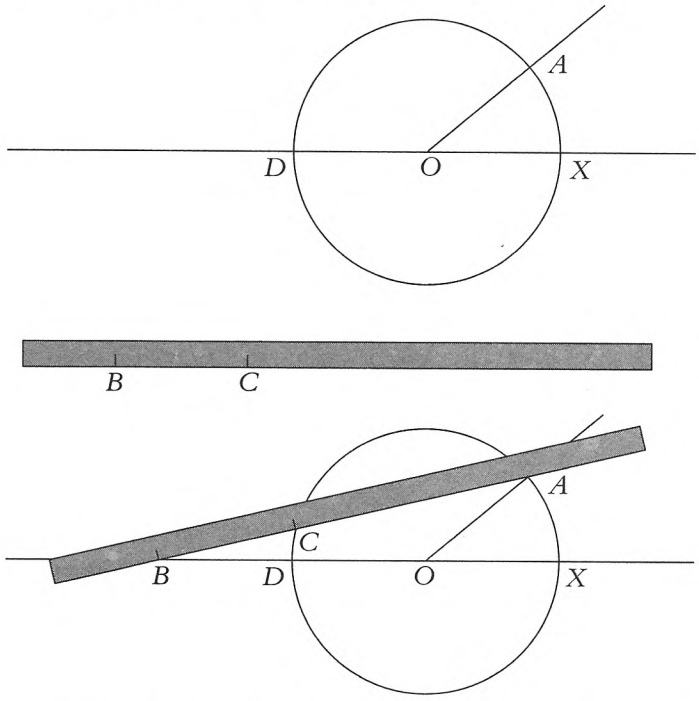
$$\alpha/4 + \alpha/16 + \alpha/64 + \ldots + \alpha/4^n + \ldots = \alpha/3$$

ya está trisecado α. Sólo que el número de pasos no es finito y hemos violado una norma del uso de regla y compás. También hemos violado el sentido común, pues no recomendaríamos a nadie sensato emprender una bisección infinita.

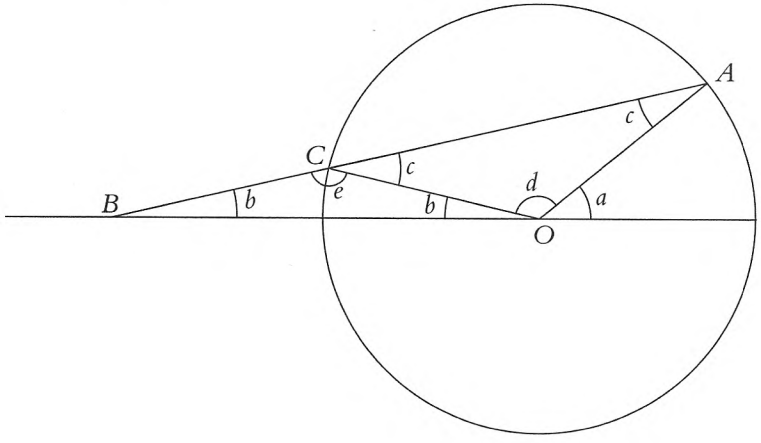
También es cierto que hay ángulos susceptibles de ser trisecados siguiendo las normas; el lector puede entretenerse en trisecar ángulos de amplitud $\pi, 3\pi/8, \pi/6$ o $\pi/4$, por ejemplo. Le aseguramos que poderse, se puede, aunque quizás le cueste un poco conseguirlo. Pero lo que exigían los griegos era un procedimiento para trisecar cualquier ángulo, no un ángulo concreto.

De hecho, Arquímedes consiguió idear un procedimiento, muy ingenioso, para trisecar un ángulo cualquiera; una construcción de las llamadas Neusis que dulcifica las normas habituales y permite hacer marcas en un regla. Si AOX es el ángulo que

se debe trisecar, Arquímedes afirmó que si se hacen dos marcas B y C en una regla cualquiera y se procede como indican las figuras adjuntas, se triseca *AOX*.



El ángulo *CBD* mide 1/3 *AOX*. La maniobra que hay que realizar consiste en hacer pivotar la regla alrededor de *A* hasta que *C* quede sobre la circunferencia y *D*, sobre la recta *OX*. El procedimiento es muy ingenioso y un dibujo con unas cuantas líneas y letras más nos ayudará a entender la construcción.



Nótese que se verifican las igualdades siguientes:

$$e + c = \pi$$
$$e + 2b = \pi$$
$$c = 2b$$
$$d + 2c = \pi$$
$$a + d + b = \pi$$

que, combinadas ordenadamente, dan $a = 3b$.

Pero el procedimiento de Arquímedes utiliza la regla para hacer marcas en ella y eso no es reglamentario.

Otros métodos no permitidos, y que los griegos denominaban «mecánicos», se basaban en apoyarse, para proceder a una trisección, en unas curvas preexistentes llamadas trisectrices. Se denominan así todas las curvas construibles por medio de un procedimiento geométrico conocido —normalmente su ecuación—, que adecuadamente utilizadas pueden servir de apoyo para trisecar ángulos.

Un análisis de la división de un ángulo 3α en tres partes iguales α, lleva a una ecuación de tercer grado. En efecto, construir α equivale a construir cualquiera de sus funciones trigonométricas más tratables, pues se trata de simples segmentos. Aplicando las reglas de la trigonometría al seno de un ángulo compuesto, por ejemplo, se obtiene la expresión

$$4\text{sen}^3\,\alpha - 3\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,3\alpha = 0,$$

que poniendo *sen* $\alpha = x$ nos da la ecuación cúbica siguiente:

$$4x^3 - 3x + \text{sen}\,3\alpha = 0.$$

Y aunque hay ecuaciones cúbicas resolubles en el mundo de los números construibles —y hay ángulos trisecables—, ya Cardano nos enseñó, fórmulas mediante, que las soluciones implican por lo general raíces cúbicas. Y las raíces cúbicas no son construibles.

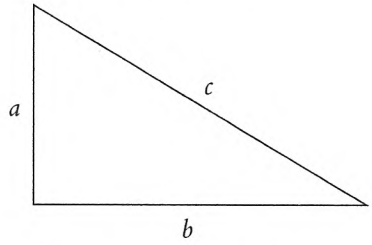
Pierre Wantzel, como en el problema anterior de la duplicación del cubo y en el mismo texto de 1837, a los 23 años determinó de modo definitivo la cuestión resolviendo negativamente el problema. De modo general, la trisección del ángulo con regla y compás es imposible.

El teorema primigenio

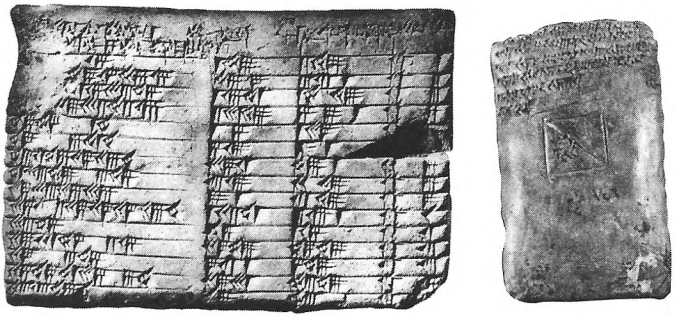
«La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa» es el enunciado del primer teorema geométrico que se aprende en las escuelas y también es una de las primeras cuestiones no obvias que desentrañó la inteligencia humana analizando la naturaleza. Así empezó la ciencia.

En todo triángulo rectángulo de catetos a y b (los catetos son los lados que abarcan el ángulo recto), e hipotenusa c (el otro lado restante) se verifica

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

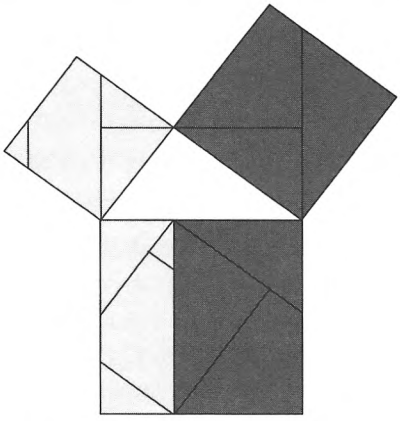


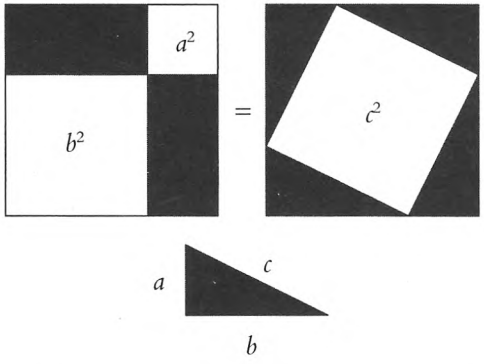
Y recíprocamente (teorema recíproco): si a, b y c cumplen esas condiciones, el triángulo es rectángulo. La historia, o más bien la leyenda, atribuye el descubrimiento al filósofo y matemático Pitágoras de Samos (c.a. 582- c.a. 507 a.C.), aunque es casi seguro que no lo demostró él, pues era corriente que los descubrimientos realizados dentro de una escuela filosófica se atribuyeran al jefe de filas de dicha escuela. Incluso así, es dudoso que Pitágoras o la escuela pitagórica fuera la responsable absoluta del teorema, pues parece que los babilonios ya conocían el enunciado, y quizá los egipcios también.



La tablilla babilónica Plimpton 322 (a la izquierda), escrita entre los años 1790 y 1750 a.C., contiene varias ternas de números pitagóricos que hacen suponer un buen conocimiento del llamado teorema de Pitágoras, que la cultura mesopotámica aplicaba a cuestiones geométricas prácticas como el cálculo de los lados de un campo cuadrado conocida la diagonal, tal y como se refleja en la tablilla de la derecha.

Ahora bien, el primero que dio la demostración del teorema fue Euclides de Alejandría (c.a. 300 a.C.) en sus *Elementos*, «Libro I», Proposición 47. Las demostraciones posteriores se cuentan por decenas y las hay de todo tipo, incluso algunas que utilizan, jocosamente, conceptos tan abstractos como los de las ecuaciones diferenciales. Las demostraciones más inmediatas, que no necesitan cálculo alguno pues «entran» por los ojos, puede que sean las dos que muestran las figuras siguientes.





Las ternas de números *a, b* y *c* que cumplen, para cualesquiera enteros naturales *x* e *y*, las siguientes condiciones

$$a = x^2 - y^2$$
$$b = 2xy$$
$$c = x^2 + y^2$$

reciben la denominación histórica de pitagóricas, pues $a^2 + b^2 = c^2$. Las igualdades se cumplen también para cualquier tipo de números.

Y ya que mencionamos los tipos de números, digamos que el aparentemente inofensivo y hermoso teorema de Pitágoras creó todo tipo de problemas a los propios pitagóricos, pues si se aplica a la diagonal de un cuadrado cuyos lados de longitud *L* sean racionales, dicha diagonal resulta medir

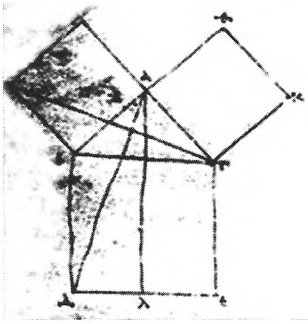
$$D = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2},$$

cifra que no es racional, sino lo que los griegos denominaban inconmensurable, es decir no-racional o irracional. Los propios pitagóricos no podían concebir un número que no fuera conmensurable y la leyenda nos dice que Hipaso de Metaponto,

el descubridor de tal circunstancia, fue asesinado por haber revelado el hecho al mundo. Una versión menos truculenta propone que Hipaso fue sólo expulsado de la comunidad pitagórica.

La relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, equivalente a $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, se interpretó posteriormente como definición de la métrica euclídea, postulando que un espacio n-dimensional es euclídeo si se le dota de una distancia:

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\ .$$



Una imagen de una antiquísima versión griega de los Elementos *de Euclides mostrando la figura que acompañaba la demostración del teorema de Pitágoras.*

Hay infinitos números primos

Existen infinitos números primos. Hoy esta afirmación parece trivial, pero para los contemporáneos de Euclides no lo era tanto. Aparece como teorema, adecuadamente demostrado, en el «Libro IX» de los *Elementos*, con el número 20 de las proposiciones. Aparece también en todos los libros de aritmética elemental como enunciado fundamental. Recuérdese que un número natural, $n > 1$, es primo si y sólo si únicamente se tiene por divisor a sí mismo. Según esa definición, 1 no es primo. Los números que no son primos se llaman compuestos. Los primeros primos menores que 100 son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Existe un algoritmo, tan lento como infalible para calcularlos, llamado criba de Eratóstenes. La primera pregunta que se nos ocurre al ver la sucesión anterior es: ¿tiene algún fin? La respuesta, que se encuentra en el tratado de Euclides, es un prodigio de razonamiento, hasta el punto de ser un modelo incluso hoy en día. Re-

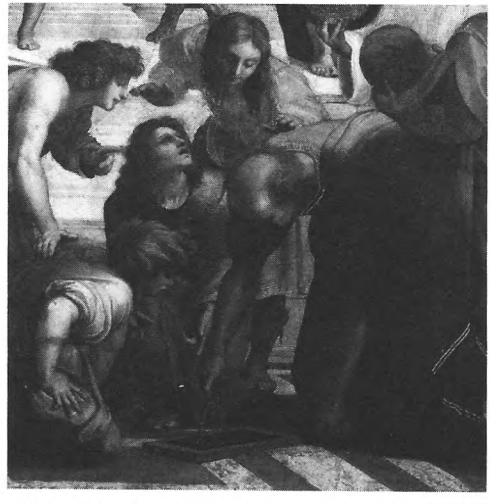
produzcámosla: consideremos una sucesión finita de números primos consecutivos $2, 3, 5, 7\ldots, p$ y formemos el nuevo número $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$, que será o primo a su vez o producto de primos. Pongámonos en el primer caso y supongamos que n es primo. Es obvio que $n > p_i$, indicando como p_i a cualquier primo de la sucesión anterior. Así pues, hemos construido un primo nuevo y mayor. De este modo, si n fuera siempre primo, ya habríamos terminado.

Pongámonos en el segundo caso y supongamos que n es compuesto. Ahora hay dos alternativas:

1. Ninguno de sus factores primos es mayor que p.
2. Uno de sus factores primos es mayor que p.

Analicemos la primera alternativa: uno de los factores de n debe estar entre los primos de la sucesión $2, 3, 5, 7\ldots, p$; llamémosle m. Así que m divide a n y, puesto que es primo, m divide al producto $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p$. Si divide a ambos números, divide también a su diferencia, $n - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p = 1$. El número m, pues, divide a 1, y por tanto $m = 1$. Pero ese número no figura en la sucesión $2, 3, 5, 7\ldots, p$ y, por tanto, nuestra suposición inicial no es cierta, es insostenible.

Situémonos entonces en la segunda alternativa. Si existiera un factor primo de n mayor que p, hemos descubierto el huevo de Colón, puesto que dado el primo p siempre hay otro primo mayor. Nunca terminaremos de encontrar primos, cada vez mayores. Concluimos, pues, que la sucesión de los números primos es infinita.



Euclides dibujando, tal como lo pintó Rafael en su monumental obra La escuela de Atenas.

La demostración de Euclides, que es maravillosa, puede parecer un poco larga y alambicada y, para simplificarla, se formula en ocasiones con cierta precipitación, lo que pude ocasionar diferentes malentendidos. Por ejemplo, hay lectores que pueden concluir, llevados por las prisas, que si

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$$

n es, de modo evidente, primo, pues al dividirlo por cualquiera 2, 3, 5, 7..., p da resto 1. En realidad, sólo se puede concluir que si n es compuesto, el menor de sus factores primos debe ser mayor que p. El ejemplo que se acostumbra a poner para demostrarlo es la descomposición en números primos

$$(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) + 1 = 30.031 = 59 \cdot 509.$$

El mayor número primo conocido en 2008 era el $2^{43.112.609}-1$, que tiene 12.978.189 cifras. Quizá muy pronto se vea superado; primero, porque números primos hay infinitos y el afán de ir más allá es asimismo infinito, y segundo, porque la Electronic Frontier Foundation tiene establecida una recompensa de 150.000 dólares al primero que encuentre un número primo de 100.000.000 de cifras (en base 10, se entiende).

Debe tenerse en cuenta que los primos son la locomotora de toda una rama de la matemática, la teoría de números, y los protagonistas más frecuentes de los grandes problemas y descubrimientos de la matemática misma. Para terminar: este teorema («hay infinitos primos») podría ser considerado «el» teorema, la afirmación más poderosa posible sobre tales números. Pero no lo es. El apelativo glorioso de *teorema de los números primos* se le asigna a otro enunciado, no demostrado hasta finales del siglo XIX, como veremos más adelante.

Los números perfectos

Se acostumbra a decir que la perfección no es de este mundo..., pero quizá se halle en el mundo numérico, pues se conoce la afición a los números perfectos desde los tiempos de Pitágoras y sus seguidores. Y eso si nos limitamos al mundo griego, ya que parece que tales números ya interesaban a los egipcios.

Su definición es la siguiente: un número es perfecto cuando es igual a la suma de sus divisores (salvo el propio número, claro). Para definir de una forma práctica tales números se ideó la función $\sigma(n)$, que equivale a la suma de los divisores de n (ojo, ahora se incluye al propio n). Un número, pues, es perfecto cuando $\sigma(n) = 2n$.

Cuando uno se pone a buscarlos, pronto advierte que la igualdad se verifica con cierta prosopopeya y que la perfección escasea, como puede verse en la tabla siguiente, que compara los tamaños respectivos de n, el número perfecto P_n n-ésimo y el número primo p_n que lo genera:

n	p_n	P_n
1	2	6
2	3	28
3	5	496
4	7	8.128
5	13	33.550.336
6	17	8.589.869.056
7	19	137.438.691.328
8	31	2.305.843.008.139.952.128

Y menos mal que nos detenemos aquí. San Agustín de Hipona sostenía que Dios creó el mundo en seis días puesto que 6 es un número perfecto. Menos mal que no lo creó en otro periodo, también perfecto, porque le hubiera llevado muchos días. A modo de ejemplo, podemos copiar aquí el quinceavo, que todavía es de dimensiones humanas:

541625262843658474126544653743913161408564905390316957846039208183
872069941585348591989999210567199219190573900802636461592800138276
054397462627889030573034455058270283951394752077690449244314948617
294351131262808379049304627406817179604658673487209925721905694655
452996299198234310310926242444635477896354414813917198164416055867
880921478866773213987566616247145517269643022175542817842548173196
119516598555535739377889234051462223245067159791937573728208608782
143220522275845375528974762561793951766244263144803134469350852036
575847982475360211728804037830486028736212593137899949003366739415
037472249669840282408060421086900776703952592318946662736152127756
035357647079522501738583051710286030212348966478513639499289049732
921451075059799114562215198993457649842913 28.

El mayor número perfecto conocido hasta 2008 posee 25.956.377 dígitos. Uno de sus factores es, precisamente, el mayor número primo conocido. Obsérvese que

no hemos hablado hasta ahora de números perfectos pares o impares, pues se da la casualidad de que todos los números perfectos hallados hasta hoy son pares, y eso que se ha investigado tan lejos como 10^{300}. Precisamente la conjetura de los números perfectos impares dice que éstos no existen. Jamás se ha encontrado ninguno, de momento... Se sabe, sin embargo, que si existe un número perfecto impar debe tener como mínimo 47 factores primos (incluyendo repeticiones).

En sus *Elementos*, Euclides dedica un espacio significativo a los números perfectos pares y demuestra, además, en el «Libro IX», Proposición 36, que todo número perfecto par es de la forma:

$$P_n = 2^{n-1}(2^n-1),$$

con 2^n-1 primo. Eso no es demasiado difícil (el lector avispado puede intentar demostrarlo con la ayuda de la función σ), pero demostrar lo recíproco no es tan sencillo. Probar que todo número de la forma $2^{n-1}(2^n-1)$ con 2^n-1 primo es un número perfecto requirió en el siglo XVIII la intervención personal del gran Euler.

Como curiosidad, nótese que la expresión anterior significa que, escritos en sistema binario, *todos* los números perfectos adoptan una forma repetitiva:

$$\begin{aligned} 6_{10} &= 110_2 \\ 28_{10} &= 11100_2 \\ 496_{10} &= 111110000_2, \end{aligned}$$

constituida por p_n unos seguidos de $p_n - 1$ ceros.

En el curso de esta historia también hay que mencionar al padre Marin Mersenne (1588-1648), teólogo, filósofo y matemático francés, experto además en música, que se ocupó de los números de la forma

$$M_n = 2^n-1,$$

conjeturando (y dando una lista equivocada) que en muchos casos eran primos. Mersenne conjeturó que sólo eran primos para $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ y 257. Pero para $n = 61, 89$ y 107 se obtienen también números primos (y no figuraban en su lista) y para 67 y 257 se obtienen números compuestos (y, en cambio, figuraban en su lista de presuntos primos).

Tan importantes eran sus números que hasta la condesa Ada Lovelace, hija de lord Byron, llegó a ocuparse de ellos. De hecho, los números de Mersenne que son primos dan lugar, por el procedimiento de Euclides y Euler combinados, a los únicos números perfectos pares existentes. Hay tantos números primos de Mersenne como números perfectos pares y viceversa. La investigación de los primos de Mersenne (en 2011 se conocen 47) es muy activa y pueden encontrarse en Internet muchas web relacionadas. Quizá contribuya a su popularidad el que encontrar primos de Mersenne signifique, al fin y al cabo, encontrar primos muy grandes.

Tampoco se sabe por ahora si hay un número finito o infinito de números perfectos pares. Es un problema abierto. Existen también en teoría números abundantes, deficientes, armónicos, multiperfectos, pseudoperfectos, pluscuamperfectos, cuasiperfectos, etc. Todos ellos están relacionados de un modo u otro con los números perfectos y todos llevan a cuestas su propio problema no resuelto.

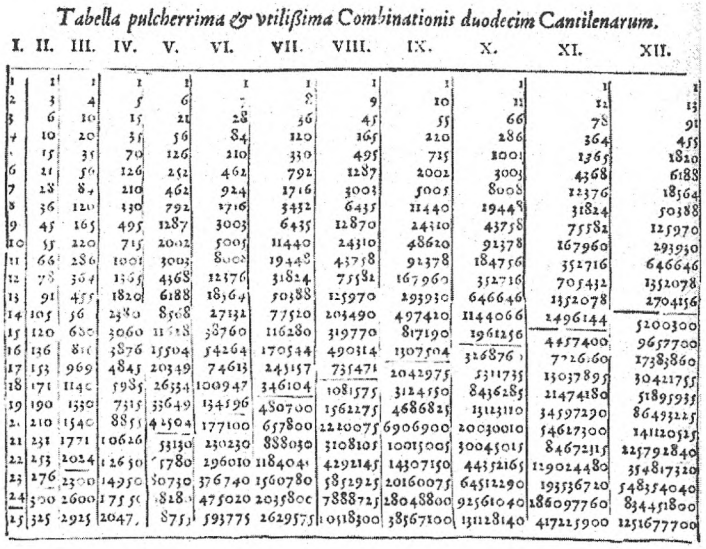


Tabella pulcherrima & vtiliſsima Combinationis duodecim Cantilenarum.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930
11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646
12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078
13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156
14	105	56	2380	8568	27132	77520	203490	497420	1144066	2496144	5200300
15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190	1961256	4457400	9657700
16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314	1307504	3268760	7726160	17383860
17	153	969	4845	20349	74613	245157	735471	2042975	5311735	13037895	30421755
18	171	1140	5985	26334	100947	346104	1081575	3124550	8436285	21474180	51895935
19	190	1330	7315	33649	134596	480700	1562275	4686825	13123110	34597290	86493225
20	210	1540	8855	42504	177100	657800	2220075	6906900	20030010	54627300	141120525
21	231	1771	10626	53130	230230	888030	3108105	10015005	30045015	84672315	225792840
22	253	2024	12650	65780	296010	1184040	4292145	14307150	44152165	119024480	354817320
23	276	2300	14950	80730	376740	1560780	5852925	20160075	64512290	193536720	548354040
24	300	2600	17550	98280	475020	2035800	7888725	28048800	92561040	286097760	834451800
25	325	2925	20475	118755	593775	2629575	10518300	38567100	131128140	417225900	1251677700

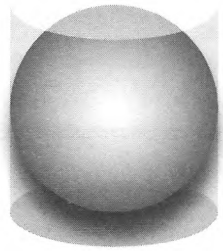
El padre Marin Mersenne realizó importantes contribuciones en los ámbitos de las matemáticas y de la música, dos disciplinas estrechamente relacionadas. En la ilustración, una de las tablas de su obra dedicada a la armonía.

Una subespecie de los números perfectos son los números amigos: n y m son amigos cuando sus respectivos divisores —salvo ellos mismos— suman el otro. Cuando un número es amigo de sí mismo, es perfecto; y viceversa. Naturalmente, dos números pueden ser amigos sin ser perfectos. Por ejemplo, el par (9.363.584, 9.437.056) está formado por dos números amigos, de los que hay infinitos, según investigó Tabit ibn

Qurra (826-901), quien dio un sistema para calcularlos (no todos). El camino de la amistad prosigue con los números sociables, generalización de los amigos. Pero no hay por qué creer que todo el mundo es bueno y amistoso, por lo menos entre los números. No se conoce ningún número sociable de orden tres.

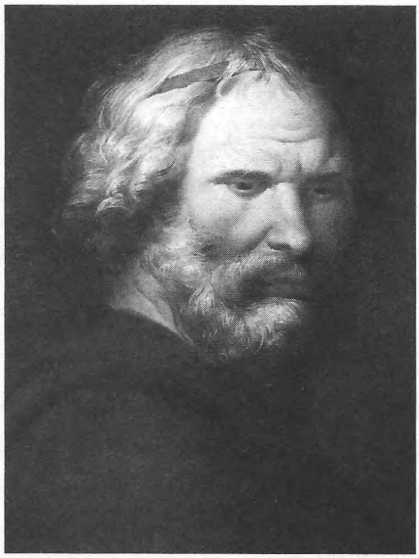
La esfera y el cilindro

Arquímedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) fue el primero en probar que tanto el área como el volumen del cilindro estaban en razón 2/3 con el área y el volumen de la esfera inscrita. El dibujo siguiente puede ayudarnos a visualizar esta afirmación, en modo alguno intuitiva:



EL ORGULLO DE ARQUÍMEDES

A la hora de computar el área del cilindro hay que incluir en el cálculo el área de las bases. Tanto aprecio tenía Arquímedes por la resolución de este problema que, según cuenta el historiador Plutarco, pidió que figurara sobre su tumba, un homenaje inaudito para un genio de tal calibre; aunque la tumba ha desaparecido, es posible que su voluntad se cumpliera, puesto que existe un testimonio que lo confirma, procedente de un visitante insigne de la tumba de Arquímedes, el prócer romano Marco Tulio Cicerón.

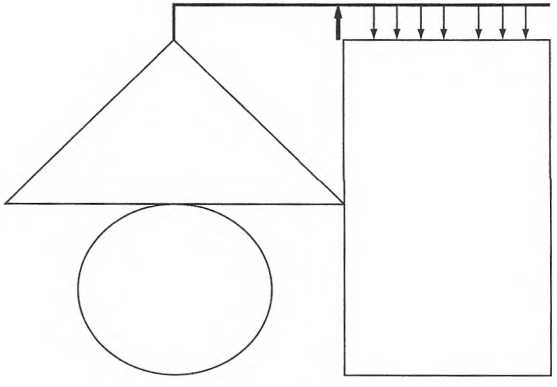


Arquímedes según el retrato imaginario realizado por Giuseppe Catania en el siglo XIX.

En notación actual, la afirmación de Arquímedes equivale a decir que

$$A = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

son las expresiones del área y el volumen de una esfera. Al parecer, no fue nada fácil probar el resultado anterior, pues figura rigurosamente demostrado en la obra *Sobre la esfera y el cilindro*, un sólido volumen con 53 proposiciones. En un pergamino antiquísimo dedicado a reproducir una colección de oraciones griegas ortodoxas, el danés Helberg descubrió en 1906 que éstas habían sido escritas sobre un texto previo: el *Método de los teoremas mecánicos* de Arquímedes, que hasta entonces se consideraba una obra perdida y que afortunadamente pudo recuperarse (y venderse en 1998 por 2.000.000 de dólares). En este palimpsesto se llega a la expresión del área y el volumen de la esfera por especulaciones mecánicas propias del conocimiento de las palancas que poseía el gran ingeniero griego.



Una palanca que sostiene en equilibrio tres cuerpos geométricos de determinada medida. En la obra de Arquímedes denominada Método de los teoremas mecánicos, *un razonamiento a partir de una palanca semejante conduce al cálculo del área y del volumen de la esfera.*

No obstante, la demostración de las fórmulas anteriores emana del cálculo por exhaución, un procedimiento debido a Eudoxo y considerado un precedente del moderno cálculo infinitesimal. El método de exhaución viene a decir, en términos más actuales y comprensibles de límites, que si se minora y mayora sistemáticamente una cantidad A_n

$$x_n \leq A_n \leq y_n$$

también se verifica

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} A_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n,$$

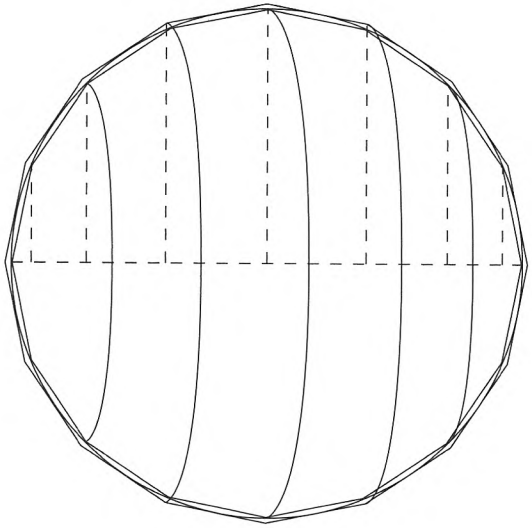
y si la distancia entre los x_n e y_n tiende a cero,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) \to 0,$$

entonces los límites son todos iguales:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A_n = A = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Lo que llevó a cabo Arquímedes fue inscribir y circunscribir una serie de secciones cónicas en la esfera de modo que podían calcularse ambas áreas y volúmenes (inscrita y circunscrita), acercándose cada vez más a la misma, tal y como puede verse en la ilustración adjunta.



Hoy los escolares inteligentes e instruidos pueden recurrir al cálculo integral y diferencial, pero en la época de Arquímedes, obviamente esto no era posible. Los cálculos del matemático griego son puramente geométricos y quien lea *Sobre la esfera y el cilindro* constatará que están llenos de ingenio y penetración. No en vano Arquímedes es considerado una de las figuras señeras del pensamiento.

La maravillosa cicloide

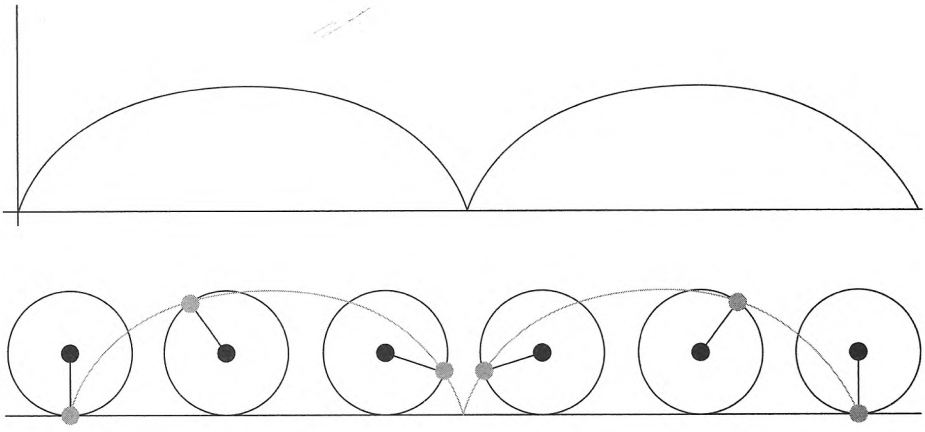
Aparentemente, la cicloide es una curva más, de ecuación paramétrica

$$x = a\,(\lambda - \operatorname{sen}\lambda)$$
$$y = a\,(1 - \cos\lambda)$$

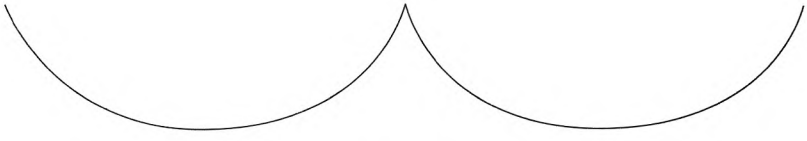
y ecuación cartesiana algo más complicada

$$x = a \cdot \arccos\,(1-\frac{y}{a}) - \sqrt{2ay - y^2},$$

en la que la altura total de la curva es $2a$. La longitud de cada periodo —el periodo es 2π— vale $8a$, cuatro veces la altura de la cicloide. La curva posee la forma que muestra el gráfico adjunto.

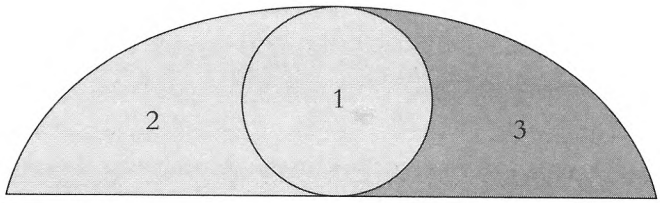


En esta ilustración ya se puede apreciar su definición geométrica: la cicloide es la curva que recorre al girar un punto de la circunferencia de radio a. Aunque la concavidad apunte hacia abajo, para mostrar bien su construcción también podemos imaginar la cicloide cabeza arriba.



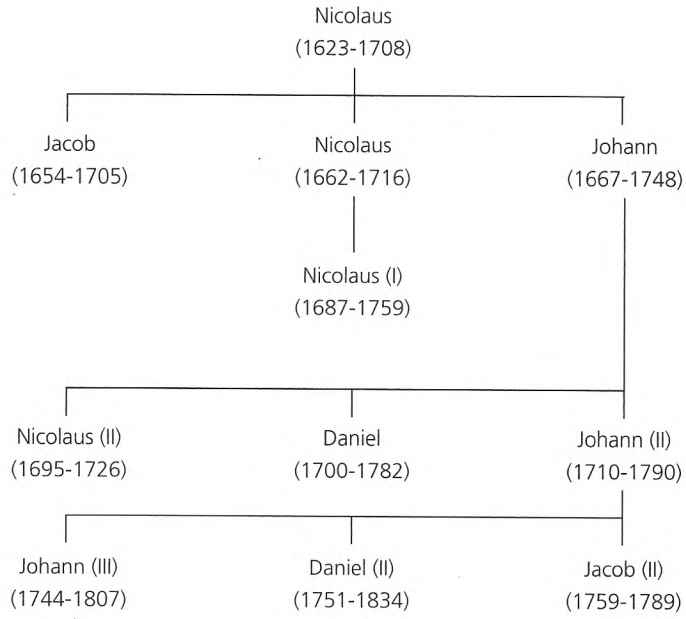
La cicloide con la concavidad hacia arriba.

Entre otras curiosidades, la cicloide encierra un área tres veces igual al círculo que la engendra.



La cicloide y su área.

Una vez presentada la cicloide, presentaremos ahora a la familia de científicos suizos de los Bernoulli, a la que sólo puede comparársele la familia Bach en el terreno musical.



El árbol familiar de los Bernoulli.

Los Bernoulli no sólo eran muchos, sino que se enemistaban periódicamente unos con otros y mantenían entre sí unas controversias considerables. Eso no les impidió convivir —incruentamente— en el mundo de la ciencia durante casi dos siglos. Johann padre, que era un pensador muy perspicaz —y un pésimo progenitor—, halló la solución a un problema de fácil enunciado pero difícil ataque, un problema que hoy

se denominaría de máximos y mínimos, o de cálculo de variaciones. Era el siguiente: si hacemos que una partícula móvil caiga a lo largo de una curva descendente llevada sólo por su propio peso, sin rozamiento alguno, ¿cuál es la curva en que la caída se produce en el tiempo mínimo? En 1696 Johann Bernouilli publicó en el *Acta Eruditorum* el siguiente texto:

> «Se invita a los matemáticos a resolver un nuevo problema: dados los puntos A y B en un plano vertical, asignar a una partícula móvil M el camino AMB a lo largo del cual, descendiendo por su propio peso, pasa del punto A al punto B en el tiempo más breve posible. [...] Mientras tanto, para prevenir cualquier juicio prematuro, se puede hacer notar que, aunque la línea recta AB es ciertamente la más corta entre los puntos A y B, no es, con todo, el camino atravesado en tiempo mínimo. Sin embargo, la curva AMB, cuyo nombre yo daré, si nadie lo ha descubierto antes del final de este año, es una curva bien conocida de los geómetras.»

Retrato de Johann Bernoulli, matemático que se centró sobre todo en el cálculo infinitesimal.

Ya Galileo Galilei (1564-1642) se había ocupado —erróneamente— de esa cuestión, que puede parecer poco importante, pero que ha resultado muy relevante como puente entre las elucubraciones físicas y las matemáticas. En términos modernos,

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{ds}{v},$$

donde t_{AB} es el tiempo invertido en ir del punto A al B de la curva; s designa al arco de la curva y v, la velocidad de la partícula. Dado que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}dx = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

se tiene que

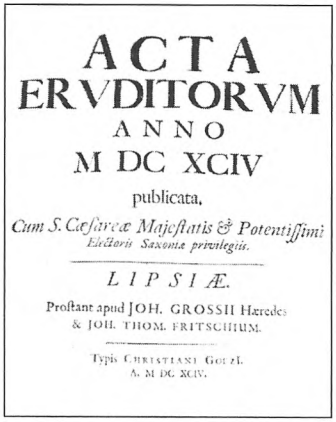
$$t_{AB} = \int_A^B \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}dx.$$

Aplicando las técnicas variacionales a esta expresión se obtiene una curva de ecuación paramétrica en α, que es

$$x = \tfrac{1}{2}K(\alpha - sen\ \alpha)$$
$$y = \tfrac{1}{2}K(1 - cos\ \alpha),$$

la cual resulta ser una cicloide. Como es natural, Johann no conocía todavía los secretos del cálculo de variaciones, creado más tarde por Euler sobre ideas de Jacob Bernoulli, y procedió basándose en su ingenio y en el comportamiento por refracción de un rayo de luz.

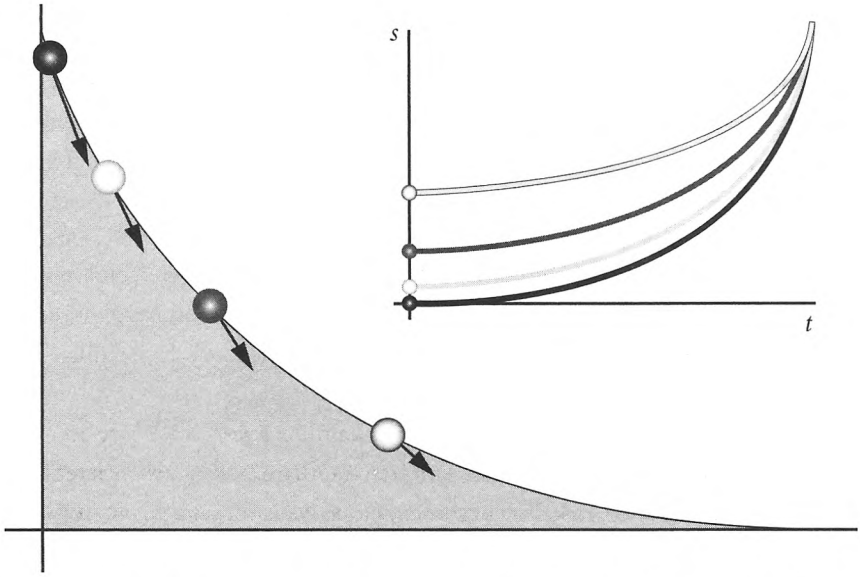
Como ya se ha mencionado, Johann Bernoulli publicó el problema en forma de desafío en 1696 en el *Acta Eruditorum*, una de las escasas revistas científicas que existían en su tiempo. En su fuero interno, esperaba humillar a su hermano Jacob proponiéndole un enigma de difícil solución. Él mismo publicó al año siguiente una presunta solución, aunque defectuosa.


ACTA
ERVDITORVM
ANNO
M DC XCIV
publicata,
Cum S. Cæſareæ Majeſtatis & Potentiſſimi
Electoris Saxoniæ privilegiis.
LIPSIÆ.
Proſtant apud JOH. GROSSII Hæredes
& JOH. THOM. FRITSCHIUM.
Typis CHRISTIANI GOTZII.
A. M DC XCIV.

Portada de un volumen de Acta Eruditorum, *una revista alemana dedicada a las cuestiones científicas que se publicó entre 1682 y 1782.*

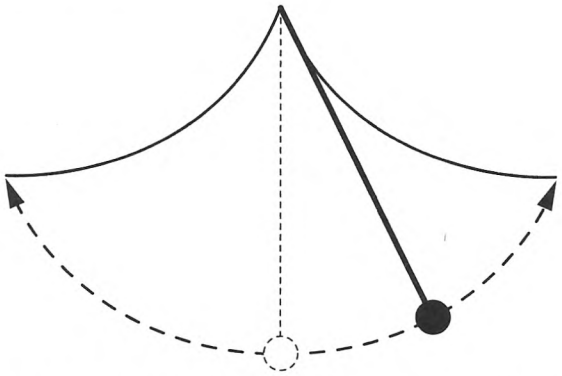
La cuestión, mientras tanto, había llegado al conocimiento de Newton, y no se sabe si se lo tomó como un atentado a sus capacidades o no, pero lo cierto es que al día siguiente de conocer el problema, ya lo había resuelto. Envió su solución a la Royal Society y una traducción latina apareció en el *Acta Eruditorum*, donde se publicó sin mencionar a su autor porque los editores no lo conocían. En el mismo número de la revista se publicaron las soluciones de otros autores. Johann, quizás algo molesto, las leyó, comprobó que eran verdaderas y sospechó enseguida quien era el autor de la proeza anónima. «Conozco al león por sus garras», fue el comentario que nos ha legado la posteridad. También Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, el marqués de l'Hôpital y el hermano de Johann, Jacob, aportaron soluciones a lo que se conoció como «el problema de la baquistócrona», del griego βραχίστσ (el más corto) y χρόνσ (tiempo). La cicloide resulta ser una curva baquistócrona, es decir, aquella a lo largo de la cual un objeto pesante cae en el menor tiempo posible.

La cicloide es, además, una curva tautócrona o isocrona, en el sentido de que una partícula abandonada al azar en cualquiera de sus puntos desciende hasta su punto más bajo en el mismo tiempo.



Sobre una cicloide, cuatro partículas móviles iguales, soltadas en puntos distintos, llegan al mismo tiempo abajo. La flecha indica la aceleración de cada una. Los ejes de coordenadas muestran el arco recorrido (s) *en función del tiempo* (t). *Los tiempos son iguales, con independencia de la longitud del arco, por lo que al final resulta que las presuntas partículas, soltadas simultáneamente, llegan también simultáneamente al punto más bajo de la cicloide. La cicloide es una curva tautócrona.*

Huygens, en su tratado sobre los relojes, sacó partida de esta circunstancia e inventó un péndulo cicloidal.



Oscilación de un péndulo tipo Huygens, matemático neerlandés del siglo XVII.

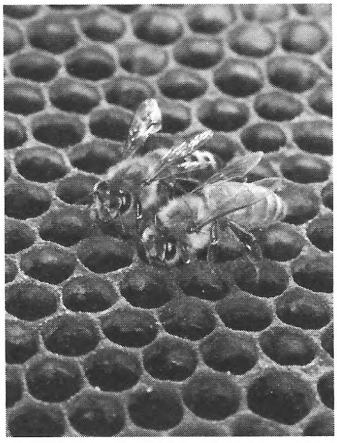
El péndulo no describe un arco de circunferencia, sino de cicloide, y es isocrono. No importa la amplitud del mismo pues la curva descrita es tautócrona (o isocrona). El resultado fueron relojes de péndulo más precisos.

¿Por qué los panales de miel tienen celdillas hexagonales?

Para las abejas puede ser una cuestión académica, pero para los geómetras no lo es. Y para cierta categoría de filósofos la pregunta está preñada de incógnitas trascendentales: ¿actúan las abejas llevadas por un instinto geométrico de origen divino, o porque tal comportamiento está determinado en su genoma por razones evolutivas, o es que las celdillas de cera presionan una sobre otras y terminan formando prismas hexagonales? Puestos a especular, ¿por qué las celdillas no son cuadradas o irregulares?

Empecemos por el principio. Se llama habitualmente teselación a todo recubrimiento del plano con piezas iguales, sean éstas regulares, convexas o irregulares y cóncavas, de lados rectos o de lados curvos. Pappo de Alejandría (siglos III-IV), llamado Pappus en muchas fuentes, ya advirtió «de la sagacidad de las abejas» y, refiriéndose a sus panales, observó que las piezas hexagonales regulares eran las más eficientes, en el sentido de que ofrecían el menor perímetro de entre las posibles teselaciones regulares. De este modo, si se admite como objetivo teleológico de las abejas que usar la menor cantidad de cera para construir celdas es un argumento aceptable, se empieza a ver por qué escogen este diseño: es el que menos cera requiere.

No todos los sabios del futuro estuvieron de acuerdo y algunos, entre ellos Kepler y Darwin, prefirieron pensar en que la presión de las celdillas adyacentes debía hacer que la figura más natural, el círculo, se deformara hasta el hexágono. Las abejas construían prismas circulares, pero el mundo exterior los apretujaba hasta volverlos hexagonales, hermosos en su simetría de panal.



La forma hexagonal de los panales de las abejas ha sido objeto de estudio entre los geómetras.

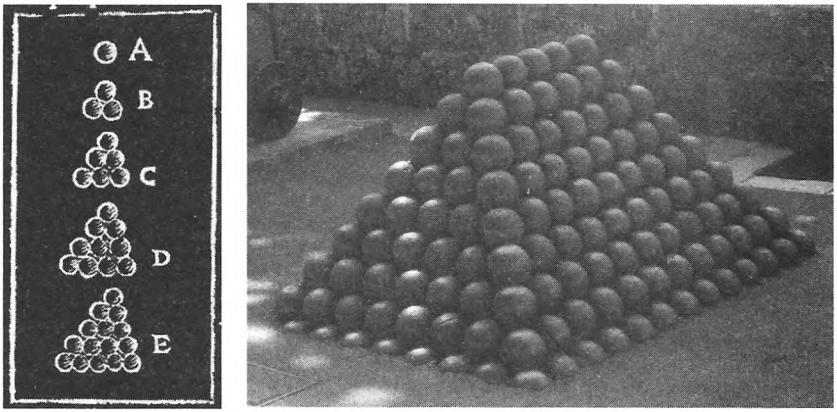
Poco a poco los geómetras fueron desatando el nudo de las incógnitas, sobre todo gracias a las aportaciones de László Fejes Tóth (1915-2005), quien demostró que de entre todos los polígonos convexos, regulares o no que teselan el plano, el hexágono regular era el de menor perímetro para un área dada. De ahí al final quedaba relativamente poco. El americano Thomas Hales (n. 1958), quien ya había probado la conjetura de Kepler de las esferas apiladas, se ocupó del problema de las abejas y al cabo de pocos meses daba con una solución satisfactoria: la teselación convexa hexagonal es la más eficiente posible, más que cualquiera no convexa y más que cualquiera que incluya un lado curvo o más de un lado curvo.

El mismo argumento sirve para las baldosas: si se desea embaldosar el plano, las baldosas hexagonales son las más indicadas.

Kepler y las naranjas

Johannes Kepler (1571-1630) será recordado en los siglos venideros sobre todo por el enunciado de las leyes astronómicas que llevan su nombre y no por su labor como matemático, pero todos le debemos mucho en esta faceta. No sólo se ocupó de cosas

tan terrenales como la cabida y forma de los barriles de su tiempo o el diseño de los copos de nieve, sino que realizó dos conjeturas famosas por lo menos: la relacionada con los panales de miel de las abejas y la que hace referencia al empaquetamiento de esferas; en su forma más truculenta, la conjetura se pregunta cuál es el mejor modo, el más eficiente, de almacenar balas de cañón; en su versión más ligera digamos que Kepler se interrogaba acerca del modo de apilar naranjas. Ya hay un modo establecido de hacerlo: desde la más remota antigüedad se apilan naranjas formando capas uniformes en las que cada naranja es tangente a otras doce, con las naranjas de una capa superior reposando sobre los huecos de la capa inferior y así sucesivamente.



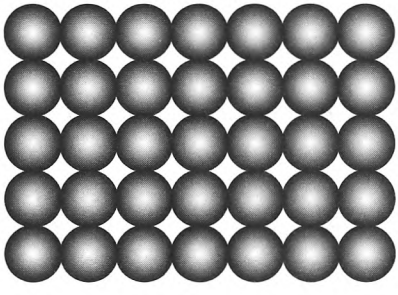
La mejor forma de apilar balas de cañón ya fue estudiada por Johannes Kepler, como muestra el diagrama de la izquierda, perteneciente a su obra Strena seu de nive sexangula, *de 1611.*

Tanto los inofensivos tenderos almacenando sus frutas como sir Walter Raleigh guardando sus balas de cañón utilizaban ya el llamado por los geómetras empaquetamiento cúbico de caras centradas, que posee una densidad próxima al 74% (la densidad, de un modo aproximado pero suficiente para nuestras necesidades, es la medida del volumen de naranjas o balas de cañón dividido por el espacio total). Pero ¿es el óptimo? Ello no se sabía en 1609, cuando Kepler hizo la primera referencia a la cuestión, en una carta dirigida a un amigo atomista, Thomas Harriot, que a su vez era amigo y empleado de sir Walter Raleigh. Al fin y al cabo, si se tiran desordenadamente las naranjas de un saco, en confuso montón, ¿quién nos asegura que una configuración de naranjas, aunque sea una de entre un trillón, no será, por pura casualidad, la que presente una densidad óptima? La respuesta nunca la podrá presentar. Cálculos realizados en 1992 demostraron que así se conseguían densidades del orden de 0,64, lejos de los 0,74048 de las densidades del tendero.

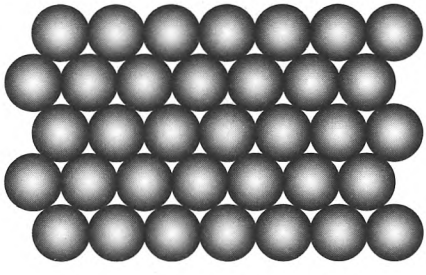
LAS PREOCUPACIONES DE RALEIGH

Sir Walter Raleigh (ca. 1554-1618), famoso político y marino inglés, estaba interesado por el almacenamiento de las municiones en su flota; lo que le preocupaba no era el problema de almacenar elementos esféricos que había interesado a Kepler –de hecho, carecía de preocupación matemática alguna salvo la disminución del número de sus enemigos–, sino una cuestión relacionada muy particular: ¿cuál era el modo óptimo de disponer un número cuadrado de balas de cañón en forma de pirámide con base cuadrada? Lo que le interesaba era sólo un método fácil de resolver la cuestión que se adaptara a la capacidad de un buque para guardar armamento. Su petición es un problema aritmético menor, que puede resolverse con una ecuación de Diofanto. La solución es disponer las balas formando una pirámide, un tanto inestable, de altura 24 y apilar las sucesivas balas en capas tradicionales, cada una en la concavidad formada por las otras cuatro.

Si empezásemos una aproximación al problema en función de la dimensión veríamos enseguida que sólo hay dos redes posibles en el plano.



Empaquetamiento cuadrado.



Empaquetamiento hexagonal.

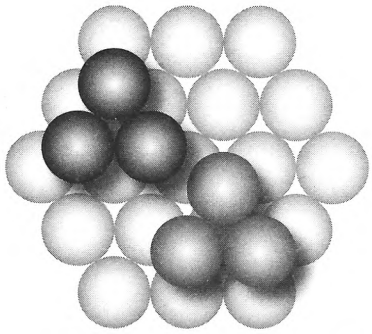
Las llamadas redes marcan los centros de los círculos. El empaquetado de la derecha da la siguiente densidad:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,9068996821,$$

que es el resultado buscado. Si se sube la red a dimensión tres resultan redes cúbicas y hexagonales; la densidad máxima

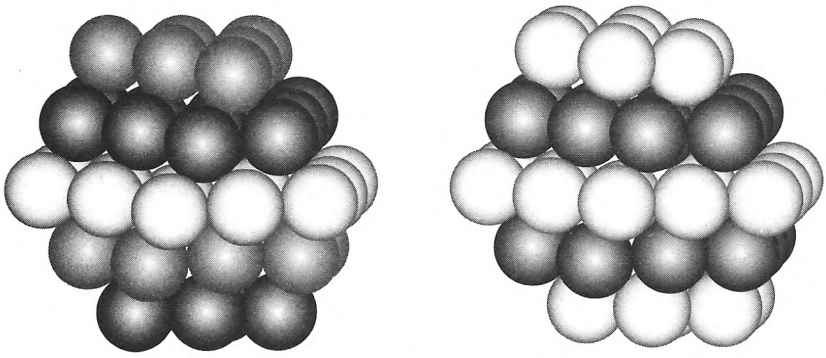
$$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}74048$$

se obtiene con los empaquetados cúbicos con caras centradas y el hexagonal compacto. Esencialmente hay dos empaquetados:



Empaquetados posibles de dos capas.

Éstos van disponiéndose en capas y producen a cada paso dos empaquetados muy emparentados, pero geométricamente distintos.



Las dos opciones de empaquetados.

Eso sí, todos cumplen con la condición de que cada nueva esfera se deposita en un hueco de la capa inferior, como en las pilas de naranjas. Hoy ya sabemos que estos empaquetamientos de esferas en dimensión tres son óptimos, pero sólo lo sabemos desde hace pocos años.

Thomas Hales (n. 1958) resolvió en 2002 esta conjetura, que tenía ya casi 400 años. Hales utilizó métodos de programación lineal, de teoría de la optimización y de otros campos relacionados, y, por desgracia, utilizó también no uno sino varios ordenadores. La complicación de los programas y la complejidad enorme de las comprobaciones —que exigían una computadora, pues excedían la capacidad humana— convirtieron la verificación del resultado en una ordalía. Los revisores hicieron saber que, en lo que a ellos concernía, su certeza de que la prueba era correcta alcanzaba el 99%, pero que no podían decir más. Parece que un nuevo equipo y una prueba más elaborada —y gracias a la capacidad creciente de las máquinas— posibilitarán finalmente una verificación escrupulosa. Y eso nos lleva a un punto clave: ¿hasta qué punto son aceptables las pruebas que necesitan una computadora? Hay partidarios del sí —la mayoría— y del no, y entre estos últimos se cuentan muchos profesionales de primera fila.

Capítulo 2

Una parada en la estación Euler

Los matemáticos han intentado en vano hasta hoy
descubrir algún orden en la secuencia de los números primos,
y tenemos razones para creer que es un misterio
dentro del cual la mente no penetrará nunca.
Leonhard Euler

El suizo Leonhard Euler (1707-1783) ha sido sin duda una gran figura de las matemáticas. Euler marcó una época, con una fecundidad enorme (sus obras «completas» ocupan 76 tomos, y todavía faltan cosas) ¡y eso que tuvo enormes problemas de visión durante casi toda su vida! Además, la época de Euler fue la del desarrollo del análisis, una especie de erupción súbita de la técnica de razonar y hacer ciencia. En este periodo también se inauguró la libertad de pensamiento: persistían los dogmas pero empezaba a cuestionarse su pervivencia. Euler nos puede servir de hito kilométrico, de faro, de referencia temporal.

El problema que no le interesaba a Sherlock Holmes

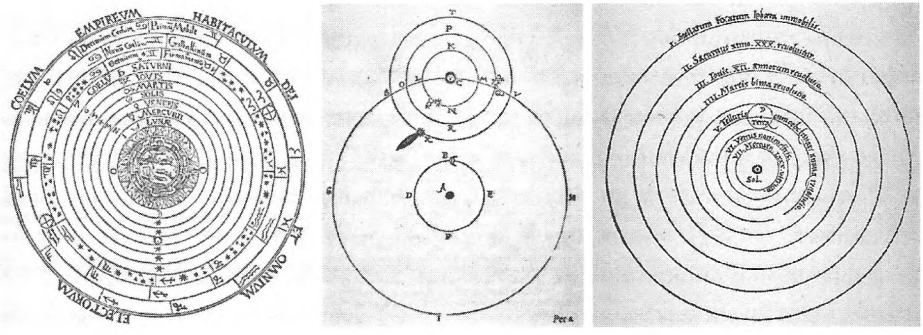
En la primera historia que narra Arthur Conan Doyle acerca de Sherlock Holmes, *Un estudio en escarlata*, el doctor Watson se escandaliza: el gran detective parece ignorar la teoría heliocéntrica. No sabe —ni le importa— que los planetas giran alrededor del Sol.

> «¿Y qué diablos supone para mí? Me asegura usted que giramos alrededor del Sol. Aunque girásemos alrededor de la Luna, ello no supondría para mí o para mi labor la más insignificante diferencia.»

Esas palabras parecen razonables en boca de Holmes. Imaginémoslas en boca de un súbdito del Sacro Imperio Germánico del siglo XVI, agujereado por la viruela,

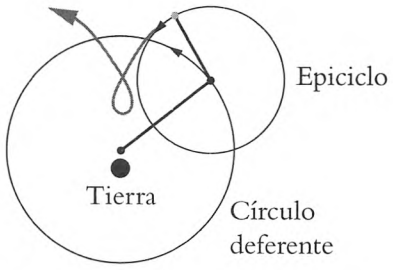
que ha visto morir a varios de sus hijos, medio manco y casado con una mujer a la que ya no ama, angustiado por impedir que juzguen como bruja a su anciana madre, acuciado por un salario que no acaba de llegar debido a complicaciones políticas sobre las que no ejerce dominio alguno. Definitivamente, podríamos pensar que esta persona tiene aún más motivos que Sherlock Holmes para que no le importara si los planetas giran o se están quietos. Pues bien, nos equivocaríamos, pues este alemán tan poco agraciado por el destino es un matemático, Johannes Kepler (1571-1630), y para su tarea sí que era importante qué giraba en torno a qué. Sobre su figura se han escrito muchos libros e incluso algunas novelas, y sería tan prolijo alinear sus desgracias como igualar su mente, para nuestro tiempo extraña y contradictoria, pero genial vista con una mínima perspectiva científica.

De Nicolás Copérnico (1473-1543) Kepler aprendió el heliocentrismo, la creencia, luego prohibida por la omnipotente Iglesia católica, de que la Tierra y los demás planetas giran alrededor del Sol. Era una creencia que no abandonaría jamás.



El sistema geocéntrico (con la Tierra en el centro del universo y los astros girando alrededor de ella), tal y como muestra la imagen de la izquierda, fue perdiendo posiciones frente al heliocéntrico (donde el Sol ocupa el lugar central). Una postura intermedia era sostenida en el sistema híbrido, geocéntrico y heliocéntrico a la vez, de Tycho Brahe (imagen central).

En el pasado se formularon muchas teorías acerca de la naturaleza —inamovible y divina, según el aristotelismo— y los movimientos de la esfera celeste. No iremos tan lejos como para suponer que ésta era una preocupación diaria de la gente de la calle, pero tampoco fue nunca un tema baladí. El simple observador ya se había dado cuenta de que muchos planetas, en sus trayectorias aparentes alrededor del Sol —sus órbitas—, parecían retroceder sobre sus pasos durante un cierto tiempo, e incluso se habían inventado complejos mecanismos, como los epiciclos de Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.), para explicar tales fenómenos.



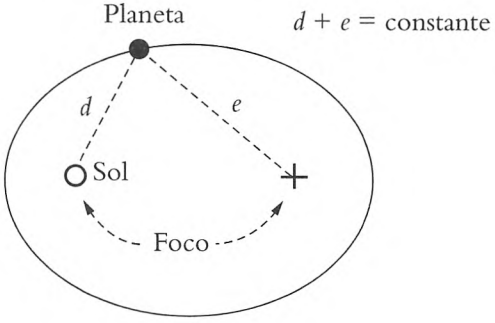
Si suponemos que un astro recorre una órbita circular pero describe otra menor (círculo deferente) dentro de la misma mientras se desplaza, lo que resultan son los epiciclos que, vistos desde el centro, aparentan retrocesos orbitales en el astro que se desplaza.

La teoría heliocéntrica no se libró de ellos y sólo un sistema plenamente consistente de mecánica celeste les dio una explicación plausible. La teoría de Copérnico, no obstante, bien aplicada, borraba de un plumazo muchas imperfecciones y no es extraño que numerosos pensadores le dieran la bienvenida. Kepler se la dio.

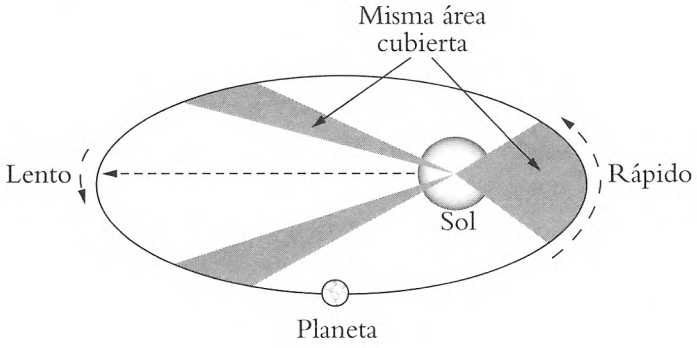
En el curso de su muy agitada vida hay un personaje, Tycho Brahe (1546-1601), que ocupa una posición central. Tycho era un astrónomo famoso, el «matemático imperial» de Rodolfo II, y un observador fabuloso, un hombre que no se equivocaba nunca en sus mediciones. Falleció de modo inesperado y dejó a Kepler como heredero de su trabajo astronómico: la redacción de las monumentales tablas rudolfinas —como se las conoce en su ámbito—, con detalle de las posiciones de los astros más importantes. En esos datos se basó Kepler para concebir su visión del mundo.

Kepler publicó muchos libros a lo largo de su vida. Pero pasará a la historia por el enunciado de sus tres leyes, establecidas entre 1609 y 1618, que fueron recogidas en su obra *Harmonices Mundi (Armonía de los mundos)*, la más matemáticamente bella de sus publicaciones. Las tres leyes de Kepler pueden transcribirse así:

1. Las órbitas de los planetas son elípticas, con el Sol en un foco.



2. Una línea que una un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



3. El cuadrado del periodo de cada órbita planetaria es directamente proporcional al cubo del semieje mayor. Esta tercera ley es importantísima, pues liga el tamaño de cada órbita al tiempo que tarda un planeta en recorrerla.

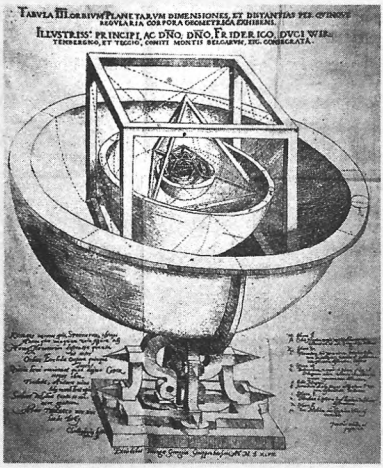
Si se prescinde de la excentricidad de la elipse y se reducen las leyes al círculo, la velocidad de los planetas sería constante y no se darían lo que los astrónomos llamaban *anomalías*, pues en aquellos tiempos lo circular era lo considerado como normal. Pero Kepler descubrió que lo circular era ingenuo, primitivo y falso. Las tres leyes de Kepler se ajustan a la realidad. Con ellas y con el sistema heliocéntrico de Copérnico se da respuesta a la pregunta casi eterna: ¿cómo se mueven los objetos celestes?

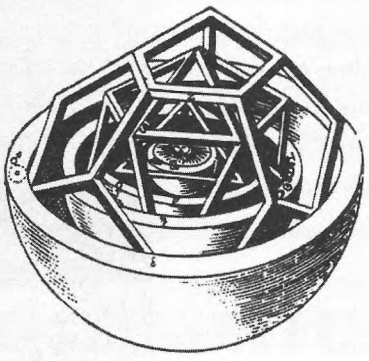
Johannes Kepler, matemático y astrónomo, está considerado como una figura clave en la consolidación del método científico.

UNA FIGURA CONTROVERTIDA

La figura científica de Kepler es controvertida para un científico moderno; está a medio camino entre el misticismo medieval y el profesional moderno. Era un hombre muy religioso, creía que la Santísima Trinidad estaba representada, como el Padre, el Hijo y el Espíritu Santo, por el Sol, la esfera celeste y el vacío interestelar. Vivió durante años de los horóscopos, no distinguía claramente entre astrología y astronomía, y patrocinó ideas tan peregrinas como la «música de las esferas» o el encaje poliédrico de las órbitas del sistema solar. Pero Kepler también se ocupó de cosas tan terrenales como la medida de los barriles, la forma de los cristales de nieve y, tal y como hemos visto en el capítulo anterior, la forma de las celdillas de las abejas o el mejor modo de amontonar esferas.

Por medio de esferas inscritas y circunscritas a los poliedros platónicos, Kepler intentó probar que las órbitas de revolución de los planetas, cada una correspondiente a un poliedro, seguían algún tipo de relación armónica geométrica de origen divino. Esta idea era muy apreciada por Kepler, aunque la realidad mostró pronto que era falsa. El dibujo de la derecha muestra una ampliación de las esferas interiores, inapreciables en el de la izquierda.





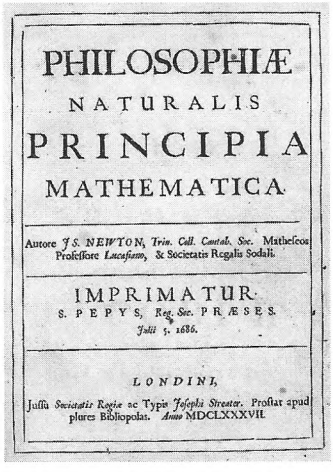
En realidad, Kepler no demostró nada. Sus observaciones son puramente empíricas, una descripción de la realidad. Sólo que hay que ser capaz de desentrañarlas sin más armas que el intelecto y unas tablas. No se puede decir que todos los astrónomos se precipitaran en señal de adoración a los pies de sus tres leyes; la acogida fue al principio fría, pero la opinión favorable se fue imponiendo.

Casi cien años más tarde, en sus *Philosiphiae Naturalis Principia Mathematica*, Isaac Newton (1643-1727), tras abundante manipulación del cálculo diferencial, dedujo de sus leyes del movimiento las tres leyes de Kepler. Un supuesto indispensable en esta deducción es la ley del cuadrado inverso, que implica que dos objetos se atraen de

modo inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Una forma de presentar el cálculo de Newton en coordenadas cartesianas es el sistema de tres ecuaciones diferenciales siguiente:

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{-kx_i}{\left(\sum_{n=1}^{3} x_n^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

que resolviéndolo proporciona las leyes de Kepler. Ahora sí que podía decirse que el círculo estaba cerrado. Los objetos celestes, le importara o no a Sherlock Holmes, se mueven de acuerdo con las leyes de Kepler y, *además*, tiene necesariamente que ser así, de acuerdo con la mecánica newtoniana.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Portada de Principios matemáticos de filosofía natural*, obra de Isaac Newton de 1687 en la que expone la ley de la gravedad universal, de la que se deducen las leyes de Kepler.*

El problema de Basilea

Basilea, Basel, Basle, Bâle…, tales son las denominaciones occidentales más comunes de esta bella ciudad suiza enclavada a orillas del Rin. En Basilea residieron, entre otros, Vesalio, Jung, Erasmo, Nietzsche y Paracelso, así como la familia Bernoulli y Leonhard Euler, ambos relacionados con el problema de la suma de los inversos de los cuadrados:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=?$$

Este problema mantuvo ocupadas a bastantes mentes en Europa, hasta que lo resolvió Euler en una de sus malabaristas exhibiciones de cálculo, en la que no se sabe qué admirar más, si la inventiva o la osadía del invento. El problema de la suma de los inversos de los cuadrados fue suscitado por el matemático italiano Pietro Mengoli (1626-1686), que lo planteó en 1644. Tanto Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) como Johann Bernoulli y su hijo Jacob lo atacaron infructuosamente. Contrariamente a la serie armónica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...,$$

que diverge, en el caso que nos ocupa la serie converge y, de hecho, vale

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=1{,}64493406684822643647241516664602518921894990120679843773555822937000747040320087383362890061975870...,$$

igualdad que Euler conocía pero con menos decimales. Se sospecha que conocía seis cifras, lo que parece que le habría obligado, dada la lenta convergencia de la serie, a sumar unos mil términos. También es posible que Euler, cuyas facultades numéricas eran impresionantes, casi inhumanas, sospechara que esa cantidad era $\frac{\pi^2}{6}$, el resultado buscado. Lo cierto es que sospechar el resultado es una buena pista para encontrarlo. Sigamos los vericuetos de su razonamiento aunque sepamos por adelantado que diversos pasos presentan algún problema y necesitan ser pulidos, lo cual se hizo a posteriori.

Si partimos de la conocida serie de Taylor

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

sabemos que se anula si se anula x, es decir que sen $x = 0$ cuando $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi...$ De este modo, suponiendo que una serie se comportará como un polinomio, ya que de hecho es un polinomio larguísimo, la aplicación del teorema fundamental del álgebra la convertirá en producto de monomios del tipo $x - \alpha$, donde α es una solución:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=$$
$$=K(x)(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)...$$

Ahora K es una constante numérica desconocida. Operando a la derecha:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots = K(x)(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)(x^2-9\pi^2)\ldots$$

observamos que cada término de la forma $x^2-\lambda^2\pi^2$ de la derecha es cero si y sólo si $1-\frac{x^2}{\lambda^2\pi^2}$ es cero. Reescribimos pues los términos de la derecha en la forma

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots = K'(x)\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

donde $K'=K(-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2)\ldots$, y dividiendo por x obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots = K'\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Y como $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$, concluimos que $K'=1$. Así, queda

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

que es una serie igual a un producto infinito. Ningún problema, según Euler. Efectuamos ordenadamente el producto y separamos los términos (infinitos) x^2 del producto de la derecha. Queda la igualdad

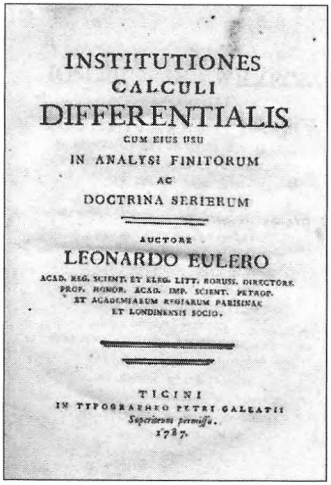
$$-\frac{x^2}{3!}=-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x^2}{4\pi^2}-\frac{x^2}{9\pi^2}-\ldots$$

Y dividiendo ambos lados por $-\frac{x^2}{\pi^2}$ se obtiene

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots,$$

como queríamos averiguar.

De todos modos, Euler, una vez ya supo por dónde iba, volvió sobre sus pasos y algunos años más tarde añadió rigor a la demostración, de la que existen hoy innumerables versiones, algunas utilizando sólo el cálculo integral. En *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) resumió todos sus resultados.


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS USU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM
AUCTORE
LEONARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP.
ET ACADEMIARUM REGIARUM PARISINAE
ET LONDINENSIS SOCIO.
TICINI
IN TYPOGRAPHEO PETRI GALEATII
Superiorum permissu.
1787.

Portada de una edición de Fundamentos del Cálculo Diferencial *realizada en 1787. En este texto Euler publicó sus investigaciones sobre el problema de la suma de los inversos de los cuadrados.*

Tras calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados, Euler siguió con las potencias cuartas y superiores. Él no lo sabía, pero estaba adentrándose en la procelosa tierra de la función zeta de Riemann, definida por

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots \qquad \Re(s)>1.$$

para los números complejos cuya parte real sea mayor que 1.

Lo que Euler probó, en definitiva, es que

$$\varsigma(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \varsigma(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \varsigma(26)=\frac{2^{24}76977927\pi^{26}}{945}.$$

Se trata de un resultado muy meritorio, que anticipa los actuales.

No obstante, hoy no se sabe ninguna fórmula sencilla al estilo de las anteriores para calcular, por ejemplo, cuánto vale $\varsigma(3)$, ni lo que vale la función zeta para cualquier valor entero impar. De hecho, la función zeta es uno de los grandes desafíos de la matemática actual. Aclarémoslo: sí que se sabe, por ejemplo, cuánto vale $\varsigma(3)$; vale:

$$\varsigma(3)=1,2020569\ldots,$$

y es un valor que hasta tiene nombre: es la constante de Ápery, que es irracional, pero no se sabe si es trascendente. Es posible también saber cuánto vale la función

zeta en los puntos impares; lo que se desconoce no es el valor, sino una expresión analítica al estilo de los maravillosos valores encontrados por Euler para los primeros puntos pares. Porque ya me dirán ustedes si fórmulas modernas como la siguiente

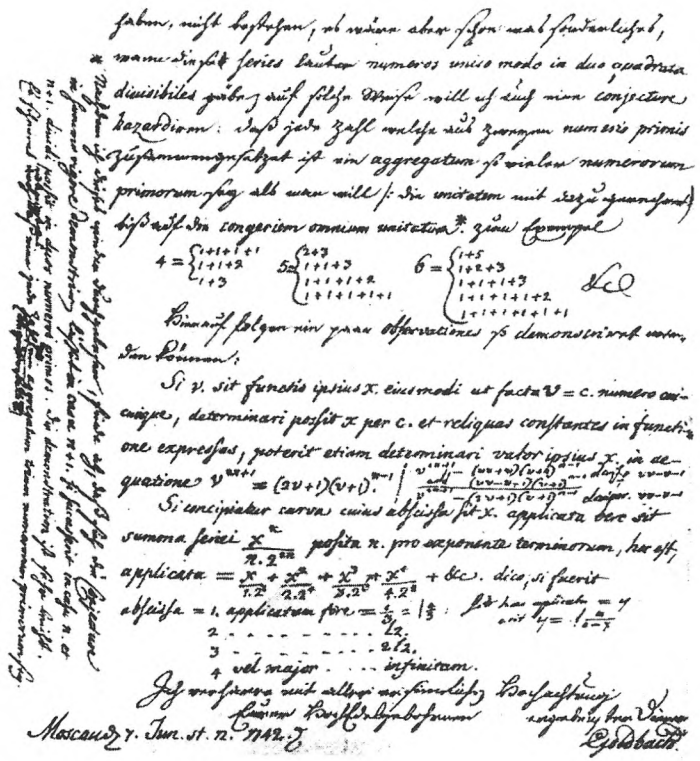
$$\varsigma(3)=\frac{\pi^3}{28}+\frac{16}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\pi n}+1)}-\frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\pi n}+1)}$$

no parecen algo complicadas...

Uno de los retratos de Leonhard Euler en los que puede apreciarse su defecto visual. Euler perdería la visión de un ojo y luego, la del otro, pero continuó su labor matemática sin interrupción.

La conjetura de Goldbach

El matemático e historiador prusiano Christian Goldbach (1690-1764) ingresó en 1742 en el reducto de los inmortales por haber escrito una carta, una extensa misiva dirigida a Euler. Goldbach residía como Euler en Rusia y le era más sencillo que a otros cartearse con el genio; en su carta, le exponía su creencia de que todo entero par mayor que 2 puede ser expresado como la suma de dos números primos. En realidad, la historia es algo más complicada, pues Goldbach consideraba el 1 como primo y la redacción original no era exactamente la que acabamos de describir, pero ya nos eximirán de explicarla con detalle pues abunda en líos lingüísticos y deducciones soterradas.



Página de la carta que Goldbach escribió a Euler y que contiene la conjetura objeto de este apartado.

La conjetura de Goldbach reúne todas las características de perdurabilidad en el mundo científico: afecta a los números primos, todo el mundo puede entenderla, se han roto la cabeza estudiándola cientos, miles de mentes brillantes y nunca se le ha encontrado —que se sepa— una solución. Hasta se han escrito novelas de circulación masiva, como *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture (El tío Pedro y la conjetura de Goldbach)* de Apostolos Doxiadis, acerca de un hecho casi trivial que cualquiera puede ver afilando el lápiz y viendo las descomposiciones en parejas del número 1.000:

$$1.000 = 3 + 997 = 17 + 983 = 23 + 977 = 29 + 971 = 47 + 953 = 53 + 947 =$$
$$= 59 + 941 = 71 + 929 = 89 + 911 = 113 + 887 = 137 + 863 = 173 + 827 =$$
$$= 179 + 821 = 191 + 809 = 227 + 773 = 239 + 761 = 257 + 743 = 281 +$$
$$+ 719 = 317 + 683 = 347 + 653 = 353 + 647 = 359 + 641 = 383 + 617 =$$
$$= 401 + 599 = 431 + 569 = 443 + 557 = 479 + 521 = 491 + 509.$$

Éstas permiten comprobar de pasada que no sólo todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos primos sino que muestra que tal suma es posible de muchos modos. Cuando se publicó la novela de Doxiadis, la editorial anglosajona Faber and Faber ofreció durante dos años, como medida publicitaria, un millón de dólares a quien demostrara la verdad o la falsedad de la conjetura, pero está claro que jugaba con las cartas marcadas pues ni ese incentivo consiguió alterar la situación.

Se ha comprobado la conjetura hasta números del orden 10^{18}, sin encontrar fallo alguno. También se han testado segmentos numéricos hasta 10^{300}. La conjetura se cumple siempre. O mejor dicho, en lenguaje de Popper, no se incumple nunca.

La llamada «conjetura débil» de Goldbach dice que «todos los números impares mayores que 7 pueden escribirse como la suma de tres primos impares» y si se resolviera la conjetura de Goldbach «fuerte» quedaría de modo automático resuelta la conjetura débil, que es un teorema que se deduce del primero. La hipótesis generalizada de Riemann, uno de los siete problemas del Instituto Clay, implica también la conjetura débil de Goldbach. Si alguien hiciera caer la conjetura débil, no probaría la fuerte, pero sí demostraría que basta con sumar 4 primos para obtener cualquier número par. De 4 a 2 ya queda poco, a lo mejor unos meses, a lo mejor unos siglos. Precisamente, la mayor debilidad del enunciado «débil» lo ha

MATEMÁTICOS FRENTE AL ENUNCIADO DÉBIL

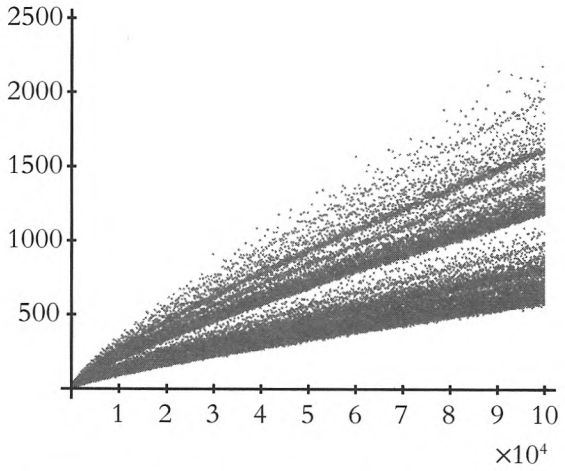
Lev Schnirelmann, uno de los matemáticos que se enfrentó a la conjetura de Goldbach.

Iván Vinogradov (1891-1983) ya probó en 1937 que todo número impar lo bastante grande es la suma de tres primos; por desgracia, la estimación posterior de lo que significa «lo bastante grande» es hoy según los especialistas del orden de $3{,}33 \cdot 10^{43.000}$, lo que convierte esta excelente aproximación a la conjetura débil en impracticable, incluso para las computadoras. Por su parte, Chen Jing-Run (1933-1996) demostró en 1973 que todo par lo bastante grande era la suma de un primo y un semiprimo, es decir, un número producto de dos primos, un muy buen resultado. Ya en 1931 el ruso Lev Schnirelmann (1905-1938), unos años antes de suicidarse, probó que todo entero mayor que 1 puede escribirse como suma de a lo más C primos, donde C es una constante. El valor inicial de C fue bajando (cuidado, que exista un límite C constante al número de primos es un avance colosal) y, finalmente, Olivier Ramaré lo redujo, en 1995, a siete primos.

convertido en objetivo de los ataques más serios, como puede verse en el recuadro de la página anterior.

Hoy está probado que la densidad de los números pares que no satisfacen la conjetura es cero. O sea, que casi todos los pares la cumplen. Pero nadie ha conseguido, hasta ahora, borrar el «casi».

Cuando en el eje horizontal de coordenadas colocamos los enteros pares y en el vertical, el número de modos posibles de escribir cada uno como la suma de dos primos se obtiene una característica imagen en forma de cola de cometa, tal y como se puede observar en el gráfico adjunto.



En 2006 se empezaron a estudiar las características fractales de esta curva. Es notable que, cuanto mayor es el número, mayor es el número de posibles sumas. Esa regla es válida en general, pero no aplicada a cada caso particular.

Para dar una idea más próxima del número de modos posibles, quizá sea útil esta sencilla tabla.

Número	Sumas de dos primos
10	2
100	6
1.000	28
10.000	127
100.000	810
1.000.000	5.402
10.000.000	38.807
100.000.000	291.400

Sello de curso legal que emitió el gobierno chino celebrando triunfalmente el logro de su ciudadano Chen Jing-Run en demostrar un resultado auxiliar de la conjetura de Goldbach. La leyenda superior del sello la califica, en chino, de «el mejor resultado de la conjetura de Goldbach».

El problema de los tres cuerpos

Otro problema que se ha hecho famoso, pero que sería demasiado extenso para tratarlo a fondo y demasiado incomprensible para hacerlo bien, es el problema de los tres cuerpos, que no tiene nada que ver con la transmigración de las almas, ni con Sherlock Holmes y el infame doctor Moriarty —que era astrónomo—, ni con la moral sexual. Tiene que ver con Newton y los objetos estelares. Se empezó con dos cuerpos —lo resolvió Johann Bernoulli (1667-1648)— y se ha llegado a los n cuerpos, pero la fascinación de los tres cuerpos persiste. Se trata de un antiguo enigma mecánico consistente, grosso modo, en averiguar qué sucede cuando tres cuerpos físicos orbitan unos alrededor de otros.

En tiempos de Newton se pensaba en tres cuerpos como el Sol, la Tierra y la Luna. Hoy hablaríamos quizá de un asteroide bajo la influencia de Júpiter y el Sol; o de un planeta y dos estrellas binarias.

El problema general de los n cuerpos consiste en resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se describe con una fórmula vectorial como

$$m_i \ddot{a}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (a_j - a_i)}{\left\| a_j - a_i \right\|}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

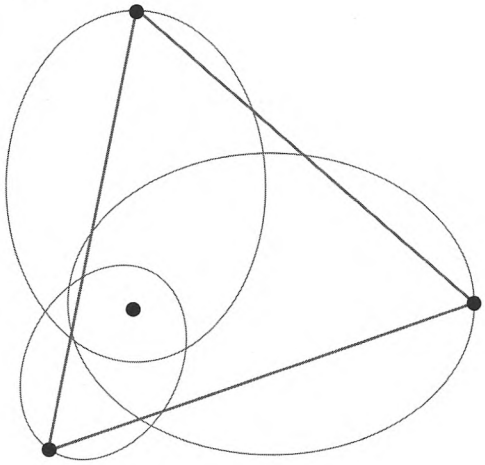
donde se dan las posiciones iniciales $a_i(0)$con $a_i(0) \neq a_j(0)$ para toda $i \neq j$, y las velocidades $\dot{a}_i(0)$. Las masas de cada cuerpo se representa por m_k. Cuando $n = 3$ se obtiene el problema de los tres cuerpos.

Históricamente, pueden darse por totalmente resueltos y de modo práctico problemas concretos de los tres cuerpos, muy generales en ocasiones, pero no el problema general. Hay que recurrir a las computadoras para obtener resultados útiles.

Cuando nos referimos al problema de los tres cuerpos, en realidad nos referimos al problema «restringido» de los tres cuerpos, más abordable, y que se caracteriza por suponer órbitas coplanares y uno de los cuerpos de masa casi insignificante. Este problema, con alguna variante, puede considerarse resuelto; pero el problema general, no.

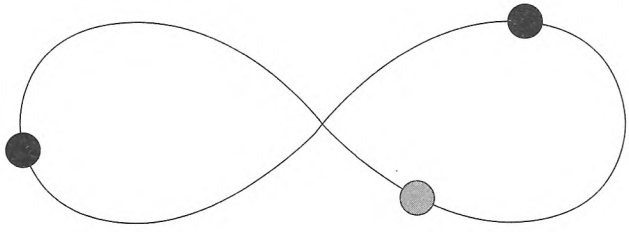
El primer, notorio y exitoso intento de resolución del problema restringido fue obra de Euler. Por su sendero, pero con restricciones distintas, muchas veces con condiciones que constituían generalizaciones importantes, discurrieron Lagrange, Jacobi, Laplace, Adams, Le Verrier, Poincaré, Hill, Sundman, Birkhoff y muchos otros más. El problema restringido de los tres cuerpos (salvo singularidades, como las colisiones) tiene al menos una solución hallada por Karl Frithiof Sundman (1873-1949), aunque su solución viene dada por una serie numérica hoy en día impracticable.

Entre las soluciones encontradas para el problema ocupan un lugar especial las soluciones periódicas (Euler, Lagrange, Hill), de las que llama la atención por su elegancia la de Lagrange.

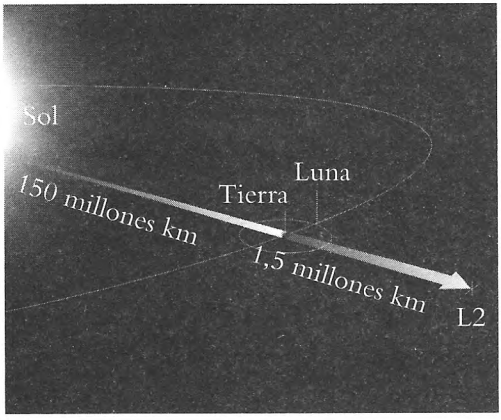


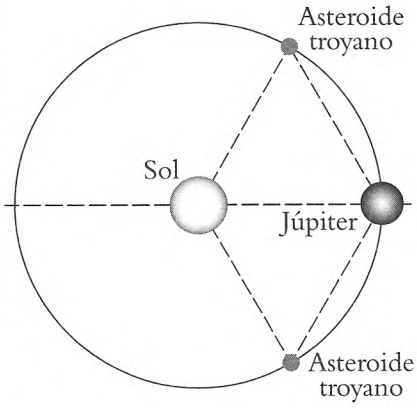
Una solución de Lagrange para el problema restringido de los tres cuerpos; aquí las masas de los objetos orbitales involucrados está en proporción a 1, 2 y 4. Los objetos en órbita ocupan los vértices de un triángulo equilátero.

Lo llamativo es que no hace mucho, a fines del siglo xx, se tuvo acceso a nuevas soluciones periódicas —estudiadas por Carles Simó (n. 1945)— en la que tres cuerpos de igual masa danzaban unos tras otros de modo uniforme formando una especie de ocho. Las órbitas se conocen, muy apropiadamente, como coreografías.



Sin embargo, las aproximaciones no periódicas al problema de los tres cuerpos, terminan dando como producto final un choque o colisión, amén de un movimiento caótico.





A la izquierda, el segundo punto de equilibrio o de libración de Lagrange (L2), punto geoestacionario de los que hay cinco. Éstos resultan de la solución que el propio Lagrange dio a su versión del problema de los tres cuerpos. En las proximidades de Júpiter (derecha) los grupos de asteroides denominados griegos y troyanos también ocupan puntos de Lagrange en relación con el Sol y el gran planeta.

La conjetura de Legendre

La fascinación que sobre nosotros han ejercido los números primos no ha disminuido con el paso del tiempo; de hecho, lo que se ha ampliado ha sido el abanico de nuestra curiosidad. La conjetura que hizo en su día Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

sigue sin probarse y eso que ya han transcurrido dos siglos desde que el autor la publicara en la edición de 1808 de su *Théorie des nombres*.

Retrato de Adrien-Marie Legendre, autor de la conjetura que lleva su nombre, realizado en 1820 por Julien-Leopold Boilla dentro de su serie de acuarelas dedicada a matemáticos famosos.

Más tarde el matemático y físico ruso Lev Landau (1908-1968) la elevó a los altares al incluirla en su muy restringida lista de problemas no resueltos junto a la conjeturad Goldbach, la de los primos gemelos y la de los primos cuasicuadrados (la cual se interroga sobre la posible infinitud de los primos de la forma $x^2 + y^4$).

El enunciado de Legendre hace referencia a la abundancia y distribución de los números primos y dice «entre dos cuadrados perfectos consecutivos, n^2 y $(n+1)^2$, existe siempre al menos un número primo». De hecho, parece haber siempre más de uno.

Chen Jing-Run ya demostró en 1975 que en ese intervalo siempre existe un número primo o un semiprimo (un producto de dos primos, quizás iguales), pero esta afirmación no implica la de Legendre ya que anda por en medio una molesta conjunción copulativa «o». Joseph Bertrand (1822-1900) conjeturó a su vez (pero no lo probó; lo hizo Chebyshev con posterioridad) que hay un primo por lo menos en el intervalo entre un número n y su doble $2n$. Pero este excelente indicador no establece tampoco (aunque lo parece a primera vista) la conjetura de Legendre. En 1984 se demostró la existencia de un primo entre $n - n^{\frac{23}{42}}$ y n, que mejora el resultado de Bertrand, pero tampoco implica la resolución de la conjetura de Legendre. En 2008 Shiva Kintali demostró, al parecer, la conjetura para números lo suficientemente grandes, pero no para todos.

De momento lo que se puede decir (pero sigue siendo una conjetura) es que el hueco entre números primos sucesivos p y $p+1$, será del orden de $\sqrt{p}$, pero eso sólo si la conjetura es cierta y la de Legendre, también; de hecho, incluso se han

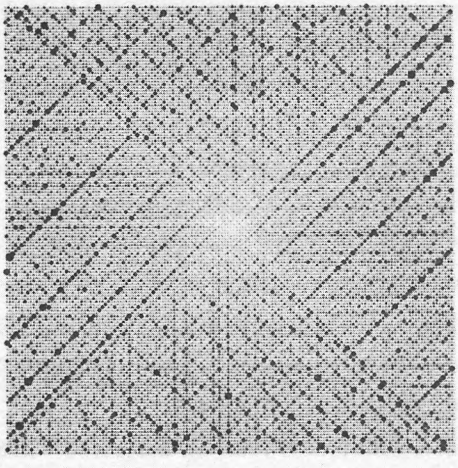
emitido conjeturas que mejoran este resultado. Pero todo son conjeturas, un bosque de conjeturas a la sombra de la primera, que lo sigue siendo aunque cada día menos.

LA CONJETURA DE LEGENDRE Y LA ESPIRAL DE ULAM

Lo que sí es cierto es que si la conjetura de Legendre es cierta, la espiral de Ulam, así denominada en honor de su descubridor, Stanislaw Ulam (1909-1984), presentará un número primo en cada vuelta. ¿Y qué significa eso?

```
37 — 36 — 35 — 34 — 33 — 32 — 31
 |                             |
38   17 — 16 — 15 — 14 — 13   30
 |    |                   |    |
39   18    5 — 4 — 3    12   29
 |    |    |         |    |    |
40   19    6    1 — 2    11   28
 |    |    |              |    |
41   20    7 — 8 — 9 — 10   27
 |    |                        |
42   21 — 22 — 23 — 24 — 25 — 26
 |
43 — 44 — 45 — 46 — 47 — 48 — 49 ...
```

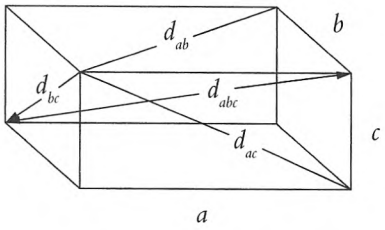
Ésa es una espiral de Ulam, que se construye fácilmente disponiendo los números naturales en espiral. Cuando se muestra una de tales espirales con la ampliación suficiente, aparecen misteriosas líneas de abundancia de los números primos, muchas sin explicación alguna. La conjetura de Legendre le añade pimienta al asunto.



Ampliación de una espiral de Ulam que permite ver la formación de líneas de abundancia.

Un ladrillo inencontrable

Un ladrillo de Euler, o una caja de Euler, que de ambas formas se le llama en castellano, es como se denomina a un tipo particular de paralelepípedo recto. Consideremos el siguiente paralelepípedo recto, también llamado cuboide en geometría.



Paralelepípedo recto.

Si tiene los lados a, b y c, y las diagonales de las caras son:

$$d_{ab} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$d_{bc} = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$d_{ac} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

y todos son representables por números enteros, recibe el nombre de ladrillo o caja de Euler. Cuando además la diagonal interior es entera (las cuatro diagonales interiores son iguales):

$$d_{abc} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

la figura se denomina cuboide perfecto. Nótese que da lo mismo moverse en el campo de los números racionales, y ello es consecuencia de algo tan simple como el teorema de Pitágoras. Si los denominadores de la fracción irreducible de los números d_{ab}, d_{bc}, d_{ac} y d_{abc}, fueran α_{ab}, α_{bc}, α_{ac} y α_{abc}, el ladrillo «racional» pasaría a ser entero si sus lados se multiplicaran por el m.c.m. (α_{ab}, α_{bc}, α_{ac}, α_{abc}).

Nunca se ha podido encontrar un cuboide perfecto, aunque sí ladrillos de Euler, y a medida que pasa el tiempo y avanzan las investigaciones, parece cada vez más claro que no debe existir ningún cuboide perfecto.

Las ecuaciones que sólo admiten soluciones enteras se llaman ecuaciones diofánticas. Por lo tanto, hallar no ya un ladrillo de Euler sino un cuboide perfecto consiste —nada menos— que en hallar la solución al sistema de ecuaciones diofánticas:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$x^2 + v^2 = w^2$$
$$y^2 + v^2 = t^2$$
$$y^2 + w^2 = s^2$$

Una parametrización de las condiciones anteriores (pero que no proporciona todas las soluciones) es

$$(a,b,c) = (|u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw|)$$

con

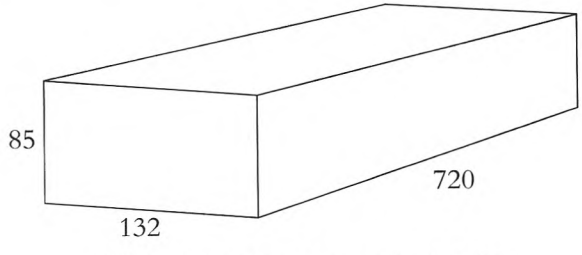
$$a^2 + b^2 + c^2 = f(t,s)(s^2 + t^2)^2$$
$$u = 2dt$$
$$v = v^2 - t^2$$
$$w = s^2 + t^2$$
$$f(t,s) = s^8 + 68s^6t^2 - 122s^4t^4 + 68s^2t^2 + t^8$$

pero ninguna de esas soluciones proporciona aristas para cuboides perfectos, ni puede proporcionarlas, como se demostró en 1972.

Los ladrillos de Euler existen, y las siguientes son algunas medidas de sus aristas.

44-117-240
85-132-720
88-234-480
132-351-720
140-480-693
160-231-792
176-468-960
240-252-275
480-504-550
720-756-825

Las medidas mencionadas en primer lugar, que son las menores de todas, fueron halladas ya en 1731 por Paul Halcke, de profesión contable.



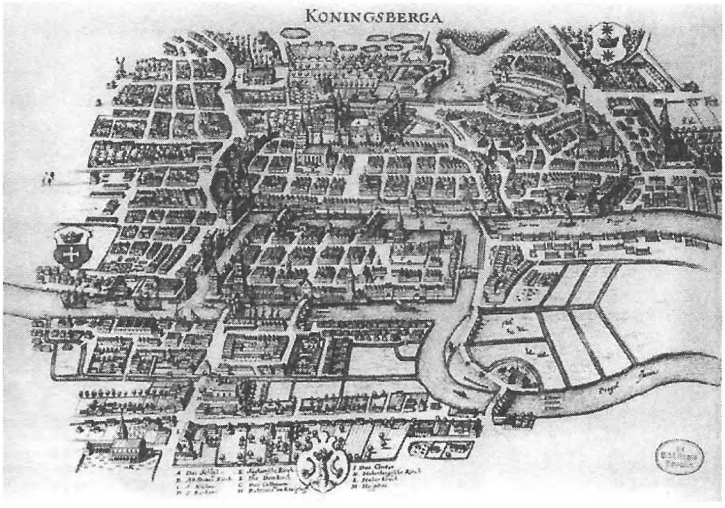
Medidas de las aristas de un ladrillo de Euler.

Lo que sí se comprobó en 2009 es que existían los paralelepípedos perfectos, que desgraciadamente no eran cuboides, pues sus caras, aunque paralelas, no eran perpendiculares dos a dos. Esta conjetura, algo más débil, fue fruto de la fértil imaginación del especialista Richard Guy (n. 1916), un visionario que ya descubrió el asombroso cuerpo uniestable de sólo 19 caras, el *gömböc*.

En la primera búsqueda con el auxilio de computadoras se encontraron 27 paralelepípedos perfectos. Computadoras mediante, se han intentado explorar, sin éxito, los ladrillos de Euler del orden 10^9 de arista. Nada que mostrar. Por fortuna, las paredes no se construyen con ladrillos de Euler.

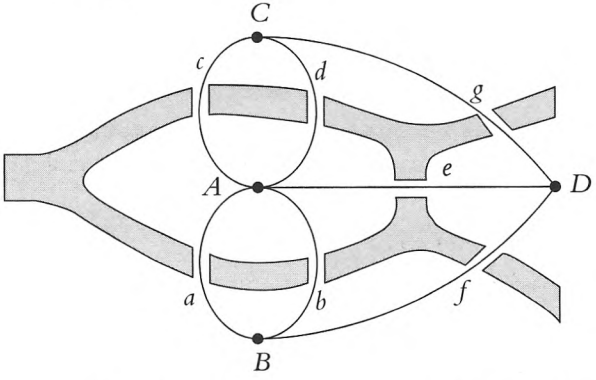
Los puentes de Königsberg

Los puentes de Königsberg le sirvieron a Euler para crear un nueva ciencia. En tiempos del matemático, la localidad pertenecía a Prusia; hoy se llama Kaliningrado y es una ciudad rusa, situada en un enclave báltico entre Polonia y Lituania, a poca distancia de Gdansk (la antigua Dantzig). Está cruzada por el río Pregel y, en la época de Euler, más en concreto en la década de 1730, eran siete los puentes por los que era posible cruzar el río. Ahora, por desgracia, no es posible reproducir aquel escenario debido a que el urbanismo de la ciudad ha cambiado y algunos puentes han desaparecido. Lo que Euler tenía presente era una ciudad con la estructura que refleja el siguiente grabado.



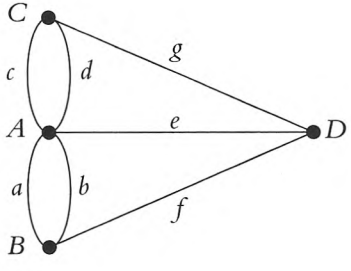
Plano de la ciudad de Königsberg realizado a mediados del siglo XVII.

En el siguiente gráfico se pueden observar los elementos relevantes en el problema planteado por Euler: las dos islas fluviales (denominadas *A* y *D*), los citados siete puentes sobre el río (indicados con letras minúsculas), y las dos zonas de tierra firme (denominadas *B* y *C*).



El problema que se les planteaba a los paseantes de la ciudad era propio de lo que hoy denominaríamos juegos de ingenio: ¿cómo podían organizar un paseo de modo que atravesaran cada puente una sola vez y pasaran por todos, cruzándolos por completo? Tras estudiar la cuestión, en 1735 Euler dio a conocer una solución: no existía tal camino y los paseantes estaban condenados a errar eternamente entre los puentes si querían comprobarlo sobre el terreno.

La demostración de Euler puede encontrarse hoy en muchas fuentes e incluso se puede leer el original en latín en *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes (Solución a un problema concerniente a la geometría de posición)*, aunque eso no es lo relevante. Euler se apercibió de que lo importante del problema eran los puentes y los caminos que determinaban. Más en concreto, Euler se limitó a considerar el problema en términos de nodos (zonas del recorrido, que representó por puntos) y ejes (que aquí serían los puentes y que en el dibujo son vías para seguir entre los nodos), desnudando la cuestión de las distancias y las formas de los itinerarios, y basándose sólo en ideas esquemáticas.



Euler razonó con un esquema de cuatro nodos y siete ejes entre ellos; obsérvese que los caminos son ahora puntos o vértices y «cruzar un puente» es una línea. Sin decirlo explícitamente, decidió pensar en términos de topología, esa rama de la matemática moderna en la que se prescinde de distancias y formas y se fija uno sólo en lo que realmente importa. Hoy diríamos que Euler inventó la teoría de grafos, una aplicación de la topología combinatoria y a su vez una rama de la topología.

La solución encontrada es ingeniosa y se basa en reflexionar sobre lo siguiente:

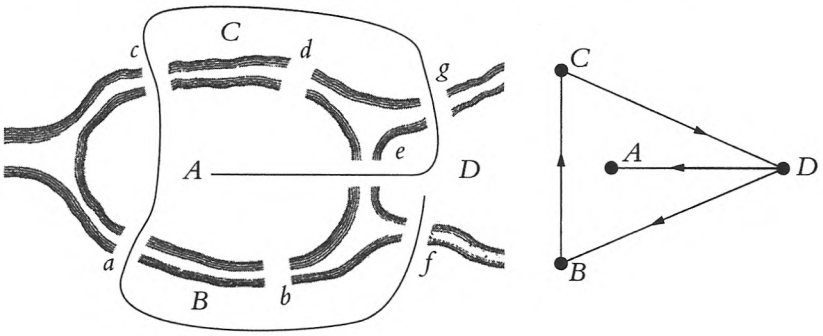
- Si un eje entra en un nodo que no sea terminal, otro eje debe abandonar el nodo.
- Los ejes han de ser pares en cada nodo.
- Todos los nodos del esquema tienen un número de ejes impar.

No obstante, no seguiremos aquí a Euler en su laborioso camino intelectual, ya que ello es bastante largo y requiere tiempo y atención. Quien lo desee puede recurrir a algún libro especializado o a alguna web y pasar unos minutos divertidos o, en caso extremo, horas divertidas; lo importante es saber que la demostración es elemental, ¡pero no del todo sencilla!

Lo que Euler expuso en sus reflexiones equivale, en definitiva, a enunciar:

Los puentes se pueden atravesar exactamente una vez si, exceptuando a lo sumo dos casos, todos los nodos son de grado par.

Al inicio de este apartado ya se ha dicho que la actual Kaliningrado no es como la antigua Königsberg; dos de los puentes desaparecieron por efecto de los bombardeos en la Segunda Guerra Mundial, un tercero se ha remodelado: de dos puentes cortos se ha hecho uno largo, tal y como muestran los gráficos siguientes.



Ahora el esquema que se podría seguir sería otro, pero si se empezara al camino en D se terminaría forzosamente en A y viceversa. Perversiones del destino, el paseo no sería propiamente tal, pues empezaría en una isla y terminaría en otra. Para culminarlo apropiadamente habría que volver a cruzar los puentes para regresar al punto de partida en tierra firme. Parece que hasta las bombas se conjuraron con la teoría de grafos para fastidiar a los paseantes.

Un genio de 19 años

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue una figura conocida en su tiempo y ya entre sus contemporáneos le llamaban *princeps mathematicorum*, el príncipe de los matemáticos. Fue un niño prodigio y, de mayor, conservó una capacidad de cálculo y una memoria fenomenales, por no hablar de su privilegiada inteligencia. Todo ello le ha hecho objeto de numerosas anécdotas, muchas de ellas si no ficticias, sí exageradas; pero lo que no puede exagerarse, porque es un hecho histórico comprobado, es que resolvió un problema clásico, el de la construcción de los polígonos regulares, cuando aún era un joven de 19 años que no se había decidido entre el cultivo de las lenguas o el de las matemáticas. Se dice que escogió las matemáticas debido precisamente a este hecho.

Los antiguos griegos ya conocían la construcción —a la griega, con sólo regla y compás— de varios polígonos regulares, entre ellos, los de 3, 4, 5, 6, 8, 10 y 15 lados. Euclides enseñó algunas construcciones en sus *Elementos* y las construcciones que se derivan de las conocidas multiplicando el número de lados por 2^n (basta con bisecar repetidamente los ángulos centrales) son triviales. En el curso de la edad moderna y dada su belleza y su utilidad en la perspectiva, muchos volvieron a resucitar los polígonos regulares (y al pentágono en particular, por su utilidad en balística, como base para diseñar fortalezas).

No es que fuera conceptualmente difícil el calcular el lado l_n de un polígono regular de n lados, pues la identidad

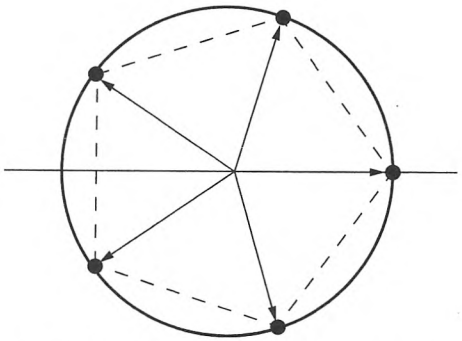
$$\frac{l_n}{2} = r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\frac{n}{2}} \text{ (que equivale a } l_n = 2r \operatorname{sen} \frac{\pi}{n})$$

no es complicada y permite trabajar con funciones trigonométricas como el seno (desconocidas por los griegos). Ahora bien, algo conceptualmente fácil de entender puede ser muy difícil de abordar matemáticamente. La construcción de polígonos regulares volvía a ser interesante para los matemáticos y allí estaba Gauss para recoger

el desafío. Por ejemplo, ¿cómo era posible que un razonador tan eficaz como Euclides no hubiera podido enfrentarse a un simple heptágono?

Gauss identificó la construcción de un polígono regular de n lados con la construcción en el campo complejo de las soluciones de la ecuación polinomio ciclotómico $x^n - 1$.

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$



Construir un polígono regular de n *lados equivale a construir todas las raíces complejas del polinomio ciclotómico* $x^n - 1$. *En el dibujo, el caso* $n = 5$, *que proporciona el pentágono regular. Obsérvese que* $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$.

Para comprender bien la solución de Gauss, es preciso definir primero los números de Fermat. Un número F_p se llama de Fermat cuando es de la forma

$$F_p = 2^{2^p} + 1.$$

Los números de Fermat pueden ser primos o compuestos. Si se hace una lista como la siguiente:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$
$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$
$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65.537$$
$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$$

vemos que los primeros son primos, pero el último ya no lo es, como se apercibió Euler. La verdad es que factorizar F_5, con lápiz y papel, tiene mérito. El siguiente caso, $F_6 = 274.177 \cdot 67.280.421.310.721$, fue factorizado en 1880 por el parisino

Fortuné Landry, que dedicó gran parte de su vida a tal empresa. La probabilidad de factorizar ese numero es inferior a la de jugar a la lotería toda la vida esperando ser agraciado con el primer premio, pero cuesta bastante más esfuerzo intelectual.

Se ignora si hay más primos de Fermat después de éste, pues no se ha encontrado ninguno. Los especialistas mantienen pocas esperanzas de hallarlos, y caso de que existan, piensan que serán un número finito.

Gauss demostró el siguiente teorema: un polígono regular de n lados puede construirse con regla y compás si y sólo si n es producto de 2^k por 1 o por un conjunto cualquiera de números primos de Fermat. En lenguaje más simbólico, si y sólo si es de la forma

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m \quad \text{con} \quad k \geq 0,$$

y siendo los p_i o bien 1 o bien números primos de Fermat distintos.

El teorema convierte en construibles los polígonos regulares de n lados con $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 24\ldots$

En particular, el polígono de 17 lados tiene por detonante la expresión siguiente, ya hallada por Gauss:

$$16\cos\frac{2\pi}{17} = -1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.$$

Esta construcción le costó bastante trabajo a su contemporáneo Johannes Erchinger. Los siguientes números de Fermat dan lugar a auténticos polígonos monstruosos de 257 y 65.537 lados.

El retrato «oficial» de Gauss. Su figura y sus investigaciones cubren una época entera de las matemáticas, de la astronomía y de la física, pues se le tiene por coinventor del telégrafo. Su monumento funerario, en Gotinga, tiene por base un polígono de 17 lados, como el de su primer descubrimiento geométrico.

LOS POLÍGONOS DE 257 Y 65.537 LADOS

En 1832 Friedrich Julius Richelot (1808-1875) dio al mundo la primera guía con instrucciones para construir con regla y compás el polígono de 257 lados. Su artículo tiene un título casi tan largo como lados el polígono: *De resolutione algebraica aequationis* $x^{257} = 1$, *sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata.*

Por su parte, Johann Gustav Hermes (1846-1912) dedicó diez años a diseñar la construcción con regla y compás, paso a paso, del polígono regular de 65.537 lados, tarea hercúlea que culminó en 1894. Al final, su manuscrito, que ocupaba más de 200 páginas, lo pudo depositar —pero no publicar— en la Universidad de Gotinga, donde puede consultarse si se tiene interés en ello, aunque también se encuentra numerosa información en Internet. Lo cierto es que algunos, como John Conway, no terminan de creerse la demostración, señal inequívoca de que han empezado a leerla. El polígono cuya construcción persiguió Hermes tiene tantos lados que a simple vista parece un círculo. El coseno $\cos\frac{\pi}{65.537}$ es un número algebraico, pero requiere una ecuación de grado 32.768 para encontrar un polinomio que lo tenga por raíz.

En busca de la ecuación perdida

Encontrar soluciones a la ecuación de segundo grado es un objetivo que se pierde en la noche de los tiempos. Egipcios, babilonios y griegos ya las conocían y hay testimonios explícitos en personalidades como Diofanto (ca. 200/234-ca. 284/298). Ha llegado a nuestros días, y a nuestros libros de texto elementales, la fórmula que da las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que, en algunos casos, son números complejos conjugados, cierto, pero eso es otra historia. Al igual que es otra historia el llamado teorema fundamental del álgebra, que afirma que todo polinomio a coeficientes complejos de grado n tiene n soluciones complejas (una afirmación demostrada por Jean-Robert Argand en 1806).

Tras el Renacimiento se reanudó la caza de la ecuación. La historia, enredada como un mal argumento policíaco, puede empezarse a contar con Scipione del Ferro (1465-1526), un matemático que desentrañó los misterios de un tipo especial

de ecuación de tercer grado, la de la forma $x^3 + bx = c$. Una de las tres soluciones se obtiene utilizando la fórmula siguiente:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}},$$

lo que ya da una idea de que el tema no es fácil.

Del Ferro murió llevándose a la tumba —luego veremos que no por entero— el secreto de la resolución de la ecuación. Mientras tanto había nacido en Brescia Niccolò Fontana (1500-1557), al que sus paisanos y la historia llamarían Tartaglia, debido a su tartamudez. Tartaglia era un excelente matemático, aunque pobre y siempre en busca de un puesto académico o una posición que le permitiera subsistir con más holgura. En aquel tiempo estaban a la orden del día los desafíos matemáticos, pues otorgaban la superioridad intelectual a los vencedores y con ella los mejores empleos, académicos, administrativos o de otros tipos. El caso es que Antonio Maria Fior, la mano derecha de Del Ferro y poseedor de la secreta fórmula de la ecuación de tercer grado, desafió a Tartaglia, convencido de que la fórmula le daría el triunfo. Pero no contaba con el ingenio de Tartaglia, que unos días antes del desafío de Fior reelaboró el método de Del Ferro e incluso lo mejoró con sus aportación personal. Tartaglia derrotó sin piedad a Fior y quedó en posesión de un procedimiento propio para resolver ecuaciones de grado tres. No iba a gozar a solas de ese privilegio.

La némesis de Tartaglia se llamaba Girolamo Cardano (1501-1576), un hijo ilegítimo de un abogado que desarrolló múltiples actividades: fue médico, jugador (ajedrez, naipes, dados), criptógrafo y astrólogo, y siempre buscando, como Tartaglia, su medro personal. Cardano ansiaba conocer el método de Tartaglia y recurrió a todos los procedimientos posibles sin excluir la adulación: tras muchos intentos, con una maniobra, mezcla de intriga y expectativas de promoción, consiguió la ansiada fórmula, pero con la promesa de no revelarla a nadie. Parece que Cardano cumplió a regañadientes su palabra y durante un tiempo no ocurrió nada, si se exceptúa la contratación como ayudante de Cardano de un joven inteligentísimo, Lodovico Ferrari (1522-1565), con el que Cardano mantuvo inacabables discusiones sobre los procedimientos de Tartaglia.

Un buen día Cardano visitó al yerno de Del Ferro, y tuvo en sus manos el manuscrito con la solución hallada por el matemático fallecido. Amparándose en ello, Cardano creyó justificado romper su palabra. Al fin y al cabo, Tartaglia no había sido

el único depositario de un secreto que también había poseído Del Ferro (aunque parcialmente, recordémoslo).

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Retrato de Tartaglia y portada de Ars Magna, *la obra en la que Cardano publicó las investigaciones sobre las ecuaciones de tercer y cuarto grado.*

A todas estas el listísimo Ferrari había descubierto un camino para transformar una cuártica —una ecuación de cuarto grado— en una de tercero, por lo que Cardano se encontró poseedor de poco menos que la fama inmortal: ¡sabía resolver las ecuaciones de grados 3 y 4! Publicó sus descubrimientos en un libro, *Ars Magna* (1545), y se hizo, en efecto, famoso.

Tartaglia montó en cólera. A él le pareció simplemente que Cardano había incumplido su promesa, y le persiguió con saña, llegando a desafiarle, pero no en una contienda matemática sino con la espada en la mano. Tanto insistió que Ferrari le retó en un desafío, esta vez matemático. Tartaglia se vio impelido a aceptar y Ferrari, joven, preparado y ambicioso, triunfó en toda la línea. Luego moriría envenenado por su hermana, por lo que hay que deducir que no era tan listo como aparentaba.

Tras la cuártica no hubo manera de atacar la quíntica. Lagrange encontró un procedimiento maravilloso para resolver muchas ecuaciones. Consistía en asociar a la resolución otra nueva ecuación auxiliar, llamada resolvente, que disminuía el grado de la ecuación que se debía resolver; averiguadas las soluciones de la resolvente, se podían reconstruir para averiguar las de la ecuación primitiva. Era un método muy inteligente, pero aplicado a la quíntica no funcionaba: la resolvente era de grado superior a 5. Algo iba mal, y el hecho de que fuera mal durante tantos años le hizo sospechar a Lagrange algo chocante: ¿no sería que para el grado 5 no hay solución?

Hay ecuaciones de grado 5 perfectamente solucionables, pero de lo que se trataba no era de resolver casos aislados más o menos afortunados, sino de encontrar una fórmula que valiera para todos.

El joven y malogrado matemático noruego Niels Abel (1802-1829) fue quien tuvo el honor en 1824 de solucionar el problema de la ecuación de quinto grado. Antes que él ya estuvo cerca Paolo Ruffini (1765-1822), aunque su presunta prueba presentaba algún agujero. Abel demostró que no hay una fórmula mágica algebraica (sumas, productos, potencias y sus inversos, restas, divisiones y radicaciones) que pueda resolver todas las ecuaciones de grado superior al quinto.

La demostración de Abel es impecable, no es elemental ni reproducible, y si se le puede hacer algún reproche —¡vaya reproche!— es que se limita a resolver el problema. Curiosa situación, porque en este caso es casi tan importante resolver el problema como averiguar por qué el problema es un problema. Digamos también que la demostración de Abel pasó desapercibida en su momento y hubo que esperar cierto tiempo a que se impusiera.

El retrato de Niels Abel ha protagonizado diversos sellos y billetes de banco. Desde el año 2002 también da nombre al premio instituido por la academia noruega para llenar el hueco dejado por la ausencia de un Nobel de matemáticas.

A esta última cuestión le da cumplida respuesta hoy la denominada teoría de Galois, que no explicaremos con detalle aquí porque sería muy largo y nada elemental. Pero sí que podemos intentar explicarla un poco, aunque resulte un tanto vago y nebuloso. Veamos. A cada ecuación se le puede asociar un conjunto de permutaciones entre sus raíces que caracterizan a la ecuación. Tal conjunto de permutaciones forma un grupo, una estructura algebraica moderna relativamente sencilla y muy estudiada. El grupo de cada ecuación se denomina grupo de Galois.

Una propiedad algebraica de los grupos es su solubilidad. Galois probó que una ecuación era resoluble con una fórmula general que usara radicales si y sólo si su grupo de Galois era soluble. Y da la casualidad de que para las ecuaciones de grado igual o superior al quinto sus grupos de Galois pueden no ser solubles. Luego hay ecuaciones irresolubles. Y esta vez sí que sabemos por qué un problema no se puede resolver.

Évariste Galois (1811-1832) fue un revolucionario y un matemático francés que murió a los 21 años en un duelo y que invirtió las horas anteriores a su muerte en anotar sus descubrimientos matemáticos para que los leyesen Gauss o Jacobi (1804-1851). Perdido todo lo escrito por Galois durante años, sus papeles fueron finalmente exhumados por Joseph Liouville (1809-1882) y publicados en 1846 en el *Journal des mathématiques pures et appliquées*. Liouville quedó poco menos que asombrado por lo que había escrito Galois. No era para menos, pues la llamada teoría de Galois es una de las grandes creaciones de la mente humana.

El teorema de los números primos

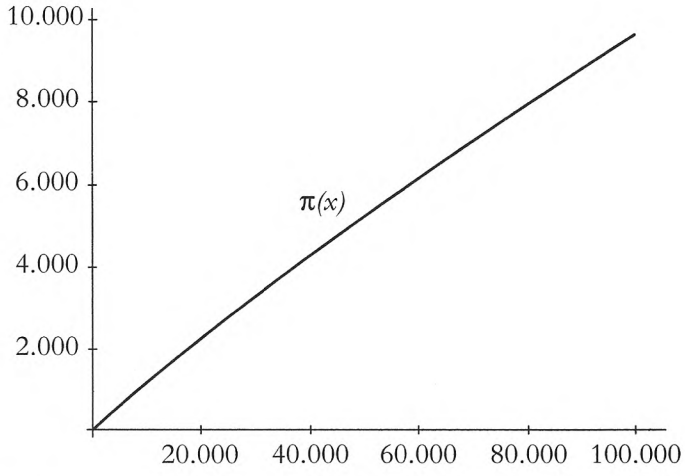
¿Cuántos números positivos no nulos múltiplos de 10 hay menores que un determinado número n? ¿Cómo están distribuidos? La respuesta es fácil, dado que se conoce perfectamente la ley de formación de dichos múltiplos. Están distribuidos como postes indicadores a lo largo de la sucesión numérica, separados por huecos de extensión uniforme, 10. Dado un n basta con retroceder hasta encontrar el múltiplo de 10 más cercano —restarle la última cifra— y eliminar el cero; el número resultante es, de modo evidente, el número de múltiplos de 10 inferiores a n que estábamos buscando. Pero si en vez de múltiplos de 10 eligiéramos, por ejemplo, la categoría de los números factoriales,

$$k! = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

la cosa ya no parece tan fácil.

¿Qué se puede decir si ahora pensamos en términos de números primos? Son números definibles, pero no se conoce en principio cuando un n es primo o no; es muy difícil hallar el primo p más cercano a n, y entre un primo p y el siguiente primo no se sabe qué hueco puede haber. Se encuentran primos enormes separados por sólo dos lugares (los primos gemelos), como la descomunal pareja $65516468355 \cdot 2^{333333} \pm 1$, junto a periodos numéricos muy grandes sin ningún primo: por ejemplo, tras $(n + 1)! + 2$ hasta $(n + 1)! + n + 1$ hay n números no primos, todos ellos compuestos. Eligiendo un n muy grande, se obtienen secuencias numéricas tan largas como se quiera, que

forman huecos sin primos. ¿Les parece mentira? Tomen, por ejemplo, $n = 24$ y si lo calculan (con dificultades) verán que es cierto. Pero eso no quiere decir que no sepamos cómo abordar esa cuestión, la distribución de los primos. Lo único que pasa es que no es un problema fácil. Empecemos por dar nombre a las cosas: llamaremos $\pi(x)$ al número de primos menores o iguales que x. Su gráfica cuando x es grande no tiene mal aspecto, como puede verse a continuación.



La tabla de valores, hasta donde se conoce hoy, sería la siguiente:

x	$\pi(x)$
10	4
100	25
1.000	168
10.000	1.229
100.000	9.592
1.000.000	78.498
10.000.000	664.579
100.000.000	5.761.455
1.000.000.000	50.847.534
10.000.000.000	455.052.511
100.000.000.000	4.118.054.813
1.000.000.000.000	37.607.912.018
10.000.000.000.000	346.065.536.839
100.000.000.000.000	3.204.941.750.802
1.000.000.000.000.000	29.844.570.422.669
10.000.000.000.000.000	279.238.341.033.925
100.000.000.000.000.000	2.623.557.157.654.233
1.000.000.000.000.000.000	24.739.954.287.740.860
10.000.000.000.000.000.000	234.057.667.276.344.607
100.000.000.000.000.000.000	2.220.819.602.560.918.840
1.000.000.000.000.000.000.000	21.127.269.486.018.731.928
10.000.000.000.000.000.000.000	201.467.286.689.315.906.290
100.000.000.000.000.000.000.000	1.925.320.391.606.803.968.923

El teorema de los números primos, que aclara la distribución de tales números, afirma que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

siendo *log x* el logaritmo neperiano de x. El símbolo ~ se lee «asintóticamente igual» y significa que el límite del cociente de las dos variables cuando $x \to \infty$ es 1 pero ¡cuidado! eso no quiere decir que la diferencia de las variables tienda a cero:

$$\pi(x) - \frac{x}{\log x} \to 0,$$

pues ambos términos pueden diferir, por ejemplo, en una constante. Basta con pensar en las variables n y $n + 1.000$. Es cierto que son asintóticamente iguales, pero su diferencia no tiende a cero; de hecho, es constante e igual a 1.000:

$$\frac{n}{n+1000} \to 1, \text{ pero } (n+1000) - n \to 1000.$$

Es elemental apercibirse de que, de hecho, la expresión $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, equivale a escribir en su lugar $\pi(x) \sim \frac{x}{\log (x-k)}$, donde k es una constante.

Decimos eso porque quien primero conjeturó el teorema de los números primos fue Legendre, y usó $k = 1{,}08366$ porque eso se deducía de las tablas que manejaba. Hoy sabemos que la mejor aproximación se consigue con $k = 1$, porque simplemente dispusimos en su día de mejores tablas.

Los siguientes datos muestran una muy satisfactoria aproximación.

x	$\pi(x)$	$x/\log x$	$x/\log (x-1)$
1.000	168	145	169
10.000	1.229	1.086	1.218
100.000	9.592	8.686	9.512
1.000.000	78.498	72.382	78.030
10.000.000	664.579	620.420	661.459
100.000.000	5.761.455	5.428.681	5.740.304

Cuando Gauss tomó el problema en sus manos le cambió el enunciado por otro, que en el fondo es también equivalente al primero, pero proporciona estimaciones más refinadas:

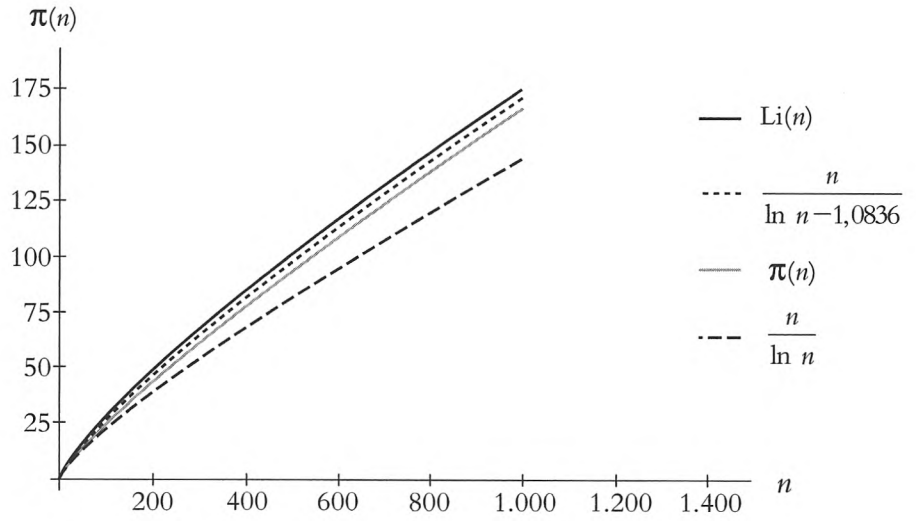
$$\pi(x) \approx Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

La nueva función aquí introducida es *Li(x)*, llamada integral logarítmica. Gauss, que con frecuencia ponía sus descubrimientos en un cajón y no los publicaba, mencionó éste en 1843 en una carta a su colega y amigo astrónomo Johann Encke (1791-1865), pero no lo dio a conocer. La idea de Gauss, con su integral logarítmica, es genial, espléndida, pero esconde un pequeño detalle: no la demostró matemáticamente. La intuyó y la escribió, pero no consta que la probara. La prueba del teorema no se llevó a cabo hasta 1896 cuando un matemático belga, Charles Jean de la Vallée Poussin (1866-1962) y otro francés, Jacques Hadamard (1865-1963), lo demostraron el mismo año y de manera totalmente independiente. Ambos utilizaron los recursos más avanzados del análisis complejo y de la función zeta de Riemann.

Charles de la Vallée Poussin (a la izquierda) y Jacques Hadamard demostraron en 1896 el teorema de los números primos.

Como ya se mostró en fecha tan lejana como 1901, el error de la aproximación de la fórmula de Gauss es del orden de $\sqrt{x}\log x$, caso en el que se verifique la célebre hipótesis de Riemann. Pero aunque ha transcurrido más de un siglo, la ansiada hipótesis es todavía indemostrable para desesperación de matemáticos... y de periodistas, que desearían poder dar la noticia.

Las curvas siguientes dan una idea gráfica de lo cerca que están unas de otras las diversas aproximaciones a la distribución de los números primos.



Para terminar, una curiosidad puramente para no especialistas; en el gráfico, la curva de Li(n) está siempre por encima de $\pi(n)$. El primer valor de n para el que esto dejaba de verificarse (suponiendo verdadera la hipótesis de Riemann) fue denominado número de Skewes y vale

$$e^{e^{e^{79}}}$$

el cual durante mucho tiempo ha ostentado el título de número mayor figurante en fórmula matemática alguna. Fue calculado en 1933 y es mucho más grande que el número de átomos del universo conocido.

Y no se termina ahí la parada

Podríamos seguir página tras página, pues la lista de problemas parece interminable, de modo que sólo citaremos alguno más, como por ejemplo el primer problema de Waring, propuesto por Edward Waring (1734-1798) y resuelto por David Hilbert en 1909. El problema surge cuando alguien se apercibe de que todo número puede descomponerse a lo más en cuatro cubos; y a lo más en nueve potencias cuárticas; y (ya es más difícil) a lo más en 19 potencias quintas. Y llegados aquí, ¿puede descomponerse todo número a lo más en un número fijo de potencias de orden n? Ésa es la conjetura que formuló Waring y resolvió Hilbert.

También podría citarse el problema del número 0,57721566490... que parece un número cualquiera, sin más significado. Surge cuando al término n de la serie

EL SEGUNDO PROBLEMA DE WARING

El denominado segundo problema de Waring se preguntaba si todo entero impar o era primo o era la suma de tres primos. Fue Iván Vinogradov (1891-1983) quien probó en 1937 que todo número impar, primo o no, lo bastante grande, era la suma de tres primos. ¿Y dónde está problema? Pues en el significado de las palabras «lo bastante grande», ya que un cálculo optimista sitúa este límite en una cifra inconcebible, inalcanzable incluso armados de una supercomputadora. Un resultado, el de Vinogradov, que supone un progreso espléndido, pero que no resuelve del todo la conjetura, aunque «casi» la resuelve.

armónica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ se le resta el logaritmo natural neperiano de n y se obtiene un número cada vez menor:

$$1-\log 1=1-0=1$$

$$1+\frac{1}{2}-\log 2=1{,}5-0{,}6931471\ldots=0{,}8068528\ldots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\log 3=1{,}8333333\ldots-1{,}0986123\ldots=0{,}734721\ldots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\log 4=2{,}083333\ldots-1{,}3862944\ldots=0{,}6970389\ldots$$

Esta diferencia se estabiliza y, en el límite, da una cantidad constante llamada comúnmente γ

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right]=0{,}57721566\ldots$$

Se llama constante de Euler-Mascheroni en honor del ya conocido Euler y del también ilustre geómetra Lorenzo Mascheroni (1750-1800). Euler fue quien dio a conocer γ en 1734 y Mascheroni, quien procedió a calcularla, llegando correctamente a los primeros 19 decimales. Por si le sirve de algo a alguien, ahí van los primeros 150:

0,57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576
72348848677267776646709369470632917467495146314472498070824 8
09605040144865428362241739976449235 3…

En 2007 las computadoras sobrepasaron ya la cifra 2.000.000.000.

La constante γ es importante, pues aparece en multitud de lugares inesperados: en estadística, física cuántica, análisis matemático y teoría de números. También aparece en el estudio de la misteriosa función ζ de Riemann.

De γ no sabemos casi nada y con eso queremos decir que ignoramos si es un número algebraico o trascendente; ni siquiera sabemos si γ es racional o irracional. Conway y Guy han apostado por la trascendencia de γ. Lo que sí se sabe es que, caso de ser un número racional, su parte periódica debe ser enorme, no inferior a 242.080 dígitos.

Y terminemos con una igualdad inquietante y sorprendente:

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n},$$

¿qué pinta aquí la función zeta? ¿qué misterio se oculta aquí?

Capítulo 3

La matemática se hace mayor

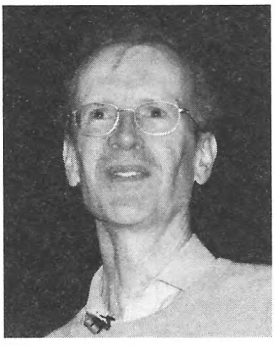
¿Por qué las cosas son como son y no de otra manera?
Johannes Kepler

Tras su consolidación con Euler, la matemática entraba en el terreno respetable de las ciencias «difíciles» por definición. Aún era posible —pero cada vez menos— que una sola mente las abarcara en su totalidad y los problemas que suscitaba su avance eran cada vez menos comprensibles para el lego. Quedaban como perlas raras del pasado cuestiones como la conjetura de Fermat, y era poco habitual que los nuevos problemas que iban surgiendo, como la conjetura de los cuatro colores, los pudiera comprender cualquiera. La lógica quizás exigiría que cada cuestión se tratara en el momento histórico en el que se produjo. Sin embargo, hay temas como la mencionada conjetura de Fermat, que data del siglo XVII pero sólo se demostró a finales del siglo XX, en lo que llamaríamos nuestro tiempo; por eso la incluimos aquí.

Otras conjeturas o problemas, como los originados por la irrupción de la estadística, son matemáticamente muy interesantes, pero son tan complejos que explicar sus prolegómenos llevaría a unas páginas inevitables que no tienen cabida lógica en un sencillo libro de divulgación. Por ejemplo, un problema muy citado se enuncia así: ¿cuál es la probabilidad de que mañana salga el Sol? Pero aparte del hecho de que este problema y otros parecidos aún no están resueltos, su inclusión nos haría más sabios, pero difícilmente nos ilustraría sobre el avance de las matemáticas. Forma parte de otra galaxia de intereses compartidos con otras ciencias.

La conjetura más famosa

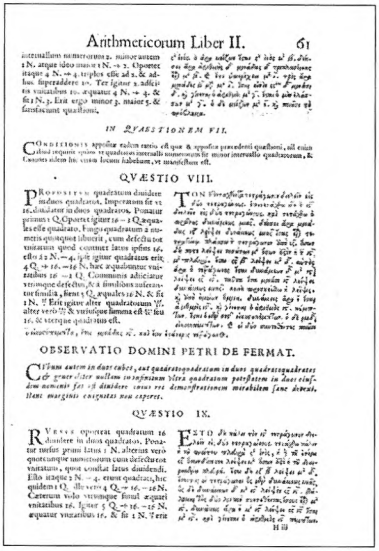
En 1993 un acontecimiento matemático ocupó, por primera vez en la historia, un espacio en la primera página de los periódicos. Andrew Wiles (n. 1953 y luego ennoblecido como sir Andrew) anunció haber solucionado la conjetura de Fermat, y haberla convertido, por fin, en teorema: no existen tres números enteros, x, y, z, que verifiquen la ecuación $x^n + y^n = z^n$ para $n > 2$. Como ésta era la última afirmación



Pierre de Fermat (a la izquierda) estableció en 1637 un teorema que sólo sería demostrado en la década de 1990 por el matemático británico Andrew Wiles (copyright de la fotografía: C.J. Mozzochi, Princeton, N.J.).

de Fermat aún pendiente de una prueba, este enunciado se le conoce en muchas partes como «el último teorema de Fermat». Se ponía fin así a una caza de 356 años de antigüedad que empezó con una misteriosa afirmación de Fermat y terminó formalmente con una conferencia en un aula de Cambridge.

El enunciado de Pierre de Fermat (1601?-1665) —quien no acostumbraba a poner por escrito sus demostraciones— lo tenía todo para convertirse en el protagonista de un best seller. Por una parte, era un enunciado corto y fácil de entender: no se necesitaba nada más que el álgebra que se aprende en las escuelas para asumirlo; de hecho, una mente tan afilada como la de Hilbert lo había descartado, por parecerle una conjetura un tanto vulgar, en el sentido de que su resolución no representaría seguramente un avance matemático especial, cualitativo. Sin embargo, pasaban los años y nadie conseguía demostrar un enunciado que pertenece al terreno de la teoría de números, un campo cuyo cultivo suena a «matemático» por antonomasia. Se instituyeron premios, incluso en metálico, para quien resolviera la cuestión, que empezó a verse rodeada de todo tipo de anécdotas. Así, ya en el siglo XIX, el prohombre alemán Paul Wolfskehl (1856-1906) se apartó del suicidio gracias al desafío intelectual que le ofrecía la conjetura, y en contrapartida instituyó una bolsa de 100.000 marcos para quien la resolviera. Por último, y no menos importante, las palabras mismas de Fermat escritas por su mano en un libro de Bachet de Méziriac en 1637 («He encontrado una demostración maravillosa, pero el margen de este libro es demasiado pequeño para reproducirla») sugerían la existencia de una prueba fantasmal, a modo de tesoro oculto. Un teorema que adoptaba los hábitos formales de *La isla del tesoro* de Robert Stevenson o de *La carta robada* de Edgar Allan Poe. La conjetura de Fermat ha aparecido en multitud de lugares: en episodios de *Star Trek* o



Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVÆSTIONEM VII.

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVÆSTIO IX.

El hijo de Fermat publicó en 1670 la traducción de Bachet de Méziriac (1581-1638) de un texto original de Diofanto acompañada de los comentarios de su padre. De ahí nació el denominado «último teorema de Fermat».

de *Los Simpson*, en libros de ciencia-ficción de Arthur C. Clarke o Frederik Pohl, o incluso en best-sellers policíacos, como *La chica que soñaba con una cerilla y un bidón de gasolina* de Stieg Larsson. Y todo este universo pudo verse frustrado, ya que al poco de anunciarse la resolución de la conjetura de Fermat algunos nubarrones amenazadores se levantaron en el horizonte científico. Los expertos encontraron un agujero en la demostración de Wiles, agujero que no era trivial, sino sutil e importante. Wiles y su auxiliar Richard Taylor (n. 1962) emplearon casi dos años en superar el obstáculo, pero regresaron en 1995 para publicar una prueba nueva, esta vez satisfactoria. Y la historia no termina ahí. Mientras trabajaba en la nueva prueba, Wiles cumplió los cuarenta años, la edad límite establecida para poder recibir la medalla Fields (entonces todavía no existía el premio Abel, suponiendo que se lo hubieran concedido a Wiles) y el teorema pasó a serlo con Wiles fuera de juego para la adjudicación de la medalla-cumbre. En el congreso berlinés de 1998 los responsables de la International Mathematical Union ya no podían concederle la medalla Fields, pero crearon para él una distinción especial, una placa de plata.

También vale la pena resaltar que los sucesores de Fermat creen haber encontrado el punto donde Fermat se equivocó, ¡sin haber tenido nunca acceso a su presunta demostración! Parece que en un paso lógico, casi de obligado cumplimiento camino de una eventual prueba, se llega a una descomposición de un polinomio en producto

de polinomios primos. Pero lo que es cierto en el terreno numérico o polinomial elemental (la descomposición en factores primos es única) no tiene por qué serlo en el terreno de los enteros cuadráticos, aunque parezca evidente. La factorización en su particular terreno polinómico deja de ser única, suposición que probablemente asumió Fermat (y alguno de sus sucesores), pero que no es cierta. De hecho, rodear esta dificultad llevó a la definición de los llamados «números ideales» y al avance del álgebra moderna, debido a Ernst Kummer (1810-1893) y Richard Dedekind (1831-1916).

Volvamos a la conjetura. No se contempla el caso $n = 2$, porque en tal eventualidad se reduce a hallar las ternas x, y, z que verifican

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Estas ternas, llamadas pitagóricas, son solución de una ecuación diofántica elemental y bien conocida y se expresan paramétricamente, para cualesquiera valores enteros positivos a y b, como

$$\begin{aligned} x &= a^2 - b^2 \\ y &= 2ab \\ x &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, a partir de ahí no hubo manera de encontrar solución alguna; para $n > 2$ el camino parecía siempre cerrado. Se demostró la ausencia de soluciones para $n = 3$ (Euler y posiblemente Fermat), para $n = 4$ (el propio Fermat), para $n = 5$ (Dirichlet y Legendre) y para otros muchos valores. Se probó para miles y miles de valores; de hecho, se probó para infinitos valores, pues si la conjetura se demuestra para un número primo k, automáticamente queda probada para todos los múltiplos de k. Los nombres de Gabriel Lamé (1795-1870), Sophie Germain (1776-1831) y el ya citado Ernst Kummer no pueden caer en el olvido. Se llegó a probar la conjetura hasta para los valores primos $n \leq 4.000.000$, pero no para *todo* valor de n. Y la historia nos ha enseñado a ser prudentes; Euler predijo, por ejemplo, que no existían x, y, z y v tales que

$$x^4 + y^4 + z^4 = v^4,$$

un resultado que todo el mundo daba por evidente, pues el muy similar enunciado de Fermat para $n = 4$ así lo hacía sospechar, cuando en 1988 Noam Elkies (n. 1966) demostró que

$$2.682.440^4 + 15.365.639^4 + 18.796.760^4 = 20.615.673^4,$$

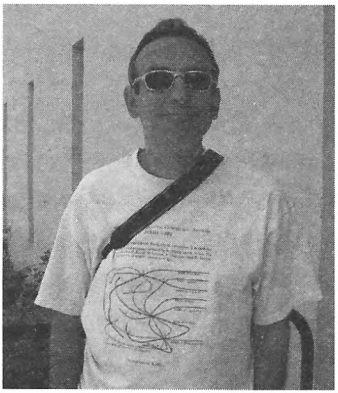
y el chasco fue mayúsculo.

En 1954 Goro Shimura (n. 1930) y Yutaka Taniyama (1927-1958) ya habían encontrado un vínculo entre las curvas elípticas y las formas modulares, dos objetos algebraicos aparentemente muy distintos y distantes. Una curva elíptica es una ecuación cúbica del tipo siguiente:

$$y^2 = (x + a)(x + b)(x + c),$$

con *a*, *b* y *c* enteros no nulos. Una forma modular es una ecuación analítica en el campo de los números complejos que, para decirlo rápidamente, tiene un enorme número de simetrías y es invariante para un grupo de orden 2 de matrices unitarias. Ambas entidades están ligadas por una misteriosa *L*-función en forma de serie de potencias que codifica de algún modo sus entrañas algebraicas más profundas.

Lo que no esperaba el mundo es que Ken Ribet (n. 1947) demostrara en 1986 que la certeza de la conjetura de Taniyama-Shimura implicara la de Fermat; en realidad, bastaba una parte de la conjetura de Taniyama-Shimura, y la consideración de una clase especial de curvas. La dificilísima conjetura de Taniyama-Shimura fue probada en 1999 por Christophe Breuil encabezando un equipo de matemáticos, pero eso ya es adelantarse a los acontecimientos.

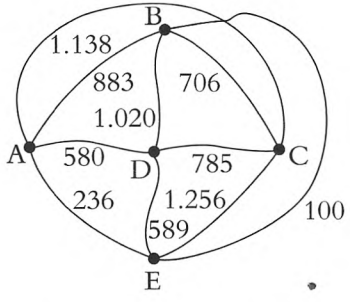


Ken Ribet, profesor de la universidad californiana de Berkeley, estableció el puente entre la conjetura de Taniyama-Shimura y el último teorema de Fermat.

Lo cierto es que Wiles, un especialista en el tema, matemático brillante y hombre vocacional y con voluntad de hierro, se recluyó durante años para pensar y desarrollar la cuestión con todo el poder de sus neuronas. En 1993 presentó su primera solución, que resultó tener un agujero. En 1995 dos artículos publicados en los *Annals of Mathematics* clausuraban para siempre la conjetura, demostrándola de modo definitivo. La conjetura de Fermat ha muerto, viva el teorema de Fermat.

La muerte de un viajante

Lo peor que le puede suceder a un viajante no es que Arthur Miller escriba una obra de teatro sobre su vida y desventuras, sino que le asciendan; al menos eso es lo que se dice en círculos matemáticos. Supongamos que un viajante está encargado de visitar en coche n ciudades. Si pretende hacerlo usando el sentido común su plan de visitas respetará algunos aspectos básicos; por ejemplo, procurará que su circuito en coche sea hamiltoniano, es decir, procurará no pasar dos veces por la misma ciudad y que el combustible consumido sea mínimo, o sea, que la distancia recorrida también lo sea. Y todo lo anterior se puede expresar con un grafo serpentino con brazos que denoten las distancias entre vértices.



Pero si se quiere decidir qué recorrido es el mejor, no queda más remedio que especular con todos ellos y sumar las distancias. Sólo se tienen que dibujar $\frac{4!}{2}$ trayectos y hacer doce sumas. La menor, que es la que hemos incluido en el gráfico imaginario anterior, indica el camino óptimo. No parece una barbaridad, pero si al viajante lo ascienden, no le hacemos ningún favor. Si ha de supervisar, digamos 50 ciudades, deberá verificar unas $5 \cdot 10^{62}$ sumas para poder decidir. Sólo 20 ciudades ya le llevarían al borde del suicidio: hay 121.645.100.408.832.000 sumas que le esperan. Para n ciudades las sumas son $\frac{(n-1)!}{2}$, donde el signo ! significa:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

que se lee «factorial de n» y que tiene la perversa costumbre de crecer de manera exponencial a medida que crece n.

Éste es el problema del viajante, planteado ya con alguna vaguedad en el siglo XIX y con claridad de 1930 en adelante por varios profesionales, entre ellos Karl Menger (1902-1985). Sus repercusiones en otros campos, como el de la secuenciación del ADN, lo han convertido en un centro actual de interés.

A LA ESPERA DE UN ALGORITMO UNIVERSAL

Existen muchos modos, heurísticos y aproximados —incluso imitando el comportamiento de una colonia de hormigas—, de acercarse a una solución del problema del viajante e incluso se han resuelto casos individuales de tamaño colosal. Ejemplo de ello es la solución desarrollada por David Applegate para Suecia, donde él y su equipo resolvieron en 2004 el problema para 24.978 ciudades, unidas de forma óptima por un grafo que supone un recorrido de 72.500 km. En la actualidad esta solución ya no ostenta el título de «problema del viajante resuelto para el número de ciudades más alto», pero en su día marcó un hito. Sin embargo, hoy en día, aún no se conoce un algoritmo universal que permita abordar el problema en un plazo razonable. Quizá no exista, pero eso se puede probar...

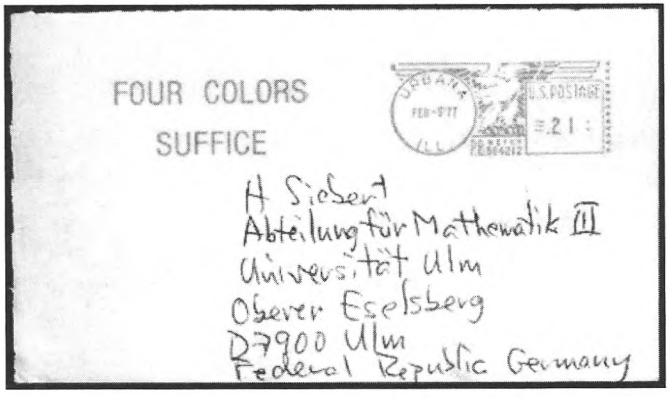
Uno de los caminos mínimos para miles de ciudades suecas que ofrece la página web TSP (Traveling Salesman Problem) dedicada a la resolución del problema del viajante según el desarrollo de David Applegate.

Ya adelantamos que el problema no está resuelto, aunque eso sí, hay un magnífico algoritmo para resolverlo tal y como ha podido verse: se hace un número fenomenal de sumas y se elije la menor; sin embargo, no es una técnica practicable, ni con el auxilio de computadoras. Hay algoritmos que realizan los cálculos en un tiempo del orden de $n^2 2^n$, claramente exponencial a medida que crece n; en la polémica *P* versus *NP* de la que hablaremos luego, al ocuparnos de los problemas del milenio, el problema del viajante figura entre los problemas *hard* (difíciles), los problemas de gran complejidad computacional.

Cuatro colores bastan

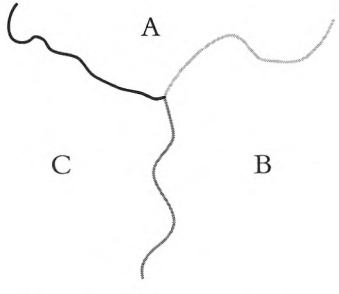
Eso es lo que decía el matasellos que cierto día de 1977 aparecía en algunas carta emitidas desde Urbana (Illinois), ciudad sede de una selecta facultad de matemáticas, donde Kenneth Appel (n. 1932) y Wolfgang Haken (n. 1928) habían resuelto, por

fin, uno de los problemas más sencillos de enunciar pero más difíciles de demostrar de la historia de las matemáticas.



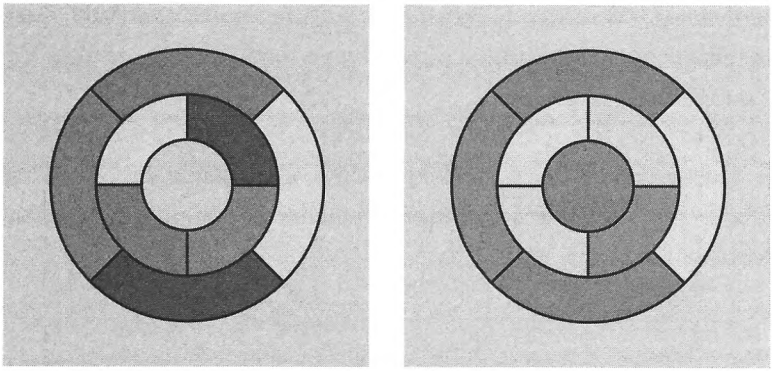
El famoso matasellos con la inscripción «Four Colors Suffice» (Cuatro colores bastan).

La conjetura —ahora teorema— tiene un redactado elemental: cuatro colores bastan para colorear un mapa plano convencional de manera que zonas contiguas tengan distinto color. Aquí «convencional» significa que no se consideran mapas en los que una misma zona esté dividida en partes desconectadas, como sucede con el alavés condado de Treviño, situado en la provincia de Burgos, o el valenciano Rincón de Ademuz, emplazado entre Teruel y Cuenca. Tampoco nos preocuparemos por los casos en que tres países tienen un pequeño punto fronterizo común, como muestra el dibujo siguiente.



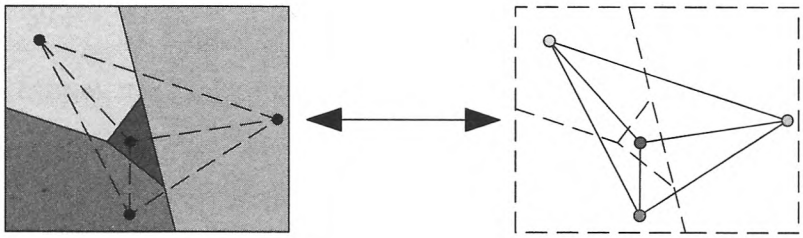
Tres países con frontera puntual común.

Dicho esto, la conjetura se expresa en muy pocas palabras y de un modo elemental, pero probarla es dificilísimo.



La conjetura de los cuatro colores dice que cualquier mapa plano, aunque a primera vista necesite cinco colores, puede en realidad colorearse con cuatro, y que ese número de colores es a veces necesario.

El problema fue planteado en 1852 por el entonces abogado y matemático vocacional Francis Guthrie y pasó al mundo científico a través de Augustus de Morgan (1806-1871). Su historial comprende una serie de supuestas pruebas que sirvieron sobre todo para apercibirse de la dificultad real de la cuestión y para reducirla finalmente al marco adecuado, la teoría de grafos. A la presunta demostración de Alfred Kempe (1849-1922) en 1879, le siguieron la intervención de Percy Heawood (1861-1955) y el establecimiento como teorema de que cinco colores bastan (1890), aunque quedaba como conjetura indemostrada el que bastaran cuatro. Reducir el problema de coloración de mapas a un problema de grafos pasa por sustituir cada zona por un nodo y cada vecindad de zona, por un eje del grafo. La cuestión es el modo de colorear los nodos teniendo en cuenta que no tengan igual color si son contiguos en un grafo, tal y como muestran las ilustraciones siguientes.



Poco a poco fueron surgiendo los conceptos de grafo inevitable y configuración irreducible, de modo que Heinrich Heesch (1906-1995) pudo reducir el número de configuraciones para comprobar hasta 8.900. Posteriores razonamientos llevaron

a Kenneth Appel y Wolfgang Haken a las 1.500 configuraciones; tuvieron que usar para analizarlas una computadora, pues de otro modo el examen detallado de las mismas hubiera sido imposible.

Se comprobaron todas, la conjetura quedó verificada y la conjetura pasó a ser teorema. Cuatro colores bastan. En lenguaje más matemático, aunque menos inmediato, para un mapa sobre una superficie orientable de género g bastan y en general se necesitan N colores;

$$N = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor,$$

donde los símbolos $\lfloor\ \rfloor$ indican «valor entero». Para superficies, orientables o no, de género positivo y característica topológica χ la fórmula es la siguiente:

$$N = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1-24\chi}}{2} \right\rfloor.$$

Para el plano, ambas fórmulas dan por resultado 4.

La demostración de Appel y Haken se realizó con auxilio electrónico, lo que no fue del agrado de todos los matemáticos, ya que, en principio, un programa que «corre» en una computadora puede no hacerlo en otra, aunque sólo sea por un ínfimo error de programación. Sin embargo, también había quien era reticente a aceptar manos no humanas. El incidente de Thomas Nicely y el chip de Intel que funcionaba mal —y del que hablaremos más adelante— no contribuyó a remansar las aguas. Finalmente, en 2008 Werner y Gonthier redujeron la demostración a un lenguaje lógico universal (el Coq) y eliminaron la intervención de programas informáticos individuales. Puede dudarse aún de la prueba, pero eso significaría renunciar a casi todo.

Un tema muy relacionado con el anterior, aunque no lo parezca, es el del gráfico perfecto, fundamental en la ciencia de las comunicaciones.

Primos por parejas

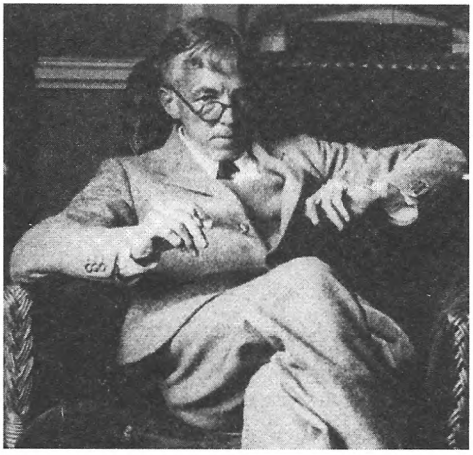
Reciben el apropiado nombre de primos gemelos aquellos números primos que se presentan por pares, en la forma $(p, p + 2)$. El apelativo es relativamente moderno y se debe a Paul Stäckel (1862-1919). He aquí los primos gemelos menores que 1.000:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571), (599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859), (881, 883).

Prospecciones con computadoras han dado la cifra de que el 0,274% de los números forma parte de una pareja de primos gemelos. El problema, no resuelto aún, es si existe un número infinito de tales parejas. La experiencia parece decir que sí, que hay un número infinito. En 2009 se encontró la pareja $65.516.468.355 \cdot 2^{333333} \pm 1$, que tiene 100.355 dígitos, y es una pareja de primos gemelos; no parece que se vayan a terminar. La creencia general es que no se terminan nunca. Los restantes primos gemelos descubiertos en 2009 eran menores.

En 2004 el especialista americano Richard F. Arenstorf dio a conocer una demostración de la infinitud de los primos gemelos, pero la prueba se vio a posteriori que contenía un error, más en concreto en el lema 8.

La pareja de matemáticos formada por G.H. Hardy (1877-1947) y J.E. Littlewood (1885-1977), que tantos artículos publicó conjuntamente sobre teoría de números, dio a conocer la fórmula, ligada a la densidad de los números primos en general, que proporciona una idea de la distribución y abundancia de los primos gemelos $(p, p + 2)$.



Godfrey Harold Hardy no sólo fue un matemático excepcional sino un magnífico escritor y filósofo que vertió en A Mathematician's Apology (Apología de un matemático) *su convicción de que sólo la belleza de la matemática justificaba su estudio, descartando cualquier criterio de utilidad. La posteridad le conoce, aparte de por sus propios méritos, como el hombre que trajo a Occidente al excepcional matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920).*

Si $\pi_2(x)$ denota el número de primos $p \leqq x$ que tienen un gemelo $p + 2$, entonces

$$\pi_2(x) \approx 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2},$$

donde C_2 es una constante, que Hardy y Littlewood dedujeron de criterios probabilísticos y que vale:

$$C_2 = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \approx 0{,}660161815846869573927812110014...$$

Se trata de un producto infinito que sólo se extiende para los p primos. Hoy se conocen los valores expresados en la siguiente tabla.

n	$\pi_2(n)$
10^3	35
10^4	205
10^5	1.224
10^6	8.169
10^7	58.980
10^8	440.312
10^9	3.424.506
10^{10}	27.412.679
10^{11}	224.376.048
10^{12}	1.870.585.220
10^{13}	15.834.664.872
10^{14}	135.780.321.665
10^{15}	1.177.209.242.304
10^{16}	10.304.195.697.298
10^{18}	808.675.888.577.436

Y lo poco que se ha visto hasta ahora no está muy alejado de la realidad, como muestra la siguiente tabla de primos gemelos.

Intervalo	Primos gemelos	
	Esperados	Hallados
100.000.000–100.150.000	584	601
1.000.000.000–1.000.150.000	461	466
10.000.000.000–10.000.150.000	374	389
100.000.000.000–100.000.150.000	309	276
1.000.000.000.000–1.000.000.150.000	259	276
10.000.000.000.000–10.000.000.150.000	221	208
100.000.000.000.000–100.000.000.150.000	191	186
1.000.000.000.000.000–1.000.000.000.150.000	166	161

HOMBRE Y MÁQUINA

En el curso de su investigación sobre $\pi_2(x)$, cuando andaba involucrado en cálculos intrincados para desvelar el valor $\pi_2(10^{14})$, el matemático Thomas Nicely se apercibió de que, extrañamente, sus cálculos con computadora no funcionaban bien en la franja numérica $824.633.702.418 < n < 824.633.702.449$. Tan seguro estaba de que se producía un error atribuible a la máquina que, tras descartar otras posibles causas, envió a la empresa fabricante del microprocesador un correo electrónico de advertencia en 1994, advirtiendo también del hecho a varios de sus colegas. Pronto se descubrió el error en un procesador Pentium y la prestigiosa compañía tuvo que entonar el mea culpa, cambiar todos los modelos del procesador en cuestión y mejorar sus controles de calidad. Efectivamente, la máquina se equivocaba, pues uno de sus componentes era defectuoso. Los primos gemelos encontraron por fin su aplicación práctica.

DATE: 30 October 1994

It appears that there is a bug in the floating point unit (numeric coprocessor) of many, and perhaps all, Pentium processors.

In short, the Pentium FPU is returning erroneous values for certain division operations. For example,

1/824633702441.0

is calculated incorrectly (all digits beyond the eighth significant digit are in error). This can be verified in compiled code, an ordinary spreadsheet such as Quattro Pro or Excel, or even the Windows calculator (use the scientific mode), by computing

(824633702441.0)*(1/824633702441.0),

which should equal 1 exactly (within some extremely small rounding error; in general, coprocessor results should contain 19 significant decimal digits). However, the Pentiums tested return

0.999999996274709702

for this calculation. A similar erroneous value is obtained for x*(1/x) for most values of x in the interval

824633702418 <= x <= 824633702449,

and throughout any interval obtained by multiplying or dividing the above interval by an integer power of 2 (there are yet other intervals which also produce division errors).

Fragmento del correo electrónico que Thomas Nicely envió advirtiendo del error detectado en un procesador Pentium. En las primeras líneas advierte de que parece haber un fallo en muchos procesadores de esta marca, quiza en todos.

Todo eso ya empieza a ser un poco complicado y no es necesario decir que en la realidad se ha complicado mucho más con conjeturas paralelas que ya no afectan a los números separados por dos unidades sino por cuatro o más. Se llaman números primos «primos» (en inglés *cousin primes*) a las parejas separadas por cuatro unidades; aquí «primo» denota el vínculo familiar entre personas, pues la relación fraterna se da por ocupada con la denominación «gemelos». Los sexiprimos son las parejas de primos separados por seis, y así sucesivamente. Todos ellos, «primos», sexiprimos, etc. admiten enfrentarse con incógnitas parecidas a las de los gemelos.

Es curioso constatar que si se ponen cabeza para abajo los primos gemelos y se suman, la serie es convergente, como probó Viggo Brun (1885-1978):

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\ldots\approx 1{,}902160583104\ldots$$

Sucede lo contrario que con los primos convencionales, cuya serie de recíprocos diverge:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\ldots$$

En cambio, uno creería a pies juntillas que hay infinitos primos «trillizos», pues sólo empezar a buscarlos ya nos aparecen tres: los números 3, 5 y 7 son trillizos. Pero la realidad es que no hay más. Los primos pueden ser gemelos, pero no trillizos. Y si no hay trillizos mal puede haber cuatrillizos, quintillizos...

La conjetura de Bieberbach

La personalidad de Ludwig Bieberbach (1886-1982), un extraño filonazi cuyo tercer nombre de pila bautismal era Moisés, ha ocultado muchas veces el talento del personaje, sin duda un excelente matemático (volveremos a hablar de él más adelante, al tratar los problemas de Hilbert). La conjetura emitida por Bieberbach hace referencia a las funciones holomorfas de variable compleja y a su desarrollo en serie de potencias como la siguiente:

$$f(z) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

y dice que si f envía el disco unidad inyectivamente en el plano complejo, entonces

$$|a_n| \leq n|a_1|.$$

Si se da $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, caso al que pueden reducirse todas las funciones, se tiene una desigualdad todavía más bonita:

$$|a_n| \leq n.$$

Esta última ejemplifica, en el lenguaje de los analistas, que «la extremalidad geométrica implica la métrica».

La historia empieza con Bieberbach, que probó que $|a_2| \leq 2$. Luego prosigue paso a paso con $n = 3, 4, 5$ y 6, hasta llegar, de súbito, a una demostración válida para cualquier valor de n. La conjetura fue probada por fin en 1964 por Louis de Branges de Bourcia (n. 1932).

El relato se terminaría aquí si no fuera por la personalidad, fuera de lo común, de De Branges. No puede exponerse ninguna duda acerca de su imaginación y su altura matemática, pero se ha convertido a los ojos de muchos de sus compañeros en un personaje impopular. Algunas de sus presuntas demostraciones sufren del síndrome de las ovejas y el lobo, pues de tanto proclamar supuestas pruebas —y equivocarse— lo que De Branges parece haber conseguido es la incredulidad entre muchos de sus pares. Su demostración de la hipótesis de Riemann, por ejemplo, permanece en el limbo de las comprobaciones. Se necesitaría mucho tiempo y energías para comprobar la certeza de una demostración que muchos expertos consideran probablemente errónea. ¿Quién invertiría años y prestigio en verificar algo que, al final del túnel, puede acabar en agua de borrajas?

La conjetura de los 100.000

Una vez probado el último teorema de Fermat surgió la inevitable consecuencia, la llamada conjetura de Beal, que dice: si se verifica

$$x^a + y^b = z^c.$$

para ciertos números naturales x, y, z, a, b y c, con los exponentes mayores que 2, los x, y, z tienen de modo obligatorio un factor primo común. Como puede verse, se trata de una generalización de la conjetura (ahora teorema) de Fermat.

Al parecer, la conjetura fue debidamente enunciada en 1997 por el matemático tejano Daniel Mauldin. El banquero (y jugador de póquer) estadounidense Andrew Beal (n. 1952) ha ofrecido 100.000 dólares a quien encuentre una solución o un contraejemplo, y esa cifra ya ha quedado asociada a la anterior conjetura. La suma no es nada despreciable y resolver la conjetura puede que no merezca la

primera página del *New York Times*, pero dedicarse a tal empeño comporta a buen seguro todo tipo de satisfacciones, incluyendo la satisfacción moral de resolver un enigma numérico difícil. No es una conjetura de categoría «uno», como las del milenio (por cuya resolución se ofrece un millón de dólares), pero la recompensa tampoco está nada mal.

De momento, ahí van algunos resultados obtenidos por computadora; pero aunque cumplen la ecuación también cumplen la conjetura y no son contraejemplos.

$$3^3 + 6^3 = 3^5$$
$$3^9 + 54^3 = 3^{11}$$
$$3^6 + 18^3 = 3^8$$
$$7^6 + 7^7 = 98^3$$
$$27^4 + 162^3 = 9^7$$
$$211^3 + 3.165^3 = 422^4$$
$$386^3 + 4.825^3 = 579^4$$
$$307^3 + 614^4 = 5.219^3$$
$$5.400^3 + 90^4 = 630^4$$
$$217^3 + 5642^3 = 651^4$$
$$271^3 + 813^4 = 7.588^3$$
$$602^3 + 903^4 = 8.729^3$$
$$624^3 + 14.352^3 = 312^5$$
$$1.862^3 + 57.722^3 = 3.724^4$$
$$2.246^3 + 4.492^4 = 74.118^3$$
$$1.838^3 + 97.414^3 = 5.514^4.$$

Más madera, que es la guerra

En nuestros tiempos los problemas matemáticos ya no gozan como en el pasado de un aura de misterio y magia, ya no son resueltos por medio de golpes de genio por pensadores solitarios que quizá reciben el empujón definitivo a sus reflexiones gracias a la lectura de la carta de alguno de sus amigos. Esta visión romántica ha pasado a la historia. En lugar de cartas se intercambian e-mails que tratan de un modo muy concreto un tema puntual, pues el bosque de las matemáticas es ahora demasiado frondoso para dominar más allá de lo que abarca la vista; la competencia

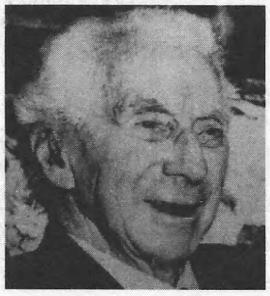
entre pensadores —hay miles de ellos— inclina la balanza en sentido opuesto a las confidencias. El teorema de Fermat, por ejemplo, constituyó una sorpresa en la medida en la que Wiles alternó su propia —y formidable— investigación solitaria con la publicación regular en las revistas especializadas de resultados sabiamente inocuos que hicieron pensar a la mayoría de sus colegas que se dedicaba a sus cosas habituales y no invertía cuerpo y alma en una encarnizada lucha con $x^n + y^n = z^n$.

Por otro lado, hoy los problemas proliferan como las setas debido en gran parte a que la matemática se ha hecho mayor. Como es natural, es más lo que ignoramos que lo que sabemos, pero es que lo que no sabemos es cada vez más abundante y más difícil de averiguar (y de entender). Como es imposible moverse en todos los campos y poner ejemplos contemporáneos de cada uno de ellos, concluiremos con algunas cuestiones, muchas no resueltas, de enunciados-tipo, con la única y modesta finalidad de ofrecer un panorama general.

LA PARADOJA DE RUSSELL

Una paradoja es, en términos laxos pero comprensibles, un enunciado razonable que nos lleva a una contradicción. Cuando nos movemos en el territorio propio de la lógica —y, por tanto, de las matemáticas— hablamos de antinomias, ya no de simples paradojas. He aquí un ejemplo: llamemos «normal» a todo conjunto que no es elemento de sí mismo; llamemos «anormal» a todo conjunto que sí es elemento de sí mismo. Así, el conjunto *A* de todos los conjuntos es anormal. Consideremos entonces el conjunto *B*, que definiremos como el conjunto de todos los conjuntos normales: ¿es *B* normal o anormal?

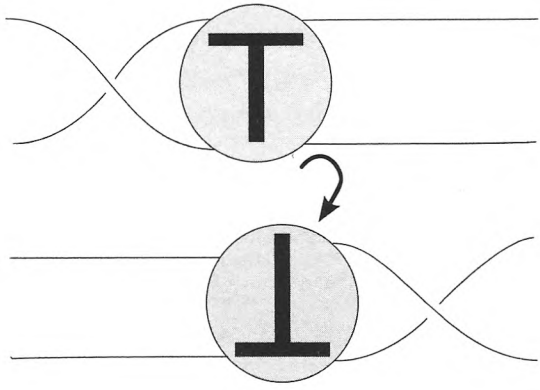
Parece un poco enrevesado razonar sobre ello, pero tras familiarizarse con las definiciones se verá que, sea cual sea la respuesta, se incurre en contradicción. Ésta es la paradoja o antinomia de Russell, llamada así en memoria de lord Bertrand Russell (1872-1970), que la enunció en 1903. La solución más comúnmente aceptada es abandonar la noción intuitiva de conjunto y seguir la definición que se da de la palabra «conjunto» en la formulación de la axiomática de Zermelo-Fraenkel, que no permite la existencia en el mundo conjuntista de objetos como *A*, que resulta ser la madre de todos los conflictos.



Filósofo y matemático, cuyos trabajos ejercieron gran influencia en las más diversas disciplinas, Bertrand Russell también fue un importante activista social en favor de la paz y en contra de las armas nucleares, lo que le llevó a prisión en diversas ocasiones.

La conjetura de Tait

Esta conjetura pertenece a la teoría de nudos. La propuso Peter Guthrie Tait (1831-1901) y conlleva el uso de un verbo extraído del escocés antiguo, *to flype*, que se puede traducir de modo aproximado al inglés moderno como *to turn back* y representarse en forma gráfica de la siguiente manera:



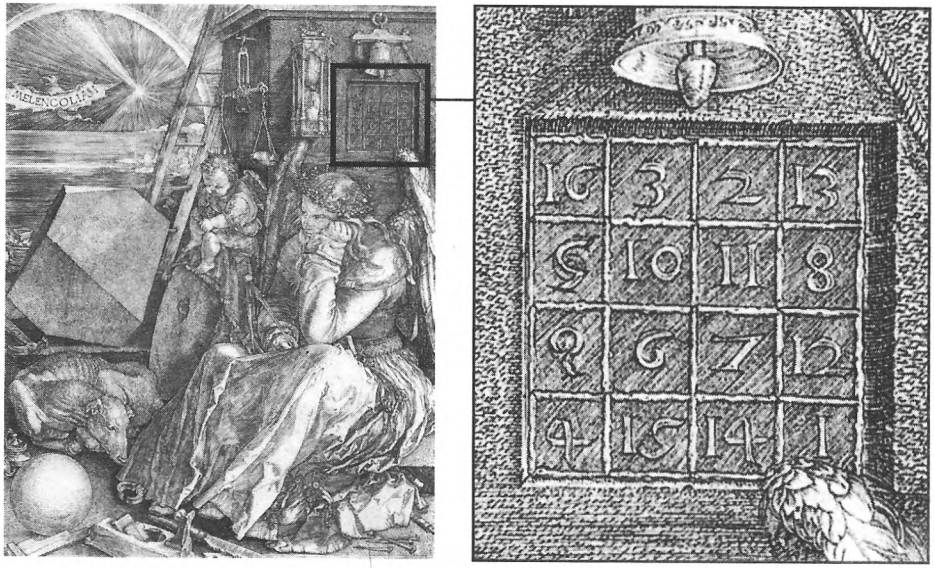
La conjetura, ahora teorema, dice así: «dados dos diagramas alternados reducidos A_1 y A_2 de un enlace de nudos alternados orientado y primo, A_1 puede transformarse en A_2 por medio de una secuencia de *flypes*» La demostración llegó en 1991 de la mano de Morwen Thistlethwaite y William Menasco.

La conjetura de Catalan

Enunciada por Eugene Catalan (1814-1894) y resuelta positivamente en 2002 por el rumano Preda Mihăilescu (n. 1955), postula que entre los números naturales sólo el 2 y el 3 poseen potencias consecutivas ($2^3 = 8, 3^2 = 9$); concretamente «en $\mathbb{N}$ la única solución de $x^a - y^b = 1$ para $x, a, y, b > 1$ es $x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$».

La conjetura de los cuadrados mágicos primos

Una disposición cuadrada plana —es decir, una matriz cuadrada— se denomina mágica cuando sus filas, columnas y diagonales dan la misma suma. El número de elementos del lado se llama orden. Impongamos ahora la condición de que todos los componentes numéricos sean primos. ¿Cuántos cuadrados primos de cada orden hay? Hasta fecha de hoy, la pregunta continúa abierta.



Un cuadrado mágico de orden 4 se encuentra en la obra Melancolía I *de Durero, realizada el año que muestran las dos cifras centrales de la última fila: 1514.*

Y aún un último problema

Un número real es normal en base 10 cuando sus dígitos, tomados de uno en uno, de dos en dos, etc. tienen una distribución uniforme. ¿Es π normal? Difícil exponer, en menos palabras, una cuestión más ardua. Sin solución para este problema. Y así continuaríamos, hasta la fatiga, con problemas resueltos o no de la matemática.

Capítulo 4

Los problemas de Hilbert

¡Hay que saber! ¡Sabremos!
David Hilbert

En el curso del Congreso de Matemáticas del año 1900 David Hilbert (1862-1943), entonces considerado el más distinguido matemático del mundo, presentó una relación de 23 problemas sin resolver que, a su juicio, en caso de ser solucionados, representarían un avance considerable para las matemáticas. Nadie aparte de Hilbert tenía a buen seguro autoridad para plantearlo de este modo, pues posiblemente fue la última mente pensante que podía hablar de todas las ramas de la matemática con conocimiento de causa. Después de Hilbert esto ya no iba a ser posible. El árbol de las matemáticas era ya demasiado grande y frondoso. Cuando Hilbert presentó su lista de 23 problemas afirmó que un buen test para un problema era el test de la primera persona que te encontrabas por la calle. Si se lo podías explicar y te entendía, es que era el problema perfecto: estaba bien formulado. Como veremos, o Hilbert pecaba de optimista o su lista de problemas no es la que leyó en 1900.

Muchos de esos 23 problemas se han solucionado ya; otros —los menos— eran simplemente inabordables y lo siguen siendo, y unos últimos han perdido mordiente y pocos se preocupan por ellos. Hay cosas que se quedarán por fuerza en el tintero, pues explicarlas a fondo, en medio de la selva en la que se ha convertido hoy la matemática puntera, requeriría centenares de páginas poco comprensibles.

Problema 1

El primer problema planteado por Hilbert estaba destinado a convertirse en célebre con el nombre de hipótesis del continuo. El continuo del título es el continuo numérico, que es como se acostumbraba a denominar la recta real. Para nosotros significará $\mathbb{R}$. La manera más rápida y sencilla de abordar esta cuestión es la intuitiva, la que la mayoría puede entender, aunque sea con un cierto esfuerzo intelectual. Los conjuntos pueden distribuirse de modo muy natural en grupos disjuntos —es

UN SABIO PECULIAR

Hilbert era el número uno de la universidad de Gotinga, un feminista en una sociedad de hombres y un demócrata hasta su muerte, relegado al olvido por los nazis en sus últimos años. En vida fue todo un personaje, la encarnación del sabio despistado. En cierta ocasión, según se cuenta, daba una recepción y su esposa le envió a cambiarse una prenda de vestir al dormitorio; algo no le gustó de la indumentaria de Hilbert. Éste subió a su habitación, empezó a cambiarse, pero, por desgracia, puso en marcha su rutina habitual: fuera corbata, fuera camisa, etc. Todo terminó con Hilbert en la cama y su mujer sacándole a gritos de la misma. Hilbert se había olvidado de la recepción y se había ido a dormir.

Fotografía de David Hilbert realizada en 1912, cuando era catedrático de matemáticas en la Universidad de Gotinga.

decir, sin elementos en común— llamados clases de equivalencia, cuando anda por en medio una relación R entre conjuntos que se llama relación de equivalencia. Cuando algo llamado x se relaciona con otro algo llamado y por medio de la relación R escribimos xRy.

Decimos que R es una relación de equivalencia si R posee tres propiedades elementales:

1. R es reflexiva: es decir xRx cualquiera que sea x.
2. R es simétrica: es decir, si xRy, entonces yRx.
3. R es transitiva: si xRy e yRz, entonces xRz.

Una clase de equivalencia de conjuntos determinada por R se define eligiendo uno cualquiera de sus miembros, pongamos que al miembro a:

$$Clase\ de\ a = \{x/\ xRa\}.$$

O sea, figuran en la misma clase los conjuntos que están relacionados por R entre sí. Como es lógico, si aRb entonces:

$$Clase\ de\ a = Clase\ de\ b.$$

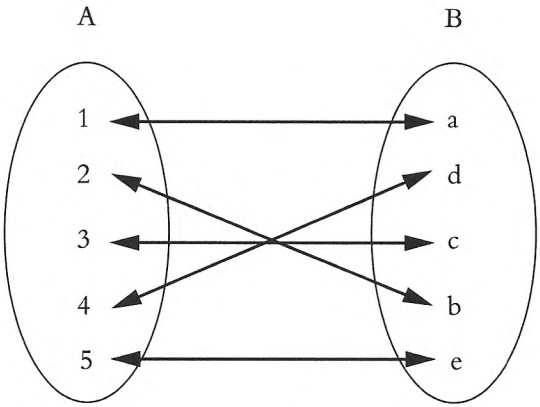
Y se observa que la identificación de una clase se puede hacer mediante cualquiera de sus elementos, que se acostumbran a denominar representantes de la clase. Las clases son no vacías (en matemáticas, se escribe *Clase de a* $\neq \varnothing$), pues por lo menos, en virtud de la reflexividad, $x \in$ *Clase de x*.

Clases distintas son disjuntas, pues si *a* y *b* tuvieran algún elemento común, *x*, veríamos que:

1. xRa y xRb por definición.
2. $xRa \Rightarrow aRx$ por simetría.
3. aRx y $xRb \Rightarrow aRb$ por transitividad.
4. *Clase de a* = *Clase de b* por definición.

Y ya no serían clases distintas.

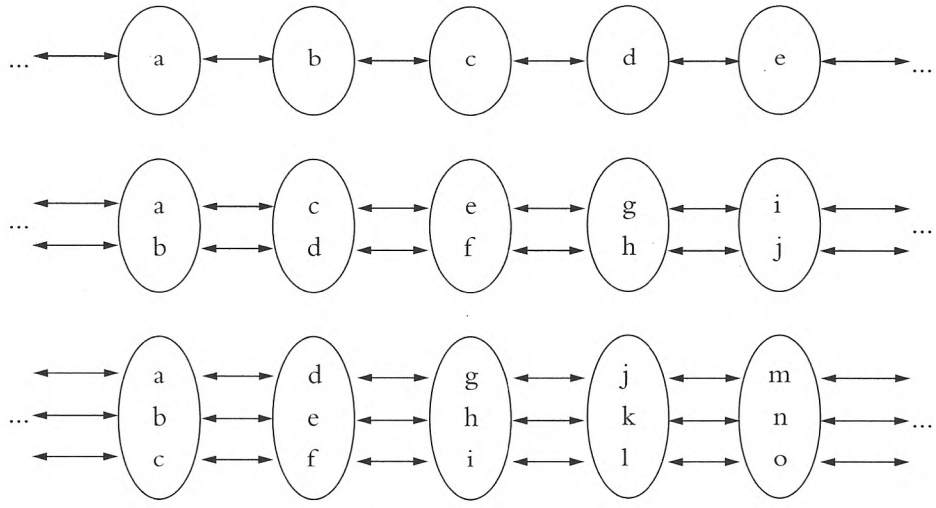
Apliquemos todo eso a los conjuntos; en lugar de *R* pondremos el símbolo ~, que leeremos «se corresponde uno-a-uno con *b*». La relación ~ la estableceremos de facto de un modo muy sencillo; dos conjuntos *A* y *B* estarán relacionados por ~, y escribiremos $A \sim B$, cuando pueda establecerse entre ellos una correspondencia biyectiva (o biunívoca, o uno-a-uno):



$A \sim B$

Equivalencia biyectiva entre A *y* B.

Es evidente para nuestros pobres sentidos que la relación ~ define una relación de equivalencia entre conjuntos. Compruébelo. Mostremos algún dibujo de las clases resultantes:



La clase de 1, de 2, de 3...

Como puede verse, figuran en la misma clase aquellos conjuntos que pueden ponerse correspondencia uno-a-uno entre sí. Los conjuntos relacionados están en igual clase, las clases son disjuntas y no son vacías.

A cada clase es lícito llamarla cardinal; en lenguaje coloquial, se dice que los miembros de cada clase tienen el mismo cardinal. En forma de símbolos, se escribe y se lee:

$$\textit{Clase de } A = \textit{Cardinal de } A = \#A.$$

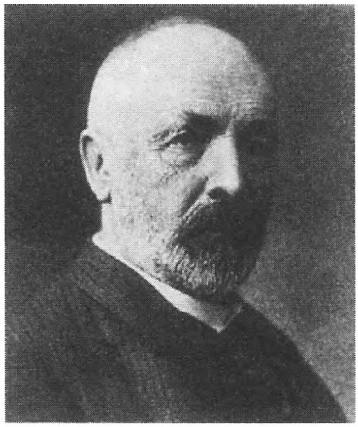
Cuando A es finito, se acostumbra a decir «número de elementos de» en lugar de «cardinal de». Son modos de hablar. El cardinal del conjunto $\varnothing$ es lo que designamos por 0 o «cero». Los cardinales más interesantes, porque son los de descubrimiento más reciente y los de propiedades más excitantes, son los cardinales transfinitos o no-finitos.

Es fácil ver —lo hizo Georg Cantor (1845-1918), el genio descubridor del infinito— que los primeros conjuntos numéricos tienen el mismo cardinal, que es $\aleph_0$, el primero de los cardinales de conjuntos infinitos, también llamados cardinales transfinitos.

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} = \aleph_0.$$

Cuando un conjunto es de cardinal $\aleph_0$, se dice que es numerable.

También es curioso, porque no parece normal, que conjuntos claramente distintos tengan idéntico cardinal. Más sorprendente es que el siguiente conjunto numérico, los números reales $\mathbb{R}$, que acostumbra a identificarse con la recta numérica, tenga el mismo cardinal que $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$..., $\mathbb{R}^n$. Que un espacio tenga el mismo número de puntos que una línea, el mismo que un cuadrado, el mismo que un cubo, etc. no deja de parecer chocante. Cuando Cantor mostró que el cardinal de los puntos de una recta es igual que el cardinal de cualquier espacio, tropezó con la incredulidad de sus contemporáneos. No era extraño.



Georg Cantor realizó grandes aportaciones a las matemáticas, entre ellas la noción de infinito y la teoría de conjuntos.

El cardinal de $\mathbb{R}$ y sus potencias, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$ etc. se denominaron *c*.

$$\#\mathbb{R} = \#\mathbb{R}^2 = \ldots = \#\mathbb{R}^n = c.$$

Por otra parte, si $\wp(\mathbb{N})$ designa al conjunto de las partes de $\mathbb{N}$, definimos de modo recursivo $\wp^n(\mathbb{N}) = \wp(\wp^{n-1}(\mathbb{N}))$ con $\wp^0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ y, a continuación, definimos como sigue a los sucesivos cardinales transfinitos llamados «los Aleph»,

$$\#\wp^n(\mathbb{N}) = \aleph_n$$

se crea una serie telescópica —quizás no completa— de cardinales estrictamente crecientes en tamaño:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_n < \ldots$$

Apuntemos aquí que, ya que han sido mencionados, hay números transfinitos de distinto tamaño, algunos de medidas muy grandes, casi inimaginables. Responden

a nombres tan evocadores como número inefables, números enormes, números *n*-enormes, etc.

Para todos los especialistas resulta bastante evidente que $c \leq \aleph_1$, pero la gran incógnita, que Cantor no pudo probar jamás, es:

$$c = \aleph_1.$$

Ese enunciado no probado es la hipótesis del continuo, que fue solucionada por Paul Cohen (1934-2007) en 1963. ¿Y cuál es la solución? Pues bien, lo que probó Cohen es que no hay solución. Para comprenderlo, léase el problema 2, que concierne al legado de Kurt Gödel (1906-1978).

Problema 2

Lo que sigue será forzosamente breve y no del todo riguroso, porque una exposición realmente comprensible y enteramente correcta sería larguísima. Se han escrito —y se escribirán— muchos libros divulgativos sobre el teorema de Gödel y a ellos nos remitimos. Lo que sigue es una exposición muy divulgativa, muy simplificada y que carece de cualquier valor trascendente; es algo voluntariamente elemental.

Una teoría se expone en base a unos axiomas o supuestos iniciales; un conjunto de reglas de inferencia desarrollan la ciencia devanando teorema tras teorema, que se deducen de los citados axiomas y reglas de inferencia. Así, es posible desarrollar la matemática, y la teoría que llamamos aritmética es el ejemplo más sencillo, pues en principio se necesitan pocos mimbres para hacerlo. Una teoría es consistente cuando no se pueden demostrar con las reglas de inferencia del sistema un enunciado y su contrario. No es aceptable que por un lado se pruebe que $2 + 2 = 4$ (por cierto, Bertrand Russell numeró el teorema «$2 + 2 = 4$» como el 54.43 de la página 83... del *segundo* volumen de sus *Principia Mathematica*) y más adelante que $2 + 2 \neq 4$.

Por otra parte, uno espera de un sistema de concatenaciones lógicas que sea completo. Eso quiere decir, simplemente, que dado un enunciado verdadero cualquiera del sistema debería ser posible demostrarlo. Por ejemplo, $4 + 23 = 27$, debe ser algo que pueda dilucidarse en aritmética. Naturalmente nos referimos a enunciados dentro del sistema, pues el enunciado «A lo mejor es viernes y llueve» puede que carezca de significado en, pongamos, aritmética.

Lo que se preguntaba Hilbert en su segundo problema no parece del todo claro, pero está en la línea de averiguar y demostrar la consistencia de la aritmética, para él evidente aunque nunca probada. Lo que demostró Gödel en su llamado segundo

teorema de incompletitud, de 1933, es un tanto sorprendente: Gödel probó que un sistema axiomático entre cuyo contenido figurara la aritmética elemental, admitido que sea consistente, es forzosamente incompleto. Es decir, que armados sólo de los útiles del sistema, siempre habrá enunciados verdaderos que no podrán demostrarse. Naturalmente, siempre podrán probarse ampliando el sistema (por ejemplo, un procedimiento obvio es aceptarlos como axiomas), pero dentro del sistema, no hay nada que hacer. Siempre habrá proposiciones indemostrables. Eso puede responder al problema segundo de Hilbert, pero ¿y a la hipótesis del continuo? ¿qué hay del problema primero?

Precisamente la hipótesis del continuo es de clase gödeliana, como demostró Cohen. Para ser precisos, Gödel probó que la hipótesis del continuo era consistente con la teoría de conjuntos elemental que se puede construir con los axiomas de Zermelo-Fraenkel, y Cohen demostró que la negación de dicha teoría también era consistente con la hipótesis. Como consecuencia, resulta que la hipótesis del continuo es consistente con la teoría de conjuntos elemental tanto si se acepta como si se niega. La hipótesis del continuo es un enunciado independiente.

No podemos dejar a Gödel sin decir que la hipótesis del continuo no es el único problema del que sepamos que es indecidible. En el siguiente capítulo definiremos lo que es una máquina de Turing; pues bien, entonces nos toparemos con otra cuestión indecidible (en la que no nos entretendremos): el problema de saber por adelantado si una máquina de Turing cualquiera, una vez puesta en marcha, se detendrá alguna vez o no también es indecidible.

UNA PERSONALIDAD COMPLICADA

Gödel fue un hombre extraordinario, tan agudo y profundo en sus razonamientos científicos como paranoide y maníaco en su vida cotidiana, en especial en sus últimos años. Nacido en Checoslovaquia, perseguido por los nazis y nacionalizado estadounidense —con grandes dificultades, pues pretendía discutir con el juez que lo nacionalizó la redacción lógica de la Declaración de Independencia—, una idea de su complicada personalidad la proporciona su muerte: temiendo ser envenenado y privado temporalmente de la compañía de su esposa, único ser humano en el que confiaba ciegamente, se dejó morir de hambre cuando a aquélla tuvieron que hospitalizarla.

Kurt Gödel adquirió bien pronto gran renombre gracias a sus trabajos sobre lógica y teoría de conjuntos.

Problema 3

Consiste en demostrar rigurosamente que dos tetraedros de igual base y altura —pero no forma— tienen el mismo volumen. Pero, y ahí reside la dificultad, sin usar el axioma de Arquímedes que caracteriza al cuerpo $\mathbb{R}$: si $a < b$ y $a, b \in \mathbb{R}$, existe un n tal que $na > b$.

Pocos piensan en que Arquímedes estaba detrás de todo este asunto. Lo que Hilbert buscaba eran dos tetraedros como los descritos, pero tales que el primero pudiera cortarse en un número finito de piezas congruentes que, pegadas de algún modo, permitieran construir el segundo. Tales tetraedros no existen, como demostró Max Dehn (1878-1952) en 1902.

Problema 4

La petición original de Hilbert era listar todas las métricas en las que las líneas rectas son geodésicas. Por fortuna para todos, los que escriben y los que leen, la petición es demasiado etérea y poco concreta. En realidad, no existe una respuesta concreta para un problema planteado de esta manera.

Problema 5

¿Hasta qué punto es necesaria la diferenciabilidad en la concepción de los grupos de transformaciones continuas, conocidos hoy como grupos de Lie? Éste no es un problema de enunciado vago como el anterior, pero tampoco es un problema central.

Las contribuciones de John von Neumann (1903-1957), Andrew Gleason (1921-2008), Deane Montgomery (1909-1992), Leo Zippin (1905-1995) y Hidehiko Yamabe (1923-1960) solucionaron la cuestión.

Problema 6

Axiomatizar la física. Se ha llevado a cabo en parte, pero la emergencia de las nuevas teorías (física cuántica, teoría de la relatividad) ha llevado el problema a una complicación inesperada, imprevisible en la época de Hilbert. El interés por una tal axiomatización, aunque existe, no es hoy una prioridad, pues hay otras cuestiones pendientes más interesantes.

Problema 7

Consideremos la expresión numérica a^b, donde a es algebraico ($a \neq 0$ y 1 por razones obvias) y b es irracional. ¿Es a^b trascendente? Hubo dos numerólogos, Alexander Gelfond (1906-1968) y Theodor Schneider (1911-1988) que demostraron de manera independiente y de modo casi simultáneo, en 1934 y 1935, lo que hoy se conoce como teorema de Gelfond-Schneider. Dice así: «Si a y b son números complejos, con a algebraico y b irracional, cualquier valor de a^b es trascendente». Lo de «cualquier valor» se refiere a que, siendo a y b complejos, a^b es una potencia compleja y, como muchas potencias complejas, admite muchas soluciones.

Este teorema corresponde exactamente a la cuestión de trascendencia planteada por Hilbert. En particular, el teorema de Gelfond-Schneider proporciona como corolario la trascendencia de $2^{\sqrt{2}}$, e^{π} o i^i, largamente buscadas.

Problema 8

Es la hipótesis de Riemann, el único de los 23 problemas que ha sido incluido por el Instituto Clay entre los llamados problemas del milenio. Lo discutiremos en el capítulo siguiente.

Problema 9

Consiste en encontrar la ley de reciprocidad más general posible en un cuerpo de números algebraicos. La ley de reciprocidad, de legendarias resonancias del siglo XIX, se rige por los símbolos de Legendre, $\left(\frac{n}{p}\right)$, que funcionan así:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = 0 \text{ si } n \equiv 0 \pmod{p},$$

$$\left(\frac{n}{p}\right) = +1 \text{ si } n \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ y existe } x \text{ tal que } x^2 \equiv n \pmod{p},$$

$$\left(\frac{n}{p}\right) = -1 \text{ en los demás casos.}$$

Y de ahí se sigue todo un cálculo computacional que presenta multitud de fórmulas útiles de las que destacaremos la siguiente:

$$\text{Si } p \text{ y } q \text{ son primos impares, } \left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

llamada «teorema de oro» desde los tiempos de Gauss, que fue un estudioso entusiasta de tales expresiones. Gauss llegó a probar que

«Para dos primos impares cualesquiera como p y q,
$-q$ es un cuadrado (mod p) $\Leftrightarrow$ p es un cuadrado (mod q)
salvo que ambos sean de la forma $4n-1$, pues entonces
$-q$ es un cuadrado (mod p) $\Leftrightarrow$ p no es un cuadrado (mod q).»

La reciprocidad cuadrática solicitada por Hilbert fue desarrollada por Emil Artin (1898-1962) en el periodo 1924-1930 y es una teoría elegantísima, como todo lo debido a Artin, donde los ideales sustituyen a los simples números.

Problema 10

Se trata de encontrar un procedimiento o algoritmo para determinar si una ecuación diofántica es resoluble o no. Es una cuestión de decidibilidad que cae de lleno en el dominio de lo que ha dado en llamarse «problemas de masas», dado que la decisión, la respuesta sí o no, afecta a muchos casos —a infinitos, de hecho- y no a uno o unos determinados. Es evidente que hay ecuaciones diofánticas de las que se conoce un algoritmo de solución, pero lo que se pregunta aquí es si existe alguno que valga para todas. Trabajaron en la cuestión y avanzaron bastante Martin Davis (n. 1928), Julia Robinson (1919-1985) e Hilary Putnam (n. 1926), probando el último pero crucial paso el por entonces (1970) joven prodigio ruso Yuri Matiyasevich (n. 1947). Digamos como curiosidad que utilizó como elemento importante en su razonamiento una ecuación diofántica proveniente de los números de Fibonacci. También es notable hacer notar que la conclusión de Matiyasevich (que dice «Todo conjunto recursivo enumerable es diofántico») equivale al teorema de incompletitud de Gödel.

Problema 11

Se centra en el estudio de las formas cuadráticas a coeficientes algebraicos. Sólo para saber de qué estamos hablando, una forma cuadrática $\mathbb{Q}(x_1,x_2,...,x_n)$ de n variables sobre $\mathbb{R}$, que es lo más corriente, es un polinomio de segundo grado

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Aunque ampliamente estudiadas en los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, quedaba por realizar lo propio en $\mathbb{Q}$ y, por ejemplo, en los cuerpos p-ádicos $\mathbb{Q}_p$. Tanto Helmuth Hasse (1898-1979) como Carl Siegel (1896-1981), ambos alemanes, dedicaron sus esfuerzos a los casos que faltaban. Por cierto, Hasse, que era de origen judío, solicitó en 1937 su ingreso en el partido nazi; lo cual demuestra que para ser matemático no es condición necesaria ser inteligente. Siegel, por su parte, era furiosamente antinazi.

Problema 12

Al parecer, Leopold Kronecker (1823-1891) tuvo un sueño de juventud relacionado con las extensiones abelianas, los cuerpos cuadráticos imaginarios, los números algebraicos, las extensiones de cuerpos, las raíces ciclotómicas y otros monstruos algebraicos variados y un tanto alejados de la realidad. Hilbert, aunque de un modo algo confuso, los reunió en el enunciado de su problema número 12, los generalizó y los propuso para el futuro como una cuestión importante que resolver. En 1886 el teorema de Kronecker-Weber hacía referencia a las extensiones abelianas del cuerpo de los números racionales, $\mathbb{Q}$, como subcuerpos de un cuerpo ciclotómico (es decir,

UN MATEMÁTICO ORIGINAL

Leopold Kronecker era un matemático original para nuestros estándares. La historia lo recuerda como un excelente profesional, un hombre que aportó mucho a la ciencia; pero también lo tiene calificado como excesivamente meticuloso, inquebrantable en sus convicciones constructivistas y nulamente dado a aceptar la consideración de objetos del pensamiento que se apartaran de la intuición primordial. Es famosa su frase: «Dios creó los números enteros; lo demás es cosa nuestra». Con tales mimbres no es de extrañar que Kronecker de opusiera, y no siempre con elegancia, a las ideas un tanto visionarias de Cantor y sus seguidores.

En la actualidad el nombre de Leopold Kronecker está asociado a diversos enunciados matemáticos, entre los que destaca el teorema de Kronecker-Weber.

de raíces de la unidad) y el sueño de Kronecker era al parecer prolongar dicho resultado a un cuerpo cualquiera K, fuera o no el conocido $\mathbb{Q}$. Este avance es el propuesto como problema 12.

La cuestión no es central hoy día y sigue sin existir una teoría adecuada al cien por cien.

Problema 13

Es sabido que toda ecuación de grado igual o superior al quinto no admite soluciones por radicales. Hilbert se preguntaba si, recurriendo a las mucho más generales funciones de dos variables, habría alguna solución para las ecuaciones que valiera para todas las ecuaciones de grado 7. Explicado así, todo parece un tanto peregrino, por lo que intentaremos dotarlo de sentido.

En primer lugar, no está claro que haya realmente funciones de tres variables. El ejemplo que se suele poner, por lo sencillo, es el de la función suma $f(x, y, z) = x + y + z$ que es reducible sin problemas a una composición de funciones de dos variables sin más que poner $f(x, y, z) = x + (y + z)$.

Hilbert ya se había apercibido de que las ecuaciones de grado 5 y 6 admitían simplificaciones para sus propósitos y fijó su atención en la versión de la ecuación de séptimo grado dada por la expresión ya irreducible de la forma:

$$x^7 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \chi x + 1 = 0,$$

con tres variables, α, β y χ. Una solución de ese polinomio debería ser una función continua de esas tres variables. ¿Podría esto simplificarse hasta obtener una solución en funciones de dos variables?

Está claro que si alguien probaba que toda función continua de tres variables era reducible a una composición finita de funciones continuas de dos variables liquidaría la cuestión, aunque eso era más de lo solicitado por Hilbert. Pues bien, eso es lo que probaron, en 1957 y en sucesivos pasos, Andrei Kolmogorov (1903-1987) y Vladimir Arnold (1937-2010). En realidad, aún probaron más: cualquier función continua en varias variables puede descomponerse finitamente en funciones de dos variables.

Hay quien sostiene que Hilbert no se refería a funciones continuas, sino a funciones algebraicas (es decir, polinomios a coeficientes polinómicos) y que, por lo tanto, el problema no está resuelto. Si Hilbert pensaba en tales funciones, el problema, en efecto, aún espera una solución.

Problema 14

El problema 14 es una intrincada cuestión algebraica concerniente a la teoría de invariantes. Si se la contempla geométricamente, afecta a variedades y a subconjuntos de las mismas producidos por intersección con otras, que presentan una determinada estructura finitamente generada (polinomial) y la «transmiten» a la variedad original. La cuestión, de interés matemático para los expertos, pero difícil de explicar, pareció en principio seguir en su desarrollo la intuición de Hilbert, pero se torció definitivamente cuando el matemático japonés de mente afilada Masayoshi Nagata (1927-2008) encontró un contraejemplo al problema y lo zanjó para siempre en 1958.

Problema 15

El llamado cálculo de Schubert, a medio camino entre la combinatoria y la geometría algebraica, es una materia poco agradecida. Requiere un gran esfuerzo intelectual especializarse en él. Algunos valoran en el triple de lo habitual el tiempo y los conocimientos necesarios para cultivar dicho campo en comparación con otros más «normales». El matemático alemán Hermann Cesar Hannibal Schubert (1848-1911) puso los fundamentos de tal cálculo, que en el fondo no es más que la descripción de la estructura multiplicativa de un anillo de cohomología; pero, desgraciadamente, esa descripción se asemeja a la que Giovanni Papini hacía de *La Odisea*: las andanzas erráticas e inacabables de un pobre idiota que no recordaba dónde estaba su casa. La teoría sobre la que se asentaba el complicado cálculo no estaba todavía lo bastante madura y no fue hasta bien transcurrida la mitad del siglo xx cuando unas bases rigurosas permitieron moverse en terreno firme.

Lo que Hilbert pretendía era fundamentar el cálculo de Schubert y por ello no puede darse el problema por resuelto, aunque sí por parcialmente resuelto. En lo que respecta al cálculo en sí, las cosas parecen claras, aunque muy difíciles; en lo que concierne a lo que se llama geometría enumerativa, que es la rama geométrica que sostiene al cálculo, aún hay mucho en lo que trabajar.

Problema 16

La formulación original de Hilbert divide al problema en dos partes y hace referencia a cuestiones un tanto vagas, aunque el matemático mencionaba objetos reales, como los óvalos originados en determinadas curvas reales algebraicas (en

el espacio proyectivo) y los llamados ciclos de Poincaré de determinados campos vectoriales del plano. No obstante, la expresión precisa de lo que en realidad parecía desear Hilbert no es demasiado concreta y muchos interpretan que el problema se reduce a algo tan general como estudiar la topología de las curvas y las superficies reales algebraicas, una ambición tan legítima como genérica y que, como tal, no se ha alcanzado todavía y no hay vislumbre alguno de que se alcance en un mañana inmediato debido a su amplitud.

Ambas partes del problema 16, interpretadas estrictamente, se las considera en estadio investigativo avanzado, con posibles soluciones sin confirmar.

Problema 17

Una función racional f es, para entendernos, un cociente de polinomios a coeficientes reales:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{P(x_1,x_2,...,x_n)}{Q(x_1,x_2,...,x_n)}$$

Tales funciones determinan un cuerpo. Cuando se le da a los $x_1,x_2,\ldots,x_n$ un valor (salvo en los ceros del denominador) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ adopta a su vez otro, que puede ser positivo o negativo. En algunos casos, todos los valores de $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ son positivos. Hilbert se preguntaba, de modo muy natural, si $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ podía ser representada en este caso por una suma de cuadrados de funciones racionales.

En el terreno de los números ya es sabido (lo descubrió Lagrange) que todo número natural n es la suma de a lo más de cuatro cuadrados, repetidos o no. Lo que Hilbert buscaba, de algún modo, era generalizar este sencillo resultado.

El problema fue uno de los que gozó de mejor fortuna. Ya en 1927 el joven y brillante Emil Artin lo resolvió en sólo quince páginas, que es lo que ocupa su primera demostración.

A Artin le preocupaba realmente poco que su prueba fuera, de acuerdo con los cánones del purismo intuicionista, una prueba constructiva. De hecho, Artin demostró afirmativamente la cuestión y punto. No enseñó a construir las funciones de la suma de cuadrados ni le preocupó cuántas soluciones había. Hubo que esperar muchos años para que Charles Neal Delzell, de la universidad de Louisiana, encontrara un algoritmo riguroso de construcción. Pero tampoco ahora que tenemos un algoritmo podemos decir cuántos cuadrados de funciones racionales se necesitan; sólo sabemos que dicho número es menor que 2^n siendo n el número de variables.

Problema 18

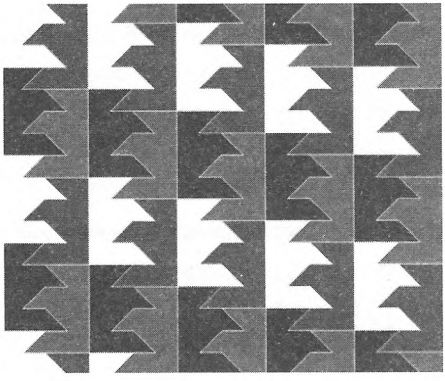
El problema 18 de la lista de Hilbert es un problema triple. Arrastrado por su discurso, Hilbert puso en el mismo cesto cuestiones para él relacionadas, aunque en realidad son bastante distintas.

Primera parte del problema: es sabido que en el plano hay diecisiete grupos de simetría, como probaron independientemente Evgraf Fedorov (1853-1919) y George Pólya (1887-1985). También se sabe que en dimensión 3 la cifra se eleva hasta 230 y fueron los cristalógrafos los que resolvieron el tema (hay varios modos de contar y varios resultados equivalentes). Fedorov es considerado el responsable último de ese número. La pregunta pendiente es qué pasa en dimensión n.

La respuesta la encontró Ludwig Bieberbach (1886-1982) en *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume (Sobre los grupos de movimientos del espacio euclídeo)* y lo publicó en 1911. El número de grupos de simetría en dimensión n es finito para todo n, que es lo que preguntaba Hilbert. Para $n = 4$ se encuentran 4.895 grupos cristalográficos —ayudándose para contarlos de una computadora— y para $n = 6$ tenemos ya 28.934.974; para otros muchos valores de n el número exacto se desconoce, pues de momento no se ha encontrado una fórmula milagrosa que nos lo diga. Como ya se apuntó en el capítulo anterior, Bieberbach era un simpatizante nazi que creía en cosas como «la ciencia alemana» y su superioridad en contraposición a toda la otra ciencia, que por supuesto era ciencia inferior. Al término de la Segunda Guerra Mundial, en justa correspondencia, se le prohibió seguir con la docencia en su país.

Segunda parte del problema: es sabido que hay poliedros que teselan el espacio; lo hacen de modo transitivo, o dicho en términos más geométricos y precisos, hay teselaciones isoedrales. Eso quiere decir, en lenguaje más accesible, que siempre puede aislarse un elemento básico de la teselación y trasladarlo —sin rotaciones, ni simetrías— hasta que coincida consigo mismo en otro lugar, y toda la teselación del espacio ligada a ese elemento sigue siendo válida. Una teselación no isoedral no cumple eso; la distinción es bastante sutil y para comprender el asunto por completo se debe recurrir al concepto de órbita de un elemento. Un intento de explicación podría ser éste: puede ser que al aislar un elemento y trasladarlo, el elemento en cuestión y su órbita sí que coincidan con otros elementos idénticos preexistentes, pero los demás elementos fuera de la órbita no lo hagan. La pregunta de Hilbert era: ¿existe una teselación anisoedral, o sea, no isoedral del espacio tridimensional? Esperaba sin duda que, caso de resolver el problema, le respondieran alguna vez «no».

Pues bien, Karl Reinhardt (1895-1941) en *Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope (Dividiendo el espacio euclídeo en politopos congruentes)* mostró en 1928 un poliedro en dimensión 3 que respondía a la demanda de Hilbert, pero en sentido contrario al esperado. Aún más; profetizó una teselación anisoedral para la dimensión 2. Ésta se produjo en 1935 cuando Heinrich Heesch (1906-1995) encontró la teselación adjunta.



Tercera parte del problema, quizá la más interesante. Se trata del problema kepleriano que ya se ha tratado con anterioridad y que sólo se ha resuelto en el siglo XXI: el empaquetamiento de esferas.

Problema 19

Hilbert se preguntaba si las soluciones de los lagrangianos son siempre funciones analíticas. La cuestión es bastante técnica y ha sido cultivada con cierta fruición por los especialistas. De modo bastante inmediato, en 1904, el ruso Sergei Natanovic Bernstein (1880-1968) solucionó afirmativamente el problema, pero imponiendo algunas condiciones iniciales que no parecían demasiado importantes; pero sí lo eran, pues hubo que esperar al italiano Ennio de Giorgi (1928-1996) para disponer finalmente, en 1956, de una prueba sin limitaciones.

Problema 20

El cálculo de variaciones es una parte esencial del análisis, aunque no del cálculo propiamente dicho, que estaría contenido en el estudio de las funciones, sino de un campo un tanto más amplio, el de los funcionales o funciones de funciones. El

MATEMÁTICAS CON CONSECUENCIAS PERSONALES

La personalidad de De Giorgi era encantadora, un auténtico *self-made man*, muy religioso, de carácter nada conflictivo y miembro destacado de Amnistía Internacional. Tales prendas no le impidieron llevar, sin proponérselo, a todo un genial Premio Nobel como John Forbes Nash (n.1928) al borde de la desesperación y la locura. Nash trabajaba también en solucionar de modo definitivo el problema 19 de Hilbert y el italiano se le adelantó por unos meses. Visto con la perspectiva del tiempo, De Giorgi proporcionó la primera demostración completa y Nash, dicen, la más elegante, pero lo cierto es que en 1959 Nash fue hospitalizado y se le diagnosticó esquizofrenia paranoide.

LA STAMPA MERCOLEDÌ 5 MAGGIO 2010 TuttoScienze III

I geni rovinati dalla stessa idea

La storia. Ennio De Giorgi risolse per primo un celebre enigma matematico, battendo il futuro Nobel John Nash Ma il provincialismo dell'accademia italiana gli impedì di conquistare la celebrità. In un libro la sua avventura

GABRIELE BECCARIA

Possono due geni coetanei avere la stessa idea quasi negli stessi momenti senza sospettare uno dell'altro e poi incontrarsi di sfuggita, due sole volte, e non riuscire a raccontarsi con le parole dei mortali le labirintiche equazioni che li hanno uniti per sempre nell'Olimpo dei matematici?

Certo che è possibile. A Trento c'è un professore di analisi che un giorno si è seduto in mezzo a loro e ha conosciuto due tipi che, per noi che sudiamo a controllare lo scontrino della spesa, sono alieni. Si chiama Mario Miranda e la strana coppia John F. Nash e Ennio De Giorgi, vale a dire il Genio Star e il Genio Ignorato.

Il primo genio, a 79 anni, si gode la doppia condizione di celebrità sia tra i colleghi sia tra la gente e il suo maggiore dispiacere è che il film «A Beautiful Mind» non l'abbia fatto diventare ricco come chi l'ha impersonato, l'ex gladiatore Russell Crowe. Il secondo genio è morto nel '96 e, nebbione venerato dagli allievi della Scuola Normale Superiore di Pisa (uno è pruprio Miranda) e osannato da ogni rappresentante della bizzarra comunità dei matematici, resta un Signor Nessuno tra le trifolì che meno-rizzano tormentate nomi di veline, calciatori, cantanti.

Adesso un libro («Ennio De Giorgi matematico e filosofo», scritto da Luigi Ambrosio, Marco Forti, Antonio Marinno e Sergio Spagnolo per le Edizioni ETS e in libreria in autunno) e un video del surreale incontro di 11 anni fa (curato da Miranda e a cui, al momento, pochi fortunati hanno avuto accesso) potrebbero incrinare il silenzio. E' lo stesso che ha a lungo incapsulato De Giorgi e Nash e le loro esistenze curiosamente parallele: ingoiava l'atmosfera della stanza a Pisa, dove, disteso a letto, uno produceva formule

Cervelli a confronto Ennio De Giorgi e John F. Nash: il secondo è diventato una star globale e il primo è il Genio Ignorato morto nel '96

senza mai toccare un pezzo di carta e imprigionava la mente schizofrenica dell'altro, alla deriva tra la clinica psichiatrica e Princeton.

E anche nello storico giorno del marzo '96 l'incantesimo del silenzio funziono per versamente. Miranda lo ricorda così: «Ormai nel nostro mondo

Si incontrarono solo due volte senza riuscire a raccontarsi le loro straordinarie intuizioni

erano considerati due grandi e non si guardarono quasi». Nei 60 minuti del video non si trova un istante in cui Ennio e John incrocino gli sguardi e abbozzino la conversazione che avrebbe fatto la felicità effimera dei reporter e quella di lunga durata degli storici. Sembravo svagati, mentre si lasciano interrogare da una micro-audience di prof e studenti, eppure due frasi quasi identiche (e sibilline) rivelano l'alchimia che in quarant'anni prima il aveva condotti alla stessa avventura intellettuale. «E' pericoloso non andare a fondo delle cose», disse Nash. «E' sbagliato parlare solo quando si sa già il risultato», disse De Giorgi.

Il Web

I siti

ENNIO DE GIORGI SU MIRABILIA
http://cvgmt.sns.it/people/degiorgi/biografia/degiorgi.eng.html

UN'INTERVISTA A DE GIORGI
http://www.ams.org/notices/199709/timmer.pdf

IL LIBRO DEL DE GIORGI MATEMATICO E FILOSOFO
http://www.crm.sns.it/index_62.html

Ancora peggio era andata la prima volta, nel 1964: all'istituto «Courant Institute» di New York De Giorgi, ospite speciale, abbozzò qualche parola in inglese per avvedersi subito alla lingua madre, mentre Nash si confuse tra il pubblico e, vittima della malattia, probabilmente non riuscì a decifrare la natura della strana presenza: l'italiano era quello che - pensava lui - gli aveva impedito di vincere il Nobel dei matematici, la Medaglia Fields, o un se stesso proveniente da un'altra dimensione?

L'interrogativo lo sciolse nel 1994, quando alla consegna del Nobel per l'economia (in ballo c'erano studi diversi, vale a dire la Teoria dei Giochi) onorò De Giorgi a modo suo, con l'ennesima frase per iniziati: «Ha raggiunto la vetta prima di me». Era vero, anche se si era strazzato prima di zumetterlo. De Giorgi l'aveva battuto sul tempo nel 1965. Durante una passeggiata sulle Dolomiti con un altro prof, Guido Stampacchia, si lasciò catturare dal suggerimento del

Finalmente nel 1994 l'americano lo onorò: «E' lui che ha raggiunto la vetta prima di me»

maestro di risolvere un celebre enigma matematico, il «XIX problema di Hilberts. In meno di due mesi aggiuntò la soluzione che beffava tutti da mezzo secolo e la presentò al Convegno di Matematica di Pavia. Incredibilmente, con scarso successo (si era di nuovo materializzato l'incantesimo del silenzio).

Nash, intanto, senza immaginare che cosa avveniase in Italia lavorava allo stesso problema, spinto anche lui da un maestro, che si chiamava Louis Nirenberg, e fece pubblicare la sua soluzione solo nel 1958. Era passato un anno dall'annuncio ufficiale di De Giorgi, concessogli finalmente a un incolore convegno all'Accademia delle Scienze di Torino, ma il ritardo era stato fatale. Per l'uno e anche per l'altro. L'incantesimo maligno, che continuava a tenerli reciprocamente all'oscuro, era stato alimentato dall'ignoranza dell'inglese di De Giorgi e da mediocri vualità accademiche italiane e nell'era pre-Internet era frequente che gli studiosi dei numeri vivessero una cotidiane da navigatori solitari.

Le formule dell'uno e dell'altro sono raccolte in un unico teorema «Applicazioni enormi»

Così una sfasatura temporale fece saltare l'appuntamento con la storia. «Nash avrebbe vinto il Nobel con equazioni di tutt'altro tipo e De Giorgi il Premio Wolf invertando forsmile ancora diverse, spiega Miranda, ma, se il primo spezzò l'incantesimo, il secondo non se ne liberò mai del tutto. A unirli c'è però una creatura bifronte battezzata Teorema De Giorgi-Nash: delinea percorsi differenti (equazioni ellittiche ed equazioni parabolichel), che magicamente conducono allo stesso risultato, come gli sguardi straluniati di Ennio e John nel giorno del '96. Poi, quando chiedete a un matematico come Ambrosio, vi dirà che tra le due soluzioni l'austostrada è quella creata da De Giorgi, con immense applicazioni che si cominciano ad apprezzare solo nel XXI secolo: dovremmo ricordarcene mentre si fanno funzionare i supercomputer per interpretare lo scieglimento dei ghiacciai.

En el libro colectivo sobre De Giorgi, Scripta volant, verba manent, *del que se hace eco este artículo aparecido en el periódico italiano La Stampa, se detalla la relación del matemático italiano con John Forbes Nash, así como las intrigas que le impidieron conquistar la celebridad tras resolver antes que nadie el problema 19 de Hilbert.*

problema típico del cálculo de variaciones implica, en un caso simple, una integral del tipo siguiente:

$$\int_a^b F(f(x), f'(x), x)dx,$$

es decir, una integral de una función que lo es de otra (u otras) y su(s) derivada(s). La función, en el caso más general, puede ser multivariada y las derivadas, parciales y no lineales. El cálculo de variaciones tiene por objeto maximizar o minimizar la integral o averiguar sus regiones estables, o sea, averiguar sus extremos y conjuntos de puntos singulares recurriendo a someterla a variaciones.

Ni que decir tiene que desde los tiempos heroicos del problema de la braquistocrona, ha llovido mucho sobre el tejado del análisis matemático y el cálculo variacional se ha desarrollado de un modo enorme. Cuando Hilbert enunció el problema 20 lo hizo ya en un momento favorable, con mucha gente interesada. Hilbert se preguntó por un aspecto particular del cálculo variacional, el de las condiciones en la frontera. Cuando se constriñe a la función *f* a pasar por una superficie determinada, o a su derivada (más bien su vector derivada) a recorrer un camino determinado, se habla del establecimiento de condiciones de contorno, de la obligación de respetar unas condiciones en la frontera. Las llamadas condiciones de Dirichlet, las de Neumann y las de Robin son muy conocidas por los analistas.

Cuando se cumplen, hay solución y la función que se busca resulta ser analítica. Hilbert se preguntaba si ése sería siempre el caso, si siempre habría una solución dadas unas razonables condiciones de contorno.

Como el terreno del cálculo variacional ha sido uno de los más transitados a lo largo del siglo XX, podemos afirmar que la respuesta se ha encontrado, que es afirmativa y que hay tantos nombres asociados a esta tarea tan general que resulta imposible mencionarlos a todos.

Problema 21

Se entiende por monodromía un procedimiento de investigación propio del análisis consistente en rodear los puntos singulares de una función racional —los puntos en que su valor se hace infinito— con curvas que, de algún modo matemáticamente misterioso, codifican los secretos de esas singularidades. Pongámonos en una situación real e intentemos resolver una ecuación diferencial (o mejor, un sistema de tales ecuaciones) del tipo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\frac{d^n y}{dx^n}$$

donde los P son funciones polinómicas que presentan alguna singularidad. Supongamos, pues, que pasamos de una mediante caminos que rodean las singularidades; se generan así unos grupos de matrices entre las soluciones que son los grupos monodrómicos. Como se ve, todo muy sencillo, natural, nada inesperado y sin complicaciones.

La pregunta de Hilbert, inspirado por los trabajos de Riemann, era si todo grupo considerado como grupo de monodromía se correspondía con alguna ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales. En teoría, ello fue resuelto afirmativamente hacia 1907 por el matemático esloveno Josip Plemelj (1873-1967); pero había un error en la demostración (de hecho, Hilbert no presentó el problema con la claridad suficiente) y en la década de 1980 hubo que reconsiderar el asunto. En 1989 el ruso Andrei Bolibruch (1950-2003) encontró un contraejemplo al caso general y rehízo toda la teoría. El problema 21 se puede dar por resuelto, pero la respuesta es sí o no según los casos en que se considere. En medio de esta cuestión aparecen las funciones denominadas fuchsianas, en honor de Lazarus Fuchs (1833-1902), alumno de Klein. Adviertan que no las hemos siquiera mencionado para no complicar las cosas.

Problema 22

Si les decimos que el problema 21 puede considerarse, de algún modo, como más general que el 22 es posible que se les escape un suspiro de alivio; pero no se ilusionen. El problema 22 trata de la uniformización, una cuestión propia del análisis matemático. Explicado con cierto apresuramiento no enteramente riguroso para que el concepto se comprenda, fijémonos por ejemplo en una circunferencia en el plano, de puntos reales $x^2 + y^2 = 1$, centrada en $(0, 0)$ y de radio unitario. Se la puede parametrizar con el auxilio de las funciones trigonométricas caracterizando sus puntos como aquellos cuyas coordenadas son de la forma $(\cos\alpha\ ,\ \operatorname{sen}\alpha)$ para algún $\alpha \in [0, 2\pi]$; pero también se la puede parametrizar de un modo más elegante por medio de funciones racionales poniendo

$$\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right) \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

A una expresión de este tipo se la denomina uniformización de la circunferencia real. Este proceso también funciona en el mundo de los números complejos $\mathbb{C}$ y Poincaré probó que era universalmente válido para aquellas funciones en las que la relación entre las variables es algebraica. Hilbert se preguntaba si tal resultado era siempre posible, fuera algebraica o no la relación.

Paul Koebe (1882-1945) y Henri Poincaré resolvieron el problema 22 y en 1909 ya se podía dar por teóricamente probado y en sentido afirmativo.

Problema 23

Se alegrará de saber, si ha llegado hasta aquí, que el problema 23 era de enunciado tan vago —o tan ambicioso— que no se le considera un auténtico problema. Hilbert convirtió el problema 23 en una larguísima exposición en la que, en definitiva, se preguntaba sobre qué futuros desarrollos le esperaban al cálculo de variaciones. Como la cuestión pertenece más al campo de la adivinación que al de la ciencia, este problema no se tiene en consideración.

Capítulo 5

Los problemas Clay

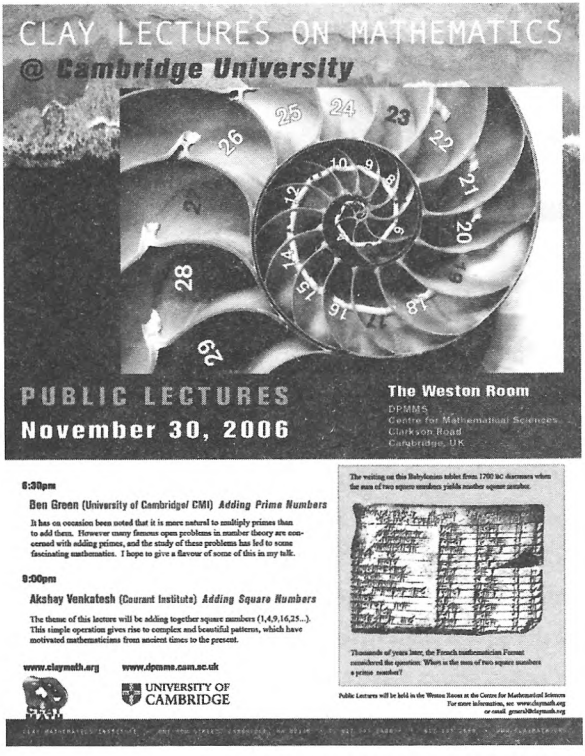
La formulación de un problema
es más importante que su solución.
Albert Einstein

En el siglo XXI las matemáticas han llegado a un desarrollo extraordinario. Anualmente se publican decenas de miles de artículos en las revistas especializadas y esto es un signo demostrativo de la vitalidad de la ciencia. Abundan los incentivos para el progreso de la matemática, en forma de empleos, de premios y de prestigio; hace poco, el columnista, escritor y matemático Keith Devlin explicaba que en el Reino Unido una compañía fabricante de automóviles había sufragado a un matemático su investigación sobre la geometría involucrada en la acción de aparcar un coche.

Son muestras de buena salud, y no es que a los especialistas les preocupe demasiado, pues la idea de que la matemática avanza un tanto al margen del sueldo y un poco a favor del conocimiento parece imponerse paulatinamente. Los problemas con los que se enfrentan los matemáticos del siglo XXI son, pues, numerosos y variados, y a más cultivadores, más incógnitas por aclarar. Hay, no obstante, un cierto consenso en considerar algunas cuestiones como fundamentales. Se supone que su resolución repercutiría en el progreso de todo el cuerpo, derramando luz por todos los rincones. Como es natural, quizá no se avance todo lo previsto, pero los avances se notarán.

Clasificar estas cuestiones fundamentales e impulsar su resolución es la tarea que se impuso el Instituto Clay. En 1998, el millonario y filántropo norteamericano Landon T. Clay, con el apoyo de su esposa Lavinia y del profesor Arthur Jaffe (n. 1937) de Harvard, creó en Cambridge (Massachusetts) el Clay Mathematics Institute. Al mismo tiempo, dotó a su fundación del dinero suficiente para instituir una generosa serie de premios e incentivos a la investigación, que culminaban en siete concesiones de un millón de dólares a quienes resolvieran lo que la comisión de expertos que los escogió denominó «los problemas del milenio». Se trata de una colección muy restringida de cuestiones, ya no debidas como en el pasado a los intereses intelectuales de una sola mente, aunque ésta fuera tan eminente como la de Hilbert. Dicho en

pocas palabras, lo que los siete problemas elegidos por la fundación venían a significar era algo así como que eran «los siete magníficos» de la ciencia del pensamiento puro. *The best of the best.*



Póster para una de las muchas actividades organizadas por el Instituto Clay.

Al poco tiempo de enunciar los problemas que iban a revolucionar la búsqueda y la investigación de los siguientes mil años, el ruso Gregori Perelman (n. 1966) daba a conocer la resolución del primero, la hipótesis de Poincaré. Una cierta desazón reina desde entonces en el mundillo matemático: ¿y si después de tanto esfuerzo para definir los grandes retos del milenio nos quedamos sin esos retos en pocos años, digamos en un siglo? Pues mucho mejor, francamente; nuestros bisnietos ya se fabricarán su propio repertorio de problemas sobre los que pensar.

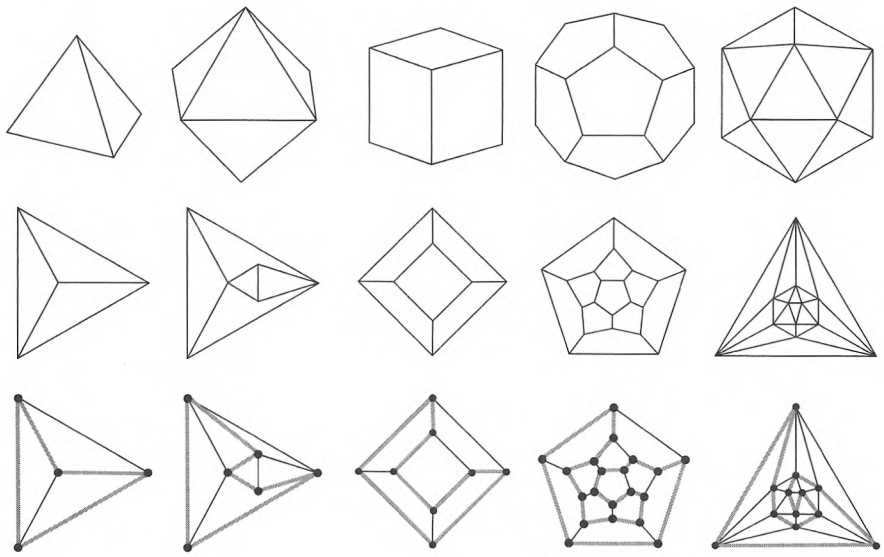
Y una cierta desazón atenaza también a quien tiene que explicar el contenido de los problemas del milenio. Algunos son comprensibles en un lenguaje más o menos sencillo, otros no. El lenguaje matemático es hoy un instrumento complejo, que almacena en sí mismo una gran cantidad de información. Cualquier enunciado en lenguaje matemático almacena una gran carga de significado previo,

y muchas cuestiones que se escriben en pocos símbolos significan en realidad cosas muy complicadas, incomprensibles a veces para quien no domina la jerga particular en la que están escritas. Resumiendo: hay problemas del milenio que requieren una fracción significativa del mismo sólo para entenderlos, no digamos ya para explicarlos.

P versus *NP*

Solucionar no es lo mismo que verificar una posible solución. En algunos casos, además, la diferencia es sustancial. Por ejemplo, pensemos en la tarea escolar, muchas veces abandonada sin encontrarle solución, de elaborar una plantilla de horarios y clases que armonicen las disponibilidades de tiempo de cada profesor enfrentadas con la elaboración de horarios compatibles para todos, respetando las preferencias de cada docente. Si se consigue salir de ese infierno calculístico, verificar si una solución es válida puede ser como coser y cantar. Es una tortura calcular, pero es cosa de nada comprobar el resultado del cálculo.

Pongamos un ejemplo más matemático: un circuito de un grafo es hamiltoniano cuando el camino que lo recorre pasa una vez por todos los nodos. Por ejemplo, los sólidos platónicos considerados como grafos son todos hamiltonianos:



Caminos hamiltonianos en los poliedros platónicos.
Bajo cada poliedro figura el grafo equivalente correspondiente y, en la línea inferior, el camino.

Buscar un camino hamiltoniano en un grafo arbitrario —no en los anteriores, que son fáciles— puede llega a ser desmotivador, larguísimo. Y, no obstante, si se encuentra uno, verificar que es hamiltoniano es fácil, salta a la vista.

El primero de los problemas Clay admite una definición en lenguaje llano: ¿las cuestiones que pueden verificarse en un tiempo razonable pueden también resolverse en un tiempo razonable? Pensemos en un número y en un presunto divisor; ¿es un divisor exacto de verdad o no? Se verifica enseguida, dividiendo. Pero hallar el divisor es harina de otro costal. Si el punto de partida es un producto de primos enormes y sus factores no se conocen, averiguarlos es una tarea ímproba (de hecho, en tal dificultad se basa la criptografía de clave pública actual) que puede tardar eones.

Llamemos *P* al conjunto de problemas *solucionables* en un tiempo razonable y *NP* al conjunto de problemas *verificables* en un tiempo razonable. El propio Instituto Clay presenta el problema *P versus NP* de un modo casi coloquial; dice así:

$$\text{¿Es } P = NP?$$

La presentación la firma Stephen Cook, el mismo que suscitó el problema en 1971.

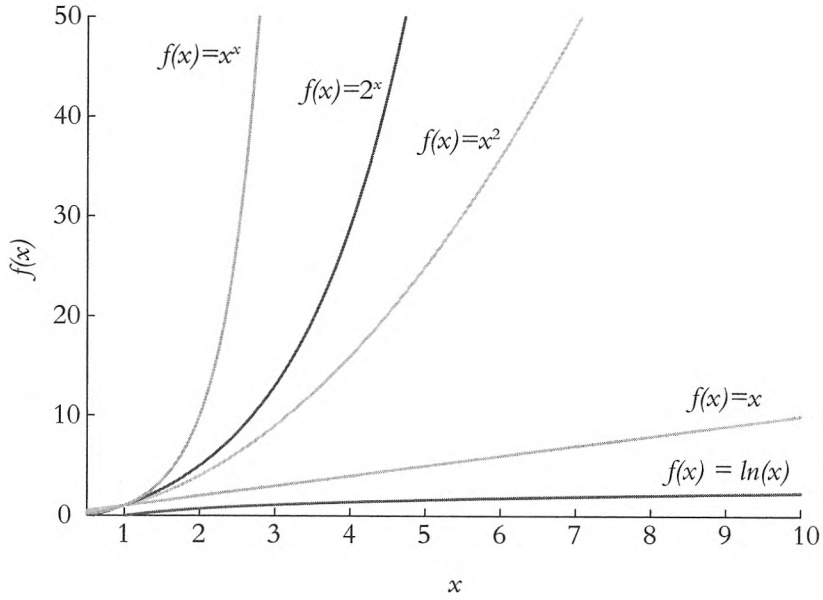
Primera cuestión previa: a partir de ahora, cuando hablemos de problemas, nos referiremos a problemas de decisión del tipo Sí-No; la cuestión que nos preocupa es la pregunta siguiente: si la respuesta a un problema es sí, y puede ser verificada con facilidad, ¿es posible que la pregunta sea también resuelta con facilidad? Ése es el sentido de la conjetura *P* versus *NP*.

P es la inicial del adjetivo polinómico y el conjunto *P* es el de los problemas solucionables en tiempo polinómico, es decir, un tiempo «normal», de nivel humano; en términos más precisos, un tiempo cuya duración es función polinómica del volumen de los datos de entrada. Expliquémonos:

Al tratar las funciones, sabemos que «crecen» a ritmo distinto. Hablando grosso modo, y basándonos en las desigualdades aritméticas:

$$log\ n \leq n \leq n^a \leq a^n \leq n^n.$$

Se puede decir que, en general, el crecimiento logarítmico es más lento que el lineal; éste crece más lentamente que el polinómico, éste es más lento que el exponencial y éste menos vertiginoso que el potencial-exponencial. Si dibujáramos unas curvas en ejes de coordenadas visualizaríamos ese crecimiento.



Curvas de crecimiento.

Una duración temporal polinómica significa simplemente que lo que se tarda no crece desmesuradamente a medida que crecen los datos de entrada si ésos son de tamaño t. Lo que se tarda es «del orden» de t^a; se tarda una potencia fija del tiempo, pero no más.

Ahora que ya sabemos con precisión qué es el conjunto *P*, vamos con *NP*. Apresurémonos a decir que *NP* no significa «No polinómico», sino «No determinista polinómico», que es muy distinto y un poco prolijo de explicar.

Empezaremos por un concepto aparentemente tan lejano como el de «máquina de Turing». Supongámonos poseedores de una computadora con la que podremos hacer todo tipo de cálculos fáciles o difíciles; eso sí, serán «deterministas», en el sentido de que obedecerán a nuestra voluntad, a una intención previa de calcular algo, de un modo secuencial, un paso tras otro. El matemático inglés Alan Turing (1912-1954) inventó unas máquinas matemáticas, una especie de idealización de las computadoras, máquinas que parecen tontas y lentísimas, pero que pueden realizar todos los cálculos aritméticos imaginables. Son las máquinas de Turing que se describen en un recuadro aparte. Las computadoras pueden ser mecánicas, eléctricas, electrónicas y, quizás en el futuro, cuánticas, pero todas son máquinas de Turing y a los ojos de los profesionales de las matemáticas las computadoras no existen: sólo hay máquinas de Turing.

Alan Turing tuvo una vida y muerte novelescas. Matemático brillantísimo y creador de las máquinas que llevan su nombre, héroe de la Segunda Guerra Mundial por sus triunfos como criptógrafo en el mítico laboratorio de Bletchley Park, se suicidó cuando comprobó la incomprensión de la sociedad de su tiempo ante su homosexualidad.

Así pues, un problema es un problema de decisión de clase *P* cuando existe una máquina de Turing determinística que resuelve el problema en tiempo polinómico.

Aclaremos ahora lo de determinístico y no-determinístico. Una eventual solución nos puede llegar de la computadora, que es una máquina determinística, pero también podemos encontrar una solución por casualidad, o a través de una fatigosa búsqueda personal consecuencia del insomnio, o por una súbita revelación de origen místico; nada impide que se tenga acceso a una solución a través de un procedimiento no-determinístico. Desde luego podemos verificar esa solución, con independencia de su origen. Eso es lo que se pretende decir con lo de no-determinístico.

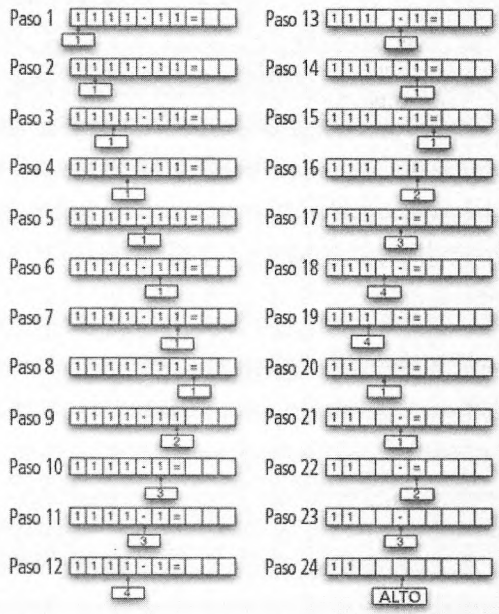
El conjunto *NP* está formado por aquellos problemas cuyas posibles soluciones —determinísticas o no— pueden ser verificadas, con la información apropiada en tiempo polinomial. Un problema *NP* lo es cuando para toda presunta solución la verificación es fácil, polinómica. Por ejemplo, un puzle de piezas estilo teselación puede ser de *NP*; si consta de un número grande de piezas distintas puede costar una eternidad resolverlo, pero en cuanto se ha resuelto es elemental comprobar que, en efecto, tesela una parte del plano.

LA CALCULADORA IDEAL

Una máquina de Turing viene a ser como el esqueleto matemático de una computadora. Consiste en una cinta infinita (o con tanta longitud como sea necesario), dividida en cuadritos en los que hay escritos los signos iniciales; un lector-escritor que lee la cinta, escribe en el cuadro después de leerlo y luego dice si se va delante o atrás y también detalla el estado en que queda la máquina, y un programa o tabla finitos que nos dicen qué se escribe dado lo que se lee y el estado actual de la máquina. Además, la máquina posee un almacén de los estados en los que se encuentra.

Normalmente, una máquina de Turing opera con 0 y 1, pero admite cualquier signo. Se trata de una imitación de la realidad que simula cualquier cálculo, pero que en principio podría simular, si se la dota de los oportunos elementos auxiliares, cualquier comportamiento de que sea capaz cualquier computadora concebible.

(Estado, Símbolo)	(Estado, Símbolo, Dirección)
(1, " ")	(1 , " ", adelante)
(1, "1")	(1 , "1", adelante)
(1, "−")	(1 , "−", adelante)
(1, "=")	(2 , " ", atrás)
(2, "1")	(3 , "=", atrás)
(2, "−")	(ALTO, " ", atrás)
(3, "1")	(3 , "1", atrás)
(3, "−")	(4 , "−", atrás)
(4, " ")	(4 , " ", atrás)
(4, "1")	(1 , " ", adelante)

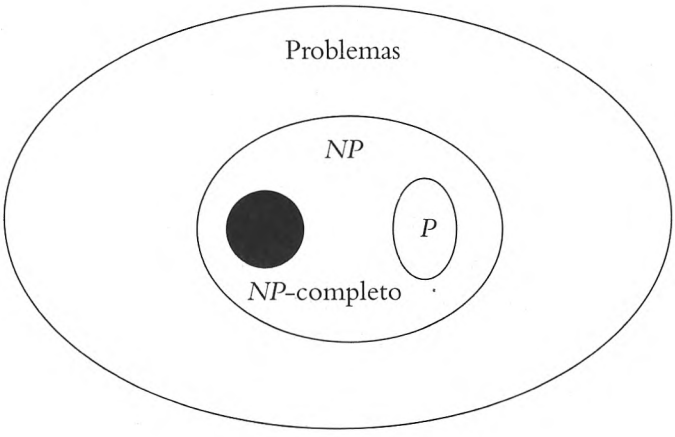


Esto es un ejemplo de máquina de Turing elemental, capaz de restar. Arriba, la tabla de la máquina; al lado, puede verse paso a paso el funcionamiento de la máquina (¡sólo resta 4-2!).

De hecho, una máquina de Turing es de algún modo una computadora sin problemas de memoria.

Obsérvese que $P \subset NP$, pues si un problema tiene solución en tiempo polinómico basta con solucionarlo para que quede automáticamente verificado. La dificultad surge cuando uno se pregunta si $P = NP$.

Como lo que sigue es bastante complicado, puede sernos útil un diagrama.



El conjunto de los problemas no-*P* (que no es el conjunto *NP*, cuidado con la nomenclatura) o complementario de *P*, es el de los problemas que no están en *P*. Sus eventuales problemas presentarán soluciones, con algoritmos aplicables en tiempo no polinómico, un tiempo enorme. Determinar todos los problemas de no-*P* parece un trabajo formidable. Dado un problema habría que ver todos sus algoritmos posibles y comprobar que ninguno es polinómico. Por decirlo así, en *P* estarían los problemas fáciles y para decidir que un problema es no-*P* habría que demostrar que es difícil en cualquier circunstancia que pueda presentarse.

Aquí nos restringiremos a *NP* que coincide en parte con no-*P*. Investigando mucho se ha llegado a un conjunto de problemas de *NP* que cumplen la curiosa propiedad de que, solucionado *uno* en tiempo polinomial, una manipulación adecuada solucionaría *todos* los problemas de *NP* tambien en tiempo polinomial. Este subconjunto de *NP* se denomina *NP*-completo.

Hay identificados muchos problemas *NP*-completos (como el conocido juego *Buscaminas*), pero por desgracia no se ha encontrado para ninguno un algoritmo en tiempo polinomial. Los problemas *NP*-completos son todos *NP-hard* (*difícil* en inglés) y no se sabe cómo abordar la cuestión de resolverlos. El conjunto de problemas *NP*-completo se define precisamente como el de los problemas de *NP-hard* que son también de *NP*. En resumen, llegados aquí, uno se ha ganado el derecho a preguntarse qué piensan los expertos, si $P = NP$ o $P \neq NP$. Su opinión se inclina por $P \neq NP$, con una mayoría del 61% y 22% de dudosos. Ahora bien, como la encuesta se hizo sólo entre cien matemáticos, la respuesta no es significativa.

Todo lo dicho hasta ahora puede parecer situado a muy alto nivel y de escasa repercusión en la realidad de este mundo terrenal, pero pensemos un poco y nos daremos cuenta de que, en el fondo, estamos hablando de codificación. En efecto, la seguridad de nuestras tarjetas de crédito, por poner un ejemplo, no es más que un aspecto, insignificante, del problema más general de la encriptación de mensajes.

Imaginemos que los mensajes se encriptaran todos usando el sistema RAS de clave pública, el más seguro y de más sólidos fundamentos existente hoy día. En el fondo, estamos hablando de la seguridad de un sistema que se sustenta en un problema *NP* como la factorización de un enorme número en dos números primos, también enormes. Nadie que no pueda factorizarlos puede romper el código. Pero si se diera el caso de que $P = NP$, querría decir que la tarea de factorizar se podría llevar a cabo en tiempo polinómico, y que, por lo tanto, existiría un algoritmo factorizador que actuaría en un tiempo razonable a la larga con computadoras lo bastante potentes.

¿De qué nos servirían todos los mensajes secretos, todas las encriptaciones, si con el auxilio de una computadora esas claves pudieran romperse? Da escalofríos pensarlo: el Gran Hermano estaría a la vuelta de la esquina.

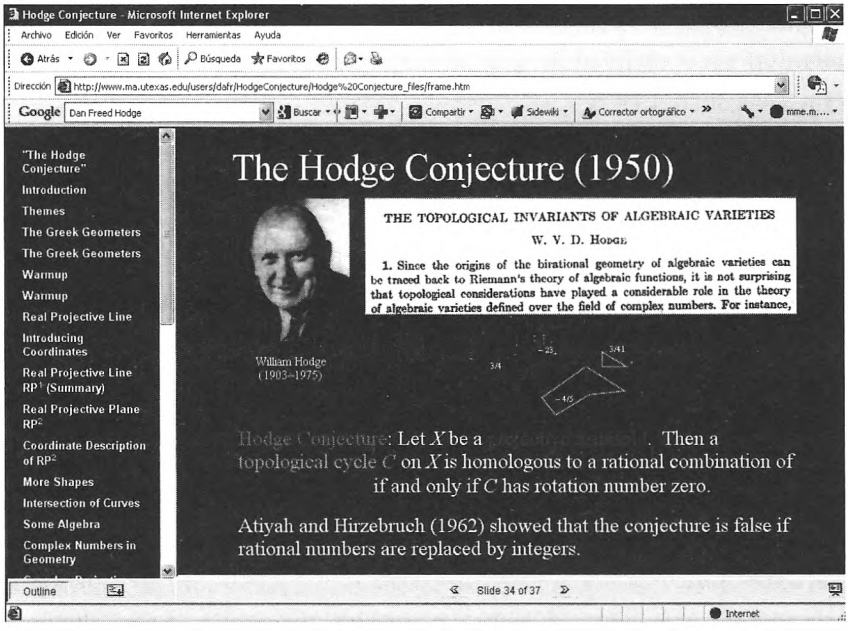
La conjetura de Hodge

El segundo problema de la lista del Instituto Clay permanecerá, como otros, oculto por el velo del misterio: su sólo enunciado ya muestra el porqué. El problema que se plantea se describe así:

> Sea A una variedad proyectiva compleja. Entonces cada clase de Hodge de A es una combinación lineal a coeficientes racionales de las clases de cohomología de la subvariedades complejas de A.

Por fortuna los problemas Clay gozan de una extendida fama de ininteligibilidad y, sobre todo en Estados Unidos, no son extrañas las sesiones públicas con videos y diapositivas destinadas a explicar los conceptos difíciles pero importantes para los legos.

Una disertación de un especialista en geometría algebraica, como la de Dan Freed, puede sernos de utilidad, aunque ello nos obligue a ir a Internet e invertir una o varias horas en seguirla.



La página web de Dan Freed dedicada a la conjetura de Hodge.

El aparente galimatías del enunciado de la conjetura se puede intentar explicar someramente del siguiente modo: durante años los geómetras han perfeccionado poco a poco sus métodos para investigar la forma de objetos muy complicados reduciéndolos a sus partes componentes más simples; es un sendero útil, pero a medida que se progresaba se iban dejando jirones de intuición y comprensión por el camino, hasta llegar al punto actual, de franco alejamiento entre la realidad y la teoría. William Vallance Douglas Hodge (1903-1975) contribuyó a una cierta simplificación de tal teoría, proponiendo que ciertas estructuras de partes componentes, llamadas clases de Hodge, son, en realidad, combinaciones lineales racionales de clases sencillas.

La otra alternativa es dedicar años al estudio de las matemáticas y especializarnos en geometría y topología algebraica. Allí nos encontraremos con objetos como los símplices, los ciclos, los bordes, las cadenas, las fronteras, las formas diferenciales, fórmulas tan misteriosas y hermosas como éstas:

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega$$

$$\cup : H^{p,q}(X) \times H^{p',q'}(X) \to H^{p+p',q+q'}(X).$$

$$\ldots \leftarrow C^{n+1}(X;G) \xleftarrow{\delta} C^n(X;G) \leftarrow \ldots \leftarrow C^0(X,G) \leftarrow 0.$$

También encontraremos las clases de homología y cohomología, los haces, los espacios fibrados, las variedades proyectivas, las subvariedades, la teoría de motivos y, por fin, las clases de Hodge y su conjetura. Con suerte, cuando hayamos conseguido llegar hasta aquí (y entenderlo todo), habrá surgido algún genio que haya hallado la respuesta a la conjetura.

El propio Instituto Clay afirma que «en el siglo XX los matemáticos descubrieron medios poderosos para investigar las formas de objetos complicados. La idea básica es preguntar hasta qué punto se puede aproximar la forma del objeto dado juntando bloques de formas geométricas simples y de tamaño creciente. Esta técnica ha demostrado ser tan útil que se ha generalizado de diferentes maneras, llevando eventualmente a herramientas poderosas que han permitido a los matemáticos conseguir grandes progresos en la catalogación de la variedad de objetos encontrados en sus investigaciones.

»Por desgracia, el origen geométrico del procedimiento se oscurece con su generalización. En cierto sentido era necesario añadir piezas que no tienen ninguna interpretación geométrica. La conjetura de Hodge afirma que para algunos tipos especiales de espacios llamados variedades algebraicas proyectivas las piezas llamadas ciclos de Hodge son realmente combinaciones (lineales racionales) de piezas geométricas llamadas ciclos algebraicos».

Si las palabras del propio Instituto ya son difíciles de comprender es que la dificultad de entender el asunto debe ser bastante grande. La exposición introductoria preparada para este problema por Pierre Deligne (n. 1944), distinguido matemático francés, ganador de una medalla Fields en 1977, sigue siendo muy difícil de entender.

Tan difícil es formular correctamente la conjetura, que el propio Hodge cometió un error al enunciarla y *l'enfant terrible* de la época, Alexandre Grothendieck (n. 1928), publicó en 1969 un artículo titulado *La conjetura general de Hodge es falsa por razones triviales*, denunciando el error. Una nueva redacción posterior más cuidadosa corrigió el desaguisado.

Una variedad es como se denomina una superficie en geometría algebraica, sólo que para simplificar las cosas la conjetura versa sobre cualquier dimensión. Normalmente, en dimensión n las variedades de dimensión k vienen dadas por sistemas de $n - k$ ecuaciones con n variables que las definen. Claro que se trata de variedades sobre los números reales, porque la conjetura de Hodge involucra los números complejos, y ya nada es representable para que pueda ser captado por nuestros sentidos.

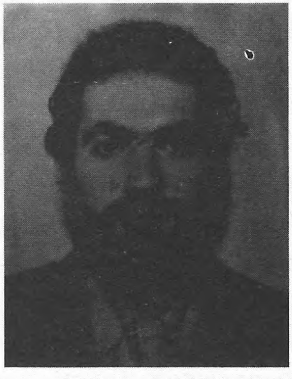
La conjetura de Poincaré

Es el único problema del milenio que ha sido resuelto. En 2002 un matemático ruso, que ya había dado muestras de gran talento y de comportamiento poco ortodoxo, Grigori Perelman (n. 1966), empezó publicar, a través de Internet, una serie de papeles encaminados a demostrar la conjetura, los cuales, a juicio de los expertos, terminaron resolviendo todas las incógnitas planteadas. Es útil saber que existe una web llamada *arXiv* en la que los investigadores pueden depositar sus resultados «en crudo», sin haber pasado el a veces larguísimo —y a la larga imprescindible— escrutinio de los expertos en la cuestión que detectarán todos los errores. Pero al parecer no los había entre los envíos de Perelman.

En 2010, tras superar todos los filtros establecidos por los prudentes estatutos de la Fundación Clay, se otorgó a Perelman el premio de $1.000.000. Las condiciones exigidas se dan por satisfechas y la conjetura de Poincaré es ya el teorema de Poincaré.

Digamos, para empezar, que Henri Poincaré (1854-1912) fue un matemático excepcional, el número uno de su tiempo. La conjetura de Poincaré —y a partir de ahora teorema— enunciada en 1904, dice lo siguiente:

MATEMÁTICOS EN SU MUNDO



Grigori Perelman.

En 2006 y en el curso del congreso de la Unión Internacional de Matemáticas celebrado en Madrid se otorgó a Grigori Perelman la medalla Fields, el máximo galardón que se concede al profesional menor de 40 años que realiza una aportación matemática de gran calibre. Perelman declinó el honor. Como hizo notar el *Daily Telegraph*, Perelman no ha sido el primero en declinar galardones; en otros ámbitos, Jean-Paul Sartre o Marlon Brando ya lo hicieron libremente antes y a Boris Pasternak le obligaron a hacerlo. Pero sorprende este despego por lo material en alguien que vive con una madre pensionista en un modesto apartamento de San Petersburgo. Tampoco es el primer caso de matemático extravagante que desprecia al mundo y sus pompas. El superdotado genio de las matemáticas más abstractas, Alexandre Grothendieck (n. 1928), que es apátrida, renunció al cultivo de su ciencia a los 62 años y parece que vive, medio oculto, en un lugar remoto del sur de Francia. Como dice De Sautoy, «se necesita estar un poco loco para dedicarse a las matemáticas». Es posible que esté en lo cierto.

«Cualquier variedad compacta simplemente conexa de dimensión 3 sin frontera es homeomorfa a la esfera.»

Fragmento de una fotografía realizada durante la conferencia de Solvay en 1911. El primero sentado por la derecha es Poincaré; a su lado se halla Marie Curie. El segundo por la derecha, ya de pie, es Albert Einstein.

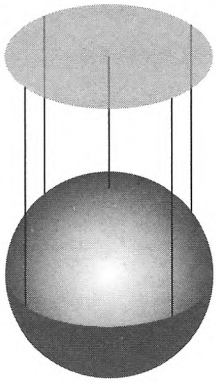
Vayamos por partes. Este enunciado un tanto intimidador es en realidad bastante sencillo de explicar. Una variedad en dimensión n viene a ser un objeto algebraico definido por una ecuación de $n + 1$ incógnitas; cuando se le exige diferenciabilidad, la variedad tiene un aspecto continuo, sin pinchos ni aristas raras. En dimensión 1, la esfera de radio r, por ejemplo, es una variedad llamada círculo y se la define como el conjunto de puntos S^1 que cumple:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

De modo análogo, la esfera de radio r es la variedad:

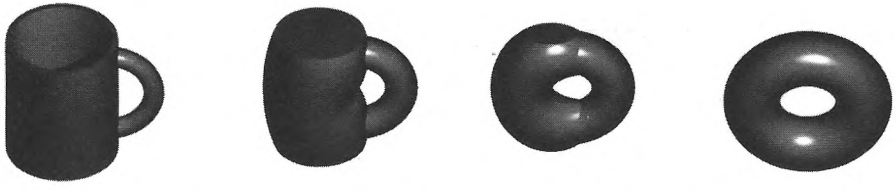
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

y comparte, con otras variedades del espacio euclídeo, la particularidad de poderse construir por deformación y pegado, a partir de trozos más sencillos.



Dos círculos, por deformación continua y pegado pueden formar una esfera en dimensión 2.

Un homeomorfismo, en topología, es toda transformación continua que conserva la forma; para entendernos, una taza de café y un donut son homeomorfos, pues hay una transformación continua, sin corte, que pasa de una a otro y viceversa. En cambio, una taza de café y una pelota no lo son, pues por mucho que se deforme continuamente una taza, no dejará por eso de tener un asa, cosa de la que no dispone una pelota.



En cambio, la pelota es homeomorfa a un cubo o a cualquier objeto compacto sin agujeros, por ejemplo, el monolito de *2001, An Space Odyssey.*

No todos los homeomorfismos son tan sencillos, pero lo dicho ya sirve para dar una idea del asunto.

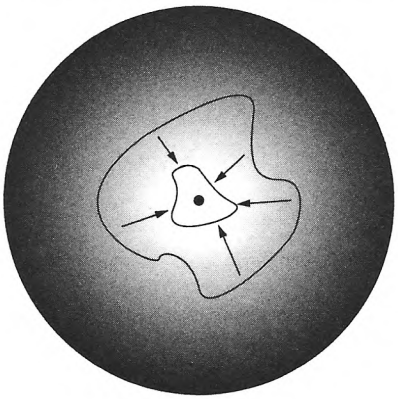
La compacidad significa, de hecho, que la variedad no es ilimitada, sino una superficie compacta. En $\mathbb{R}^n$, compacto significa cerrado y acotado.

Lo de «sin frontera» es muy sencillo. No se admiten variedades con pinchos o bordes raros. Las formas redondeadas de un elipsoide, por ejemplo, son las permitidas.

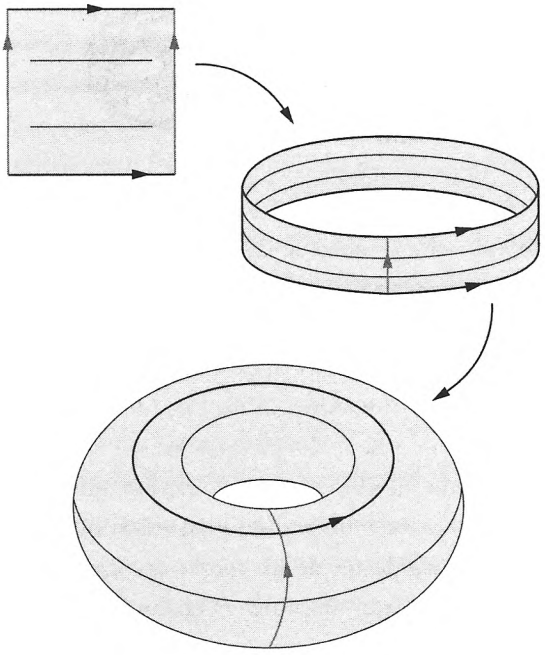
Una figura, expresándonos de modo coloquial, es simplemente conexa cuando no tiene agujeros. Y, expresándonos de un modo más riguroso, una superficie es simplemente conexa cuando dado un punto P, cualquier curva cerrada contenida en ella y que pase por P puede deformarse hasta convertirse en un punto, o dicho

de otro modo, cuando cualquier curva cerrada de la superficie es homeomorfa a un punto.

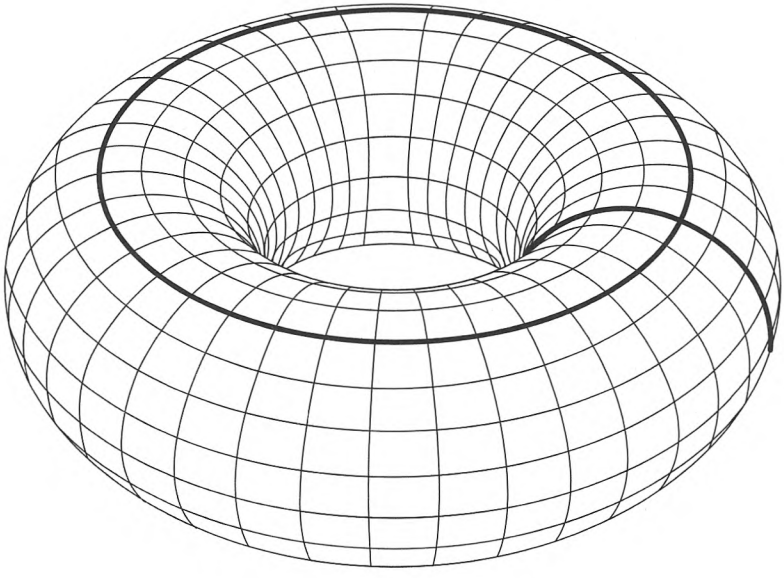
Acostumbra a ponerse el ejemplo del toro (en su significado geométrico) y de la esfera para ejemplificar las superficies simplemente conexas; si se traza una curva cerrada alrededor de un punto de una esfera es deformable hasta el punto.



Un toro o superficie toroidal en dimensión 2 es una superficie en forma de donut (sin el interior) que puede formarse uniendo los dos extremos de una superficie cilíndrica.



Si se trazan las dos curvas que muestra el dibujo de esta página, ninguna de ellas puede deformarse sobre la superficie del toro hasta quedar reducida a un punto. Lo impide la superficie misma, pues la curva «no pasa» a través del toro y habría que cortarlo.



En términos de homotopía, que es la teoría topológica que surge de aplicar los grupos a las curvas cerradas, S^2 tiene un grupo de homotopía trivial, reducido a un solo elemento, mientras el toro es de homotopía no trivial.

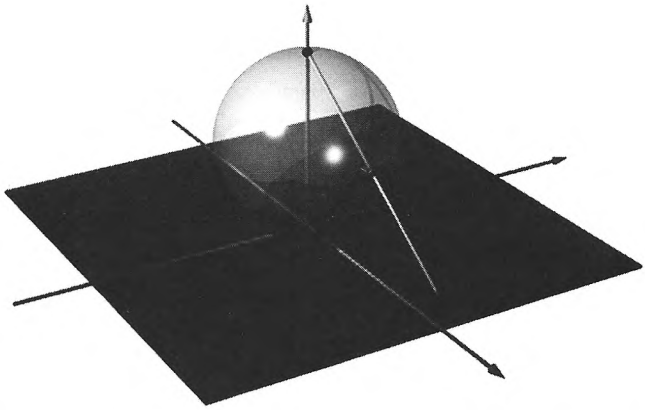
La conjetura de Poincaré nos dice, en definitiva, que, en dimensión 3, no hay más superficie «normal» y simplemente conexa que la esfera S^3. En las otras dimensiones ya estaba claro. Lo que faltaba, y costó casi un siglo, fue probarlo para la esfera de dimensión 3. Cuidado porque la esfera de dimensión 3 es una hipersuperficie, inaprehensible directamente por nuestros sentidos.

Quizás entender lo que es una esfera ayude en algo. La esfera se define en $\mathbb{R}^n$ como:

$$S^n = \{x \mid x = (x_0,...,x_i,...,x_n) \; y \; x_0^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2 = r^2\}$$

es decir, como la bola de radio r.

En la dimensión 2 se aprecia con claridad que la esfera equivale a un plano más un punto «del infinito».



La llamada proyección estereográfica es una correspondencia biyectiva y continua entre S^2 y el plano. Sólo un punto de la esfera, su polo norte, se queda sin pareja en esta correspondencia. La situación se salva asignando a ese punto el «punto del infinito» del plano, con lo que éste se «compactiza» y pasa a ser un conjunto compacto. El procedimiento funciona también del mismo modo para el círculo.

En dimensiones superiores puede procederse a manipulaciones parecidas. De hecho, se explotó una tal equivalencia para probar, como hizo un matemático de *Weltanschaung* (cosmovisión) bastante original, Stephen Smale (n. 1930), el «teorema» de Poincaré para las dimensiones $n \geqq 5$. Lo hizo en 1960. Con mayores dificultades se abordó el caso en dimensión 4; pudo con el desafío Michael Freedman en 1982. En 1986 recibió también la medalla Fields.

El único caso que quedaba pendiente era el $n = 3$, y permaneció así largos años. El medallista Fields William Thurston (n. 1946), considerado como un investigador exasperante por su meticulosidad pero brillantísimo como matemático, había establecido ya en la década de 1970 unos criterios geométricos en forma de conjetura que, si se probaban, arrastraban consigo la caída de la conjetura de Poincaré. Lo malo, como sucede a menudo con esta clase de conjeturas, es que no había manera de demostrarlas. Thurston encontró ocho estructuras geométricas y conjeturó que basándose en ellas se podrían clasificar las variedades de dimensión 3; la conjetura de Poincaré se deducía de esa clasificación.

En este momento interviene Richard Hamilton (n. 1943) un matemático americano que propuso una estrategia para atacar el problema, basándose en un concepto de connotaciones físicas que él mismo había descubierto, el flujo de Ricci. Dicho flujo es una deformación de la métrica riemanniana de una variedad, muy parecida al proceso de difusión del calor.

Perelman siguió el camino marcado por Hamilton en su razonamiento; incluso lo refinó, recurriendo a conceptos que suenan tan divertidos como «el flujo de Ricci con cirugía». Y, en efecto, suenan divertidos, porque son, para el común de los mortales, tan incomprensibles e inalcanzables como la música de las esferas. Al final demostró un resultado incluso más general que la geometrización de Thurston y, por tanto, la conjetura de Poincaré, que se sigue de ello. Eso sí, usando unas matemáticas muy por encima de las nuestras.

Tanto le parecía a Perelman que le debía a Hamilton que renunció al premio por resolver un problema del milenio argumentando —entre otras cosas— que Hamilton también era merecedor del galardón. Así que el primer millón de dólares se quedó sin un adjudicatario claro, y, en cualquier caso, no fue a parar a los bolsillos de Perelman.

La hipótesis de Riemann

Nos encontramos frente a la cuestión no resuelta que los expertos cualifican como la más importante de la matemática. Hasta aparece en el cine: en *A Beautiful Mind* el protagonista, el luego Premio Nobel John Nash, ve entorpecidos sus esfuerzos para demostrar la cuestión por las drogas que toma para combatir su esquizofrenia. De la hipótesis de Riemann ha pronosticado el reverenciado Charles de la Vallée Poussin que quien la pruebe se cubrirá de gloria. Enrico Bombieri, medalla Fields y experto reconocido en la materia, opina que la eventual caída de la hipótesis causará estragos

UN MATEMÁTICO CON SENTIDO DEL HUMOR

La hipótesis de Riemann es tan importante que hasta ha suscitado los comportamientos más extraños en las personas más equilibradas. El matemático Godfrey Harold Hardy, en cierta ocasión en la que tenía que tomar un barco para ir de Escandinavia a Inglaterra y reinaba el temporal en el proceloso Mar del Norte, envió una postal a su amigo Harald Bohr: «He resuelto la hipótesis de Riemann» era el contenido del mensaje; por fortuna Hardy llegó sin novedad a su destino y envió enseguida a Harald una rectificación desmintiendo la hazaña. La noticia no llegó a los periódicos. Hardy, no sabemos si con buen humor o con buena lógica, argumentaba el porqué de su postal: Dios, en su infinita sabiduría, de seguro que no iba a permitir que un matemático ateo se llevase a la tumba un secreto así; el buque debía fondear sin dificultad, pues de lo contrario un descreído pasaría a la posteridad rodeado de un aura romántica que Él, Dios, pero nadie más, sabía que era inmerecida.

en el tema de la distribución de los números primos. Otros, como Peter Sarnak, que ha escrito la presentación oficial del problema para el Instituto Clay, han predicho que el mundo se convertiría en algo muy distinto de lo que es hoy si la hipótesis no se verificara.

Si se trata de dinero, demostrar la hipótesis de Riemann vale más de un millón de dólares; vale mucho más en prestigio, admiración, conferencias, miradas de envidia, primeras páginas en la prensa diaria, etc. Lo cierto es que se trata de algo que lleva siglo y medio esperando una respuesta y nadie se la ha dado hasta ahora. Incluso especialistas serios y de nombradía, como el estadounidense-argentino Gregory John Chaitin (n. 1947), han dejado caer dudas sobre si una eventual demostración llegará jamás a buen término. ¿Será la hipótesis de Riemann una cuestión indecidible? Gödel probó en su día la existencia de tales sentencias: en sistemas lógicos de determinada estructura, en particular aquéllos que incluyen la aritmética elemental, siempre hay enunciados consistentes que no pueden demostrarse con las reglas del sistema. Curiosa situación en la que hay un enunciado matemático legítimo como «puede demostrarse que algo nunca podrá demostrarse».

Nada hace suponer que vaya a ser así, que la hipótesis de Riemann vaya a ser indemostrable y ha sido ya refrendada —pero nunca probada— por trillones de casos particulares que parecen blindarla. Hasta ha sido demostrada en cuerpos finitos por Deligne. Desde hace poco también se ataca la hipótesis por el flanco de la mecánica cuántica. Pero siempre queda ese cosquilleo de inquietud: ¿y si la hipótesis riemanniana está entre los problemas de inimaginable complejidad calculística, una complejidad exponencial?

Vamos con la famosa hipótesis, cuyo enunciado es bastante inocuo e incluso un tanto decepcionante, pues a primera vista no parece afectar a nada. Consideremos la función ζ (la designaremos con la letra griega zeta) compleja, es decir definida en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos con la parte real mayor que 1.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots \quad \Re(s)>1.$$

En el siglo XVIII Euler procedió a realizar con ella uno de sus usuales y vertiginosos malabarismos algebraicos y convirtió esa función en el producto infinito limitado, por arte de birlibirloque, a sólo números primos. Ello ya sugiere qué uso pensaba darle Riemann.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p \text{ primo}}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

La transformación de Euler funcionaba así:

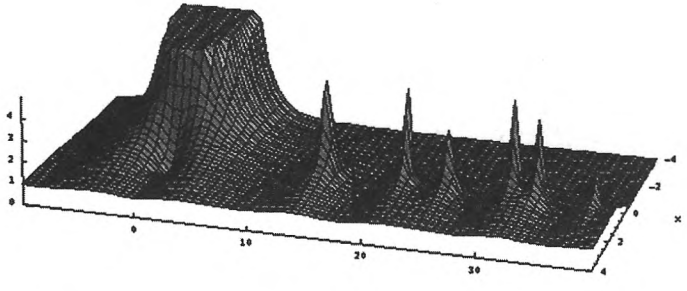
$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^s}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_2^s}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_3^s}}\ldots=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_1^s}\right)^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_2^s}\right)^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_3^s}\right)^k\right]\ldots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{p_1^s}+\frac{1}{p_1^{2s}}+\frac{1}{p_1^{3s}}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{p_2^s}+\frac{1}{p_2^{2s}}+\frac{1}{p_2^{3s}}+\ldots\right)\ldots=$$

$$=1+\sum_{1\le i}\frac{1}{p_i^s}+\sum_{1\le i\le j}\frac{1}{p_i^s p_j^s}+\sum_{1\le i\le j\le k}\frac{1}{p_i^s p_j^s p_k^s}+\ldots=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s).$$

Para quienes conozcan el análisis complejo, digamos que por el procedimiento estándar, la función zeta puede prolongarse como función meromorfa a todo el plano complejo con un sólo polo en $s = 1$, donde el residuo es 1. Ésta es la función ζ a la que se refería Riemann y ésa es la función objeto de la hipótesis.

La función zeta, al ser compleja y de variable compleja, necesita cuatro parámetros y, por tanto, cuatro ejes cartesianos para representarla debidamente; es decir, que es irrepresentable. Si nos limitamos a tres ejes y representamos en el eje vertical al módulo del número complejo de salida, $|\zeta(z)|$, que es un número real en lugar del valor complejo $\zeta(z)$, se obtiene una gráfica como la siguiente.

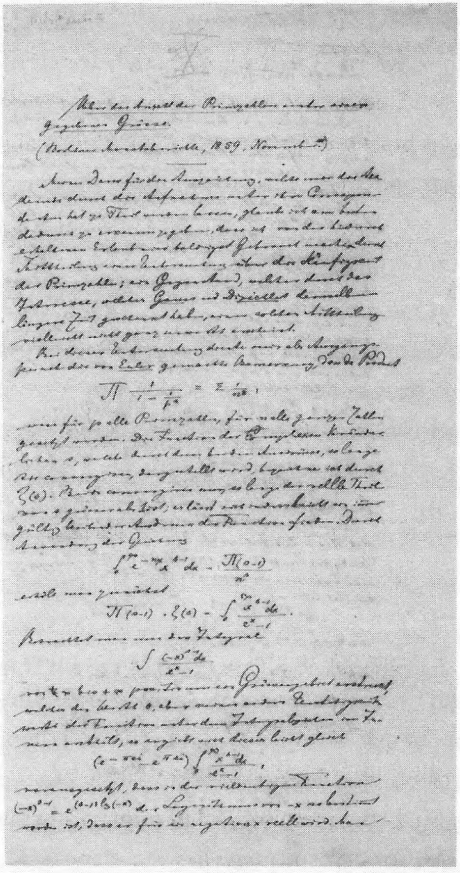


De zeta nos interesan los ceros, los puntos en los que se anula. En los números reales pares negativos, zeta se anula. Ésos se denominan ceros triviales. Los ceros no triviales son los que nos interesan. Pues bien, la hipótesis de Riemann dice que: «Todos los ceros no triviales de la función ζ (z) están en la recta de parte real 1/2.»

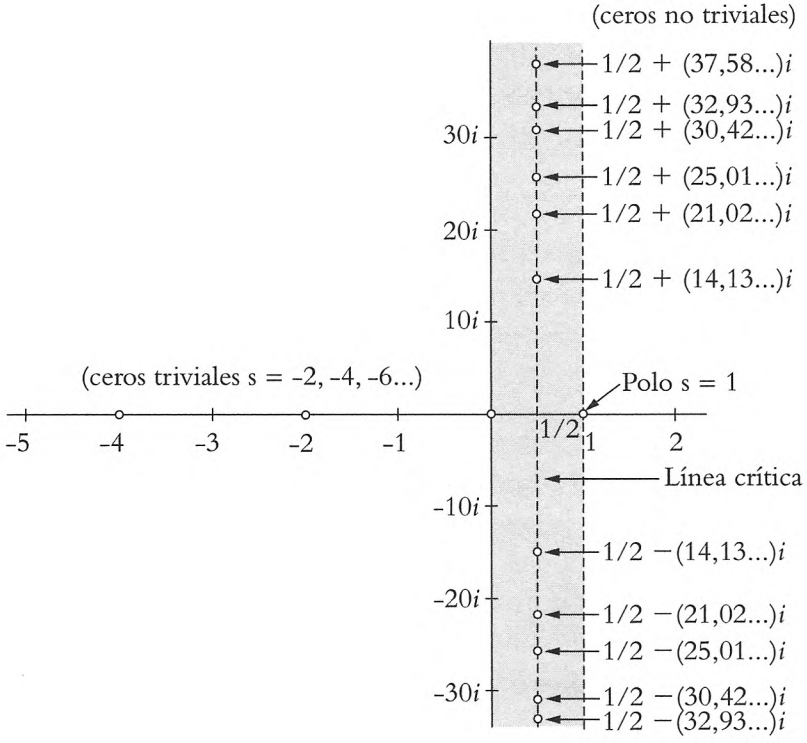
En forma menos visual pero más informativa, lo que dice la hipótesis de Riemann es que los ceros no triviales está dentro de la zona crítica, precisamente en la línea vertical $\Re(z) = 1/2$.

BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

Este insigne matemático fue el primero que utilizó la función ζ de modo sistemático en su memoria *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegenbenen Grösse (Sobre el número de números primos menores que una magnitud dada),* que vio la luz en noviembre de 1859. Riemann era ya un matemático universal, de talla formidable, respetado y admirado por todos, incluyendo al veterano Gauss, que era su superior universitario y director de su tesis doctoral. Riemann falleció de tuberculosis, una plaga en los tiempos en los que le tocó vivir, y como en el caso de otros genios que fallecieron jóvenes, es lícito preguntarse hasta dónde podría haber llegado. Todos los terrenos en los que intervino conservan su impronta; espacios geométricos de curvaturas variables y números primos son los campos en los que más se le encuentra.



Retrato del matemático alemán Riemann y reproducción de uno de sus manuscritos conservados en la biblioteca de Gotinga. En el mismo, que por cierto sólo tiene seis páginas, se expone la famosa hipótesis de Riemann. Formulada por primera vez en 1859, un siglo y medio después esta hipótesis todavía está considerada como uno de los problemas no resueltos más importantes de las matemáticas actuales.



¿Qué tienen que ver los ceros de una función compleja con los números primos? No daremos aquí una explicación exhaustiva —sería larguísimo y difícil de seguir—, pero sí una idea de por dónde van los tiros. La función $R(x)$ de Riemann ya ha aparecido fugazmente antes, al mencionar el teorema fundamental de los números primos. Su vínculo con la función ζ se pone en evidencia tras algunos cálculos:

$$R(n)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,\zeta(k+1)}\frac{(\log n)^k}{k!}.$$

La función R la introdujo el propio Riemann y suele definirse por:

$$R(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}Li(x^{1/n}),$$

donde $\mu(n)$ es un modo un tanto historiado de decir 0, +1 o −1. Se la llama función de Möbius y $\mu(n)$ vale:

- 0 si n posee uno o más factores primos repetidos.
- $+1$ si $n = 1$.
- $(-1)^i$ si n es producto de i números primos distintos.

Recordemos que:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}.$$

La función $R(x)$ es una «mejora», un refinamiento de $Li(x)$ introducido por Riemann por razones probabilísticas. Progresando en cuestiones propias del cálculo funcional puede verse como $R(x)$ tiene importantes vínculos con la función zeta y puede verse también como el conocimiento de los ceros de $\zeta(x)$ hace que se conozcan mucho mejor las oscilaciones de $R(x)$ alrededor de $\pi(x)$, la función ideal, la función eternamente perseguida definida por:

$$\pi(x) = \text{número de primos menores que } x.$$

La siguiente tabla muestra la excelente aproximación proporcionada por $R(x)$:

	$\pi(x)$	$R(n)$
100.000.000	5.761.455	5.761.552
200.000.000	11.078.937	11.079.090
300.000.000	16.252.325	16.252.355
400.000.000	21.336.326	21.336.185
500.000.000	26.355.867	26.355.517
600.000.000	31.324.703	31.324.622
700.000.000	36.252.931	36.252.719
800.000.000	41.146.179	41.146.248
900.000.000	46.009.215	46.009.949

Todo tiende a indicar que si se demostrara la hipótesis, el camino hacia el cálculo de tales oscilaciones de $R(x)$ quedaría casi expedito, y que nuestra carrera hacia el conocimiento de los primos se abriría ante nosotros como las aguas del Mar Rojo se abrieron ante Moisés y su pueblo, perseguidos por el faraón. Pero de momento, aunque los numerólogos lo esperan con impaciencia, las aguas no se abren y la tierra prometida, por el momento, no se percibe.

Mientras tanto, ya hemos encontrado docenas de proposiciones equivalentes a la hipótesis de Riemann. Una dice:

$$|\pi(x) - Li(x)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\,\log x \text{ para } x > 2656.$$

Otra, que citamos por su brevedad y belleza, es:

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n \text{ para todo } n > 5040,$$

donde $\sigma(n)$ es la vieja conocida «función divisor» que ya definimos al hablar de los números perfectos y γ la constante de Euler-Mascheroni. Y muchas más, algunas provinentes de campos en principio tan alejados como la teoría de grupos.

También existen conjeturas más fuertes que la simple hipótesis de Riemann, cuya demostración arrastraría automáticamente la de ésta. Pero no nos ocuparemos de ellas porque ya hemos dicho lo básico. Al fin y al cabo, estamos hablando de una conjetura que, en el más de los diez billones de casos escrutados («ten trillions» en USA), nunca ha dejado de cumplirse.

Los verdes campos de Yang-Mills

En el micromundo de lo muy, muy pequeño lo único que se puede encontrar con colores (e incluso con sabores) son los quarks gobernados por la cromodinámica cuántica, que, como es sabido, cuenta el color entre sus números cuánticos (hay seis quarks de *sabor* distinto, cada uno admite tres *colores*). Lo del apelativo Yang-Mills proviene de la teoría de campos, y es una variedad de campos, generalización de la electrodinámica cuántica y del simple campo electromagnético ideado por John Clerk Maxwell (1831-1879) hace ya muchos años y cuyas ecuaciones, las llamadas ecuaciones de Maxwell, dominaron la física durante mucho tiempo.

Antes de entrar en mayores profundidades, digamos que Robert Mills (1927-1999) fue un físico estadounidense que trabajó plácidamente 39 años en la misma universidad, la de Ohio, y que en 1954 dio a conocer junto con su colega Chen Ning Yang (n. 1922) un nuevo y amplio concepto de campo, que lleva su nombre.

En física cuántica las fuerzas giran y se organizan alrededor de un campo. Además las componentes obedecen a un grupo de simetría, que es el grupo llamado *gauge* de tal campo. De hecho, una definición matemática meticulosa nos llevaría a postular la

De la pareja Yang-Mills, el investigador más sobresaliente es Chen Ning Yang (en la fotografía), quien en 1957 fue galardonado con un Premio Nobel de física por su descubrimiento de la violación de la paridad.

invariancia del lagrangiano del campo sometido a la acción del grupo *gauge*, pero eso es ya muy poco intuitivo. En el electromagnetismo el grupo *gauge* es el grupo de Lie $U(1)$. En cromodinámica cuántica el grupo *gauge* es $SU(3)$. En lo que se llama hoy modelo estándar de la física cuántica, el grupo es $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ y el resultado es una teoría que explica bastante bien, en forma unificada, las fuerzas electromágnética, la interacción débil y la interacción fuerte. Sin embargo, los aspectos matemáticos de campos y grupos *gauge* no son bien conocidos en general y no parece que por ahora se pueda avanzar demasiado a través de ellos.

El Instituto Clay se pregunta acerca de los campos y, en particular, la explicación oficial del problema, firmada por el genial Edward Witten (n. 1951), pide varias cosas. En primer lugar solicita una construcción de los campos de Yang-Mills que sea válida para todos los grupos simples compactos susceptibles de ser *gauge*; además, dicha construcción debería dar cuenta de un fenómeno ya constatado como el confinamiento de los quarks, que viene a ser la imposibilidad de observarlos individualmente. O si se prefiere, la teoría debería explicar por qué vivimos en un universo que no está inundado por los quarks.

La teoría debe también explicar el fenómeno llamado *mass gap*, la ausencia de masa, salto de masa o brecha de masa; aunque tratar de explicarlo sea algo confuso sin recurrir a conceptos superiores, digamos que las partículas, que en el vacío e inmóviles se comportan de un modo muy modoso, ya no lo parecen tanto en presencia de energía. Cuando se mueven es obligatorio concederles una masa ($E = mc^2$ es la célebre fórmula de equivalencia), y ello de acuerdo con unos niveles de excitación. Entre el nivel cero y el primer nivel de energía es donde se produce esta *mass gap* y la

teoría propuesta debe explicarlo para dar cabida a las interacciones fuertes y justificar su corto alcance. No puede haber niveles de excitación arbitrariamente pequeños.

Edward Witten es el único ganador de una medalla Fields (1990) que no es matemático profesional, sino físico; ha realizado contribuciones de primer orden a la física cuántica, como la teoría de cuerdas. Su hermano Matt, no obstante, productor y guionista de series televisivas tan famosas como House, *le gana probablemente en popularidad.*

Unas ecuaciones irresolubles

El anterior problema, aunque pertenecía a la física, parecía muy moderno. No es extraño, pues su formulación obedecía a un campo críptico como la física cuántica, esa disciplina que parafraseando a Arthur C. Clarke es indistinguible para la mayoría de legos en la materia de los conjuros procedentes de la brujería. En el mundo cuántico no es posible saberlo todo de una partícula, pues cuando creemos tenerla ubicada ya no sabemos cómo se mueve; partículas sólidas atraviesan paredes impenetrables (pero no se sabe nunca si una partícula concreta lo hará o no); partículas separadas por distancias inconcebibles «recuerdan» instantáneamente su pasado y se comportan como si estuvieran juntas, etc. Es un mundo que sólo obedece a sus leyes, probabilísticas e inseguras individualmente, implacables si se las considera en conjunto.

El siguiente problema del milenio es también un problema de física, aunque no pertenece a la rama moderna; es de lo más newtoniano y clásico. Las ecuaciones de Navier-Stokes gobiernan un mundo tan macroscópico y tangible como la hidrodinámica, la ciencia de movimiento de los fluidos, y nadie queda fuera del alcance de sus dictados. El pronóstico preciso del tiempo meteorológico está regido por estas intratables ecuaciones. Lo malo es que no hay modo de conocer esos dictados, pues no hay manera de resolver esas ecuaciones.

Claude-Louis Navier (1785-1836) fue un magnífico físico e ingeniero francés, especialista en puentes, como Stokes, que sucedió a Cauchy cuando éste se retiró de la cátedra. Su fama se debe a la formulación de las célebres ecuaciones de la hidrodinámica, que comparte con sir George Gabriel Stokes (1819-1903).

Sir George Gabriel Stokes batió el record de Newton, siendo a la vez miembro del parlamento, catedrático lucasiano en Cambridge y presidente de la Royal Society.

Las famosas ecuaciones, expresadas en lenguaje vectorial para abreviar, pueden escribirse así:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0.$$

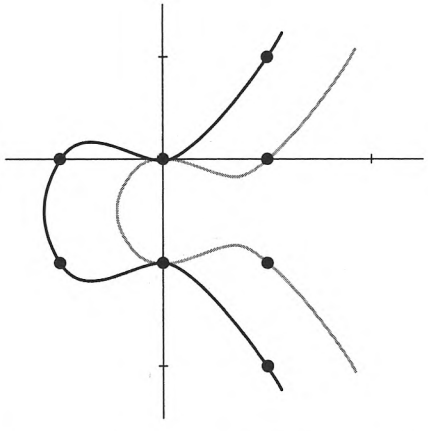
La abundancia de deltas (Δ) y nablas (∇) representan respectivamente al laplaciano y al gradiente, dos operadores del campo de las derivadas parciales. Aquí $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula, situada en $\boldsymbol{x}$ y sometida en el instante t a una fuerza $\boldsymbol{f}$. la viscosidad del fluido es $\nu > 0$ y p designa la presión.

La escritura vectorial no oculta que las ecuaciones pueden ser planas (dimensión 2) o espaciales (dimensión 3), dejando el tiempo aparte. Son expresiones muy bellas, pero hasta ahora permanecen irresolubles. Son ecuaciones en derivadas parciales no lineales y no se sabe siquiera si hay soluciones; matemáticamente exactas y deducibles, se entiende, porque soluciones aproximadas para todo tipo de condiciones iniciales sí que las hay y a ello se dedican las computadoras. Las aproximaciones numéricas por computadora son cada vez más perfectas, hasta el punto de sustituir ya, en muchos casos, a los engorrosos y enormes túneles de viento por auténticos equivalentes numéricos, que ocupan mucho menos espacio. Pero sólo son aproximaciones, pues la aparición de turbulencias es inmediata y se sabe bastante poco de las ecuaciones, salvo la peregrina afirmación de que en cuasireposo no parece pasar nada.

Para el caso bidimensional, la matemática rusa Olga Ladyzhenskaya (1922-2004) ya resolvió el problema en la década de 1960 y no son aceptables en dimensión 2 los *maelströms* o vórtices malvados como el que sacude al *Nautilus* del capitán Nemo en el último capítulo de *20.000 legüas de viaje submarino*, al menos de modo espontáneo. El caso tridimensional, por su parte, no está solucionado.

La madre de todas las conjeturas

¿Por qué designamos así al último de los problemas del milenio? Por una sencilla razón: su completa ininteligilibilidad por parte del lego en la materia (y del no experto en geometría algebraica y teoría de números en particular). Quizás unas palabras previas nos ayuden; desde hace años los algebristas se han interesado por las ecuaciones diofánticas (ecuaciones sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales), y de hecho el décimo problema de Hilbert versa sobre ello. Y si bien está probado por Yuri Matiyasevich que, como norma general no existe un algoritmo que solucione cualquier ecuación, no por eso la situación es deseperada. Hay algunas ecuaciones que sí pueden solucionarse y la conjetura de Birch-Swinnerton-Dyer, en caso de probarse, nos ayudaría a valorar el número de tales soluciones. Cuidado, que la conjetura, en caso de ser demostrada, no nos enseñaría un procedimiento, un algoritmo, pero sí que nos diría cuántas soluciones hay, lo que es muchísimo.



Dos curvas, $y^2 + y = x^3 - x^2$ (en gris) y $y^2 + y = x^3 + x^2$ (en negro): si se buscan sus puntos racionales, pasan a ser ecuaciones diofánticas. Su semejanza es mucha, por lo que es chocante saber que la curva gris posee cuatro soluciones, mientras que la de color negro posee infinitas. Si hubiéramos considerado las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 3$, la sorpresa hubiera sido mayúscula: la primera tiene infinitas soluciones racionales y la otra, ninguna.

Además, el redactado de la conjetura, complejísimo, parece el típico conejo sacado del sombrero; el experto que llega a comprenderlo se frota los ojos con incredulidad. ¿Cómo puede una función L tan historiada codificar una información tan valiosa sobre una curva E, siendo como es un objeto conceptualmente tan alejado?

La conjetura puede enunciarse así:

Sea E una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$ cuya L-función asociada designaremos por $L(E,s)$. Entonces

$$\lim_{s\to 1}\frac{L(E,s)}{(s-1)^R}=\frac{|Sha|\cdot\Omega\cdot Reg(E/\mathbb{Q})\cdot\prod_p C_p}{|E_{tors}(\mathbb{Q})|^2}.$$

En esta fórmula:

- R es el rango de $E/\mathbb{Q}$.
- Ω es o bien el periodo real, o el doble del mismo, del modelo minimal de E. Depende de si $E(\mathrm{R})$ es conexo o no.
- $|Sha|$ es el orden grupo de Tate-Shafarevich de $E/\mathbb{Q}$.
- $Reg\ (E/\mathbb{Q})$es el regulador elíptico de $E/\mathbb{Q}$.
- $|E_{tors}(\mathbb{Q})|$ es el número de puntos de torsión sobre $E/\mathbb{Q}$ (incluyendo el punto del infinito).
- c_p es un factor local elemental, igual a la cardinalidad de $E(\mathbb{Q}_p)/E_0(\mathbb{Q}_p)$, donde $E_0(\mathbb{Q}_p)$ es el conjunto de puntos en $E(\mathbb{Q}_p)$ cuyo reductor módulo p es no-singular en $E(\mathbb{Q}_p)$.

La L-función asociada es un producto infinito, muy similar a la función zeta, que se escribe

$$L(E,s)=\frac{1}{(1-\lambda^s)}\prod_{p\neq\lambda}\frac{1}{(1-a_p p^s+p^{1-2s})},$$

conlleva algunas elementos por definir: λ es el *conductor*, un número especial que depende de cada curva; $a_p = p - N_p$, que a su vez acarrea que se deba definir N_p. Ése viene a ser algo así como el número de soluciones (todas racionales, pertenecientes al cuerpo $\mathbb{Q}$) cuando se considera la ecuación módulo p.

La L-función admite un desarrollo en serie de Taylor, y la conjetura admite entonces una formulación algo menos agresiva:

«El desarrollo en serie de Taylor en el punto $s = 1$ es de la forma:

$$L(C,s) = c(s - 1)^r + \text{términos de orden superior,}$$

con $c \neq 0$ y $r = \text{ran}\,(C(\mathbb{Q}))$.»

Digamos finalmente algo sobre los protagonistas de este problema. Bryan Birch (n. 1931) fue un notable matemático inglés, miembro de la Royal Society, y sir Peter Swinnerton-Dyer (n. 1927) era un aristócrata-matemático, también miembro de la Royal Society y jugador internacional de bridge. No es extraño que la presentación de la conjetura de Birch-Swinnerton-Dyer la escribiera para el Instituto Clay alguien del perfil de sir Andrew Wiles, porque la conjetura se sitúa en idéntico terreno que el superconocido teorema de Fermat. Sólo que si se prueba la conjetura es probable que no se organice tanto revuelo, porque no nos imaginamos a ningún periodista ganándose un Pulitzer con algo tan aparentemente árido. Y si nos apuran, tan difícil.

Epílogo

Diversas son las lenguas y diversos los hombres.
Y convendrán muchos nombres a un solo amor.
Salvador Espriu

Los problemas matemáticos son un poco como las lenguas a las que se refería Espriu; son innumerables, pero son indispensables. Son el motor de nuestro pensamiento más abstracto.

Entre los problemas anteriores, ni están todos los que son, ni son todos los que están. Y hacia el final, además, los problemas citados en este libro son casi incomprensibles. Salvo algunos enunciados falsamente inocentes, los grandes problemas matemáticos de hoy están pensados por y para el especialista. Problemas los hay en todos los campos: teoría de grafos (teorema fuerte del grafo perfecto, resuelto; problema del *happy end*, sin resolver), álgebra lineal (problema de las matrices de Hadamard, sin resolver), teoría de funciones (problema de Collatz, sin resolver), teoría de números (problema del algoritmo 196, problema del 10 y los números «solitarios», ambos sin resolver), probabilidad (problema de los generadores del grupo simétrico, sin resolver), dinámica de fluidos (problema del umbral de percolación, no resuelto), criptografía (descifrado de la carta a Dorabella, sin resolver), teoría de grupos (problema inverso de Galois, no resuelto), teoría de juegos (problema del ángel, no resuelto), etc, etc.

Muchos son los problemas, pero aún más numerosas son las neuronas dedicadas a resolverlos y ni la imaginación de Gödel, con sus tesis limitadoras, ha podido ponerle límite a la facultad de deducir: sí que es cierto que hay enunciados que nunca podremos demostrar, pero nada nos impide demostrar que un enunciado es indemostrable.

Bibliografía

Cipra, B., *What's Happening in Mathematical Sciences*, 7 vols., American Mathematical Society, Providence, 2006.

Courant, R., Robbins, H., *¿What Is Mathematics?*, segunda edición a cargo de Ian Stewart, Oxford University Press, Oxford, 1996.

De Sautoy, M., *La música de los primos*, Acantilado, Barcelona, 2007.

Devlin, K., *The Millennium Problems*, Barnes and Noble, Nueva York, 2006.

Dunham, W., *Journey to Genius: The Great Theorems of Mathematics*, Penguin, Londres, 1991.

Jacobs, H., *Mathematics: A Human Endeavor*, W.H. Freeman, Nueva York, 1982.

Roman, M., *Symmetry and the Monster*, Oxford University Press, Oxford, 2006.

Singh, S., *El enigma de Fermat*, Planeta, Barcelona, 2010.

Yandell, B.H., *The Honors Class: Hilbert Problems and their Solvers*, A.K. Peters, Nueva York, 2002.

Índice analítico

Abel, N. 72
Aiken, A.C. 9
Aleph 105
algoritmo 86-87, 110, 114, 128-129, 148
ángulo 17-21, 66
anomalía 46
Appel, K. 87, 90
área 11-12, 29-31, 33, 38, 46
arista 16-17, 62-63, 133
Aristarco de Samos 44
Arnold, V. 112
Arquímedes 12, 18-20, 19-31, 108
Artin, E. 110, 114
axioma 106-107, 108
  de Zermelo-Fraenkel 97, 107

baquistócrona 36
Beal, A. 95
Bernoulli 33-35, 48-49, 56
Bernstein, S.N. 116
Bieberbach, L. 94-95, 115
binario, sistema 27
Birch, B. 148, 150
Bolibruch, A. 119
Brahe, T. 44-45
Branges de Bourcia, L. de 95
Brun, V. 94

Cantor, G. 104-106, 111
Cardano, G. 20, 70-71
cardinal 104-105
Catalan, E. 98
cateto 21
Chaitin, G.J. 139
Chen Jing-Run 54, 56, 59
Chen Ning Yang 144-145
cicloide 32-37
cilindro 29-31
circuito hamiltoniano 86, 123-124
clase 102-104, 126, 129-131
Clay
  fundación 9, 132
  Instituto 54, 109, 121-122, 129, 131, 145
  problemas 121-150
coeficiente 15, 69, 110, 112, 114, 129
Cohen, P. 106-107
cohomología 113, 129, 131
combinación lineal 17, 129-130
compacto 134, 137, 145
computadora 42, 90-91, 93, 125-129, 147
conexo 149
cónica 31
conjetura
  de Goldbach 52-56, 59
  de los cuatro colores 87-90
conjunto 72, 97, 101-107, 124-128, 137
constante 12, 51, 54, 78-79, 92, 144
Conway, J.H. 69, 79
Cook, S. 124
coordenada 36, 48, 55, 119, 124
Copérnico, N. 44-46
coplanar 57

coseno 69
cuadrado mágico 99
cuadrática 110
cuadratura 11, 13, 15
cuártica 71, 77
cuboide 61-63
cuerpo 17, 56-58, 111, 139, 148

Davis, M. 110
decimal 14, 49, 78
decisión 110, 124, 126
Dedekind, R. 84
Dehn, M. 108
Del Ferro, S. 69-71
Deligne, P. 131, 139
Delos 15-16
densidad 39-41, 55, 91
derivada parcial 118, 147
diagonal 21, 22, 61, 98
diámetro 12
diferencial
  cálculo 31, 47, 51
  ecuación 22, 48, 56, 118-119
  forma 130
dimensión 40-41, 115-116, 131-137
distancia 23, 31, 48, 64, 86, 146
divisor 23, 25, 28, 124, 144

ecuación 40, 61, 69-73, 146-149
  diofántica 61, 84, 110, 148
Elementos 9, 22-23, 27, 66
elipse 46
Elkies, N. 84
empaquetamiento 39-41, 116
enteros cuadráticos 84
epiciclo 44-45

esfera
  celeste 44, 47
  figura geométrica 29-31, 38-41, 116, 133-138
espacio 23, 39, 105, 115, 133, 141
estadística 79
Euclides 9, 11, 22-28, 66-67
Eudoxo de Cnido 12, 30
Euler, L. 13, 27, 43-79, 81, 84, 139-140
exhaución 12, 30

factor 24-27, 84, 95, 124, 143, 149
factorial 73, 86
Fedorov, E. 115
Fermat, P. 67-68, 81-85, 95, 97
Ferrari, L. 70-71
Fields 83, 131, 132, 137, 138, 149
Fior, A.M. 70
flujo de Ricci 137-138
foco 45
forma modular 85
fractal 10, 55
Freedman, M. 137
Fuchs, L. 119
función 76, 85, 94, 112-120, 124, 142-144, 149
  analítica 116, 118
  divisor 25, 27, 144
  holomorfa 94
  zeta 51, 76, 79, 139-141, 143, 149

Galilei, G. 34
Galois, É. 72-73, 151
Gauss, C.F. 66-68, 75-76, 110, 141
Gelfond, A. 109

geodésica 108
geometría algebraica 113, 129, 131, 148
Germain, S. 84
Giorgi, E. de 116-117
Gödel, K. 106-107, 110, 139, 151
Goldbach, C. 52-56, 59
grafo 65, 86, 87, 89
  hamiltoniano 86, 123-124
Grothendieck, A. 131, 132
grupo 72-73, 108, 115, 119, 136, 144-145, 149
  gauge 144-145
  de Lie 108, 145
Guthrie, F. 89
Guy, R. 63, 79

Hadamard, J. 76, 151
Haken, W. 87, 90
Hales, T. 38, 42
Hamilton, R. 137-138
Hardy, G.H. 91-92, 138
Hasse, H. 111
Heawood, P. 89
Heesch, H. 89, 116
heliocéntrico 44, 46
hexágono 38
Hilbert, D. 77, 81, 101-120, 121, 148
hipotenusa 21
hipótesis
  de Riemann 76-77, 95, 109, 138-144
  del continuo 101, 106-107
Hodge
  clase y conjetura 129-131
  Hodge, W.V.D. 130-131
homeomorfismo 134
Huygens, C. 37

infinito 23-25, 28, 84, 104-105, 139
integral 31, 50, 76, 118
invariante 85, 113
isoedral 115-116

Kempe, A. 89
Kepler, J. 38-42, 44-48
Kintali, S. 59
Koebe, P. 120
Kolmogorov, A. 112
Königsberg 63-66
Kronecker, L. 111-112
Kummer, E. 84

Ladyzhenskaya, O. 148
Lagrange, J.L. de 57-58, 71, 114
Lamé, G. 84
Landau, L. 59
Landry, F. 68
Legendre, A.M. 58-60, 75, 84, 109
Leibniz, G.W. 36, 49
límite 13, 30-31, 54, 75, 78
Liouville, J. 73
Littlewood, J.E. 91-92
logaritmo 75, 78
Lovelace, A. 28

máquina de Turing 107, 125-127
Mascheroni, L. 78
Matiyasevich, Y. 110, 148
matriz 98
Maxwell, J.C. 144
mecánica 30, 45, 48, 125, 139

Menger, K. 86
Mengoli, P. 49
Mersenne, M. 27-28
Mihailescu, P. 98
Mills, R. 144
Möbius 142
monodromía 118-119
Morgan, A. de 89
múltiplo 73, 84

Nagata, M. 113
Nash, J.F. 117, 138
Navier, C.L. 147
Newton, I. 11, 17, 36, 47-48, 56
Nicely, T. 90, 93
NP-completo 128
numerable 104
número
  algebraico 15, 69, 79
  amigo 28-29
  complejo 51, 69, 85, 109, 120, 131, 139
  compuesto 23-25, 27, 67, 73-74
  construible 15, 17, 20
  de Skewes 77
  entero 22, 52, 54, 61, 78, 81, 90, 111
  ideal 84
  perfecto 26-27
  primo 23-28, 52-60, 67-78, 90-99
  primo gemelo 59, 73, 90-94
  racional 22, 61, 79, 111, 148
  semiprimo 54, 59
  trascendente 15, 51, 79, 109

órbita 44-47, 56-58, 115
ordenador 42
óvalo 113

P versus *Np* 86, 123-129
Pappo de Alejandría 37
Perelman, G. 122, 132, 138
periodo 9, 32, 46, 73, 149
permutación 72
Pitágoras 21-23, 25, 61
planeta 43-47, 56, 58
Poincaré, H. 57, 120, 122, 132-138
poliedro 47, 115-116, 123
polígono 13, 38, 66-69
polinomio 49, 67, 69, 83, 110, 112, 114
Pólya, G. 115
prisma 37-38
problema de Basilea 48-52
programación lineal 42
Putnam, H. 110

quark 144-145
quíntica 71

radical 73, 112
reciprocidad 109-110
reflexiva 102
regla y compás 15-18, 20, 66, 68-69
Reinhardt, K. 116
relación de equivalencia 102-103
Ribet, K. 85
Riemann, B. 51, 54, 76, 119, 138-144
Robinson, J. 110
Ruffini, P. 72
Russell, B. 97, 106

Schneider, T. 109
Schnirelmann, L. 54
Schubert, H.C.H. 113
segmento 20, 54
seno 20, 66
serie 18, 49-50, 77, 94, 105
  de Taylor 49, 149-150
Shimura, G. 85
Siegel, C. 111
simétrica 102
Simó, C. 58
singularidad 57, 118-119
Smale, S. 137
soluble 73
Stäckel, P. 90
Stokes, G.G. 147
sucesión 17, 23-24, 73
Sundman, K.L. 57
Swinnerton-Dyer, P. 150

Tait, P.G. 98
Taniyama, Y. 85
Tartaglia (Fontana, N.) 70-71
tautócrona 36-37
Taylor, R. 82
teselación 37-38, 115-116, 126
tetraedro 108
Thurston, W. 137-138
tiempo polinomial 126, 128
topología 65, 114, 130, 134
toro 134-136
transfinito 104-105
transitiva 102
triángulo 21, 57
trigonometría 20
trisección 20
Turing, A. 125-126

Ulam, S. 60
uniformización 119-120

Vallée Poussin, C. de la 76, 138
variaciones 34, 35, 116, 118, 120
variedad 113, 119, 131, 133-137, 144
vector 118
Vinogradov, I. 54, 78
volumen 16, 29-31, 39, 108
Von Lindemann, C.L.F. 13, 15

Wantzel, P. 16, 20
Waring, E. 77-78
Wiles, A. 81-83, 85, 97, 150
Witten, E. 145-146