La poesía de los números

El rol de la belleza en matemáticas

Antonio J. Durán

El mundo es matemático

La poesía de los números

El rol de la belleza en matemáticas

El diccionario establece con respecto a las matemáticas que son una ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números o figuras geométricas, y sus relaciones. No se incluye en esa definición, sin embargo, un hecho fundamental: lo que guía al matemático, la más de las veces, es la emoción poética y el sentido de la belleza. El propósito del presente libro es ilustrar, mediante diversos ejemplos de la historia de la disciplina, la importantísima dimensión estética y emocional de la ciencia matemática.

© 2010, Antonio J. Durán Guardeño por el texto.
Autor representado por Silvia Bastos, S.L. Agencia Literaria.
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Babel, disseny i maquetació, S.L.
Fotografías: Getty Images, Corbis

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6978-2
Depósito legal: NA-1671-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. Del lugar que ocupa la belleza en las matemáticas 9
«Infundir deleite espiritual» 10
El Partenón y las matemáticas de Arquímedes: edificando con ideas 11
La muerte de Arquímedes y su valía como ingeniero 14
Leyendas sobre Arquímedes 17
La cuadratura de la parábola 20
Matemáticas: ¿creación o descubrimiento? 26
El *Método* de Arquímedes y las fuentes escritas 27
El códice C 30
Últimas peripecias del palimpsesto de Arquímedes 33

Capítulo 2. ¿Por qué es difícil apreciar la belleza de las matemáticas? 35
Los cincos sentidos y las bellas artes 35
La pintura 35
La música 39
El caso de la gastronomía 40
La literatura 41
Cuando cinco sentidos no son suficientes 42
La técnica de las *vidas cruzadas* 44
Circunferencias tangentes, aproximación racional, ecuaciones diofánticas y *La colmena* de Cela 46
Doña Rosa, o las construcciones geométricas con circunferencias tangentes 47
Martín Marco, o la aproximación racional de números irracionales 52
Doña Rosa-Martín Marco, Ford-Dirichlet y Hurwitz 61
Julita, o la ecuación diofántica $p^2 + q^2 + r^2 = 3pqr$ 65
La ecuación de Markov 70

Capítulo 3. Lo abstracto y lo emocional: las matemáticas y la condición humana 75
Las matemáticas y sus circunstancias 76

Fractales y dimensión de Hausdorff 78
Un ejemplo a partir de las circunferencias de Apolonio 81
Un ejemplo a partir de un triángulo 83
La naturaleza fractal del *drip and splash* de Pollock 87
Hausdorff: el matemático más borgiano 89
«Coronas marchitas en el santuario de la vida» 93
Coda 97

Capítulo 4. Objetivo: la belleza de los razonamientos matemáticos 99
El inglés que no amaba a Dios 99
Apóstoles 101
La relación con Ramanujan 103
Arte y matemáticas: ¿finalidad sin fin? 105
Generalidad y profundidad 108
Un ejemplo de Euler como punto de partida 109
Las reflexiones de Hardy, aplicadas 114
Inesperada, inevitable, económica e iluminadora 117
Los infinitos de Euler y lo sublime de Kant 119
Con todo el encanto de las exploraciones geográficas 123

Capítulo 5. Historia y belleza 125
De la *Venus de Willendorf* a los *ready-made* de Duchamp 125
De los babilonios a la teoría de conjuntos 130
La víbora en su nido 133
Cantor y la esencia libertaria de las matemáticas 137
La demostración de Cantor 139
El infinito absoluto y el legado de Cantor 140
El colapso de un genio 142

Bibliografía 147

Índice analítico 149

Prefacio

No sé dónde leí una vez que la poesía es verdad indemostrable. La poesía pretende, según el diccionario, manifestar la belleza o el sentimiento estético por medio de la palabra, en verso o en prosa. Para las matemáticas, el diccionario establece que son una ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones. Aunque debería, no se incluye en esa definición un hecho fundamental: que, a menudo, es la emoción poética, el sentido de la belleza, lo que guía al matemático cuando deduce o decide qué propiedades de los números o los entes abstractos va a estudiar. Los académicos de la lengua, más apegados a las cosas de las letras que a las de los números, no parecen haber advertido la inextricable ligazón entre matemáticas y belleza, de la que alguien dijo que era la verdadera guía en los grandes, y no tan grandes, descubrimientos matemáticos.

Esa importancia de los valores estéticos en las matemáticas, que las sitúa a medio camino entre el arte y la ciencia, establece, además, una inevitable trabazón entre la ciencia abstracta por excelencia y la sensibilidad emocional propia de la especie humana. «Puede ser sorprendente ver invocada la sensibilidad emocional a propósito de demostraciones matemáticas —escribió Henri Poincaré—, las cuales parecería que pueden interesar únicamente al intelecto. Esto sería olvidar el sentimiento de la belleza matemática, de la elegancia geométrica, que constituye un verdadero sentido de lo bello, conocido por todos los matemáticos y que con seguridad pertenece a la sensibilidad emocional.»

De todo esto, de la belleza de las matemáticas, tan real como difícil de apreciar, de las circunstancias emocionales indisolublemente unidas a esta ciencia singular, y de algunas otras cosas relacionadas, tratará este libro. Su propósito será ilustrar la bondad estética de las matemáticas, y todo el conglomerado emocional que las rodea, con un puñado de bien escogidos ejemplos; no se pretende, pues, enhebrar un elaborado discurso teórico, ni amontonar razones, argumentos o proclamas a favor de las tesis aquí defendidas; teorizar en exceso sobre la belleza de las matemáticas sería tan absurdo como explicar, y no soy el primero en decirlo, por qué la *Novena sinfonía* de Beethoven es bella.

Ese ilustrativo puñado de ejemplos estará adecuadamente arropado por su contexto histórico y emocional; conformará un mosaico de historias rico e interesante, donde se dan cita episodios relevantes del devenir de la humanidad en los últimos

veinticinco siglos. Para resaltar la complejidad de la naturaleza humana, que esos ejemplos y sus circunstancias dejan traslucir, he procurado dotar al texto de cierta tensión narrativa, especialmente en momentos de intensidad emocional. Y, naturalmente, no he evitado, sino todo lo contrario, la excursión relajada por otras artes más ortodoxas como la pintura, la literatura o la arquitectura, bien sea para sugerir coincidencias o para insinuar diferencias.

A fin de cuentas las matemáticas son verdades demostradas, por lo que su universo no debe andar demasiado alejado del poético.

Capítulo 1

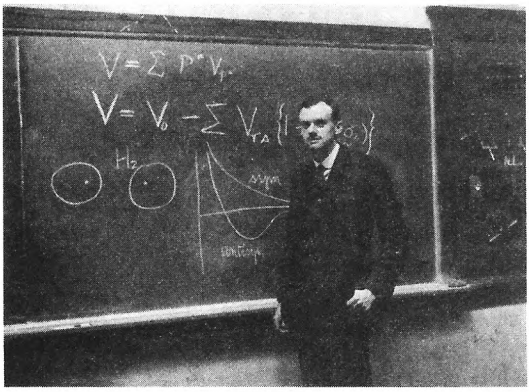
Del lugar que ocupa la belleza en las matemáticas

Si paramos al azar a alguien por la calle y le preguntamos por la belleza de las matemáticas seguramente torcerá el gesto; y, sin embargo, en el imaginario colectivo existe la impresión de que las matemáticas están impregnadas de elegancia y de armonía, hasta el punto de reflejar en sus razonamientos cierta singular belleza. Como tantas otras cosas en la cultura occidental, la existencia de esa conexión entre belleza y matemáticas seguramente empezó a interiorizarse a raíz de los juicios de esos grandes creadores de opinión que fueron los filósofos clásicos griegos. Para Platón, las cualidades de medida y proporción, esencia de la matemática griega, son sinónimo de belleza; mientras que para Aristóteles: «Las formas que mejor expresan la belleza son el orden, la simetría, la precisión. Y las matemáticas son las que se ocupan de ellas especialmente». Después han sido legión los científicos y pensadores que a lo largo de la historia han loado la belleza de las matemáticas. «La geometría es el arquetipo de la belleza del mundo», escribió el astrónomo, astrólogo y matemático Johannes Kepler en el siglo XVII; y, más recientemente, ya en el siglo XX, nos encontramos con frases como esta del filósofo y lógico Bertrand Russell: «Las matemáticas no solamente poseen la verdad, sino la suprema belleza, una belleza fría y austera, como la de la escultura, sin atractivo para la parte más débil de nuestra naturaleza»; o esta del físico y Premio Nobel Paul Dirac: «Toda ley física debe tener belleza matemática».

Y, con todo, a nadie extrañará ese gesto torcido que, con toda probabilidad, pondrá nuestro viandante anónimo nada más le preguntemos por la belleza de las matemáticas. Debe de ser que con la belleza de las matemáticas ocurre como con los clásicos: casi todo el mundo da por hecho que existen, aunque son pocos los que han experimentado su magia.

Como inevitable punto de partida, este libro comienza proclamando esa singular percepción de nuestro imaginario colectivo: hay belleza en las matemáticas. Aunque, para matizar un comienzo que a muchos lectores se les antojará excesivamente optimista, debo inmediatamente aclarar que es difícil apreciarla. Pero cada cosa a su tiempo. Este primer capítulo estará dedicado a explicar dónde reside esa belleza que

damos por seguro que existe en las matemáticas, mientras que será en el siguiente donde se discutirá la razón o razones que hacen difícil su apreciación. Aunque, antes de nada, conviene comenzar precisando los términos sobre los que se va a discutir: belleza y matemáticas.



Paul Dirac (1902-1984), físico británico que realizó numerosas aportaciones a la mecánica cuántica, es una de las muchas personalidades de la ciencia que han puesto de manifiesto la relación entre belleza y matemáticas.

«Infundir deleite espiritual»

Sobre lo que pueda ser la belleza se han escrito muchos y sesudos ensayos, y tenemos, además, opiniones que van de lo más inquietante a lo más dulzón. A la primera categoría pertenecen los versos de Rainer Maria Rilke (*Las elegías de Duino)*: «Pues la belleza no es nada sino el principio de lo terrible, lo que somos apenas capaces de soportar, lo que sólo admiramos porque serenamente desdeña destrozarnos»; a la segunda, la frase de Stendhal: «La belleza es una promesa de felicidad». Para los propósitos de este libro, no será necesario adentrarse en ningún tratado de estética en busca de alguna sofisticada definición de belleza, o de valor estético. Bastará con acudir al diccionario de la Real Academia Española y consultar la entrada correspondiente a *belleza* —ya veremos lo que tal aventura nos depara, porque en este caso, como casi siempre, ha sido una aventura acudir al diccionario—.

En primer lugar leemos: «Belleza. Propiedad de las cosas que nos hace amarlas, infundiendo en nosotros deleite espiritual». A mí me parece que ésta es una magnífica definición porque pone de manifiesto que la belleza de un objeto conlleva su capacidad para afectarnos; en esto los académicos coinciden con Voltaire que en su diccionario filosófico escribió: «Para el gusto no basta ver o conocer la belleza de una obra: hay

que sentirla, ser afectado por ella». En el caso de las matemáticas, refleja muy bien la peripecia personal de la mayoría de los matemáticos que he conocido a lo largo de mi carrera científica —desde luego la mía propia—: atribuimos la atracción, curiosidad e interés que en grado superlativo sentimos por las matemáticas —¿será eso amarlas?— a la belleza que encontramos en ellas, a ese *deleite espiritual* que sentimos cuando a ellas nos dedicamos, a la recompensa de placer estético que nos proporcionan.

La encendida felicitación a los académicos de la lengua que me proponía hacer, por su definición de belleza, se trunca trágicamente cuando leo el resto de la entrada: «Esta propiedad (la belleza) existe en la naturaleza y en las obras literarias y artísticas». Imperdonable error el de los adalides de la gramática, que olvidan incluir en ese paraíso de las obras bellas a las obras científicas; ¡como para no volver a poner un acento más en este libro!

En cuanto al término «matemáticas», lo usaré en un sentido muy libre; por supuesto incluirá las ideas, conceptos y razonamientos matemáticos, y las combinaciones entre ellos. A veces usaré la expresión «razonamientos matemáticos» como sinónimo de matemáticas, con toda la amplitud del término, mientas que en otras ocasiones se referirá a objetos más específicos, ya sean enunciados de teoremas, definiciones de conceptos, demostraciones, o también teorías enteras, e incluso razonamientos más o menos heurísticos o con poca fundamentación lógica.

El Partenón y las matemáticas de Arquímedes: edificando con ideas

En este libro damos por seguro que hay belleza en las matemáticas. El que tomemos esa afirmación por una verdad indemostrable —con el significado poético que toda verdad indemostrable conlleva—, no nos impide discutir sobre algunas de las incógnitas que provoca. Aquí trataré de responder a la pregunta más inmediata que esa afirmación produce: hay belleza en las matemáticas, pero ¿dónde hay que buscarla?, ¿dónde reside?

Mejor que enhebrar un discurso teórico será ilustrar con un ejemplo. Y para ello nada mejor que establecer un paralelismo con alguna de las bellas artes. Como se dijo en el prefacio, eso será lo habitual en este libro: acudir a ejemplos correspondientes a las bellas artes con propósito ilustrativo y clarificador —tenga sin embargo en cuenta el lector que, en algunos casos, serán ejemplos arriesgados—.

Así que en vez de preguntarnos dónde reside la belleza de las matemáticas nos vamos a preguntar dónde reside la belleza del Partenón.

El Partenón empezó a construirse en la Acrópolis de Atenas hacia el año 447 a.C., unas décadas después de que los persas saquearan la ciudad y arrasaran la Acrópolis; su construcción duró casi una década, aunque todavía llevó unos años más completar su decoración estatuaria, mayormente obra del escultor Fidias. Después de templo griego fue también iglesia, mezquita y, en el siglo XVII, los turcos lo convirtieron en depósito de pólvora. Una bomba veneciana lo hizo estallar (1687), causándole severos daños. A principios del siglo XIX, los ingleses desmontaron, con la excusa del deterioro que sufrían, buena parte de los motivos escultóricos que adornaban frisos y frontones del edificio, que desde entonces, y a pesar de las solicitudes griegas, se muestran en el Museo Británico.

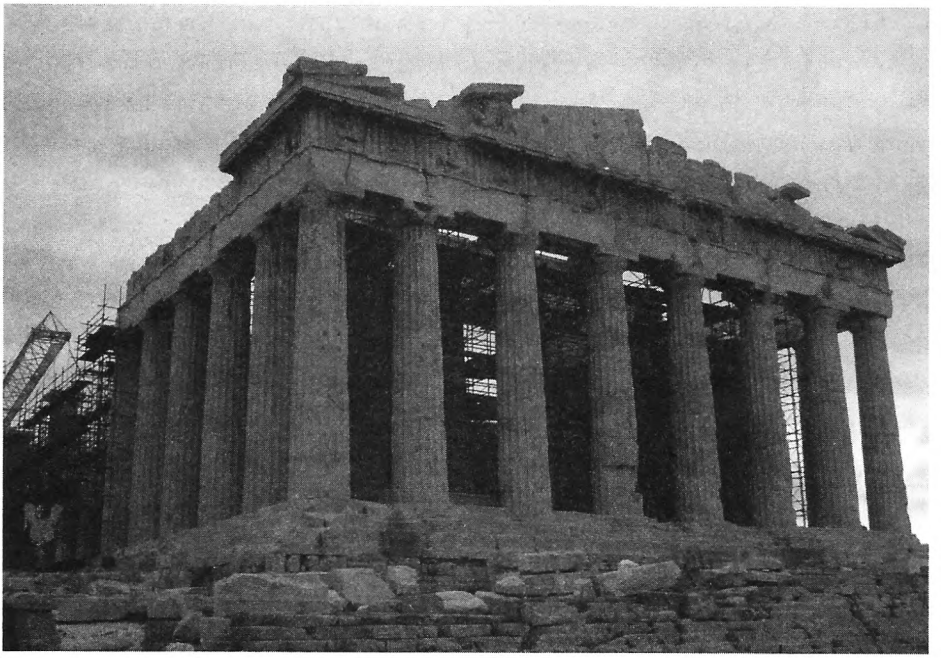
Los restos que todavía hoy se conservan son, sin embargo, suficientes como para que podamos responder a la pregunta: ¿dónde reside la belleza del Partenón?

Mediante una atenta observación del edificio comprobamos que sus dimensiones son armónicas; sus columnas, de proporciones adecuadas, con modificaciones para corregir la ilusión óptica: levemente inclinadas hacia dentro; diámetro, ligeramente ampliado en su parte central, columnas más gruesas en los extremos; incluso las líneas horizontales del edificio —las líneas horizontales de entablamentos y escalinatas, por ejemplo— están curvadas para que parezcan rectas, evitando así, en palabras de George Santayana, la sequedad y rigidez propia de la línea recta larga —quizás esta curvatura se justifica también, según apuntó el arquitecto O. Tusquets, por las razones menos estéticas y más prácticas de desaguar el agua de lluvia que entraba en el peristilo—. Y, en fin, armonía también en los elementos decorativos que lo adornaban y enriquecían, incluso cuando se ubicaban en huecos tan difíciles de componer como los triángulos achatados que forman los frontones de las fachadas principales, y que sólo podemos ya disfrutar haciendo un esfuerzo de imaginación ayudados por dibujos, planos y los restos conservados en el Museo Británico.

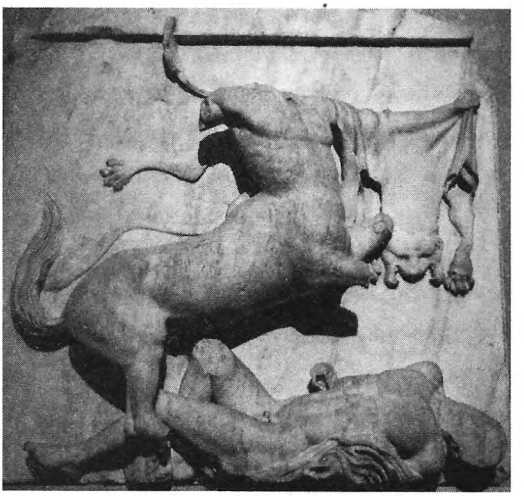
No parece difícil, pues, concluir que la belleza del Partenón reside en la armonía de los elementos arquitectónicos que lo forman.

Tomando como base esta conclusión nos preguntamos, ¿qué forma los razonamientos matemáticos? Parece claro que las ideas, las ideas matemáticas. O sea, que la belleza de los razonamientos matemáticos hay que buscarla entonces en la combinación armónica de las distintas ideas matemáticas que los componen.

Esta conclusión, que ha sido alcanzada aquí por un procedimiento algo indirecto, ya la apuntó G. Harold Hardy hace casi tres cuartos de siglo en su opúsculo *A mathematician's apology* (*Apología de un matemático*). En ese librito, que volveremos a encontrar de manera determinante en el capítulo 4, Hardy escribió: «Un matemá-



Vista lateral del Partenón, en la que se aprecian los daños causados por la explosión en 1687 del depósito de pólvora que los turcos ubicaron en este edificio.



Metopa del Partenón que en la actualidad se exhibe en el Museo Británico de Londres. La obra pertenece a los frisos del lado sur, los cuales estaban dedicados a la centauromaquia.

tico, lo mismo que un pintor o un poeta, es un constructor de configuraciones; su material básico son las ideas. Las configuraciones construidas por un matemático, lo mismo que las de un pintor o un poeta, deben poseer belleza; las ideas, los colores y las palabras deben ensamblarse de un modo armónico. No hay un lugar permanente para las matemáticas desagradables desde el punto de vista estético.»

Al hilo de esta conclusión, ha llegado el momento de mostrar un ejemplo de combinación armónica de ideas matemáticas. He elegido uno que, por diversas razones que después explicaré, es, además de muy bello, muy especial: el cálculo de la cuadratura de un segmento de parábola tal y como lo hizo Arquímedes en el *Método,* una de sus obras fundamentales. A este ejemplo le dedicaré el resto del capítulo pues, teniendo en cuenta el propósito de este libro, es casi imprescindible arroparlo con todas sus circunstancias y aderezos históricos. Así que antes de mostrar el ejemplo propiamente dicho, daré algunos detalles de la vida y milagros de Arquímedes. Empezando por su muerte, porque acaso sea la muerte de Arquímedes una de las imágenes con más poder simbólico que nos haya legado el mundo clásico.

La muerte de Arquímedes y su valía como ingeniero

La muerte de Arquímedes se narra en varias crónicas de la Antigüedad y ha sido representada en los más variados formatos a lo largo de la Historia, desde un célebre mosaico rescatado en Pompeya, a los frescos de Pellegrino Tibaldi en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial, o al óleo de Delacroix.

Estamos en el año 212 a.C., el quinto desde que la conquista de Sagunto por las tropas de Aníbal desencadenara la segunda guerra púnica. Ese año el general cartaginés todavía se paseaba por Italia con sus ejércitos, aunque el foco de la guerra se había desplazado a Sicilia y, más concretamente, a Siracusa, aliada de Cartago y asediada por el general romano Claudio Marcelo. Roma quería completar el dominio sobre la isla y asegurarse las cosechas de sus campos de cereales. Después de un asalto fracasado y tras un largo asedio, la ciudad cayó en manos de Marcelo, y sus tropas romanas se aprestaron al pillaje y a la rapiña. En ese saqueo fue asesinado Arquímedes —tenía, a la sazón, más de 70 años—. El cronista Valerio Máximo fue quien, dos siglos después, supo describir el suceso con mayor dramatismo:

> «Un soldado, que había penetrado en la casa de Arquímedes para saquearla, levantó sobre él su espada preguntándole quién era. Arquímedes, totalmente dedicado al problema cuya solución buscaba, no atinó a decirle su nombre, sino que mostrándole con las manos las líneas dibujadas sobre la arena, le dijo: "Por favor, no borres eso". Y el soldado, viendo en esta respuesta un insulto al poder de los vencedores, le cortó la cabeza; y la sangre de Arquímedes se confundió con la labor de su ciencia.»

Este mosaico rescatado de Pompeya muestra a un soldado romano momentos antes de decapitar a Arquímedes: la sangre del sabio se derramaría sobre su ciencia.

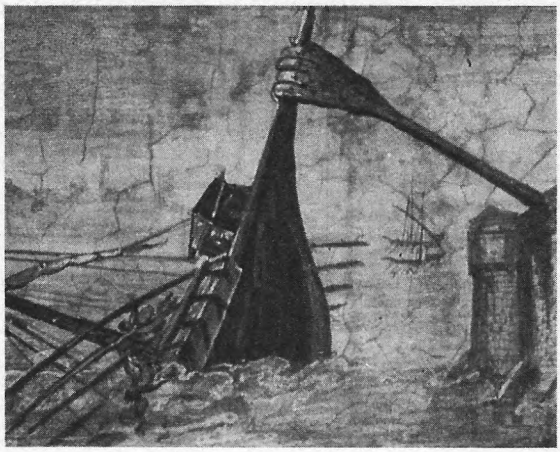
La muerte de Arquímedes hay que considerarla como un daño colateral de la invasión de Siracusa, porque el general Marcelo había dado orden de respetar la vida del sabio. Plutarco, en el siglo I d.C., dio cuenta de este interés en su *Vida de Marcelo* —en la que se recogen hasta tres versiones de la muerte de Arquímedes—: «No puede dudarse de que Marcelo lo sintió mucho y, entre maldiciones, mandó retirarse de su presencia al soldado que lo mató; habiendo hecho buscar a los deudos de Arquímedes, Marcelo los trató con el mayor aprecio y distinción.»

Aunque el interés de Marcelo por Arquímedes iba más allá de su fama como matemático: Arquímedes fue también ingeniero militar. La leyenda cuenta maravillas del poder sobrehumano que su capacidad inventiva le otorgaba, hasta el punto de elevarlo casi a la categoría de semidiós: «Todos los secretos del universo le eran a Arquímedes conocidos —escribió Silio Itálico en sus *Guerras púnicas* (siglo I d.C.)—. Sabía cuándo los oscuros rayos del sol naciente presagiaban la tempestad, si la Tierra estaba fija o suspendida por su eje, por qué el mar extendido sobre el globo se mantenía encadenado a su superficie, cuáles eran las causas de la agitación de las olas y de las diferentes fases de la Luna, qué ley seguía el océano en el flujo y reflujo de las mareas. Fama tenía de haber contado las arenas de la tierra; él, que supo poner a flote una galera con el esfuerzo de una sola mujer; él, que hizo subir rocas amontonadas en contra de la pendiente del terreno.»

Lo de subir y bajar grandes pesos, ya sea un galera o una roca, ha llamado siempre la atención de los cronistas; en Plutarco encontramos también mención expresa a la legendaria habilidad de Arquímedes usando la palanca: «Arquímedes, pariente y amigo de Hierón, le escribió que, con una potencia dada, se puede mover un peso igualmente dado; y jugando, como suele decirse, con la fuerza de la demostración, le aseguró que si le dieran otra Tierra movería ésta tomando la otra como punto de

ARQUÍMEDES Y SUS MÁQUINAS PARA GUERREAR

Los cronistas clásicos narraron verdaderas escenas dantescas provocadas por el furor destructivo de los ingenios bélicos de Arquímedes: «Al acometer los romanos por dos partes —contó Plutarco—, fue grande el sobresalto de los siracusanos y su inmovilidad a causa del miedo, creyendo que nada había que oponer a tal ímpetu y a tantas fuerzas; pero poniendo en juego Arquímedes sus máquinas atacó a un mismo tiempo el ejército y la armada de los romanos. Al ejército, con armas arrojadizas de todo género y con piedras de una mole inmensa, despedidas con increíble violencia y celeridad, las cuales, no habiendo nada que resistiese a su paso, obligaban a muchos a la fuga y rompían la formación. En cuanto a las naves, las máquinas de Arquímedes asían a unas por medio de grandes maderos con punta, que repentinamente aparecieron en el aire saliendo desde la muralla, y, alzándose en alto con unos contrapesos, las hacían luego sumirse en el mar, y a otras, levantándolas rectas por la proa con garfios de hierro semejantes al pico de las grullas, las hacían caer en el agua por la popa, o las atraían, arrastraban y estrellaban contra las rocas y escollos que abundaban bajo la muralla, con gran ruina de la tripulación. Hubo incluso alguna nave que fue suspendida en alto dentro del mismo mar, y arrojada en él y vuelta a levantar, de manera que sus marineros fueron estrellados o expelidos en un espectáculo terrible, hasta que la nave vino a caer vacía sobre los muros, o se deslizó por soltarse el garfio que la asía.»



Detalle de un fresco de Giulio Parigi, realizado a fines del siglo XVI, que recrea una de las sofisticadas máquinas bélicas atribuidas a Arquímedes.

apoyo de una palanca.» Lo más extraordinario del caso es que Arquímedes usó de esa maestría con la palanca no sólo para labores prácticas como mover grandes pesos; también trabajó con la palanca en el campo de la geometría más pura, y realizó con ella cálculos tan sofisticados como el del área de un segmento de parábola que he prometido mostrarle al lector. Aunque aún no es el momento, porque quedan todavía por contar algunos detalles interesantes sobre Arquímedes y su fama de genio.

Leyendas sobre Arquímedes

A pesar de su habilidad como ingeniero, la leyenda cuenta que a Arquímedes lo que realmente le interesaban eran los asuntos de la geometría más pura. «En cuanto a Arquímedes —escribió Plutarco—, fue tanto su juicio, tan grande su ingenio y tal su riqueza en teoremas, que sobre aquellos artilugios que le habían dado el nombre y gloria de una inteligencia sobrehumana no permitió dejar nada escrito; y es que tenía por innoble y ministerial toda ocupación en la mecánica y todo arte aplicado, y ponía únicamente su deseo de sobresalir en aquellas cosas que llevan consigo lo bello y excelente, sin mezcla de nada servil.» Y siendo cierto que no se ha conservado ningún escrito de Arquímedes sobre ingeniería bélica, eso no significa mucho. La forma milagrosa en que han llegado hasta nosotros las obras de Arquímedes, que hoy en día conocemos, nos dice que no hay que descartar que dejara escritos sobre asuntos más aplicados por el hecho de que no hayan sobrevivido. Algo de ese carácter aplicado trasluce, por ejemplo, en sus cálculos aproximados del número π —Arquímedes mostró que es un poquito menor que 22/7 y un poquito mayor que 223/71—. Hay que reconocer que Arquímedes fue un matemático singular en el mundo griego, por más que conozcamos esa mentalidad suya más abierta a lo aplicado gracias a leyendas y anécdotas.

Esas anécdotas han servido para hacer popular la figura de Arquímedes. ¿Quién no conoce eso de «dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra»? ¿O lo de «¡Eureka!»? Claro que, aunque acaso todas tengan un poso de verdad, sea verdad a medias en muchos casos. Tomemos como ejemplo la célebre leyenda que cuenta cómo descubrió Arquímedes la falsedad de la corona de Hierón, usando la diferente densidad del oro y la plata, con el archiconocido colofón del «¡Eureka!» —que después se ha elevado a rango de grito de guerra de los científicos—; la versión que dio Vitrubio en el noveno de *Los diez libros de Arquitectura* dice así: «Reinando Hierón en Siracusa, se propuso ofrecer en un cierto templo una corona de oro a los dioses inmortales. Acordó con un artesano la confección de la obra mediante una buena suma de dinero y la entrega de la cantidad de oro en peso. El artesano cumplió

LA DESNUDEZ DE ARQUÍMEDES

El hecho de mostrársenos Arquímedes en su desnudez no es único de la anécdota del *Eureka*, y ya lo encontramos de esa guisa, juguetón y lúdico y embadurnado su cuerpo en aceite por una asistenta particular, en otras escenas de inequívoco sabor hedonista: «Arquímedes, halagado y entretenido de continuo por una sirena doméstica y familiar —contó Plutarco en *Vida de Marcelo*—, se olvidaba del alimento y no cuidaba de su persona; y llevado por fuerza a ungirse y bañarse, formaba figuras geométricas en el mismo hogar, y después de ungido tiraba líneas con el dedo, estando verdaderamente fuera de sí, y como poseído de las musas, por el sumo placer que en estas ocupaciones hallaba.»

Esa actitud de «estar como poseído de las musas», propia de un científico en plena concentración, ha provocado más de una denuncia por parte de los padres de la Iglesia, pues han visto en ella cierto erotismo que emparentaba pasión científica con pasión sexual; célebres son las palabras de San Agustín: «Además de la concupiscencia de la carne, que consiste en el placer de todos los sentidos y hace sucumbir a quienes se esclavizan a ella, alejándolos de Dios, se desliza también en el alma no sé qué deseo curioso y vano encubierto bajo el eufemístico nombre de ciencia y conocimiento.» Un eco de la frase de san Agustín encontramos en la frase de Stephen Hawking —uno de los iconos científicos de nuestros días—: «No hay nada como el momento del *¡eureka!*, de descubrir algo que nadie sabía antes. No lo compararé con el sexo, pero dura más.»

Grabado de fines del siglo XVI dedicado a la célebre anécdota del «¡Eureka!».

los plazos de entrega, encontrando el rey la corona perfectamente realizada. Pero habiendo sospechado que el artesano podía haber sustituido parte del oro por plata, el rey, indignado ante el presunto engaño, pero no teniendo medios para demostrar el fraude del artesano, encargó a Arquímedes que aplicara su inteligencia a dilucidar el asunto. Preocupado Arquímedes por el tema, y habiendo entrado un día por azar en una casa de baños, advirtió que cuanto más se sumergía en el agua mayor cantidad de ella salía de la tina. Esta observación le dio la luz para resolver la cuestión; de modo que, loco de alegría por el descubrimiento, saltó fuera de la bañera, y tal como estaba, totalmente desnudo corrió hacia su casa clamando: ¡Eureka, Eureka!».

Como todas las narraciones de ese hecho, ésta tiene muy poca finura científica, como en tiempos ya criticó con toda razón Galileo, porque seguro que lo que hizo Arquímedes fue algo mucho más refinado que lo que las anécdotas narran. Claro que de haber sido incluido en la narración de Vitrubio le habría quitado buena parte de su eficacia publicitaria, pues llama mucho más la atención la imagen de un científico corriendo desnudo y gritando «¡Eureka, Eureka!», que otra imagen del mismo científico encorvado sesudamente sobre su mesa de trabajo. Lo segundo es, desde luego, mucho más importante, pero lo primero es mucho más vistoso.

La leyenda que atribuye a Arquímedes la quema de la flota romana usando espejos incendiarios, o ustorios, cae decididamente del lado de la leyenda y del mito. Las fuentes históricas más cercanas en el tiempo a Arquímedes no hacen mención alguna a los espejos ustorios, aunque sí nos narran sus hazañas bélicas en términos bastante exagerados y grandilocuentes. Son autores muy posteriores los que añadieron ese episodio al ya bien repleto zurrón de los ingenios bélicos arquimedianos. Es dudoso también que Arquímedes contara con la tecnología necesaria para fabricar tales espejos. Aunque tal vez sí que conociera el fundamento científico del invento, y acaso sea por eso que se le atribuye su uso como arma de guerra.

Grabado dedicado a la legendaria utilización de grandes espejos para incendiar la flota enemiga durante el sitio de Siracusa.

Dicho de forma más precisa, Arquímedes seguramente sabía que un espejo con la forma de paraboloide de revolución concentra los rayos de sol en un punto determinado —llamado foco—. Para el lector que no lo conozca, un paraboloide de revolución es la superficie que se obtiene al hacer girar una parábola sobre su eje.

Arquímedes demostró varios resultados bastante espectaculares sobre la parábola. Uno de ellos, su cuadratura, es el ejemplo que voy a utilizar para mostrar que la belleza de las matemáticas reside en la combinación armónica de ideas matemáticas.

La cuadratura de la parábola

La parábola, al igual que la circunferencia, la elipse y la hipérbola, es una sección cónica, o sea, curvas que se obtienen seccionando un cono con un plano. Depende de cómo se coloque el plano, el corte con el cono será una circunferencia, una elipse, una hipérbola o una parábola. Esta última es la curva que se obtiene cuando el plano se coloca paralelo a la generatriz del cono.

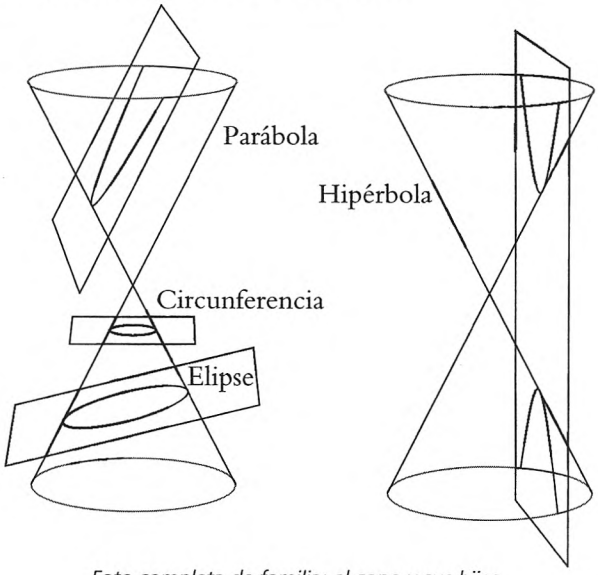
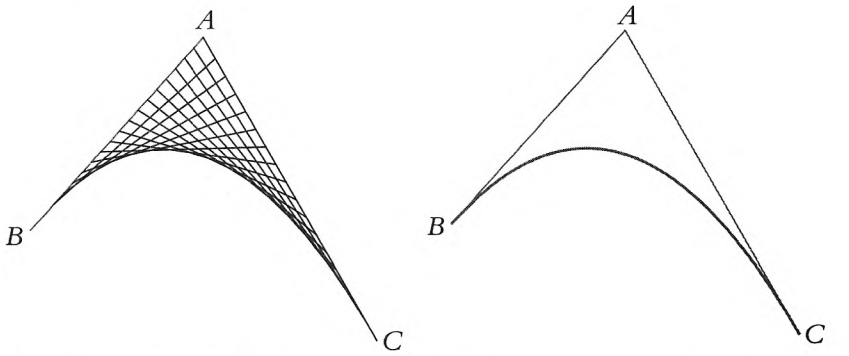


Foto completa de familia: el cono y sus hijas.

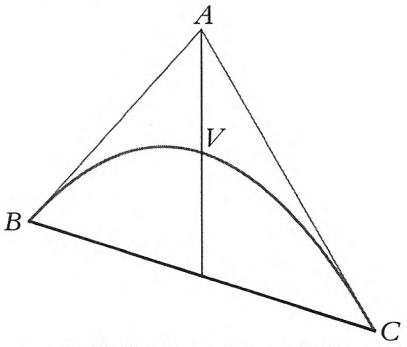
Los griegos intentaron cuadrar, usando regla y compás, el área encerrada por cada una de esas curvas. Fracasaron en el caso del círculo y la elipse —porque detrás de esa cuadratura se esconde el número π—, y también en el de la hipérbola —ahí lo que se esconden son los logaritmos—, pero tuvieron éxito en el caso de la parábola, cuya cuadratura logró hacer Arquímedes de tres maneras diferentes, a cual más

ingeniosa y sorprendente. La que yo voy a explicar a continuación está recogida en la obra que hoy conocemos con el título de *Método* —sobre la que después diré algunas cosas, pues su historia es francamente fascinante—.

Primero empezaré por definir de forma más precisa qué es una parábola. Aparte de como sección cónica, la parábola puede ser también definida del siguiente modo. Pongamos que tenemos un ángulo con vértice en A formado por dos lados AB y AC. Llamemos r a la razón entre sus longitudes: $r = AB/AC$. Tome ahora el lector un punto sobre el lado AC. Estará a cierta distancia, pongamos d, del vértice A; una entonces ese punto con el punto sobre el lado AB que esté a distancia $d \cdot r$ de B. Cuando haga esto con todos los puntos del lado AC, esos segmentos «envuelven» una curva que es justamente un trozo de parábola. En la figura siguiente la puede ver: a la izquierda he unido unos cuantos puntos del segmento AC con los correspondientes de AB, y a la derecha he dibujado la parábola eliminando los segmentos que la envuelven.

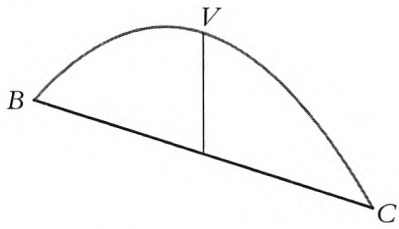


El eje de ese segmento de parábola es la recta que une A con el punto medio del segmento BC. El punto V donde el eje corta a la parábola se llama vértice.

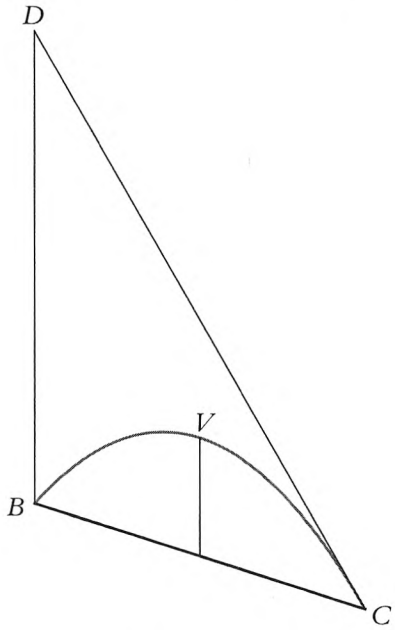


Parábola con su eje y su vértice.

Consideremos, pues, el segmento de parábola BVC, con vértice en V, tal y como muestra la figura siguiente.



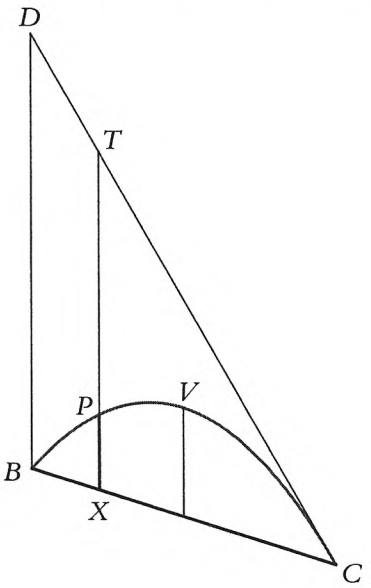
Sobre ese segmento de parábola vamos a construir un triángulo de vértices D, B y C, del siguiente modo: el lado DB es paralelo al eje del segmento de parábola y pasa por B, mientras que el lado DC es tangente a la parábola en el punto C.



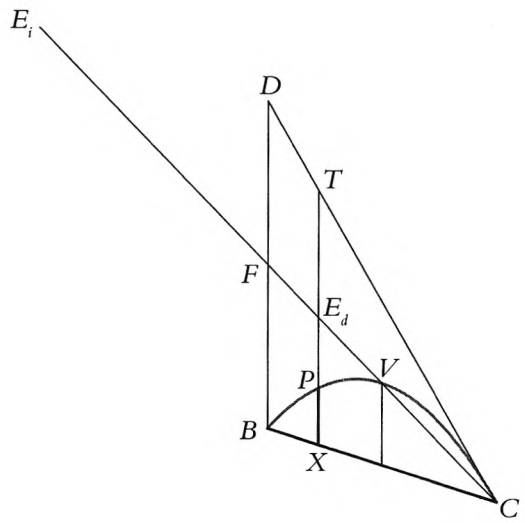
Arquímedes mostró que el área del segmento de parábola BVC es exactamente un tercio del área del triángulo BDC. La clave de su razonamiento es el uso magistral de la ley de la palanca. Para facilitar la comprensión de lo que sigue, he aquí un esquema de lo que vamos a hacer. Primero descompondremos adecuadamente el área del triángulo y la parábola en sendas colecciones de segmentos rectos; a continuación, insertaremos en la figura geométrica una palanca que nos permitirá comparar los segmentos o trozos rectos en que hemos descompuesto ambas figuras. Después recompondremos triángulo y parábola, que quedarán equilibrados cada uno en un extremo de la palanca. La ley

de la palanca nos dice entonces que las áreas respectivas del triángulo y la parábola están en proporción inversa a los brazos de la palanca que los equilibra. Finalmente, calcularemos cuánto vale esa proporción. Para facilitar la comprensión estética de este cálculo no olvide el lector la frase de Emile Chartier Alain: «Lo bello no gusta ni disgusta, sino que nos detiene». El detalle de todo este proceso es como sigue.

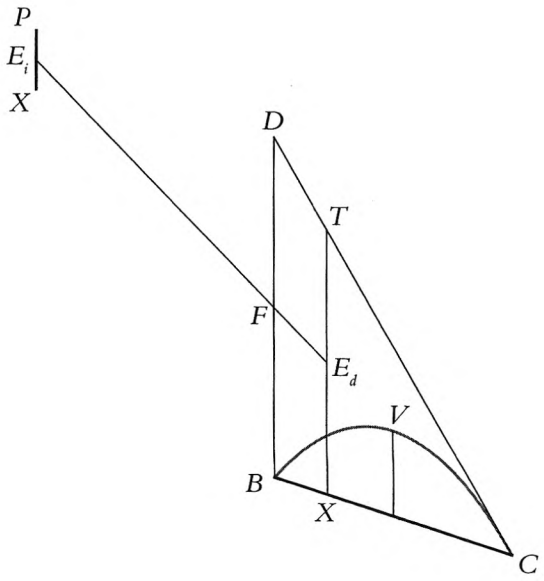
Arquímedes consideró que el área del triángulo *BDC* está formada por todos los segmentos rectos *XT* paralelos al eje de la parábola —o al lado *BD* del triángulo—; y, respectivamente, que el área de la parábola *BVC* está formada por todos los segmentos rectos *XP* paralelos al eje de la parábola (tal y como puede verse en la figura siguiente). Considerar un área como compuesta por segmentos rectos fue una idea revolucionaria que no se volvería a producir en matemáticas hasta el siglo XVII: casi dos mil años después de la muerte de Arquímedes.



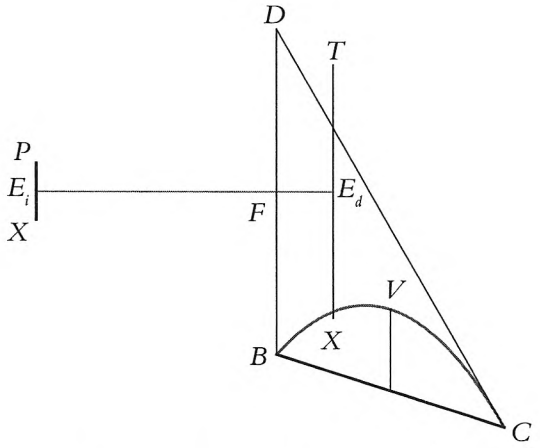
A continuación comparó estos segmentos que forman las áreas usando una palanca o balanza. El brazo de la balanza está sobre la recta que une el vértice *C* del triángulo con el vértice *V* de la parábola, y su fulcro —o punto de apoyo— es el punto *F* de corte del brazo de la palanca con el lado *BD* del triángulo; el extremo izquierdo E_i de la balanza es siempre el mismo y está a igual distancia del fulcro *F* que el fulcro del vértice *C* del triángulo —o sea, la distancia E_iF es igual a la *FC*—. El extremo derecho de la balanza E_d varía, y es el corte del brazo de la palanca con el segmento correspondiente de los que forman el triángulo.



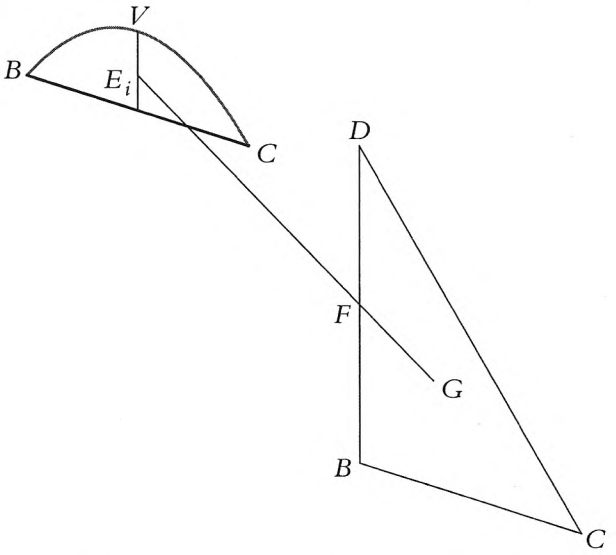
Entonces, si se traslada el segmento correspondiente de los que forman la parábola al extremo izquierda E_i de la balanza, manteniendo en el extremo derecho E_d el segmento del triángulo (tal y como se puede observar en la figura situada bajo estas líneas),



y se deja la balanza oscilar, ésta queda equilibrada.



En consecuencia, trasladando la parábola segmento a segmento, Arquímedes consiguió equilibrar en la balanza la parábola, con su centro de gravedad situado sobre E_i, con el triángulo, con su centro de gravedad G situado sobre el extremo derecho de la balanza.



Según la ley de la palanca, eso quiere decir que las áreas de parábola y triángulo están en proporción inversa a las longitudes de los brazos de la balanza donde se sitúan. Ahora bien, esa proporción es de un tercio —para más detalles, ver recuadro de texto en la página siguiente—. Por tanto el área del segmento de parábola *BVC* será también un tercio del área del triángulo *BDC*.

PROPORCIÓN Y EQUILIBRIO

Veamos con detalle que la proporción entre los brazos de la palanca donde se equilibran el triángulo y la parábola es de un tercio. Por construcción, la longitud del brazo izquierdo de la balanza *EF* es igual al segmento *FC*, mientras que el brazo derecho es el segmento *FG*. Ahora bien, el centro de gravedad de un triángulo es el punto donde se unen sus medianas —o sea, las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto—; sobre la correspondiente mediana el centro de gravedad está a dos tercios del vértice y a un tercio del punto medio del lado opuesto. Dado que *FC* es una mediana del triángulo —une el vértice *C* con el punto medio del lado *BD*—, la distancia *FG* será, por tanto, un tercio de la *FC*.

Matemáticas: ¿creación o descubrimiento?

La forma en que Arquímedes calculó la cuadratura de la parábola, que acabo de mostrar al lector, puede ayudar a dilucidar la soterrada polémica sobre si es o no aplicable el término «creador» a un científico. Una polémica impregnada por cuestiones muy presentes en las reflexiones sobre estética.

En esta polémica quizá son mayoría los que sostienen que el término «creadores» no debería aplicarse a los científicos en general, y a los matemáticos en particular. Por ejemplo, Fernando Savater en *Las preguntas de la vida* escribió: «Es creador quien fabrica algo que sin él nunca hubiera llegado a ser, el que trae algo al mundo que sin él nunca podría haber existido precisamente de ese modo y no de otro más o menos parecido.» Así, Alexander Fleming no «inventó» la penicilina sino que la «descubrió»: «Pues si él no hubiera descubierto la penicilina, antes o después algún otro sabio habría descubierto las propiedades curativas del hongo milagroso. En cambio, si Mozart o Cervantes hubieran muerto en la cuna nadie habría compuesto *La flauta mágica* ni contado la historia de Don Quijote» —y he elegido una cita del filósofo Savater, aunque también se podrían citar científicos, como al premio Nobel de medicina François Jacob en *Mosca, ratón y hombre*, por ejemplo—.

En el hecho científico hay, sin embargo, dos planos: uno es lo descubierto —ya sea un teorema, una ley universal, una galaxia o un elemento químico—, y otro es la forma en que se hace o se justifica el descubrimiento. Sin duda, por «lo descubierto» parece más apropiado calificar al científico de «descubridor». Pero ocurre a veces —quizá pocas, pero aun así algunas— que cabe aplicarle a un científico la calificación de «creador» por la forma en que hizo o justificó su descubrimiento.

Así, podemos decir que Arquímedes no es el creador de la relación existente entre las áreas de la parábola y el triángulo, puesto que si Arquímedes no la hubiera descubierto, algún otro lo habría hecho más tarde o más temprano. Pero, Arquímedes no sólo estableció la relación entre esas áreas, sino que lo hizo de una determinada manera; y es, precisamente, a esa forma específica de establecer la relación entre esas áreas equilibrándolas mediante una palanca, a la sí se le puede llamar un acto de creación. Esa manera de descubrir lleva el sello inconfundible de Arquímedes; al igual que no podemos imaginar *Las Meninas* sin Velázquez, es difícil imaginar esos razonamientos geométricos sin Arquímedes. Podemos decir entonces que Arquímedes descubre la fórmula para cuadrar la parábola, pero su manera de proceder, descomponiendo en segmentos y *pesándolos*, tan cargada de valor estético, es una creación suya en el pleno sentido usado antes por Savater: «Sin él nunca podría haber existido precisamente de ese modo y no de otro más o menos parecido.»

Y cuando digo que si Arquímedes hubiera muerto en la cuna nadie habría calculado el área de la parábola equilibrándola con la de un triángulo en una palanca, no estoy expresando una opinión personal, sino formulando un hecho histórico comprobable. En este sentido, esos razonamientos de Arquímedes son un hecho casi único en la historia de la ciencia. Y su singularidad se debe a los fascinantes avatares históricos a que se vio sometido el *Método,* la obra donde Arquímedes explicó su cálculo. Para comprender lo que digo es necesario contar la historia de esos avatares, que no son otros sino los acontecidos a las obras de Arquímedes en el proceso histórico de su transmisión a lo largo de los siglos. Porque como le ocurrió a tantos y tantos logros intelectuales y artísticos del mundo clásico, la conservación y transmisión de las obras de Arquímedes pendió de un hilo. Algunas de sus obras incluso se perdieron; y esa misma suerte pudieron correr todas o casi todas las obras de Arquímedes, de las que durante bastantes siglos sólo se tiene constancia de haber estado conservadas en un par de manuscritos que los vendavales de la Historia bambolearon como a una hoja seca, llevándolos de un lado a otro del Mediterráneo mientras a su alrededor las guerras hacían sonar sus tambores, los ejércitos se entregaban al pillaje y las hogueras consumían ciudades enteras.

El *Método* de Arquímedes y las fuentes escritas

Los manuscritos más antiguos conteniendo obras de Arquímedes de los que tenemos constancia histórica fueron compuestos en Constantinopla en el siglo X, o, estirando mucho, en el IX. Antes tuvo que haber otros que, remontando el tiempo, llegaron

hasta los escritos originales que compusiera Arquímedes allá por el siglo III a.C., pero hoy todos esos manuscritos se dan por desaparecidos.

Seguramente Arquímedes escribió todas o la mayor parte de sus obras en la soledad —científica— de su Siracusa natal. Allí nació en 287 a.C., aunque estudió de joven en Alejandría, centro del saber matemático y científico del helenismo —lo sería ininterrumpidamente desde su fundación por Alejandro Magno hasta el siglo V d.C.—. De allí volvió a Siracusa, donde vivió la mayor parte de su vida. La producción científica que conservamos de Arquímedes se compone de monografías de investigación, por decirlo con términos actuales, que fue realizando a lo largo de su vida y que desde Siracusa hizo llegar a Alejandría, o incluso a Samos, donde vivió Conón, uno de sus más admirados amigos. Entre esas monografías se encuentra la que aquí centra nuestro interés: el *Método*. Es una larga carta que Arquímedes dirige a Eratóstenes, a la sazón bibliotecario de la biblioteca de Alejandría, y donde le cuenta el método que empleaba para hacer sus descubrimientos.

Es muy posible que cada una de las obras de Arquímedes siguiera su propio camino hasta Alejandría, sin llegar a formar en vida suya, ni inmediatamente después, un corpus conjunto. La envergadura matemática de las obras de Arquímedes es considerable, muy superior a la de los *Elementos* de Euclides; el nivel elemental de buena parte de los *Elementos* hace suponer que menudearan por aquí y por allí copias de ellos, lo que no sucedió con las más sofisticadas obras arquimedianas —aptas sólo para entendidos—. Es razonable pensar que había muy pocas copias, posiblemente depositadas en la gran Biblioteca de Alejandría, o en la biblioteca hija del Serapeum. Esta dispersión de las obras de Arquímedes fue sin duda responsable de la pérdida de algunas de ellas y del deterioro sufrido por otras. Deterioro que ya es reconocible medio siglo después de su muerte, donde hay constancia de autores que no pudieron encontrar algunos de sus teoremas. Por otras citas sabemos, sin embargo, que todavía en los siglos III y IV d.C. se conservaban obras de Arquímedes hoy desaparecidas, que pudieron perderse en la devastación del Serapeum del año 391 d.C.

En el primer tercio del siglo VI se produjo un intento de reunir, ordenar y comentar sistemáticamente las obras de Arquímedes; no se puede asegurar que este fuera el primero de tales intentos, pero tampoco hay constancia de ninguno anterior. Ahora ya no estamos en Alejandría, sino en Constantinopla, justo cuando el Imperio Romano de Oriente se está transformando en Bizancio, en el tránsito del emperador Justino a Justiniano, soldado, rudo y analfabeto el primero, y cultivado, versado en teología y leyes el segundo. Hubo entonces un renacer del interés por la gran matemática clásica que, sin producir matemáticas de relevancia, tuvo la

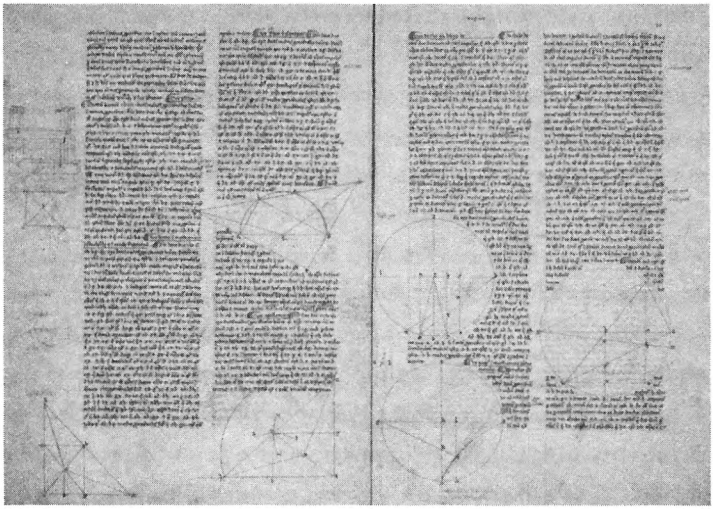
virtud de preservar algunas obras fundamentales para la posteridad: ése fue el caso de las obras de Arquímedes. Este renacer fue una especie de responso por la ciencia griega en un momento histórico en que se hizo evidente el destino que le esperaba. En efecto, en 529, Justiniano ordenó la clausura de la Academia de Platón y otros centros científicos y filosóficos acusados de impartir enseñanzas paganas.

Tres años después, el emperador decidió construir la basílica de Santa Sofía. Fueron los arquitectos de la nueva basílica, Antemio de Tralles e Isidoro de Mileto, quienes promovieron la conservación del legado científico griego, ordenando buscar, copiar y anotar cuantas obras científicas clásicas estuvieran todavía disponibles. Uno de sus discípulos, llamado Eutocio, recopiló, precisamente, las obras de Arquímedes que pudo encontrar, y comentó tres de ellas.

Dos siglos después, Bizancio volvió a conocer un periodo de esplendor cultural, militar y religioso. En ese periodo fue cuando se compusieron los tres manuscritos griegos que han permitido conocer las obras de Arquímedes hoy conservadas a los habitantes de los últimos mil años. Esos tres manuscritos parecen haber tenido su origen en la misma ciudad, Constantinopla, y haber sido compuestos entre los siglos IX y X, aunque sus vidas, circunstancias e influencias hayan sido muy distintas. De esos tres hoy se conserva sólo uno. Pero ese uno, acaso por haber permanecido oculto durante mucho tiempo, ha dejado poca huella, hasta el punto de que son los otros dos manuscritos —y si me apura el lector, fundamentalmente uno de ellos— los responsables de la enorme influencia que ejerció la obra de Arquímedes en las matemáticas europeas del siglo XVII, cuando, por decirlo en términos actuales, Arquímedes fue el matemático más citado por los que hacían investigación —por más que su obra tuviera ya por entonces casi dos mil años de antigüedad—. Para identificar esos tres manuscritos, los voy a llamar códices A, B y C. Los códices A y B, bien juntos, bien por separado, pasaron en el siglo XII de Constantinopla a Sicilia, la tierra natal de Arquímedes.

El códice B, el más escurridizo de los tres manuscritos, fue posiblemente una recopilación de obras sobre mecánica y óptica de diversos autores; es apenas un fantasma que desapareció a principios del siglo XIV y del que poco más sabemos que sirvió en el siglo XIII para elaborar una traducción al latín de algunas obras de Arquímedes.

El códice A llevó una vida turbulenta hasta su desaparición a mediados del siglo XVI; pero tuvo la virtud de dejar una cohorte de descendientes, copiados entre mediados de los siglos XV y XVI, y que todavía se conservan hoy en día —las cuatro mejores copias se conservan en la Biblioteca Marciana de Venecia, en la Laurentiana de Florencia y, dos de ellas, en la Biblioteca Nacional de Francia—.



Doble página perteneciente a la traducción latina de las obras de Arquímedes realizada por Guillermo de Moerbeke.

Con las obras contenidas en el manuscrito A y sus descendientes, y la versión latina del manuscrito B, se preparó la primera edición impresa, en griego y latín, de las obras de Arquímedes. Se publicó en Basilea en 1544 y dio finalmente a conocer en griego buena parte de las obras de Arquímedes a los matemáticos del Renacimiento y el Barroco.

Pero entre esas obras no estaba el *Método*, que no formaba parte del contenido ni del manuscrito A ni del B.

El manuscrito C es el único del que sabemos hoy día su paradero. Fue descubierto en 1906 por el erudito Johan Ludvig Heiberg, profesor de griego de la Universidad de Copenhague. En realidad, el códice C es un palimpsesto, es decir, un manuscrito antiguo que conserva huellas de una escritura anterior borrada artificialmente; en este caso, el contenido matemático había quedado oculto al escribirse sobre él con posterioridad un eucologio —un devocionario que contiene los oficios del domingo y de las principales fiestas cristianas del año—.

El códice C

La historia del códice C es apasionante. Posiblemente fue el último de los tres códices bizantinos de Arquímedes en ser compuesto, y es el único cuyo paradero conocemos hoy en día. Es también el que menos influencia ha tenido a lo largo de

la historia, debido a que ha permanecido oculto hasta que fue descubierto en 1906: hace poco más de un siglo.

A tenor de las características caligráficas, el manuscrito pudo ser compuesto hacia el año 975. Dos siglos y medio después, alguien decidió que había otras cosas más interesantes que escribir que lo que aquel manuscrito contenía, de manera que ese alguien se aplicó en raspar por doquier su contenido para reutilizar de nuevo el pergamino. Al manuscrito de Arquímedes se unieron folios de otros cuatro libros; los folios de pergamino fueron inevitablemente barajados, cortados y nuevamente encuadernados, lo que tuvo como consecuencia que el nuevo texto se escribiera perpendicular a los restos del antiguo. En suma, un devoto copista convirtió en palimpsesto el manuscrito de Arquímedes y escribió sus oraciones cristianas sobre los más finos y compuestos razonamientos matemáticos que había producido el mundo griego. Usando luz ultravioleta se ha podido leer un colofón donde se afirma que el palimpsesto fue acabado el 13 de abril de 1229.

Las obras de Arquímedes permanecieron sepultadas bajo los rezos ortodoxos, pero el tiempo hizo su trabajo y, poco a poco, la curiosidad de los estudiosos fue dirigiéndose hacia el contenido primitivo del manuscrito. Así, a mediados del siglo XIX el sabio alemán Constantine Tischendorf, tras visitar Constantinopla, dio noticias de un palimpsesto de contenido matemático. El palimpsesto empezaba así a revelar su secreto. Tischendorf no se privó de arrancarle una hoja al manuscrito —sin saber que se llevaba varios teoremas de Arquímedes—, hoja que su albacea vendió a la Universidad de Cambridge en 1876, donde todavía se conserva.

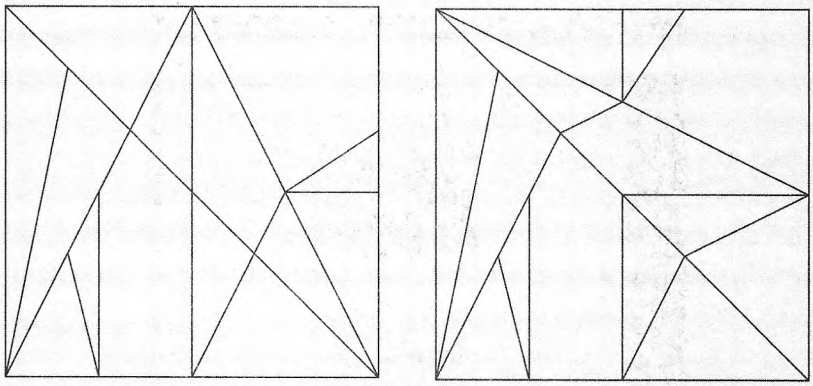
El siguiente en reparar en el manuscrito fue el paleógrafo griego Papadopoulos Kerameus, que lo incluyó en un catálogo de manuscritos que publicó en 1899. Del palimpsesto de Arquímedes, Papadopoulos Kerameus logró leer unas cuantas líneas del texto oculto que transcribió en su catálogo. Según informó Papadopoulos, en el manuscrito había una anotación del siglo XVI —perdida hoy— diciendo que el libro pertenecía al Monasterio de San Sabas en Palestina; nada se sabe de cómo ni por qué razón el palimpsesto fue a parar a un monasterio-fortaleza perdido en las montañas al sur de Belén. Así que el palimpsesto pasó en Palestina un tiempo indeterminado, aunque estaba de vuelta en Constantinopla cuando Tischendorf pasó por allí en 1840 y le arrancó un hoja.

Las pocas líneas que publicó Papadopoulus Kerameus interesaron sobremanera a Johan Ludvig Heiberg, que en 1880-1881 había publicado una magnífica edición de obras de Arquímedes. En 1906, Heiberg se desplazó a Constantinopla, donde reconoció que lo que se ocultaba en aquel palimpsesto era, nada más y nada menos,

una colección de obras de Arquímedes, de las cuales dos, el *Método* y el *Stomachion* —aunque de este último sólo se conservaba un fragmento mínimo—, no estaban contenidas en ninguno de los manuscritos hasta entonces conocidos de Arquímedes, y otra, *Sobre los cuerpos flotantes*, era sólo conocida a partir de la traducción latina medieval del códice B. Sin duda el hallazgo del códice C es el acontecimiento más importante de los últimos siglos para comprender la ciencia clásica. Con las fotografías que tomó del manuscrito, Heiberg preparó una nueva edición de las obras de Arquímedes, incluido naturalmente el *Método*, que vio la luz entre 1910 y 1915. Sorprende la seriedad y profundidad del estudio de Heiberg, teniendo en cuenta

DOLOR DE BARRIGA

Stomachion es una palabra griega que significa «dolor de barriga», pero es también el nombre de una obra de Arquímedes, y de un juego, una especie de rompecabezas geométrico. Se trata de componer cuadrados (u otras figuras) con las 14 piezas predefinidas en que ha sido dividido un cuadrado; la dificultad de su resolución podría producir dolor de cabeza e, incluso, de barriga, de donde seguramente procede el nombre del juego y el título de la obra de Arquímedes —de la que sólo se conocen un extracto en árabe y dos páginas muy deterioradas en el palimpsesto—. Pero tras el estudio del códice C, ahora se piensa que el *Stomachion* de Arquímedes bien pudo ser un tratado sobre combinatoria; el descubrimiento, de ser cierto, pues todavía no está sólida y documentalmente asentado —dado lo escaso y el precario estado de lo conservado—, supondría una verdadera sorpresa, por cuanto los estudios combinatorios están muy alejados de los manejos geométricos griegos y, en particular, de los de Arquímedes.



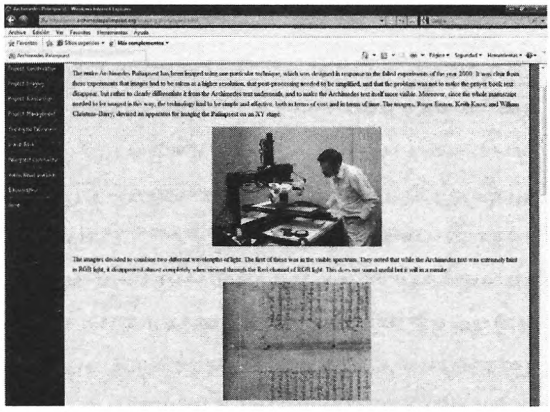
A la izquierda, la posición inicial de las piezas en el Stomachion. *A la derecha, una de las 17.152 formas distintas de recomponer las piezas formando otra vez el cuadrado inicial.*

la precariedad de medios técnicos a su disposición, y la dificultad de leer el texto raspado que contenía las obras de Arquímedes.

La historia de los manuscritos de Arquímedes nos dice que el *Método* ha estado perdido para las matemáticas desde casi su composición hasta que Heiberg lo hiciera público a principios del siglo XX. Y con él, el cálculo del área del segmento de parábola tal y como se explicó en la sección anterior. Pues bien, durante ese largo par y pico de milenios no se sabe de ningún matemático que haya calculado el área de la parábola equilibrándola con la de un triángulo en una palanca. Esto muestra que si Arquímedes hubiera muerto en la cuna, esa forma de calcular el área de la parábola nunca habría existido precisamente de ese modo y no de otro más o menos parecido pues, aun sin ser conocidos, nadie logró nunca repetir los razonamientos de Arquímedes. Esa forma tan especial de hacer ese cálculo, tan llena de armonía y valor estético, tiene pues todo el derecho a ser llamada un acto creativo.

Últimas peripecias del palimpsesto de Arquímedes

Sería imperdonable terminar esta sección sin contar las últimas peripecias sufridas por el códice C. Para cuando Heiberg publicó su contenido el palimpsesto había sido casi con toda seguridad robado, y volvió a desaparecer; estuvo perdido durante casi todo el siglo XX hasta que reapareció el 28 de octubre de 1998, en Nueva York, en una subasta en Christie's. Fue adquirido, por algo más de dos millones de dólares, por un coleccionista americano anónimo. Pocos meses después, el coleccionista lo depositó en el Walters Art Museum de Baltimore para su custodia, conservación y estudio.



En la página web de The Archimedes Palimpsest Project se encuentra detallada información sobre todo el proceso que ha permitido recuperar el palimpsesto de Arquímedes.

A partir de entonces se ha desarrollado una intensa labor de conservación y escrutinio tecnológico del palimpsesto, llevada a cabo por eruditos y expertos en ciencia antigua, restauradores, y técnicos en tratamiento y procesamiento de imágenes, que han usado las más modernas tecnologías. Pues, en esta odisea por el siglo XX, el palimpsesto ha sufrido más daños que en toda su historia anterior. Algunas páginas han desaparecido, otras muchas han sido seriamente atacadas y dañadas por un moho que hace muy difícil su lectura a simple vista —estos daños son apreciables cuando se compara con las fotografías que del manuscrito tomó Heiberg— y, finalmente, alguien, seguramente pensando que así el manuscrito ganaría en interés y aumentaría su precio, pintó o mandó pintar cuatro miniaturas de los evangelistas; miniaturas que han dañado las páginas donde fueron pintadas.

Capítulo 2

¿Por qué es difícil apreciar la belleza de las matemáticas?

Como se dijo al comienzo del capítulo anterior, a nadie extrañará el gesto torcido que un hipotético viandante pondrá nada más se le pregunte por la excelencia estética de las matemáticas. Dado que estamos dando por supuesto que ese valor estético existe, ese seguro gesto de extrañeza sólo puede significar una cosa: la belleza de las matemáticas es difícil de apreciar. Esto nos lleva a la inevitable pregunta que da título a este capítulo.

Los cinco sentidos y las bellas artes

Ya sabemos que la belleza de un razonamiento matemático reside en la conjunción armónica de las ideas que lo componen, al igual que la belleza de un edificio radica en la armonía de los elementos arquitectónicos que lo forman. Sin embargo, para la mayoría de la gente es mucho más difícil apreciar la belleza de un teorema que la de una catedral gótica.

¿Por qué es esto así? A mi entender, la respuesta a esta pregunta es de índole fisiológica: el problema que tenemos los seres humanos para apreciar el valor estético de los razonamientos matemáticos es la falta de un sentido apropiado para discernir, de forma automática, la estructura de ideas que compone dicho razonamiento y en cuya combinación armónica se esconde su belleza.

Antes de discutir esta afirmación voy a ilustrarla con algunos ejemplos que muestran la relación tan estrecha que hay entre nuestros sentidos y las llamadas bellas artes.

La pintura

Empezaré con la pintura. Según lo discutido anteriormente, podemos afirmar que la belleza de un cuadro radica en la combinación armónica de elementos tales como la forma, los colores, la composición, el espacio y la luz, incluso la textura —por razones utilitarias consideraré en este ejemplo una visión puramente formalista de la

pintura, dejando fuera del juego estético otros valores (éticos, morales, etc.) o funciones (social, religiosa, etc.) que pueda tener, a los que me referiré más adelante—.

Pues bien, en cada caso, el elemento pictórico correspondiente es aprehendido directamente mediante el sentido de la vista, al igual que las interrelaciones totales entre ellos.

Fijémonos en la pintura rupestre de la ilustración inferior: la componen unas simples manchas de color sobre la pared de una cueva. La vista nos da cuenta de que de las formas pintadas, unas son animales; otras personas, de que nos encontramos ante una escena de caza. Mediante un solo golpe de vista hemos captado toda la estructura de formas de esa pintura; ahora el cerebro podrá decidir sobre la armonía de su composición.

Pintura rupestre de la meseta de Tassili, en el sudeste de Argelia, una región que ha sido declarada Patrimonio Mundial de la Humanidad por la Unesco dada la riqueza de sus yacimientos arqueológicos.

Igualmente basta un golpe de vista para aprehender el colorido del cuadro de Van Eyck titulado *El matrimonio Arnolfini*; de forma automática el cerebro dispone de la información cromática para decidir sobre la belleza del cuadro.

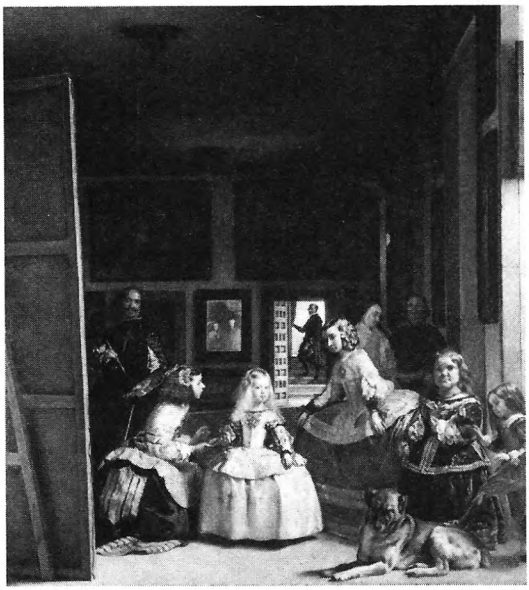
De nuevo la vista percibe de modo automático la composición de *La escuela de Atenas*, el fresco de Rafael en los Museos Vaticanos: la distribución de personajes en

El matrimonio Arnolfini, *óleo pintado por Jan van Eyck en 1434 y hoy expuesto en la National Gallery de Londres.*

grupos simétricos —entre los que podemos reconocer a Pitágoras, Euclides, Ptolomeo y, por supuesto, a Platón y Aristóteles—, su ubicación dentro de la sucesión de cúpulas que alberga la escena, la profundidad creada por la perspectiva. Toda la información es llevada automática y rápidamente al cerebro por la vista para que éste decida sobre la combinación armónica de todos estos elementos.

Nada escapa a la vista, ni el espacio ni la luz creadas por Velázquez en *Las Meninas* y que llenan toda la escena del cuadro; incluso la textura de la pincelada en *El sembrador* de Van Gogh, como si tocáramos el cuadro, es captada por la vista, casi suplantando al tacto, y transmitida al cerebro.

La escuela de Atenas, *fresco pintado por Rafael Sanzio entre 1510 y 1511 en el Vaticano.*

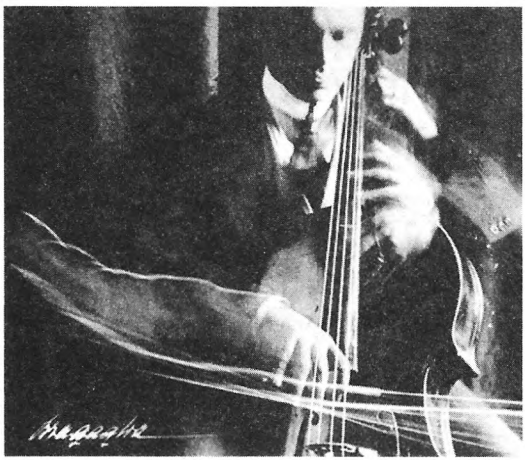


A la izquierda, Las Meninas, *óleo pintado por Velázquez en 1656, hoy en el Museo del Prado.*
A la derecha, detalle de El sembrador, *óleo pintado por Vincent van Gogh en 1888 que en la actualidad pertenece a una colección particular.*

La música

Parecidas consideraciones se pueden hacer para la música en relación con el sentido del oído. En este caso, hay que considerar la ordenación temporal de los acordes musicales, su carácter cinético; en palabras de Monroe C. Beardsley: «Al ser la música un arte temporal, fluye con el tiempo: se agita, salta, se ondula, se vuelve impetuosa, se eleva, titubea, se mueve de continuo.» Esa ordenación temporal de la música, irrelevante en pintura, es también esencial en las matemáticas; dicho en plata: un teorema, igual que una sinfonía, empieza, discurre y acaba, y el orden en que eso se produce es fundamental.

El carácter secuencial de la música tiene importantes implicaciones a la hora de su disfrute: al ir la melodía pasando, para su correcta apreciación estética necesitamos cierta memoria sonora. Y el caso es que la del ser humano no está especialmente desarrollada, si la comparamos, por ejemplo, con nuestra memoria visual. Una vez le escuché a alguien que, en este sentido, un humano escuchando un cuarteto de Brahms es bastante parecido a un pez viendo la película *Psicosis* de Hitchcock. Nuestra memoria acústica inmediata no está especialmente capacitada para retener cadencias sonoras complejas, y menos aún para reconocerlas varios minutos después agazapadas tras una variación rítmica más o menos sutil. Es, con seguridad, lo que le ocurriría a un pez delante de una pantalla: a los pocos minutos, quizá segundos, de haber visto una escena ya la habría olvidado, siendo incapaz de volver a reconocer a un personaje que lleve un rato sin aparecer por escena. Me temo que esa poca ca-



El violonchelista, *fotografía realizada por el pionero de la imagen Antonio Giulio Bragaglia en 1913.*

pacidad retentiva que tiene el ser humano para las complejidades melódicas también se da en lo referente a las sutilezas abstractas de un buen razonamiento matemático. La consecuencia es que nuestra limitación para reconocer esos patrones comunes en los que las matemáticas son tan ricas supone una merma seria en nuestra capacidad para apreciar su belleza.

Las similitudes entre música y matemáticas son clásicas, y han dado y darán, con seguridad, materia para muchos ensayos; no olvidemos lo que el gran Leibniz escribió: «La música es un ejercicio aritmético inconsciente en el que la mente no sabe que calcula.» Yo aquí me voy a contentar con señalar una importante diferencia entre música y matemáticas. En el caso de la música, el oído va poniendo automática y secuencialmente a disposición del cerebro la melodía, los elementos rítmicos, de cadencia, compositivos, etc. de una determinada pieza musical; con esta información el cerebro decidirá sobre la armonía de sus diversos elementos y sobre su belleza. Pero, ¿cuál de nuestros sentidos pone automáticamente a disposición del cerebro la cadencia de ideas matemáticas enhebrada en un gran teorema?

El caso de la gastronomía

También son válidas todas estas consideraciones para situaciones más complejas donde intervengan varios sentidos, como es el caso de la gastronomía. Aquí intervienen prácticamente todos los sentidos, y por tanto el cauce sensorial es más complejo, pero igualmente eficaz. Si nos centramos en la cata de un vino, todos los sentidos intervienen. Empezando por el oído, que transmite el sonido de la caída del vino en la copa —informando sobre el equilibrio glicerina/alcohol—; siguiendo con la vista, que transmite la tonalidad, intensidad y brillo de los colores; el olfato, que ofrece al cerebro todo un mundo de información camuflado entre olores —generados por la variedad de uva, el proceso de elaboración o las condiciones y tiempo de envejecimiento—; el gusto, que transfiere la distribución y equilibrio entre los cuatro sabores básicos; y también el tacto —paso de boca—, que detalla la armonía interna de los distintos componentes dentro del líquido. Todos los sentidos ponen en conocimiento del cerebro las propiedades organolépticas que nos permiten valorar (estéticamente) un vino.

En este último ejemplo, hay que suponer unas mínimas condiciones iniciales sobre el individuo para la valoración estética. Ausencia de determinados compromisos religiosos o morales que le impidan la valoración; esto, en menor medida,

también es aplicable a la pintura o escultura: piénsese en la célebre sala secreta del palacio de los Austrias donde se ocultaban las pinturas con desnudos, o en la censura nazi a las obras impresionistas, expresionistas o de vanguardias, a las que calificaron de arte degenerado. Una cierta cultura y educación del paladar, incluyendo el olfato, que se traduzca en la capacidad para apreciar, distinguir y reconocer sabores y olores; lamentablemente no nos educan en la escuela sobre los olores y sabores como sí se hace con los colores. Memoria olfativa que permita reconocer primero, y comparar después, los olores que aprecia en el vino que se está catando con los experimentados anteriormente. Y, por supuesto, haber evitado la amenaza de la atrofia sensorial que produce la tiranía de atarse sólo a unos pocos sabores y olores. Bastaría un pequeño esfuerzo de abstracción para trasladar, en gran medida, estos impedimentos al disfrute de los razonamientos matemáticos. Pensemos si no, en la carga de antipatía que arrastran las matemáticas entre buena parte de la población y en la atrofia sensorial que ese rechazo puede provocar. No es cuestión de entrar ahora a discutir qué ha podido crear esa mala imagen de las matemáticas, aunque aquí dejaré una de esas posibles causas por si genera alguna reflexión en el lector: la publicidad ha conseguido el notable milagro de convertir un refresco negro y dulzón en la chispa de la vida, simplemente repitiendo la frase billones y billones de veces; lo mismo, pero al revés, sucede con las matemáticas.

La literatura

Finalmente, consideraré un ejemplo mucho más cercano a lo que ocurre en matemáticas: la literatura. En este caso, es la vista —el oído, si nos leen, o el tacto, si se lee en Braille— la que traslada al cerebro las distintas peripecias que conforman una novela, o los distintos versos que componen un poema. Pero frente al automatismo con que el cerebro capta los elementos pictóricos de un cuadro, o la cadencia y melodía de un cuarteto de cuerda, ahora el cerebro debe hacer una cierta labor de análisis. Esto es debido a que el objeto estético, en el caso de la literatura, no consta de percepciones visuales, auditivas, olfativas o táctiles, sino que está constituido de significados y éstos no son percibidos sensorialmente, son, por contra, producto de un esfuerzo más o menos intenso del pensamiento. El valor estético de una novela o de un poema no está en el blanco sobre negro del texto sino en el significado de lo allí escrito. Digamos que la literatura tiene valor estético, pero no perceptivo.

Cuando cinco sentidos no son suficientes

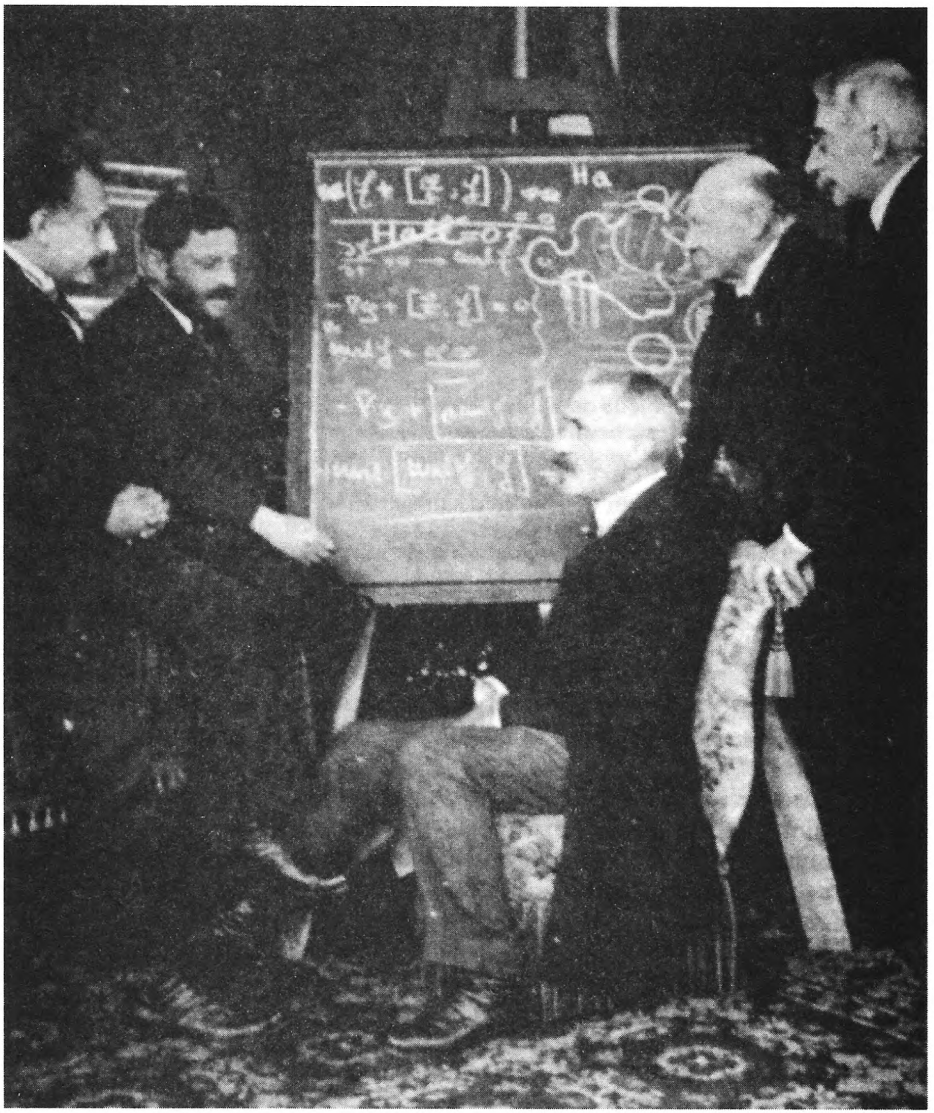
Los ejemplos anteriores ilustran y justifican mi afirmación inicial: es difícil apreciar la belleza de los razonamientos matemáticos porque no tenemos un sentido apropiado para captar la configuración de ideas donde radica.

A los razonamientos matemáticos les ocurre como a la literatura, tienen valor estético pero no perceptivo: la apariencia, la forma —en el sentido hegeliano— de los razonamientos matemáticos, que es lo que apreciamos sensorialmente, es irrelevante desde el punto de vista de su apreciación estética; lo importante reside en su contenido y lo que significa. Piénsese que, aunque sirvan para describir y comprender la realidad, las matemáticas parecen trascurrir en el cerebro de los humanos, de manera que un teorema no es más que una transferencia del cerebro de un individuo al de otro —usando quizá como intermediario la página de un libro o una pizarra—. Nada hay, por tanto, más independiente de los sentidos que las matemáticas.

No es pues de extrañar que el significado de las matemáticas no se aprehenda por un acto de percepción sino por un proceso de pensamiento discursivo. Dicho de otra manera, las matemáticas son depositarias de significado y valor estético, pero éste no se aprecia a través de los sentidos sino mediante un proceso de análisis intelectual; de ahí la dificultad para percibir la belleza de las matemáticas en comparación con la de una pintura, una escultura o una composición musical. El esfuerzo requerido para dar con la trama de ideas matemáticas que componen un determinado teorema no es obviamente siempre igual de complicado, y hay, de hecho, determinados recursos que lo facilitan; recursos que, como no podía ser de otra forma, una vez más tienen que ver con los sentidos. Piense si no el lector en el más habitual de estos recursos: utilizar dibujos y figuras geométricas para ilustrar un razonamiento matemático y facilitar su comprensión. Y no es extraño que esto sea así, pues estamos apelando de nuevo al automatismo, inmediatez y facilidad con que la vista lleva al cerebro determinada información.

Pero, aunque la vista, el oído o el tacto pongan al alcance del cerebro el enunciado de un teorema o su demostración, la estructura de ideas no tiene por qué estar explícita en esa demostración. A menudo ocurre que la estructura de ideas está escondida tras la reelaboración lógica que las demostraciones de los teoremas sufren, aparece fraccionada y rota por pasos intermedios y demostraciones de hechos secundarios que nos ocultan la trama de ideas y nos impide apreciar su armonía. La captación por el cerebro de la estructura de ideas no es automática,

sino fruto de un estudio, un análisis de los elementos que componen la prueba, una purga de lo prescindible, y una reordenación y recomposición de las ideas principales. Al no ser un proceso automático no siempre se tiene éxito a la hora de llevarlo a cabo; puede depender de la mayor o menor capacidad y preparación matemática que se tenga, del esfuerzo que se realice, etc.



Albert Einstein, Paul Ehrenfest, Paul Langevin, Heike Kamerlingh Onnes y Pierre Weiss discuten sus ideas ante una pizarra en esta fotografía realizada en 1920.

El automatismo con que los sentidos trasladan al cerebro la forma, los colores, la composición, el espacio, la luz o la textura de un cuadro, o la armonía y ritmo de una composición musical se rompe en el caso de las matemáticas; la labor de análisis del intelecto no es ya automática, requiere un esfuerzo, y a mayor esfuerzo requerido más complicada y difícil será la apreciación de la belleza de las matemáticas. Aunque posiblemente, más intensa será la recompensa, pues tras esa dificultad tal vez se esconda la brillantez, profundidad y genialidad de una gran idea matemática.

Una vez aprehendida la estructura de ideas generará, dependiendo de la mayor o menor armonía de sus componentes, un cierto placer estético, un deleite espiritual, como dice el diccionario. Parafraseando al filósofo George Santayana en la descripción del valor estético que hizo en su libro *El sentido de la belleza*, se puede afirmar que ese placer objetivado, ese gozo intelectual, que si sabemos destilarlo se obtiene al estudiar y comprender un teorema, es la categoría estética central, la cualidad del razonamiento matemático que le otorga belleza.

Los sentidos canalizan al cerebro lo que acontece fuera de éste, por lo tanto son imprescindibles para disfrutar de la belleza de algo que se encuentre fuera de nosotros, ya sea un cuadro, una sinfonía o un paisaje. Sin embargo, la satisfacción que produce la belleza no es meramente sensorial, necesita también la intervención de la razón. «Los placeres de la belleza —escribió Fernando Savater— son los menos "zoológicos" de todos». Así, sería insensato pretender que un perro o un gorila apreciaran el valor estético de una catedral gótica o de un cuadro de Velázquez, por mucho que su vista ponga al alcance de sus cerebros la armonía de los elementos arquitectónicos o pictóricos que los componen. Filósofos como Santayana defendieron la estrecha conexión entre los valores estéticos y otros valores vitales del ser humano —por más que haya aspectos que los diferencien—, y Wittgenstein llevó al límite esa tendencia cuando estableció la ecuación: «Ética igual a estética». En cualquier caso, es esta ligazón entre belleza y razón la que hace a las matemáticas depositarias de valor estético.

La técnica de las *vidas cruzadas*

Como ya se advirtió en el prefacio, el propósito de este libro no es enhebrar un sesudo discurso sobre el valor estético de las matemáticas, sino ilustrar y apoyar algunos principios básicos sobre la belleza de las matemáticas con ejemplos bien seleccionados. Eso es lo que me propongo hacer a continuación.

Ya sabemos de la dificultad que supone alcanzar a ver la belleza que encierra un determinado razonamiento matemático. Dificultades parecidas, según se comentó antes, a las que tiene la literatura para mostrar su valor estético; pero, en este caso, al tratar la literatura con la condición humana, y su cóctel de pasiones, dramas, comedias y tragicomedias, esa dificultad se reduce: los aspectos emocionales de nuestra condición nos son mucho más cercanos, accesibles, y por ello interesantes, que la frialdad de un triángulo rectángulo o el exotismo de un número primo. Las matemáticas, sin embargo, tienen también una parte emocional, que es más intensa e importante de lo que se cree —y a ello le dedicaré todo el próximo capítulo—. Así que los matemáticos deberíamos ser tan capaces de explotar el recurso emocional como los novelistas, y trasladar a las matemáticas, con las debidas precauciones, algunas técnicas usadas por la novela. Aquí me voy a centrar en una de esas técnicas.

Uno de los propósitos fundamentales de la novela, y quizá su valor principal, es mostrar la riqueza, variedad y complejidad de la condición humana. Con el siglo XX, nació uno de los recursos estilísticos para conseguir ese propósito: se trata de mostrar el hormiguero humano en que inevitablemente se acaba convirtiendo toda gran ciudad, y la tupida maraña de relaciones humanas que lo infiltra. Surgieron así novelas con un plantel increíblemente abultado de personajes, que mostraban la exuberancia y complejidad del continuo pulular de los habitantes de una gran urbe; esos personajes viven vidas aparentemente desconectadas y ajenas unas de otras, pero a poco que el bisturí del narrador disecciona la realidad, aparece toda una densa trama de sorprendentes conexiones y relaciones de los unos con los otros. Joyas de ese estilo son *Manhattan Transfer* (1925) del americano John Dos Passos o *La colmena* (1951) del Premio Nobel español Camilo José Cela —cuya nómina de personajes alcanza los 296 imaginarios y 50 reales, si bien buena parte de ellos son más bien fugaces—.

En matemáticas, son bastante habituales esas situaciones donde varios resultados aparentemente desligados acaban estando inextricablemente conectados. Las matemáticas conforman un todo coherente, y ocurre a menudo que un adecuado punto de vista, o una idea brillante, permite conectar, cuando no unificar, resultados que a primera vista carecían totalmente de relación. Al igual que ocurre con novelas del tipo de *Manhattan Transfer* o *La colmena*, mostrar esa riqueza de relaciones ocultas es un recurso que permitiría hacer más explícita la belleza de las matemáticas; no hay que olvidar, como nos advirtiera Jorge Wagensberg en su libro *El gozo intelectual*, que encontrar el mismo principio en cosas distintas es

fuente primordial de satisfacción estética: «Caer en la cuenta de que dos cosas en principio distintas son, finalmente, una misma cosa es el fundamento del comprender y de un raro gozo intelectual.» Dedicaré lo que queda de este capítulo a mostrar en detalle un ejemplo de ello.

Circunferencias tangentes, aproximación racional, ecuaciones diofánticas y *La colmena* de Cela

De entre el ingente hormiguear de resultados que pueblan la inabarcable geografía de las matemáticas elementales voy a elegir, como al azar, tres. Serán los tres personajes de la historia que me propongo contar; como ocurre en las páginas de *La colmena*, estos personajes parecen todo lo alejados y ajenos entre sí que permite la enorme extensión y variedad de las matemáticas aunque, finalmente, esa lejanía y ajenidad sólo será aparente.

El primer personaje pertenece al viejo barrio de la geometría: se trata de esas construcciones geométricas tan sugerentes formadas por circunferencias tangentes. Para fijar ideas, voy a bautizar con un nombre a cada uno de estos tres personajes; no creo que a estas alturas extrañe mucho al lector que use para este menester nombres de personajes de *La colmena*. Así, llamaré a mi primer personaje *doña Rosa*; en la obra de Cela, doña Rosa es la dueña del café La Delicia, donde transcurren bastantes escenas de la novela. «Para doña Rosa —nos la describe Cela— el mundo es su Café, y alrededor de su Café, todo lo demás. Hay quien dice que a doña Rosa le brillan los ojillos cuando viene la primavera y las muchachas empiezan a andar de manga corta. Yo creo que todo eso son habladurías: doña Rosa no hubiera soltado jamás un buen amadeo de plata por nada de este mundo. Ni con primavera ni sin ella. A doña Rosa lo que le gusta es arrastrar sus arrobas, sin más ni más, por entre las mesas.»

El segundo personaje de mi historia vive en el arrabal obrero de la aproximación: se trata de cómo de bien podemos aproximar un número cualquiera —pensemos, para fijar ideas, en $\sqrt{2}$ o en el número π mediante fracciones. A este personaje lo bautizaré como *Martín Marco*. En la novela de Cela, Marco es un poeta, un idealista de izquierdas al que la guerra civil ha dejado fuera de juego: «Es un hombrecillo desmedrado, paliducho, enclenque, con lentes de pobre alambre sobre la mirada. Lleva la americana raída y el pantalón desflecado.» Martín Marco malvive de la caridad de amigos y antiguos conocidos, de los huevos fritos que le prepara su hermana Filo de tanto en tanto a escondidas del marido, y del calor que por la noche

encuentra en las camas de las prostitutas desocupadas del burdel que regenta una antigua amiga de su madre.

Por último, el tercero de mis personajes es un habitante de la zona más exclusiva y selecta de las matemáticas: la teoría de números; se trata de la ecuación diofántica

$$p^2 + q^2 + r^2 = 3 \cdot p \cdot q \cdot r,$$

o más concretamente, de los diversos números naturales que resuelven esa ecuación. A este personaje lo llamaré *Julita*, en atención a la chica que Cela nos pinta como un poco fresca y ligera de cascos: «Lleva el pelo pintado de rubio. Con la melena suelta y ondulada, parece Jean Harlow.» Es sobrina de doña Rosa, y se cita con su novio en el *meublé* de doña Celia.

Tal vez a más de un purista de las matemáticas se le antoje algo irrespetuoso el paralelismo establecido entre esos resultados matemáticos y los personajes de Cela. No niego que comparar la geometría, o tan siquiera sea una parte de la geometría, con la lagarta de doña Rosa, esa jamona, un algo sucia y un mucho egoísta, o la aproximación racional de números irracionales con el iluso de Martín Marco, blasón de perdedores, o una célebre ecuación diofántica con la pija de Julita Moisés Leclerc, no tenga sus riesgos conceptuales; pero tanto esas comparaciones como sus peligros son parte fundamental del juego que le propongo al lector.

La biografía de cada uno de nuestros personajes se remonta hasta el tiempo de los griegos pero, como esta historia de vidas cruzadas acabará mostrando, no será ésta la única, ni siquiera la más importante, de las coincidencias entre ellos. Aunque, como sucede con las novelas, tampoco en las matemáticas esas coincidencias ocurren por casualidad.

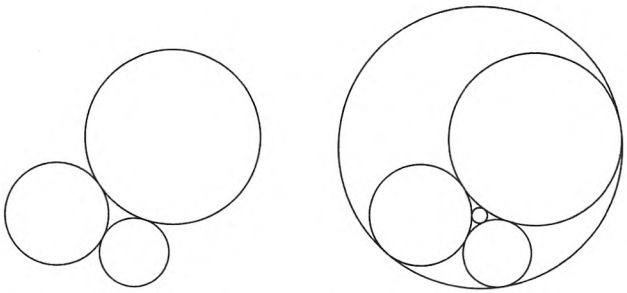
Doña Rosa, o las construcciones geométricas con circunferencias tangentes

Empecemos con doña Rosa, o sea, con las construcciones geométricas con circunferencias tangentes.

Del gran geómetra griego Apolonio apenas sabemos nada, más allá de que nació en la ciudad jónica de Perga hacia el año 262 a.C., que escribió un puñado de importantes libros, buena parte de ellos hoy perdidos, y que fue llamado precisamente así: «el gran geómetra». De todas sus obras, la que aquí me interesa se titula *Tangencias*;

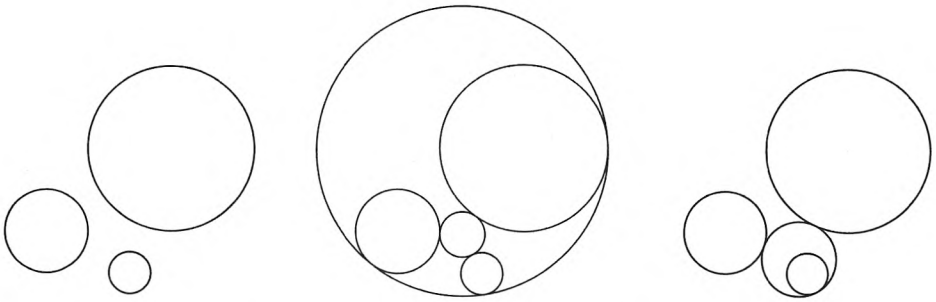
se considera perdida, aunque de ella sabemos por lo que contó Pappus de Alejandría en el siglo III o IV d.C. En *Tangencias* Apolonio daba solución a lo que después sería llamado «el problema de Apolonio»: Dados tres elementos, que pueden ser puntos, rectas o circunferencias, trazar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres. Tanto el trazado como el número de soluciones depende de si inicialmente tenemos puntos, rectas o circunferencias, y de la posición relativa de estos elementos; Apolonio, en cualquier caso, parece que resolvió todos los casos posibles.

Cuando los tres elementos iniciales son tres circunferencias, aparecen las primeras configuraciones con circunferencias tangentes. En concreto, si las tres circunferencias iniciales son, a su vez, tangentes, el problema admite dos soluciones, una interior y otra exterior.



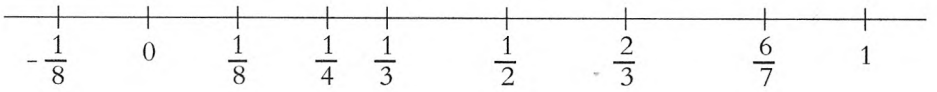
El problema de Apolonio, cuando la configuración inicial son tres circunferencias tangentes (izquierda), tiene dos soluciones (derecha).

El caso más general de que las tres circunferencias iniciales no se toquen admite, en general, ocho soluciones distintas.

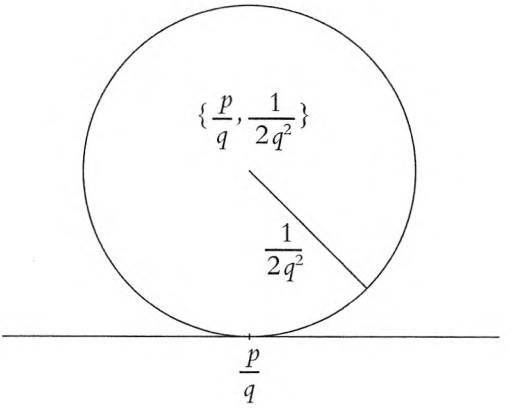


Cuando la configuración inicial son tres circunferencias que no se tocan (izquierda), el problema de Apolonio admite ocho soluciones (en el centro se muestran dos de ellas y a la derecha, otra solución más).

De las muchas configuraciones de circunferencias tangentes que orlan la historia de las matemáticas, voy a considerar aquí una especialmente simple y elegante: se denominan circunferencias de Ford y se construyen del siguiente modo. Partimos de una línea recta donde hemos marcado las fracciones —o los números racionales, como nos gusta a los matemáticos llamar a las fracciones—, tal y como se muestra a continuación.

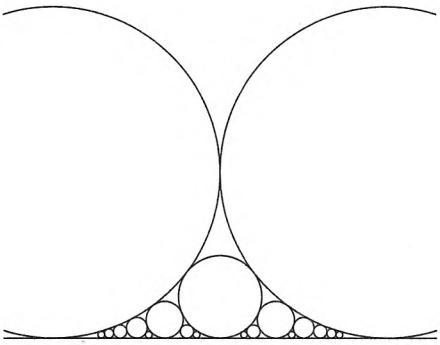


Cada fracción p/q la vamos a considerar de forma irreducible —esto es, ni p ni q tienen divisores comunes: por ejemplo, descartamos la fracción 5/15 y nos quedamos con su equivalente irreducible 1/3—, y con denominador q positivo. Sobre cada fracción p/q vamos a colocar una circunferencia tangente a la recta y de radio $1/(2q^2)$.



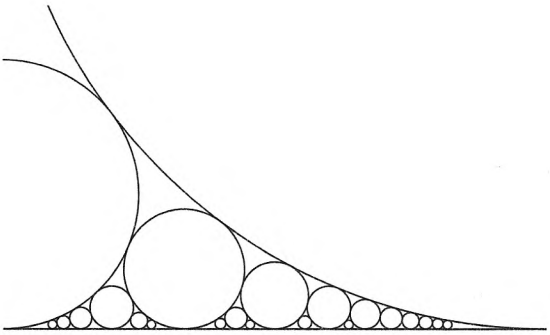
Si usamos el habitual sistema de coordenadas cartesianas para representar puntos del plano —y que al lector le debieron de enseñar en la enseñanza primaria—, entonces la configuración de circunferencias de Ford está constituida por todas las circunferencias que tienen centro en los puntos de coordenadas $(p/q, 1/(2q^2))$ y radio respectivo $1/(2q^2)$.

Las circunferencias de Ford tienen un montón de propiedades sorprendentes. Un cálculo no demasiado complicado muestra que dos circunferencias cualesquiera de esta configuración o no se cortan o son tangentes, tal y como podemos ver en las dos figuras siguientes.



Circunferencias de Ford correspondientes a las fracciones entre 0 y 1 cuyo denominador es menor o igual que 7; así, las circunferencias corresponden a las siguientes fracciones: 0, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 2/5, 3/7, 1/2, 4/7, 3/5, 2/3, 5/7, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 1.

El mismo cálculo muestra que las circunferencias de Ford correspondientes a las fracciones p/q y P/Q son tangentes si los números $p \cdot Q$ y $P \cdot q$ son consecutivos; y viceversa.

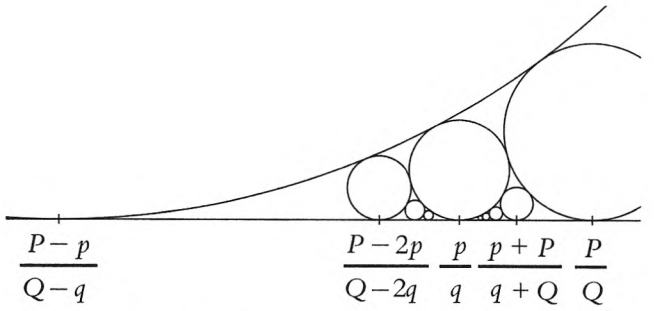


Otro detalle de las circunferencias de Ford: corresponde a las fracciones entre 1/2 y 1 cuyo denominador es menor o igual que 11.

Tampoco es excesivamente complicado mostrar que, si las circunferencias correspondientes a las fracciones p/q y P/Q son tangentes, entonces las circunferencias de Ford correspondientes a las fracciones

$$\frac{P}{Q}, \frac{P+p}{Q+q}, \frac{P-p}{Q-q}, \frac{P+2\cdot p}{Q+2\cdot q}, \frac{P-2\cdot p}{Q-2\cdot q}, \frac{P+3\cdot p}{Q+3\cdot q}, \frac{P-3\cdot p}{Q-3\cdot q}, \frac{P+4\cdot p}{Q+4\cdot q}, \frac{P-4\cdot p}{Q-4\cdot q}, \text{ etc.,}$$

son también tangentes a la correspondiente a p/q. Esas fracciones son, además, todas las que corresponden a circunferencias de Ford tangentes a la de p/q.



Proceso de cálculo de las circunferencias de Ford tangentes a una dada.

Igualmente, un cálculo sencillo muestra que las circunferencias de Ford tangentes a una dada forman una red que rodea completamente a dicha circunferencia. Si pudiésemos dibujar todas estas infinitas circunferencias, veríamos que inexorablemente se van acercando a la fracción p/q hasta acabar mordiscándola (véase la figura anterior y también el recuadro adjunto), como si tuvieran el mismo voraz apetito con que doña Rosa nos es descrita en la novela de Cela.

EL VORAZ APETITO DE LAS CIRCUNFERENCIAS DE FORD

El siguiente cálculo simple deberá convencer al lector de que las circunferencias de Ford tangentes a la correspondiente a la fracción p/q se van acercando hasta situarse tan cerca como se quiera de dicha fracción. En efecto, fijémonos en las circunferencias tangentes que quedan a la izquierda de la fracción p/q. Éstas corresponden a las fracciones $(P+n\cdot p)/(Q+n\cdot q)$, donde n es cualquier número natural. Basta ahora comprobar que la diferencia entre esas fracciones y p/q se hace tan pequeña como se quiera conforme el número n se hace grande:

$$\frac{P+n\cdot p}{Q+n\cdot q}-\frac{p}{q}=\frac{(P+n\cdot p)\cdot q-(Q+n\cdot q)\cdot p}{(Q+n\cdot q)\cdot q}=\frac{P\cdot q+n\cdot p\cdot q-Q\cdot p-n\cdot p\cdot q}{(Q+n\cdot q)\cdot q}=\frac{P\cdot q-Q\cdot p}{(Q+n\cdot q)\cdot q}.$$

Ahora bien, como las circunferencias correspondientes a p/q y a P/Q son tangentes, se tiene, según lo comentado antes, que los números $p\cdot Q$ y $P\cdot q$ son consecutivos; su diferencia tiene por tanto que ser igual a 1 o -1. Si incluimos esto en la cuenta anterior obtenemos finalmente:

$$\frac{P+n\cdot p}{Q+n\cdot q}-\frac{p}{q}=\frac{\pm 1}{(Q+n\cdot q)\cdot q}.$$

Así pues, conforme el número n aumenta, como está en el denominador, la diferencia entre p/q y $(P+n\cdot p)/(Q+n\cdot q)$, se va reduciendo hasta que desaparece cuando n vale infinito.

Convendrá el lector conmigo en que las circunferencias de Ford están tan sobradas de armonía y elegancia como faltas de ambos atributos está la entraña moral de doña Rosa; o su vientre, hinchado como un pellejo de aceite, de quien Cela nos dice: «Es la imagen misma de la venganza del bien nutrido contra el hambriento.»

Martín Marco, o la aproximación racional de números irracionales

Dejemos, por ahora, a doña Rosa, o las circunferencias de Ford, y consideremos la biografía del segundo de nuestros personajes: Martín Marco, o la aproximación racional de números irracionales.

La creencia científica esencial de Pitágoras y de los antiguos pitagóricos, el fundamento de sus matemáticas y de su explicación racional de la naturaleza era que todo en el universo se podía reducir a números. Y para los pitagóricos no había más números que el 1, 2, 3, 4, 5, etcétera, etcétera, y las fracciones que con ellos se puedan formar.

Sin embargo, cuando se enfrentaron a la operación geométrica más simple de todas, medir segmentos, su andamiaje científico se les desmoronó. Midieron la diagonal de un cuadrado de lado 1 y obtuvieron que su longitud valía exactamente $\sqrt{2}$. Sus frustraciones comenzaron cuando se dieron cuenta de que ese valor, $\sqrt{2}$, no puede ser representado por una fracción (ver recuadro de texto). ¿Qué hay más sencillo de medir que la diagonal de un cuadrado? Pues ni siquiera eso se puede hacer de manera exacta usando los números naturales y sus fracciones. Cuenta la leyenda que Hipaso de Metaponto, el pitagórico que se fue de la lengua y contó fuera de la secta el terrible secreto, fue arrojado al mar desde la borda de un barco para que fuera flagelado a perpetuidad por las olas: «Pues habiendo desvelado el secreto de lo inexpresable se había hecho acreedor al más terrible castigo, ser desposeído del ser y transportado a la nada, de donde vino.»

Pronto, pues, se puso de manifiesto en la historia de las matemáticas que, además de los números 1, 2, 3, 4, 5, etc. —que nos sirven para contar—, y las fracciones que con ellos se pueden formar, necesitamos de otros números más «complicados». Para establecer cierta distinción antropológica entre números normales y números complicados, se recurrió a unos nombres cargados de simbolismo: así, llamamos a 1, 2, 3, 4, 5, etc. números «naturales», mientras que a las fracciones que con ellos podemos formar los llamamos números «racionales»; en cambio a $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π, etc., los llamamos números «irracionales», como si ese sambenito insultante nos quisiera advertir de cierto carácter malsano implícito en esos números.

IRRACIONALIDAD DE RAÍZ DE 2

Es en resultados como éste donde las matemáticas muestran el extraordinario poder del razonamiento lógico. Dado que hay infinitas fracciones y no podemos comprobar cada caso, ¿cómo podemos estar seguros de que no hay una que multiplicada por sí misma dé 2? Pues usando el gran invento griego que revolucionó las matemáticas: la demostración. Una demostración es una justificación lógica adecuada de un resultado matemático: partiendo de un hecho evidente y mediante una cadena de razonamientos, cada uno de los cuales se deduce lógicamente de los anteriores, se alcanza otro hecho no evidente cuya verdad queda así establecida. La primera demostración de lo que aquí nos ocupa se atribuye al mismo Pitágoras y es como sigue. Observamos primero que toda fracción tiene una equivalente irreducible con numerador y denominador sin divisores comunes. Si hay una fracción irreducible, llamémosla p/q, que al multiplicarla por sí misma da como resultado 2 (es decir, $p/q \cdot p/q = 2$), tiene que ocurrir que $p \cdot p = 2 \cdot q \cdot q$. Veamos que esto es imposible. Si $p \cdot p = 2 \cdot q \cdot q$, deducimos que $p \cdot p$ es un número par —es el doble de otro número—. Dado que el cuadrado de un número impar es siempre impar, deducimos a su vez que p es un número par. El número p es entonces el doble de otro número, al que vamos a llamar k (es decir, $p = 2 \cdot k$). Sustituyendo en la ecuación anterior tendremos $2 \cdot k \cdot 2 \cdot k = 2 \cdot q \cdot q$, o lo que es igual, $2 \cdot k \cdot k = q \cdot q$; por lo tanto, $q \cdot q$ es par, en cuyo caso también q es par. Pero esto no es posible, porque si la fracción p/q es irreducible entonces numerador y denominador no pueden ser ambos números pares.

Esa rareza de los números irracionales se hace patente cuando nos hacemos sobre ellos la más inocente de las preguntas: ¿cuánto vale $\sqrt{2}$?, ¿cuánto vale π? Un número irracional, por su propia identidad, no puede ser descrito por una fracción: puedo dar una fracción que difiera de él tan sólo una millonésima, pero esa fracción no será igual al número irracional; claro que puedo también mostrar una fracción que difiera de él tan sólo una billonésima, pero esa fracción tampoco será igual al número irracional. Puedo marcar una diferencia insignificante y encontrar una fracción que difiera del número irracional menos que esa diferencia, pero aún así, tampoco esa fracción será igual al número irracional, por lo que necesitaré de otra fracción si quiero disminuir la diferencia fijada. Es como una maldición bíblica: con la misma cruel monotonía con que se desgranan los días en los tiempos duros que describe *La colmena* de Cela, a una fracción seguirá otra y luego otra y otra más después, y esta última podrá diferir muy poco del número irracional, casi nada, pero no será igual al número irracional, y tendré que buscar otra si quiero aproximarme más.

Para describir un número irracional no nos queda más remedio que acudir a aproximaciones racionales más o menos precisas; y necesitaremos una cantidad infinita de ellas para poder conseguir una precisión total. Surgió así un nuevo tipo de problemas en matemáticas: la aproximación racional de números irracionales.

Uno de los primeros matemáticos que contribuyó a esa disciplina fue Arquímedes, que obtuvo la más famosa aproximación racional para la más célebre de las constantes matemáticas: aproximando la longitud de la circunferencia por la de un polígono de 96 lados, obtuvo que el número π es poco más de una milésima más pequeño que la fracción 22/7. Después muchos otros fueron mejorando esa aproximación conforme la historia desgranaba los siglos: así, el matemático chino Tsu Ch'ung-Chih encontró la fracción 355/113, que tan sólo difiere de π en menos de 3 diezmillonésimas (la fracción sería redescubierta por varios matemáticos europeos a finales del siglo XVI).

Sellos dedicados a Arquímedes y Tsu Ch'ung-Chih, los dos matemáticos de la Antigüedad que más certeras aproximaciones dieron de π.

A partir del siglo XVII, los desarrollos en serie desataron una verdadera fiebre, casi un vicio, por calcular aproximaciones racionales del número π, fiebre en la que participaron matemáticos tan distinguidos como Newton o Euler.

Pero, ¿cómo de bien podemos, en general, aproximar un número irracional mediante fracciones? Precisemos un poco más la pregunta. Una fracción irreducible p/q es tanto más «costosa» de producir cuanto mayor sea su denominador q —porque para producirla hay que dividir la unidad en tantas partes iguales como indique el denominador—. Por lo tanto, para saber lo buena o mala que es una fracción p/q como aproximación de un número irracional, debemos comparar la diferencia entre

fracción e irracional en términos del denominador q de la fracción. Dado un número irracional cualquiera, llamémoslo a para fijar ideas, se trata de estimar el menor valor de $|a - p/q|$ entre todas las fracciones p/q con denominador fijo igual a q. Aquí estoy usando una notación matemática habitual para medir cuán diferentes son dos números: escribo la diferencia entre barras, $|x - y|$, para indicar que considero siempre la diferencia del número mayor al menor —para obtener así un resultado positivo; para ser precisos: $|x - y|$ vale $x - y$ si x es mayor que y, mientras que $|x - y|$ vale $y - x$ si y es mayor que x—.

Puesto que todas las fracciones con denominador igual a q están distribuidas por la recta a igual distancia $1/q$, podemos concluir que cualquiera que sea el número irracional a siempre habrá una fracción p/q de manera que $|a - p/q| < 1/(2 \cdot q)$. O sea, siempre podemos aproximar un número irracional por una fracción con un error menor que el inverso del doble del denominador.

Por ejemplo, si tomamos el número π y $q = 10$, y apelamos a la ayuda de una calculadora, obtendremos que la mejor aproximación racional con denominador 10 del número π es la fracción 31/10. En este caso: $\pi - 31/10 = 0{,}04159\ldots$, que efectivamente es algo menor que $1/(2 \cdot 10) = 0{,}05$. Y eso es lo mejor que podemos hacer con denominador igual a 10. Ahora bien, con otros denominadores la cosa puede mejorarse considerablemente. Tomemos, por ejemplo, $q = 7$. La mejor aproximación racional del número π con denominador igual a 7 la da la fracción de Arquímedes 22/7; en este caso $|\pi - 22/7| = 0{,}00126\ldots$; como se puede apreciar, la fracción de Arquímedes 22/7 es mejor para aproximar π que la anterior 31/10 —a pesar de tener denominador menor—. Algo parecido ocurre si tomamos el denominador igual a 113; en este caso la mejor aproximación la da la fracción 355/113 de Tsu Ch'ung-Chih $|\pi - 355/113| = 0{,}000000266\ldots$ Mientras que con denominador 125, a pesar de ser mayor que 113, lo mejor que podemos conseguir es 393/125, que da una aproximación considerablemente peor: $|\pi - 393/125| = 0{,}0024\ldots$ —peor aproximación incluso que la fracción de Arquímedes—.

Dado que hay denominadores que parecen servir para aproximar mucho mejor un número irracional que otros, la pregunta no es tanto cómo de bien podemos aproximar con un denominador cualquiera, sino cómo de bien podemos aproximar con uno adecuadamente elegido.

Con esto en mente, el matemático alemán Lejeune Dirichlet —quien se casó con una hermana del compositor Felix Mendelssohn— mostró en 1842 que un número irracional siempre puede ser aproximado mediante fracciones con un error menor que el inverso del cuadrado del denominador.

El matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien acabó ocupando la cátedra de Gauss en Gotinga después de la muerte de éste en 1855.

La demostración es bastante elemental y usa un principio que Dirichlet hizo célebre: el principio del palomar. El principio del palomar es una simple expresión de sentido común: si queremos alojar cierto número de palomas en jaulas y tenemos más palomas que jaulas, entonces habrá finalmente más de una paloma en alguna jaula. A pesar de su simpleza, el principio del palomar es una herramienta útil para demostrar determinados resultados matemáticos; entre ellos se encuentra la aproximación racional de Dirichlet: dado un número irracional cualquiera a, existen infinitas fracciones p/q tales que $|a - p/q| < 1/q^2$ —la demostración se incluye en el recuadro de texto—. Ésta es una mejora notable con respecto a lo que teníamos antes, pues conforme q va aumentando el número $1/q^2$ es considerablemente más pequeño que $1/(2 \cdot q)$.

El resultado de Dirichlet no es posible mejorarlo en lo relativo a la potencia cuadrada de $1/q$. Lo cual está íntimamente ligado a la separación de los irracionales en números algebraicos y trascendentes. Pensemos en $\sqrt{2}$: es un número irracional pero, en cierta forma, es fácil describirlo con nuestra secuencia básica de números enteros: ..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6..., pues $\sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, cuyos coeficientes son números enteros. A los números

DIRICHLET Y «EL PRINCIPIO DEL PALOMAR»

La demostración de Dirichlet es como sigue. Tomemos un número irracional cualquiera a, y fijemos un número natural N. Consideremos ahora los números siguientes, $a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, N \cdot a$ y $(N+1) \cdot a$ —hay en total $N+1$ números en esa lista—. Para cada uno de ellos, pongamos de manera genérica $k \cdot a$, habrá un número natural p_k tal que la diferencia $k \cdot a - p_k$ esté entre 0 y 1 —por ejemplo, si $a = \sqrt{5} = 2{,}236\ldots$, entonces $2 \cdot a = 4{,}472\ldots$, y p_2 será igual a 4, $3 \cdot a = 6{,}708\ldots$, y p_3 será igual a 6, y así sucesivamente—. Separamos ahora los números entre 0 y 1 en N cajas disjuntas: a la primera van a parar los números que están entre 0 y $1/N$, a la segunda, los que están entre $1/N$ y $2/N$, y así hasta llegar a la última, donde van a parar los números que están entre $(N-1)/N$ y 1. Dado que en nuestra lista de números $k \cdot a - p_k$, $k = 1, \ldots, N+1$, hay $N+1$ números entre 0 y 1, y hemos dividido los números entre 0 y 1 en N cajas disjuntas, el principio del palomar establece que en alguna de esas cajas hay más de uno de nuestros números. Pongamos que los números $k \cdot a - p_k$ y $n \cdot a - p_n$ han ido a las misma caja. Por construcción, es evidente que la diferencia de dos números en la misma caja es menor que $1/N$; de donde deducimos que $|k \cdot a - p_k - (n \cdot a - p_n)| < 1/N$. Si llamamos ahora $q = k - n$ y $p = p_k - p_n$, obtenemos $|q \cdot a - p| < 1/N$, o bien, $|a - p/q| < 1/(q \cdot N)$. Puesto que tanto k como n son menores que $N+1$ deducimos que q es menor que N, y dado que lo podemos tomar positivo concluimos que $|a - p/q| < 1/q^2$. Como el número a es irracional y N es un número natural cualquiera, la desigualdad $|a - p/q| < 1/(q \cdot N)$ nos asegura que podemos encontrar infinitas fracciones distintas p/q verificando $|a - p/q| < 1/q^2$.

que son solución de una ecuación con coeficientes números enteros, cualquiera que sea el grado de la ecuación, los llamamos números algebraicos. El número

$$\sqrt{\sqrt{\frac{8}{\sqrt[3]{4+\sqrt{\frac{557}{27}}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{\frac{557}{27}}}}}-\frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{\frac{557}{27}}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{\frac{557}{27}}}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{\frac{557}{27}}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{\frac{557}{27}}}}{2}}$$

por monstruoso que nos pueda parecer, es algebraico, porque es solución de la ecuación de cuarto grado $x^4 + 8x - 5 = 0$, cuyos coeficientes son todos números enteros. A los números que no son algebraicos, los matemáticos los llamamos trascendentes, y, en cierto sentido, están todo lo alejados que se puede estar de los números naturales que nos sirven para contar.

Las constantes matemáticas más famosas son habitualmente números trascendentes; así el número π y también el número e, lo que no se logró demostrar hasta finales del siglo XIX. Que el número π sea trascendente tiene un impresionante corolario: el círculo no se puede cuadrar; o sea, a partir de un círculo dado no se puede construir con regla y compás un cuadrado de igual área. Cuadrar el círculo fue un problema que obsesionó a los matemáticos griegos, y cuya solución no se conoció hasta finales del siglo XIX. Si el resolver un problema de matemáticas lo comparáramos con un récord atlético, el de la cuadratura del círculo fue un récord que tardó ¡más de dos milenios y medio en superarse!

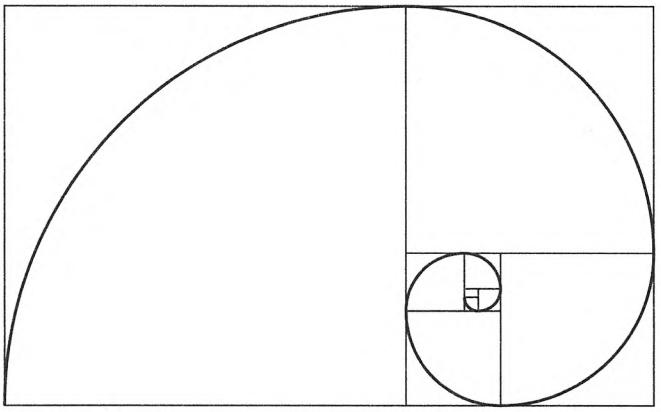
Resulta que los números algebraicos tienen un defecto esencial a la hora de ser aproximados por fracciones: no puede hacerse de manera mejor que lo que estipula el resultado de Dirichlet. Más precisamente, si tomamos un número algebraico cualquiera a y un número k mayor estricto que 2 ($k > 2$), entonces, salvo unas cuantas excepciones —siempre en número finito—, se verificará que $|a - p/q| > 1/q^k$.

Esa carencia de los números algebraicos nos dice que el resultado de Dirichlet no se puede mejorar en lo relativo a la potencia del denominador; pero otra cosa es lo que ocurre con la constante que acompaña al cuadrado del denominador: 1. En 1891, el también matemático alemán Adolf Hurwitz demostró que esa constante se podía sustituir por una más pequeña, $1/\sqrt{5}$. Así, dado un número irracional cualquiera a, existen infinitas fracciones p/q tales que $|a - p/q| < 1/(\sqrt{5} \cdot q^2)$. Hurwitz también mostró que esa constante, $1/\sqrt{5}$, ya no se puede mejorar. La culpa de esa imposibilidad de mejora la tiene otra de las más célebres constantes matemáticas: la razón áurea, $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

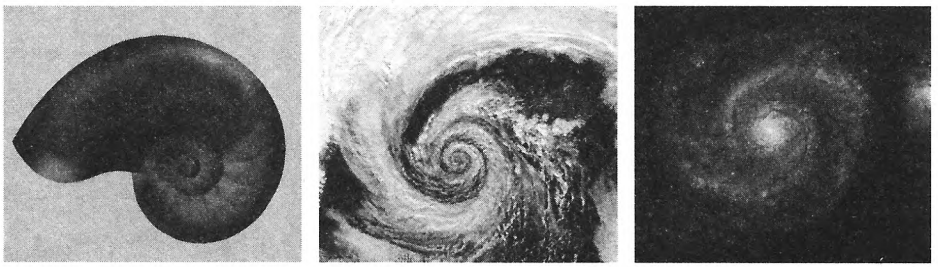
Adolf Hurwitz (1859-1919), uno de los grandes matemáticos del siglo XIX, destacó especialmente en los ámbitos de las curvas algebraicas y la teoría de números.

La razón o proporción áurea es la que se da entre los lados de un rectángulo de proporciones «perfectas»; según los antiguos geómetras griegos, las proporciones de un rectángulo son perfectas cuando se mantienen en el rectángulo obtenido al eliminar un cuadrado cuyo lado es el lado corto del rectángulo inicial. Pongamos que las dimensiones del rectángulo son *a,* el lado corto y *b,* el lado largo; entonces las dimensiones del nuevo rectángulo serán $b - a$ y a. La proporción más armoniosa se dará cuando $b/a = a/(b - a)$; lo que, llamando $x = b/a$, da $x = 1/(x - 1)$; o sea, $x^2 - x - 1 = 0$. La raíz positiva de esa ecuación es la razón áurea: $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Cuando aplicamos indefinidamente a un rectángulo áureo el proceso de eliminar cuadrados, y vamos uniendo con cuartos de circunferencia los vértices opuestos en esos cuadrados, se obtiene una espiral áurea, tal y como puede verse en la figura adjunta.

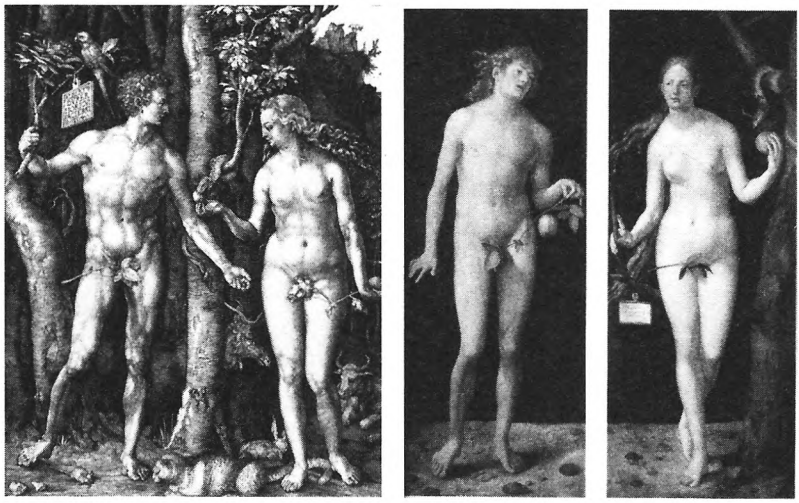


Es, justamente, la forma que tiene la concha de los nautilus, o la disposición de las pipas en un girasol, o la forma en las que se colocan las estrellas en muchas galaxias del universo, o las acumulaciones nubosas en borrascas, ciclones y huracanes.



La espiral áurea es reconocible en conchas de nautilus, huracanes y galaxias.

La razón áurea es un número omnipresente en la naturaleza, y de igual manera que ha obsesionado a los matemáticos también ha obsesionado a pintores, arquitectos, músicos y otros artistas. Durero fue un buen ejemplo. De todos los artistas del Renacimiento, acaso fuera él quien mayor conocimiento matemático tuvo. Ese saber, que abarcaba la fortificación de ciudades y fortalezas, el uso del compás y la escuadra para medir cuerpos sólidos, el estudio de la proporción humana o el diseño geométrico del alfabeto, los puso Durero por escrito al final de su vida en varios textos, que mayormente no vieron la luz de la imprenta hasta después de muerto su autor. Buena parte de su conocimiento matemático lo adquirió Durero en Italia; por recomendación del pintor veneciano Jacopo de Barbari, Durero visitó Bolonia en 1506 y allí fue instruido en la *secretissima scientia* por un maestro de quien no reveló el nombre, aunque muchos han creído reconocer en esa figura anónima al fraile franciscano Luca Pacioli, que publicó en 1494 la gran enciclopedia matemática del siglo XV. De hasta qué punto la *secretissima scientia*, tras la que se esconde la razón áurea como fórmula ignota para la construcción de un canon perfecto para el cuerpo humano, dejó de ser secreta para Durero, dan cuenta cabal sus magníficos desnudos de Adán y Eva. La diferencia entre disponer de ese secreto conocimiento y no tenerlo es la que va —salvando las dimensiones y los soportes— del aspecto que muestran nuestros primeros padres, ligeramente cabezón Adán y tirando a rechoncha Eva, en los grabados que Durero realizó en 1504 —hoy en la Galería Albertina de Viena— a la gloriosa esbeltez que luce la primera pareja en los óleos que Durero pintó en 1507 —hoy en el Museo del Prado—.



¿Qué aprendió Durero en los tres años que separan el grabado de la izquierda de los óleos de la derecha, que produjo esa diferencia apreciable en las proporciones corporales de Adán y Eva?

Según puso de manifiesto Hurwitz, la razón áurea es el número irracional que peor se deja aproximar mediante fracciones: dado cualquier número $c > \sqrt{5}$ entonces se verificará que $|\Phi - p/q| > 1/(c \cdot q^2)$, con la salvedad de unas cuantas excepciones p/q —siempre en número finito—.

Doña Rosa-Martín Marco, Ford-Dirichlet y Hurwitz

Difícilmente hay dos personajes en *La colmena* de Cela que difieran más en su forma de ser que doña Rosa y Martín Marco. Oronda y ahíta, avara y misántropa la una; escuálido y hambriento, pródigo —con lo poco que tiene— y amable el otro. Dos personajes que chocan cuando doña Rosa ordena a un camarero que eche de su café a Martín Marco por no pagar una consumición. La dueña le da instrucciones al camarero sobre cómo proceder: «A la calle con suavidad, y en la acera, dos patadas bien dadas donde se tercie. ¡Pues nos ha merengao!». El camarero, sin embargo, se ahorra la violencia, aunque no le queda más remedio que mentirle a doña Rosa:

«—¿Le has arreado?

»—Sí, señorita.

»—¿Cuántas?

»—Dos.

»La dueña entorna los ojitos tras los cristales, saca las manos de los bolsillos y se las pasa por la cara, donde apuntan los cañones de la barba, mal tapados por los polvos de arroz.

»—¿Dónde le has dado?

»—Donde pude; en las piernas.

»—Bien hecho. ¡Para que aprenda! ¡Así otra vez no querrá robarle el dinero a las gentes honradas!».

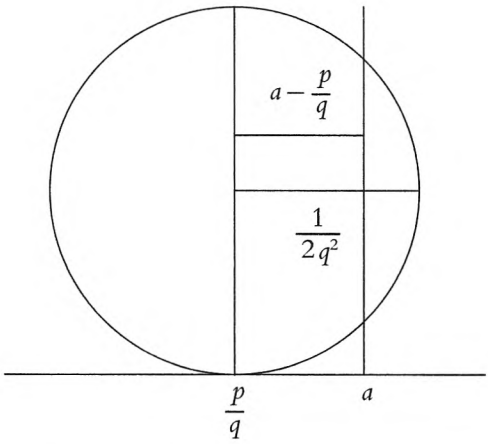
Igual de opuestas que doña Rosa y Martín Marco parecen la configuración de circunferencias de Ford y las bondades de la aproximación de irracionales mediante fracciones que ponen de manifiesto los teoremas de Dirichlet y Hurwitz. Preciso, elegante y armonioso el reticulado circular de Ford; arcanos, chocantes e insólitos los tejemanejes con fracciones de Dirichlet y Hurwitz. Parecen conformar dos aspectos ajenos y distantes de las matemáticas.

Pero ocurre a menudo en las buenas novelas que dos personajes ajenos y distantes vienen a ser personificaciones opuestas aunque complementarias de la misma condición: la propia de nuestra compleja naturaleza humana. Y con no menos frecuencia ocurre que dos resultados matemáticos, aparentemente distintos y ais-

lados el uno del otro, no son sino expresiones diferentes de una misma y concreta realidad matemática.

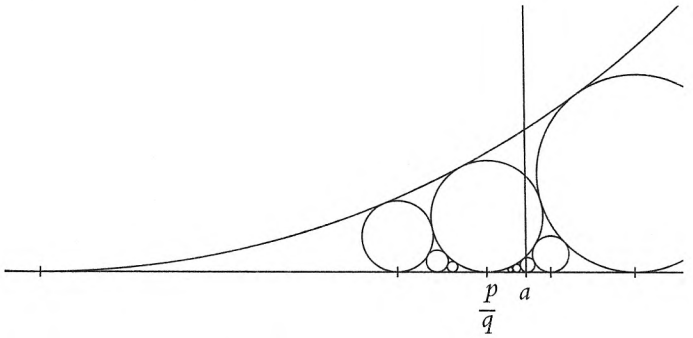
Eso es precisamente lo que ocurre con la configuración de circunferencias tangentes de Ford y la aproximación de números irracionales mediante fracciones: lo primero no es más que una visualización geométrica de lo segundo, como si el fárrago del teorema de Hurwitz hubiera cristalizado en la imagen límpida y diáfana de las circunferencias de Ford.

Observe el lector la figura superior de la página 50, aunque no se lo parezca, lo que ve ahí dibujado no es sino la materialización visual del teorema de Hurwitz. En efecto, dibujemos el número irracional *a* sobre el eje, y tracemos sobre el punto que lo representa una recta perpendicular al eje, como muestra la figura siguiente. Cada vez que esa recta corte una circunferencia de Ford —pongamos la trazada sobre el número racional p/q—, la geometría del dibujo nos dice que la diferencia entre *a* y p/q es necesariamente menor que el radio de la circunferencia, esto es, menor que $1/(2 \cdot q^2)$: $|a - p/q| < 1/(2 \cdot q^2)$.



Ahora bien, el hecho de que las circunferencias de Ford tangentes a la correspondiente a la fracción p/q conformen una red que inexorablemente se va acercando a la fracción p/q hasta acabar mordiscándola (figura de la página 51), nos hace ver que si la recta trazada sobre el número irracional *a* corta a la circunferencia de Ford correspondiente a la fracción p/q, entonces también cortará otra tangente a ésta situada inmediatamente por debajo (figura siguiente); y, por la misma razón, otra situada inmediatamente por debajo de esta última, y así sucesivamente. De donde necesariamente se deduce que la recta trazada sobre el número irra-

cional a cortará una cantidad infinita de circunferencias de Ford. De lo dicho anteriormente se sigue que hay una cantidad infinita de fracciones p/q verificando $|a - p/q| < 1/(2 \cdot q^2)$. Esta insólita consecuencia de la distribución de las circunferencias de Ford se sitúa entre los teoremas de Dirichlet y Hurwitz, toda vez que la constante que hemos obtenido aquí es 1/2, mientras que en dichos teoremas era, respectivamente, 1 y $1/\sqrt{5}$.

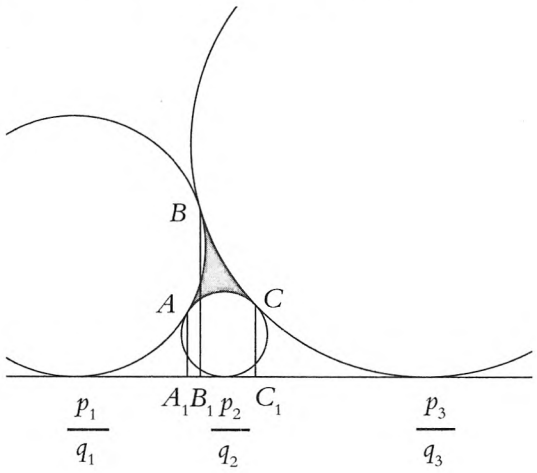


Ahora bien, la configuración de Ford es también capaz de proveer la mejor de esas constantes, la que da el teorema de Hurwitz. En efecto, en el diagrama de las circunferencias de Ford (figura superior de la página 50) hay, además de circunferencias, otros objetos: son los triángulos de lados curvos que van quedando entre cada tres circunferencias tangentes. Esos triángulos tienen también propiedades muy significativas. Una de ellas es que la primera coordenada de sus tres vértices es, en cada caso, un número racional. En efecto, consideremos el triángulo curvilíneo formado por las circunferencias de Ford tangentes correspondientes a las fracciones p_1/q_1, p_2/q_2 y p_3/q_3; llamemos A, B y C a sus vértices. Si A_1 es la primera coordenada del vértice A; B_1 es la primera coordenada del vértice B, y C_1 es la primera coordenada del vértice C, entonces no es difícil deducir que

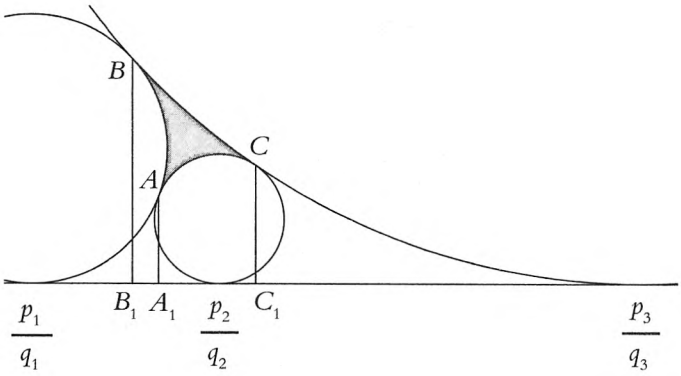
$$A_1 = \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{q_1^2 + q_2^2},\ B_1 = \frac{p_1q_1 + p_3q_3}{q_1^2 + q_3^2} \text{ y } C_1 = \frac{p_2q_2 + p_3q_3}{q_2^2 + q_3^2}.$$

El que las primeras coordenadas de estos vértices sean números racionales nos dice que necesariamente la recta trazada sobre un número irracional a cortará, además de una cantidad infinita de circunferencias de Ford, una cantidad infinita de estos triángulos curvilíneos. Si la circunferencia mayor, de las tres que forman el triángulo curvilíneo, queda a la derecha, entonces, atendiendo a la posición relativa de las

coordenadas A_1 y B_1 —o sea, según cuál sea mayor—, estos triángulos pueden ser de dos tipos (como muestran las dos figuras siguientes).



Un análisis detallado de estos dos casos nos permite deducir que, cada vez que la recta trazada sobre un número irracional *a* corte el primer tipo de triángulo curvilíneo —cuando $A_1 < B_1$, figura anterior—, entonces la diferencia entre *a* y p_2/q_2 es justamente menor que $1/(\sqrt{5}\cdot q_2^2)$, mientras que, cada vez que la recta trazada sobre un número irracional *a* corte el segundo tipo de triángulo curvilíneo —cuando $A_1 > B_1$, figura siguiente—, entonces la diferencia entre *a* y p_3/q_3 es justamente menor que $1/(\sqrt{5}\cdot q_3^2)$. En cualquier caso, el corte de la recta trazada sobre un número irracional *a* con los triángulos curvilíneos produce una cantidad infinita de fracciones p/q tales que $|a - p/q| < 1/(\sqrt{5}\cdot q^2)$. O, dicho de otra forma, la trama de triángulos curvilíneos que generan las circunferencias de Ford es la visualización geométrica del teorema de Hurwitz.

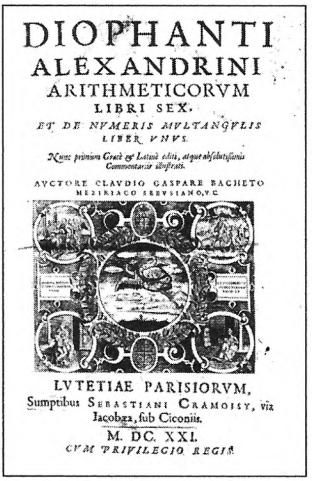


Julita, o la ecuación diofántica $p^2 + q^2 + r^2 = 3pqr$

Pero había un tercer personaje en nuestra historia: la ecuación diofántica $p^2 + q^2 + r^2 = 3 \cdot p \cdot q \cdot r$, a quien bauticé como Julita, otro de los personajes de *La colmena*.

Una ecuación diofántica no es más que una ecuación algebraica, normalmente de varias variables, pero de la que nos interesan sólo aquellas de sus soluciones que son números enteros —o, lo que algunas veces es equivalente, racionales—. El apellido «diofántica» con que se conoce a este tipo de ecuaciones se debe al matemático griego Diofanto de Alejandría. De Diofanto poco más se sabe que lo escrito en su epitafio —según cuenta cierta tradición—: «Ésta es la tumba de Diofanto, al que los dioses le concedieron el ser un muchacho la sexta parte de su vida, y al cabo de una doceava parte más poblaron de vello sus mejillas; le iluminaron con la luz del matrimonio pasada otra séptima parte de su existencia, y al cabo de cinco años más le dieron un hijo. Infeliz hijo que sólo alcanzó a vivir la mitad de la vida de Diofanto, que consoló entonces sus penas con la ciencia de los números durante cinco años más hasta que las parcas cortaron el hilo de su vida.» Lo que, una vez resuelto, da 84 años para la vida de Diofanto; una vida que se supone que transcurrió entre los siglos II y III d.C.

Sabemos también que Diofanto escribió varios textos, el más importante de los cuales es la *Aritmética*, de cuyos trece libros se han conservado seis en griego y cuatro más a través de traducciones árabes.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primum Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Portada de la Aritmética *de Diofanto, perteneciente a la edición realizada en 1621 por el matemático francés Claude Gaspard Bachet de Méziriac.*

UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA

El problema descrito en esta página es el número 15 del Libro II de la *Aritmética*. Diofanto encuentra la solución del siguiente modo. Toma p y q como los cuadrados de dos números consecutivos, porque ya sabía que su producto aumentado en su suma es también un cuadrado: en efecto, si $p = m^2$ y $q = (m + 1)^2$, entonces:

$$p \cdot q + p + q = m^2 \cdot (m + 1)^2 + m^2 + (m + 1)^2 = m^4 + 2 \cdot m^3 + 4 \cdot m^2 + 2 \cdot m + 1 = \\ = (m^2 + m + 1)^2.$$

En particular, Diofanto tomó $p = 4$ y $q = 9$. De esta forma tiene ya garantizado que $p \cdot q + p + q$ es un cuadrado: $4 \cdot 9 + 4 + 9 = 7^2$. Las otras dos cantidades quedan ahora $4 \cdot n + 4 + n = 5 \cdot n + 4$ y $9 \cdot n + 9 + n = 10 \cdot n + 9$. Se trata entonces de encontrar un número n de tal forma que tanto $10 \cdot n + 9$ como $5 \cdot n + 4$ sean ambos cuadrados perfectos. Introduce ahora dos nuevas variables auxiliares r y k, definidas mediante las ecuaciones $r^2 = 10 \cdot n + 9$ y $k^2 = 5 \cdot n + 4$. Entonces tenemos

$$r^2 - k^2 = 10 \cdot n + 9 - 5 \cdot n - 4 = 5 \cdot n + 5,$$

lo que podemos escribir como $(r + k) \cdot (r - k) = 5 \cdot (n + 1)$; hacemos entonces $r + k = 5$ y $r - k = n + 1$. Resolviendo en r y k obtenemos: $r = (n/2) + 3$ y $k = 2 - (n/2)$. Sustituyendo el valor de r en la ecuación $r^2 = 10 \cdot n + 9$ y simplificando, obtenemos la ecuación de segundo orden $(n^2/4) - 7 \cdot n = 0$; resolviendo encontramos $n = 28$.

He aquí un ejemplo del tipo de ecuaciones estudiadas por Diofanto en la *Aritmética*: «Encontrar tres números tales que el producto de dos cualesquiera de ellos, aumentado en la suma de estos dos, sea un cuadrado.» Si llamamos a los números p, q y n, la condición sobre ellos es que $p \cdot q + p + q$, $p \cdot n + p + n$ y $q \cdot n + q + n$ sean cuadrados. Diofanto dio como solución los números $p = 4$, $q = 9$ y $n = 28$; y, en efecto, $p \cdot q + p + q = 49 = 7^2$, $p \cdot n + p + n = 289 = 17^2$ y $q \cdot n + q + n = 144 = 12^2$ (véase el recuadro). Ecuaciones diofánticas se habían estudiado en el mundo griego mucho antes de Diofanto. La primera seguramente fue la siguiente: encontrar números naturales m y n tales que $m^2 = 2 \cdot n^2$. Como ya vimos antes, Pitágoras mostró que la ecuación no tiene solución, pues, como el lector ya habrá apreciado, de existir soluciones entonces $\sqrt{2}$ sería un número racional.

Otra ecuación diofántica que se estudió antes de Diofanto tiene que ver con el teorema de Pitágoras: encontrar todos los números naturales p, q, r que son solución

de la ecuación $p^2 + q^2 = r^2$; el teorema de Pitágoras —o mejor dicho, su recíproco— nos dice que entonces los números p, q, r serían las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Tales ternas de números se conocen con el nombre de «ternas pitagóricas». En el Libro X de los *Elementos* de Euclides se encuentra la solución más general: dados números naturales m, n y k cualesquiera, entonces

$$p = k \cdot (m^2 - n^2),\ q = 2 \cdot k \cdot m \cdot n \text{ y } r = k \cdot (m^2 + n^2)$$

forman una terna pitagórica; y todas tienen esa forma. Por ejemplo, tomando $m = 3$, $n = 1$ y $k = 4$, tenemos $p = 32$, $q = 24$ y $r = 40$, que efectivamente verifican $p^2 + q^2 = r^2$.

Entre las ecuaciones que Diofanto estudió en la *Aritmética* estaba la de las ternas pitagóricas. Diofanto resolvió además la ecuación $p^2 + q^2 = r^2$ añadiendo multitud de condiciones adicionales. Por ejemplo, encontrar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo de manera que su perímetro sea además un cubo y la suma de su área y la hipotenusa, un cuadrado. La solución que Diofanto encontró fue: la hipotenusa r vale 629/50, y los catetos p y q valen 2 y 621/50; entonces el pe-

OTRA ECUACIÓN DIOFÁNTICA

El último problema descrito en esta página es el número 17 del Libro VI de la *Aritmética*. Diofanto encuentra su solución del siguiente modo. Introduce una nueva variable n: el área del triángulo. Entonces se tiene $(p \cdot q)/2 = n$, o sea, $p \cdot q = 2 \cdot n$. Diofanto toma entonces $p = 2$ y $q = n$. El área más la hipotenusa vale entonces $n + r$ y el perímetro $2 + n + r$; como $n + r$ debe ser un cuadrado, se trata de encontrar un cuadrado de manera que al sumarle 2 el resultado sea un cubo. Diofanto llama entonces $m + 1$ al lado del cuadrado y $m - 1$ al del cubo. Buscamos entonces un número m tal que $(m + 1)^2 + 2 = (m - 1)^3$. O sea: $m^2 + 2 \cdot m + 3 = m^3 - 3 \cdot m^2 + 3 \cdot m - 1$; o lo que es igual: $4 \cdot m^2 + 4 = m^3 + m$. De donde se deduce que $4 \cdot (m^2 + 1) = m \cdot (m^2 + 1)$, y por tanto $m = 4$. Tenemos entonces $n + r = 5^2 = 25$. Y como el triángulo de lados p, q y r debe ser rectángulo: $4 + n^2 = r^2$. Sustituyendo $n = 25 - r$ en esa ecuación se tiene $4 + (25 - r)^2 = r^2$; desarrollando y simplificando queda: $629 - 50 \cdot r = 0$. O sea, r vale 629/50; y, por tanto, n y q valen 621/50.

Obsérvese que Diofanto ha encontrado una solución en números enteros para la ecuación cúbica: $x^2 + 2 = y^3$ —más precisamente: $x = 5$, $y = 3$—. Resulta que ésa es la única solución entera que admite dicha ecuación —aunque tiene infinitas soluciones fraccionarias—.

rímetro es $2 + 621/50 + 629/50 = 1.350/50 = 27 = 3^3$, y la suma del área más la hipotenusa vale $(621/50) \cdot 2 / 2 + 629/50 = 1.250/50 = 25 = 5^2$ (ver recuadro en la página anterior).

En 1621, casi un milenio y medio después de que Diofanto compusiera su *Aritmética,* los seis libros conservados en griego vieron la luz de la imprenta en su lengua original. Se trata de la edición comentada que hiciera el francés Bachet de Méziriac, que incluía también una traducción al latín. Hay pocos libros que hayan pasado a la historia por alguno de sus lectores, pero éste fue uno de ellos.

El lector en concreto fue un jurista francés que atendía al nombre de Pierre de Fermat. Pero, además de jurista, Fermat también fue matemático «aficionado»; aunque esto de llamarlo «aficionado» no hace justicia a sus méritos, pues sin duda Fermat fue mucho mejor matemático que gran parte de los que, a lo largo de los siglos, se han dedicado de manera profesional a las matemáticas.

En el siglo XVII la teoría de números no era el lujoso barrio de las matemáticas en que después ha acabado convirtiéndose. Tras el esplendor alcanzado con Diofanto, el interés de los matemáticos por la teoría de números había ido languideciendo y deteriorándose durante milenio y medio, hasta que esa barriada tan exclusiva quedó casi despoblada. Entonces Fermat apareció en escena y rehabilitó la teoría de números haciendo algo que en matemáticas siempre ha sido de lo más fructífero: plantear problemas interesantes. Basta si no ver las notas y comentarios que su lectura de la *Aritmética* de Diofanto le suscitó. Notas y comentarios que su hijo Samuel de Fermat recopiló, añadió a la edición de Bachet de Méziriac y publicó en 1670.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inventum nouum, collectum
ex variis eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Portada de la Aritmética *de Diofanto que incluye los comentarios de Pierre de Fermat, en la edición realizada por el hijo de este último en 1670.*

Raro es el problema tratado por Diofanto, o raro el comentario de Méziriac, sobre el que Fermat no propusiera una extensión, una generalización o planteara una cuestión matemáticamente interesante y profunda. De todos estos problemas el más célebre fue propuesto al hilo del problema 8 del Libro II: «Descomponer un cuadrado dado en suma de dos cuadrados»; o sea, Diofanto explicaba en ese problema cómo generar ternas pitagóricas: $p^2 + q^2 = r^2$.

Aficionado a las matemáticas como era, el jurista Fermat modificó ligeramente la ecuación y se preguntó por las soluciones enteras de la ecuación $p^3 + q^3 = r^3$. Sorprendentemente no logró encontrar ninguna, salvo las llamadas triviales, que se obtienen al jugar con los números 0, 1 y -1. Ante su falta de éxito, Fermat sin duda se preguntó, ¿y si en vez de un 3 coloco en el exponente un 4? ¿Cómo serán las soluciones enteras de la ecuación $p^4 + q^4 = r^4$? Tampoco en este caso su búsqueda de soluciones tuvo éxito. ¿Y si no las encuentro porque no las tienen?, se diría Fermat tras los reiterados fracasos de sus pesquisas. Cambió entonces su estrategia y buscó una demostración de que la ecuación con exponente 4 no tiene soluciones enteras. Y, usando una táctica ingeniosa de su invención, Fermat dio con la demostración que buscaba. Es posible también que modificando adecuadamente esa misma táctica, Fermat lograra probar que tampoco la ecuación con exponente 3 tiene soluciones, pero esto no lo sabemos con seguridad porque al no ser un matemático profesional, Fermat no se preocupó nunca de publicar adecuadamente los resultados que obtenía, y mucho menos las técnicas, los métodos y los procedimientos que usó para obtenerlos, de los que conocemos muy poco y, en muchos casos, ese poco es casi adivinado.

Entusiasmado con sus éxitos para las ecuaciones con exponente 3 y 4, es posible que Fermat pensara que su táctica le valdría para demostrar que cualquiera que fuera el número n mayor que 2 la ecuación $p^n + q^n = r^n$ no iba tampoco a tener soluciones —más allá de las triviales—. ¿Qué hizo entonces? Pues escribió al margen de su ejemplar de la *Aritmética* de Diofanto lo siguiente: «Es imposible descomponer un cubo como suma de dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, como suma de dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para incluirla.» Y ese simple comentario hizo al jurista Fermat entrar de cabeza en la historia de las matemáticas, pues a partir de entonces, el gremio de los matemáticos se dio como loco a encontrar esa «maravillosa» demostración que Fermat no pudo incluir en el margen del libro de Diofanto.

Pero el «teorema» de Fermat resultó ser un hueso muy duro de roer, y en los dos siglos siguientes tan sólo se logró demostrar para un puñadito de valores de n: los números primos $n = 3$ (Euler, 1770), $n = 5$ (Legendre y Dirichlet, 1825), y $n = 7$ (Lamé, 1839), y los compuestos $n = 6{,}10$ y 14. La demostración completa para todos los casos no llegó hasta 1994 y se debe al inglés Andrew Wiles: tiene varios cientos de páginas y recorre un rocambolesco camino que pasa por algunas de las más sofisticadas ideas y técnicas matemáticas desarrolladas durante el siglo XX.

La ecuación de Markov

La ecuación diofántica que aquí me interesa lleva el nombre del matemático ruso Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) y es la siguiente:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 3 \cdot p \cdot q \cdot r.$$

A los números naturales que resuelven dicha ecuación —o, de manera más precisa, a los números naturales p para los que hay otros dos q y r, de tal forma que los tres verifican la ecuación—, ordenados en orden creciente, se les llama números de Markov. Sabemos bastantes cosas de los números de Markov, aunque desconocemos también otras. Sabemos que son una cantidad infinita, y que los primeros dieciséis son:

1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1.325, 1.597 y 2.897;

y hay también un procedimiento sencillo para ir construyéndolos uno tras otro. Es el siguiente: es muy fácil comprobar que si p_1, q_1 y r_1 verifican la ecuación de Markov y escribimos $p_2 = 3 \cdot q_1 \cdot r_1 - p_1$, $q_2 = 3 \cdot p_1 \cdot r_1 - q_1$ y $r_2 = 3 \cdot p_1 \cdot q_1 - r_1$, entonces también el triplete p_2, q_1 y r_1 verifica la ecuación de Markov; y lo mismo ocurre con los dos tripletes p_1, q_2 y r_1, y p_1, q_1 y r_2.

Markov mostró que todas las soluciones enteras positivas de la ecuación de Markov se obtienen empezando con $p_1 = 1$, $q_1 = 1$ y $r_1 = 1$ y aplicando sucesivamente ese sencillo procedimiento.

Sorprende que la ecuación de Markov tenga tan gran cantidad de soluciones, pues basta modificarla ligeramente para que desaparezcan todas; por ejemplo, la ecuación $p^2 + q^2 + r^2 = 2 \cdot p \cdot q \cdot r$ no tiene ninguna solución entera positiva. En realidad, como demostró Hurwitz, ninguna ecuación de la forma $p^2 + q^2 + r^2 =$

$= k \cdot p \cdot q \cdot r$ tiene soluciones enteras positivas salvo que k sea igual a 3 —la ecuación de Markov— o a 1.

Las soluciones p, q y r de la ecuación de Markov con $p = 1$ establecen una primera conexión con el teorema de aproximación racional de Hurwitz. En efecto, estas soluciones son de la forma $p = 1$, $q = f_{2n-1}$ y $r = f_{2n+1}$, donde por f_k indicamos el correspondiente número de Fibonacci. Los dos primeros números de Fibonacci son $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$, a partir de los cuales un número de Fibonacci se obtiene sumando los dos anteriores; esto da: $f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21$, $f_9 = 34$, etc. Los números de Fibonacci son tan ubicuos en la naturaleza como la razón áurea, con la cual están emparentados: tómese el cociente entre dos números de Fibonacci consecutivos, f_{n+1}/f_n, entonces esas fracciones, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8..., aproximan a la razón áurea en la proporción que señala el teorema de Hurwitz:

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot f_n^2}.$$

Esto establece una innegable conexión entre los números de Markov y la aproximación racional. Claro que la conexión es mucho, muchísimo más estrecha.

Como se dijo antes, la razón áurea es la responsable de que el teorema de Hurwitz no se pueda mejorar —en realidad la razón áurea Φ y todos los irracionales equivalentes a efectos de aproximación racional: o sea, los irracionales de la forma

Andrei Andreyevich Markov, matemático que realizó grandes desarrollos en los ámbitos de la teoría de números y las probabilidades.

$(m \cdot \Phi + n)/(p \cdot \Phi + q)$, cualesquiera que sean los números enteros m, n, p, q, verificando que $m \cdot q - n \cdot p = \pm 1$—.

Ahora bien, si dejamos a un lado la razón áurea, y todos sus irracionales equivalentes, entonces Hurwitz mismo mostró que su teorema admite una mejora, pues la constante $1/\sqrt{5}$ puede ser sustituida por una más pequeña $1/\sqrt{8}$: dado un número irracional cualquiera a, a excepción de la razón áurea y sus equivalentes, existen infinitas fracciones p/q tales que

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8} \cdot q^2}.$$

Este resultado, a su vez, no se puede mejorar; en este caso porque cuando se toma $a = \sqrt{2}$, la aproximación con fracciones no se puede hacer mejor de lo que permite esa constante $1/\sqrt{8}$ multiplicada por el inverso del cuadrado del denominador.

Pero si dejamos aparte $\sqrt{2}$, y todos sus equivalentes, entonces podemos seguir mejorando, sustituyendo la constante $1/\sqrt{8}$ por una todavía más pequeña, $5/\sqrt{221}$: dado un número irracional cualquiera a, a excepción de la razón áurea, la raíz cuadrada de 2 y sus respectivos equivalentes, existen infinitas fracciones p/q tales que

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{5}{\sqrt{221} \cdot q^2}.$$

Como el lector seguro que estará imaginando, hay ahora otro dichoso irracional que impide mejorar esa constante. Se trata en este caso de $\sqrt{221}$, que de ser eliminado permitiría una nueva mejora: $13/\sqrt{1.517}$, que a su vez tiene un indeseado irracional cuadrático que la impide mejorar, irracional que de ser eliminado producirá una nueva mejora, y así, de proseguir mejora tras mejora, llegaríamos a la constante límite $1/3$: dado un número irracional cualquiera a, a excepción de esa lista de irracionales cuadráticos y sus respectivos equivalentes, existen infinitas fracciones p/q tales que

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{3 \cdot q^2}.$$

La novela, o la realidad de la que aquélla no es sino un eco literario, es la geografía donde las vidas ajenas de sus personajes se entrecruzan, surgiendo del tejido que forman esas relaciones una luz que ilumina las complejidades de la condición humana.

Al igual que Martín Marco vive aterrado por la represión política del régimen de Franco, Julita vive asfixiada por la moral nacionalcatólica que el dictador y la Iglesia trataron de imponer. Pero, así como para Marco es imposible toda salida que no sea someterse, Julita y su novio, gentes de posibles los dos, lograron superar los impedimentos acudiendo a una casa de citas que convirtieron en nido de su amor. Las contradicciones de la moral las retrató Cela magistralmente. Por un lado encarnando en el personaje de doña Visitación Leclerc, madre de Julita y hermana de doña Rosa, esa moralina castrante tan del gusto de la jerarquía católica de la época —de todas las épocas, en realidad—; así, doña Visi se nos muestra enviando piadosamente dinero a las misiones para el bautizo de «chinitos», como manera de facilitar su ingreso en el supuesto paraíso que Dios dará en recompensa a los justos. Mientras, por otro lado, Cela retrata en el padre de Julita, don Roque Moisés, al vago que vive de haber hecho un buen casamiento; pocas escenas tan esclarecedoras de lo que fue la moral nacionalcatólica del franquismo como ésa donde Julita y su padre se encuentran en la escaleras del *meublé* de doña Celia: Julita viene de un encuentro amoroso con su novio, mientras el padre acude allí a encontrarse con una de sus amantes ocasionales.

Idéntica capacidad que tiene la novela para resaltar determinadas realidades de la condición humana, cruzando las trayectorias de unas vidas aparentemente ajenas, tienen las matemáticas desvelando verdades ocultas en resultados aparentemente inconexos. Es lo que ocurre con los números de Markov y esas constantes que aparecen en el teorema de Hurwitz conforme lo vamos mejorando a base de eliminar la razón áurea, la raíz cuadrada de 2 y los otros irracionales cuadráticos que impiden las sucesivas mejoras.

He aquí los cuatro primeros números de Markov —o sea, las soluciones de la ecuación diofántica $p^2 + q^2 + r^2 = 3 \cdot p \cdot q \cdot r$ ordenados en orden creciente—:

$$1, 2, 5, 13.$$

Y he aquí las cuatro primeras constantes que se obtienen por las mejoras sucesivas del teorema de Hurwitz sobre aproximación racional:

$$1/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{8},\ 5/\sqrt{221},\ 13/\sqrt{1.517}\,.$$

Tal y como las vidas de Martín Marco, de doña Rosa o de Julita están inextricablemente unidas en las páginas de *La colmena*, los números de Markov lo están con la aproximación racional de los números irracionales, pues son ellos los que

determinan las excepciones y las distintas constantes que aparecen al mejorar el teorema de Hurwitz.

Querido lector, las dos listas de números anteriores son en realidad una y la misma, y para comprobarlo únicamente hay que disponer de la clave que permite transformar la una en la otra. Esa clave la encontró el matemático alemán Oskar Perron en 1921 y no es más que la fórmula $m/\sqrt{9\cdot m^2-4}$.

En efecto, pongamos en esa fórmula $m = 1$, el primer número de Markov, y obtendremos $1/\sqrt{9\cdot 1-4} = 1/\sqrt{5}$, que es, precisamente, la constante que aparece en el teorema de aproximación racional de Hurwitz. Pongamos ahora $m = 2$, el segundo número de Markov, y obtendremos $2/\sqrt{9\cdot 4-4} = 2/\sqrt{32} = 1/\sqrt{8}$, que es, precisamente, la constante que aparece en la mejora del teorema de Hurwitz eliminando la razón áurea. Y así sucesivamente, si ponemos $m = 5$ o 13, el tercero y cuarto números de Markov, obtendremos $5/\sqrt{221}$ y $13/\sqrt{1.517}$, que son las dos siguientes constantes que aparecen en las sucesivas mejoras del teorema de Hurwitz. Y lo mismo ocurrirá con los siguientes números de Markov. Por otro lado, si m, p y q son una solución de la ecuación de Markov $m^2 + p^2 + q^2 = 3 \cdot m \cdot p \cdot q$ entonces la excepción que impide mejorar la constante $m/\sqrt{9\cdot m^2-4}$ en el teorema de Hurwitz es el número:

$$\frac{\sqrt{9\cdot m^2-4}+m+\dfrac{2\cdot p}{q}}{2\cdot m},$$

y todos sus irracionales equivalentes.

Como se ve, en la república de los números se cruzan las vidas de sus personajes tanto como en cualquier gran metrópoli. En esto, como en muchas otras cosas, las matemáticas semejan más el abigarrado mundo de una colmena que la fría estructura lógica que muchos le presuponen.

Pero sería imperdonable que no fueran las palabras de Cela las que pongan punto final a este capítulo: «La mañana sube, poco a poco, trepando como un gusano por los corazones de los hombres y las mujeres de la ciudad; golpeando, casi con mimo, sobre los mirares recién despiertos, esos mirares que jamás descubren horizontes nuevos, paisajes nuevos, nuevas decoraciones. La mañana, esa mañana eternamente repetida, juega un poco, sin embargo, a cambiar la faz de la ciudad, ese sepulcro, esa cucaña, esa colmena...».

Capítulo 3

Lo abstract las matemá humana

Volvamos a repetir el exper
En esta ocasión le vamos a s
parejas las siguientes palabr
después le preguntaremos su

Sobre la primera solicitu
con pasión y matemáticas co

Tampoco hay muchas d
respondería que matemática
Y, posiblemente, ésa sería
matemáticas tienen fama de
ninguna relación con los se
que, casi más que ninguna ot
mente —en su forma más de
de nuestro cerebro es una c
buena medida nuestro cereb

Así que, como no suele s
estar también engañándonos

Antes de nada, recuerdo
mia, es «templanza, cautela,
«pasión» es «cualquier pertu
afición vehemente a una cos
con las matemáticas, éstas so
dencia contra la pasión. Los
equilibrio inestable entre pr
sutil de cautela y de afición
briagador y desordenado. As

Capítulo 3

Lo abstracto y lo emocional: las matemáticas y la condición humana

Volvamos a repetir el experimento mental de parar a alguien al azar por la calle. En esta ocasión le vamos a solicitar dos cosas. Primero le pediremos que asocie por parejas las siguientes palabras: literatura y matemáticas con pasión y prudencia; y después le preguntaremos su opinión sobre la condición humana y las matemáticas.

Sobre la primera solicitud, serían sin duda mayoría los que asociarían literatura con pasión y matemáticas con prudencia.

Tampoco hay muchas dudas de que a la segunda pregunta nuestro viandante respondería que matemáticas y condición humana son asuntos ajenos uno del otro. Y, posiblemente, ésa sería también la respuesta de más de un matemático. Las matemáticas tienen fama de ser un conjunto de abstracciones que guardan poca o ninguna relación con los sentimientos de los humanos. Pero no debemos olvidar que, casi más que ninguna otra creación humana, las matemáticas son hijas de nuestra mente —en su forma más descarnada y solitaria—. Ahora bien, la estructura lógica de nuestro cerebro es una característica fundamental de la condición humana: en buena medida nuestro cerebro es lo que nos hace ser lo que somos.

Así que, como no suele ser extraño, es posible que las apariencias bien pudieran estar también engañándonos esta vez.

Antes de nada, recuerdo que prudencia, según el diccionario de la Real Academia, es «templanza, cautela, moderación» y «sensatez y buen juicio»; mientras que «pasión» es «cualquier perturbación o afecto desordenado del ánimo» y «apetito o afición vehemente a una cosa». A pesar de que mucha gente no relaciona la pasión con las matemáticas, éstas son también un campo de batalla en el que lucha la prudencia contra la pasión. Los matemáticos sabemos que en nuestra ciencia se da un equilibrio inestable entre prudencia y pasión, que las matemáticas son una mezcla sutil de cautela y de afición vehemente, y un afecto del ánimo profundamente embriagador y desordenado. Así, cuando se trata de demostrar, el matemático se deja

guiar por la prudencia inherente al más estricto pensamiento lógico, pero, cuando indaga en busca de un descubrimiento o pelea contra un problema cuya solución es desconocida, el matemático se deja dominar por cierto desenfreno del espíritu y una innegable embriaguez apasionada.

La literatura explota como descripción y, a la vez, fuente de conocimiento de la naturaleza humana, la sempiterna lucha entre prudencia y pasión. De ahí que no sea extraño que la mayoría asocie literatura con pasión. Pero, insisto, sobre ese enfrentamiento entre prudencia y pasión, las matemáticas y sus circunstancias tienen mucho que decir; pueden, de hecho, tener una sorprendente utilidad: ser capaces de ayudarnos a revelar lo que somos y, por tanto, servir también para que los humanos nos podamos comprender mejor a nosotros mismos; para profundizar, en suma, en el conocimiento de la condición humana.

Las matemáticas y sus circunstancias

Ya sé que esto suena raro, y que nuestro viandante imaginario dirá que cómo pueden las matemáticas, que en buena medida no entendió cuando se las enseñaron en la escuela, hacerle conocer mejor al género humano. Y seguro que más de un matemático, que sí comprende los misterios de su ciencia, tampoco alcanzará a ver cómo puede ésta iluminar ese pozo oscuro que es la naturaleza humana. Para los escépticos debo recalcar que esa capacidad iluminadora la poseen las matemáticas cuando le añadimos sus circunstancias. Por circunstancias de un teorema, por ejemplo, me refiero a los entresijos históricos en los que se desenvolvieron el autor, o los autores, de ese teorema, ya fuera la persona que lo conjeturó, aquella que lo demostró o lo refutó, o aquellas otras que intentaron una cosa u otra sin éxito, si alguna hubo.

Entiendo que las circunstancias de las matemáticas son, en cierta forma, similares a las circunstancias que describió Ortega y Gasset como compañeras inseparables para entender el yo. Esas circunstancias de las matemáticas tienen mucho que ver con la historia de las matemáticas, pero, tal y como yo lo entiendo, no son la misma cosa.

Ahora puedo precisar algo mejor esa afirmación, inverosímil para nuestro viandante y dudosa para nuestro incrédulo matemático, de que las matemáticas pueden ayudarnos a entender mejor lo que somos: ocurre que de la confrontación del mundo abstracto de las matemáticas y el mundo emocional donde moran quienes las descubren o las inventan se desprende una luz que puede ayudar a alumbrar las más recónditas profundidades de la naturaleza humana.

Por todo esto, las circunstancias de las matemáticas nos predisponen mejor para la apreciación de su belleza. Como se explicó en el capítulo 2, la principal diferencia entre literatura y matemáticas, a la hora de apreciar sus respectivos valores estéticos, deriva de los distintos entes sobre los que trata cada disciplina. La literatura trata con sentimientos, con la parte emocional de la condición humana, mientras que las matemáticas lo hacen con triángulos, números y otros objetos abstractos. La mayor cercanía y conocimiento que tenemos de nuestras emociones y sentimientos facilita la apreciación del valor estético de una novela, mientras que el carácter frío y abstracto de los objetos matemáticos lo dificulta. De ahí la importancia de las circunstancias emocionales que también tienen las matemáticas: con ellas humanizamos las propias matemáticas, lo que, al igual que ocurre con la literatura, predispone el ánimo para el gozo estético.

Pero, tal y como adelanté en el prefacio, el propósito de este libro no es entrar en argumentaciones sino ilustrar con ejemplos y dejar que el lector saque después sus propias conclusiones. Lo que queda del capítulo estará, pues, dedicado a mostrar un ejemplo de cómo la contraposición del carácter abstracto de las matemáticas con las emociones de quienes las han creado predispone a apreciar su belleza, además de ayudarnos a comprender mejor la condición humana. Y el ejemplo que he elegido son unos objetos matemáticos de una innegable belleza: los fractales; mientras que las circunstancias emocionales corresponden a las del matemático que los anticipó: Felix Hausdorff (1868-1942).

LA CIENCIA MÁS ANTIGUA

Como queda dicho en el texto, no argumentaré, ni tampoco profundizaré, en algunas circunstancias muy sugerentes que ligan las matemáticas con la parte más emocional de la condición humana, y que se remontan a los inicios de la vocación matemática de la humanidad. Esos inicios comienzan con el hecho numérico, y no se debería olvidar que los números nos estaban esperando al final de las manos, mezclados con los dedos como si fueran una parte más de nuestra anatomía, ni dejar de calibrar lo profundamente que las manos han influido en lo que somos como especie. En la bruma prehistórica, es difícil determinar qué aprendimos primero, si a marcar números pequeños con nuestros dedos, a pintar en las paredes de las cuevas, a enterrar a nuestros muertos o a inventar dioses y religiones; actividades todas ellas, incluida la numérica, en las que pasión y prudencia han combatido y combatirán denodadamente. Eso, en cualquier caso, convierte a las matemáticas en la ciencia más antigua, y hace que sus circunstancias hundan sus raíces hasta la más remota antigüedad del *Homo sapiens*.

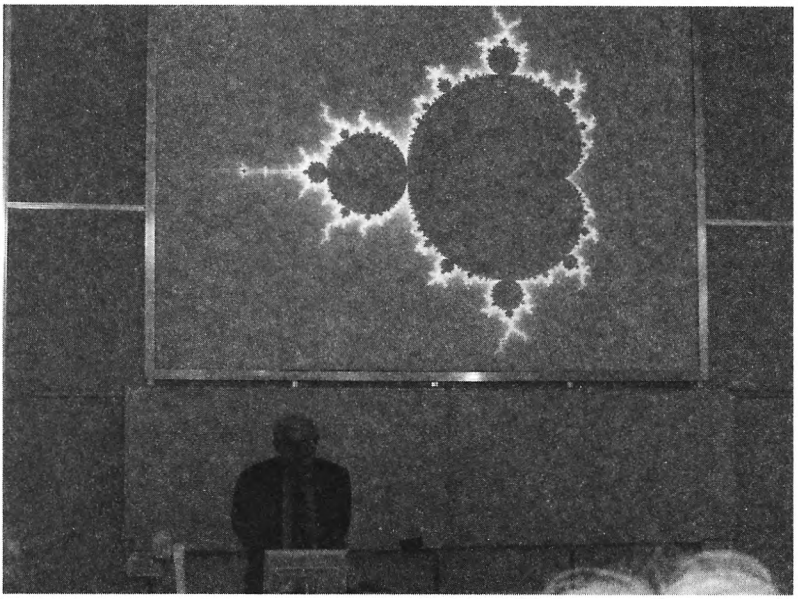
Fractales y dimensión de Hausdorff

Por así decirlo, un fractal es un conjunto anómalo para nuestros sentidos, aunque esa anomalía tiene que ver con la manera en la que aquéllos perciben el espacio; la rareza de un fractal es, por tanto, sensorial y no matemática. En la esencia de esa anomalía está el concepto de dimensión espacial, concepto que el matemático alemán Felix Hausdorff enriqueció notablemente en 1919.

Las aportaciones del matemático alemán Felix Hausdorff permitieron el posterior desarrollo de la moderna teoría de los fractales.

A Hausdorff le parecía muy pobre la forma clásica en la que se entendía, tanto matemática como filosóficamente, la dimensión de un objeto y, por lo mismo, encontraba muy simplona la correspondiente clasificación de los cuerpos atendiendo a su dimensión. Decía Hausdorff que era muy poco sofisticado, e incluso incorrecto, decir que un objeto tiene dimensión 1 si sólo tiene longitud —un hilo, o un muelle, por ejemplo—; dimensión 2 si además de longitud tiene anchura —una hoja de papel o la superficie de una esfera—; y dimensión 3 si además de longitud y anchura tiene también altura —una esfera o una caja de zapatos—. Para enriquecer el concepto clásico de dimensión, Hausdorff propuso una noción más sofisticada y rica desde el punto de vista matemático.

La noción de Hausdorff permite medir de manera mucho más precisa la dimensión de un objeto; resulta así que, contra lo que nuestra intuición sensorial nos dice, hay objetos con dimensiones fraccionarias, digamos con dimensiones 1/2, o, incluso, $\sqrt{5}$, o todavía con números peores. Más de medio siglo después de que Hausdorff precisara su nuevo concepto de dimensión, Benoît Mandelbrot (1924-2010), un matemático de origen polaco aunque criado en Francia, bautizó con el nombre de «fractales» a esos conjuntos cuya dimensión de Hausdorff es fraccionaria.



Benoît Mandelbrot, el matemático que acuñó el término «fractal», fotografiado en el curso de una conferencia celebrada en Varsovia en el año 2005.

La dimensión de Hausdorff explicada en su versión más general —tal y como lo hizo él— requiere cierto nivel de conocimiento matemático, pero hay una versión alternativa que, aún perdiendo algo de precisión, permitirá al lector entender razonablemente bien en qué consiste. Esta manera alternativa de definir la dimensión se debe a dos matemáticos rusos, apellidados Pontryagin y Schnirelmann. No deja de ser sorprendente que uno de ellos, Pontryagin, fuera ciego —perdió la vista con 14 años a consecuencia de una explosión—.

Imagine el lector que tenemos una figura plana dentro de un cuadrado a la que queremos calcular la dimensión de Hausdorff. Para ello, dividimos el lado del cuadrado en partes iguales, pongamos en 10 partes para empezar; esto divide el cuadrado

en 100 cuadraditos. Se cuenta ahora cuántos de esos cuadraditos se necesitan para cubrir nuestra figura y se compara adecuadamente ese número con el número de partes en los que hemos dividido el lado, 10 en nuestro caso.

La clave del asunto está en el significado que le damos a ese «comparar adecuadamente». Aclaremos con un ejemplo sencillo. Nuestra figura va a ser el cuadrado completo. Está claro que para cubrirlo necesitaremos todos los cuadraditos en los que hemos dividido el cuadrado. Así que si dividimos el lado en un número genérico n de partes iguales, habrá en total $n \cdot n = n^2$ cuadraditos. El lector debe entonces fijarse en el 2 que aparece en la potencia n^2, porque ese número, 2, es precisamente la dimensión del cuadrado.

Cambiemos ahora de figura geométrica; tomemos la diagonal del cuadrado. Dividamos el lado del cuadrado en 4 partes, ¿cuántos cuadraditos se necesitan para cubrir la diagonal? A poco que el lector lo piense llegará a la conclusión de que se necesitan 4 cuadraditos: precisamente los 4 que quedan sobre la diagonal del cuadrado. Por lo mismo, si dividimos el lado en un número genérico n de partes necesitaríamos igual número n de cuadraditos para cubrir la diagonal. Pero n es lo mismo que n^1 —esto es, n elevado a 1—, y esa potencia 1 es, precisamente, la dimensión de la diagonal, pues por tratarse de un segmento sabemos que su dimensión es 1.

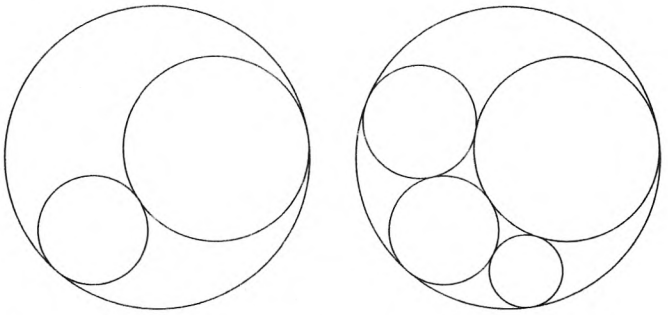
Llamemos ahora F a la figura plana contenida en el cuadrado a la que queremos calcular la dimensión de Hausdorff. Una vez dividido el lado del cuadrado en n partes contamos cuántos de los cuadraditos generados se necesitan para cubrir nuestra figura F; llamemos a este número n_F. Comparar «adecuadamente» ese número n_F con el número de partes n en las que hemos dividido el lado significa saber a qué potencia de n corresponde ese número n_F; así, en el caso del cuadrado $n_F = n^2$, y corresponde a la potencia 2; y en el caso de la diagonal $n_F = n^1$, y corresponde a la potencia 1. Si llamamos a esa potencia d, la relación que liga a n, n_F y d sería $n_F = n^d$. Usando logaritmos podemos expresar d en términos de n y n_F: d es el logaritmo de n_F dividido entre el logaritmo de n:

$$d = \frac{\log(n_F)}{\log(n)}.$$

Cuanto mayor sea n —el número de partes en los que dividimos el lado del cuadrado— más se parecerá ese número d a la dimensión de Hausdorff de la figura F; esta dimensión se obtiene en el caso límite cuando dividimos el lado del cuadrado en un número infinito de partes iguales infinitesimalmente minúsculas.

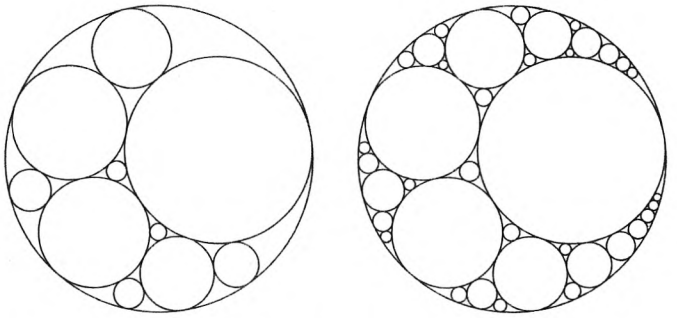
Un ejemplo a partir de las circunferencias de Apolonio

Construiré ahora un ejemplo de fractal. Para ello retomaré otra vez las circunferencias de Apolonio que aparecían en el capítulo 2, pues este fractal lo vamos a construir usando circunferencias tangentes. Comenzamos con tres circunferencias tangentes entre sí (figura inferior izquierda). Según comentamos en el capítulo anterior, hay otras dos circunferencias tangentes a esas tres. Tenemos ahora cinco circunferencias (figura inferior derecha).



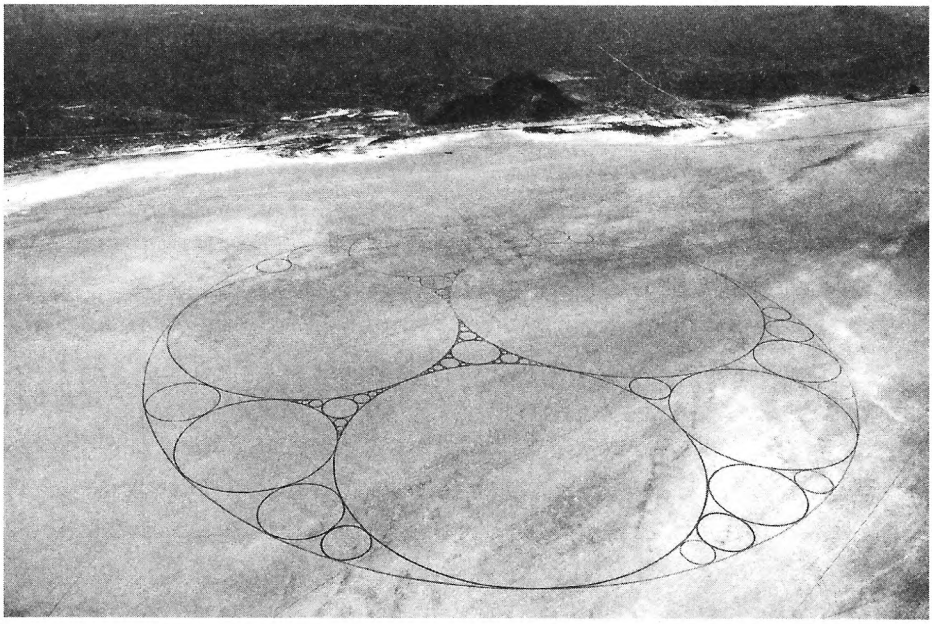
Construcción de un fractal a partir de tres circunferencias tangentes.

Elegimos tres cualesquiera de ellas que sean tangentes entre sí y generamos las correspondientes dos circunferencias tangentes que garantiza el teorema de Apolonio. Al final del proceso, y dado que hay repeticiones, obtendremos seis nuevas circunferencias; que añadidas a las cinco que teníamos dan once circunferencias (figura inferior izquierda). Volvemos a aplicar el proceso a esas once circunferencias, y después otra vez a las así obtenidas, y otra y otra vez (figura inferior derecha), y así hasta el infinito. La familia de circunferencias resultante es lo que se conoce como «empaquetamiento de Apolonio», y es un ejemplo de conjunto fractal.



Construcción de un fractal a partir de tres circunferencias tangentes.

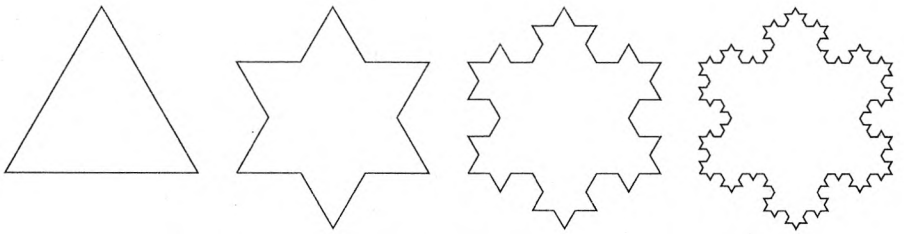
Es difícil imaginar la complejidad existente en un empaquetamiento de Apolonio, y que ésta surja de un mecanismo tan simple como ir dibujando circunferencias tangentes reiteradamente. Si el lector hace un pequeño esfuerzo de imaginación, podrá observar que cualquiera de las circunferencias del empaquetamiento está rodeada por una constelación de otras infinitas circunferencias tangentes —salvo la exterior, que contiene a todas las demás—; más todavía, sobre un arco cualquiera, por pequeño que sea, de una circunferencia cualquiera del empaquetamiento, se arraciman igualmente otras infinitas circunferencias tangentes. La noción estándar de dimensión es, pues, absolutamente inapropiada para describir un empaquetamiento de Apolonio: sería excesivo decir que la curva tiene dimensión 2 —como el plano que la contiene—; pero complicándose la estructura de la manera que lo hace, hasta el punto de arracimar sobre cada trozo de cualquiera de sus circunferencias otras infinitas circunferencias tangentes, sería demasiado escaso decir que su dimensión es 1. Calcular de forma exacta la dimensión de Hausdorff de un empaquetamiento de Apolonio es un problema endiabladamente difícil y, hasta hoy, sabemos que es un número entre 1 y 2 del que sólo conocemos una buena aproximación: 1,305688.



Empaquetamientos de Apolonio (de un tamaño realmente colosal) realizados por el artista Jim Denevan en el desierto de Nevada.

Un ejemplo a partir de un triángulo

Construiré ahora otro fractal al que sí le calcularemos su dimensión de Hausdorff de manera exacta. Se trata de la curva de Koch, llamada así en honor del matemático sueco Niels von Koch, que la definió en 1906. Hay distintas variantes; aquí voy a construir la curva de Koch partiendo de un triángulo equilátero. Para ello se divide cada uno de sus lados en tres partes iguales y se reemplaza el segmento central en cada lado por los dos lados del triángulo equilátero construido sobre dicho segmento central. Se obtiene así una estrella de seis puntas. Se repite otra vez el proceso, o sea, se divide cada uno de los doce lados de la estrella en tres partes iguales y se reemplaza el segmento central en cada lado por los dos lados del triángulo equilátero construido sobre dicho segmento central. La curva de Koch es lo que se obtiene al repetir el proceso infinitas veces.



Los cuatro primeros pasos en la construcción de la curva de Koch.

Imagine el lector ahora que la curva de Koch es una carretera. Tome dos puntos cualesquiera sobre la curva, como si fueran dos aldeas en el camino; nos montamos en un coche imaginario y conducimos de una aldea a otra siguiendo la curva. ¿Cuánto cree que marcará el cuentakilómetros al final del trayecto? Si el lector piensa que eso dependerá de los puntos elegidos, se equivoca: da igual los puntos que elija; el cuentakilómetros marcará siempre lo mismo: infinito. Dicho de otra forma, cualquier trozo de la curva de Koch tiene longitud infinita, porque la curva se tuerce y retuerce, está tan llena de esquinas que convierte el camino en interminable —véase el recuadro adjunto—. Es algo parecido a lo que ocurre con la costa de Galicia. La distancia que separa en línea recta la desembocadura del Miño del cabo de Estaca de Bares es de poco más de 200 kilómetros. Pero trate el lector de ir de uno de esos lugares al otro siguiendo la línea de la costa; el camino se hace entonces interminable, la carretera se tuerce y retuerce en cada una de las rías, se llena de esquinas para salvar los cientos de promontorios, cabos y golfos que rompen el litoral. Los diez

LONGITUD DE LA CURVA DE KOCH

Para convencernos de que la curva de Koch tiene longitud infinita procedemos del siguiente modo. Comenzamos observando que en cada paso de la construcción de la curva de Koch multiplicamos por 4 el número de segmentos que la componen, pues cada uno de los segmentos del paso anterior se divide en tres y sustituimos uno de ellos por dos: o sea, donde había un segmento ahora hay cuatro. Dado que comenzamos con los tres lados de un triángulo equilátero, el número total de segmentos en el paso genérico N será de $3 \cdot 4^N$. Por la misma razón, la longitud de cada uno de esos segmentos —todos tienen la misma longitud— se divide por 3 en cada paso, por lo que en el paso genérico N esa longitud será de $l/3^N$, donde l es la longitud del lado del triángulo equilátero inicial. Ahora bien, la longitud de la curva obtenida en el paso genérico N será el número de segmentos que la componen multiplicado por su longitud:

$$\frac{3 \cdot 4^N \cdot l}{3^N} = 3 \cdot l \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^N.$$

Como 4/3 es un número mayor que 1, la potencia $(4/3)^N$ se irá haciendo tan grande como se quiera conforme aumentan el número de pasos N en la construcción de la curva de Koch, por lo que la longitud de ésta será finalmente infinita. De similar manera puede uno convencerse de que, en realidad, cualquier trozo de la curva de Koch tiene longitud infinita.

quilómetros que separan la embocadura de una ría se convierten entonces en cien, incluso en más; el camino se hace interminable, casi infinito. Eso, pero mucho más exagerado, es lo que pasa cuando uno trata de recorrer la curva de Koch.

Como ocurría con el empaquetamiento de Apolonio, la noción estándar de dimensión es absolutamente inapropiada para describir la curva de Koch: sería excesivo decir que la curva tiene dimensión 2 —como el plano que la contiene—; pero retorciéndose la curva de la manera que lo hace, hasta el punto de convertir en infinita la longitud de cada uno de sus trozos, sería demasiado escaso decir que su dimensión es 1. En cambio, la dimensión de Hausdorff nos da una idea cabal de hasta qué punto la curva de Koch es un anfibio entre una curva y una superficie; esta dimensión vale log4/log3 —véase recuadro de la página siguiente—.

Mandelbrot mostró que la geometría de los fractales suele ser espectacularmente compleja —no es raro que estén asociados con procesos caóticos—, aunque a menudo esa complejidad surge paradójicamente de una sencilla similitud —a cualquier escala— entre sus partes.

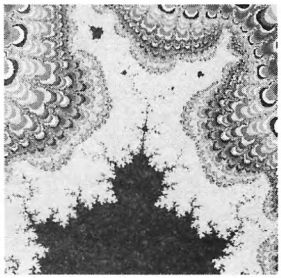
DIMENSIÓN FRACTAL DE LA CURVA DE KOCH

El cálculo de la dimensión fractal de la curva de Koch es relativamente sencillo. Recuerde que el número total de segmentos en el paso genérico N de la construcción es de $3 \cdot 4^N$, y de que la longitud de cada uno de esos segmentos es de $l/3^N$ —véase recuadro anterior—. Teniendo en cuenta su construcción, insertamos la curva en un cuadrado de lado l (l es la longitud del lado del triángulo inicial), y lo dividimos en un número de partes iguales que sea una potencia del número 3: primero en 3 partes, luego en $3 \cdot 3 = 3^2$ partes, luego en $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$, y así sucesivamente. Contemos ahora cuántos de los cuadraditos necesitaremos para cubrir la curva de Koch cuando hayamos subdividido el lado del cuadrado en, pongamos, 3^N partes. Para ello sustituimos la curva de Koch por la curva obtenida en el paso N del proceso de construcción. Como la longitud de los cuadraditos es de $l/3^N$, cada uno cubrirá, más o menos, uno de los segmentos que forman la curva, que también tienen longitud $l/3^N$; como tenemos $3 \cdot 4^N$ segmentos, necesitaremos entonces aproximadamente $3 \cdot 4^N$ cuadraditos. Según la definición de dimensión de Hausdorff, hemos dividido el lado del cuadrado en $n = 3^N$ partes y necesitamos $n_F = 3 \cdot 4^N$ cuadraditos para cubrir la curva; usamos finalmente las propiedades de los logaritmos para simplificar el cociente que define la dimensión de Hausdorff:

$$\frac{\log (n_F)}{\log (n)} = \frac{\log (3 \cdot 4^N)}{\log (3^N)} = \frac{\log 3 + N \cdot \log 4}{N \cdot \log 3} = \frac{1}{N} + \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Y cuando el número n de partes en el que dividimos el cuadrado, o lo que es igual, N, se hace infinito, se observa que la dimensión de Hausdorff de la curva de Koch vale log4/log3.

Los fractales son conjuntos raros, fascinantes y muy laberínticos, y «aparentemente» bastante ajenos a nuestra experiencia física. Y he entrecomillado «aparentemente» porque, en realidad, esos objetos son tan omnipresentes, se colocan delante de nuestros ojos con tanta frecuencia y descaro, tanto nos hemos acostumbrado a su rareza, que ni siquiera somos ya capaces de reconocerla. La geometría fractal abunda más en la naturaleza que la geometría suave de las superficies matemáticas más convencionales. Y un buen ejemplo es que no hay mejor descripción para un litoral carcomido de rías o fiordos, como el gallego o el noruego, que una curva fractal del tipo de la curva de Koch. E, igualmente, nada describe mejor la red de neuronas de nuestro complicado cerebro que un fractal. Y ha sido la mirada matemática —la aguda visión de matemáticos como Hausdorff o Mandelbrot— la que nos ha permitido reconocer la ubicuidad de los fractales en la naturaleza.



Los fractales no sólo son dominio de las matemáticas, sino que también están presentes en la naturaleza. A la izquierda, una vista área de los fiordos noruegos y, a la derecha, un fragmento de un fractal de Mandelbrot.

FRACTALES EN LA POESÍA

Además de la mirada del matemático, también la mirada del poeta ha sabido detectar la omnipresencia de los fractales en la naturaleza. De los incontables ejemplos con los que podría ilustrarse esa coincidencia entre la visión poética y matemática de la realidad, he elegido los primeros versos del Poema 18 de *Veinte poemas de amor y una canción desesperada* de Pablo Neruda. Para envolver la irrealidad del amor ejercido en la distancia, «Amo lo que no tengo. Estás tú tan distante», Neruda echó mano en ese poema de objetos cuya naturaleza sutil y etérea contrasta con la solidez de su constitución tridimensional:

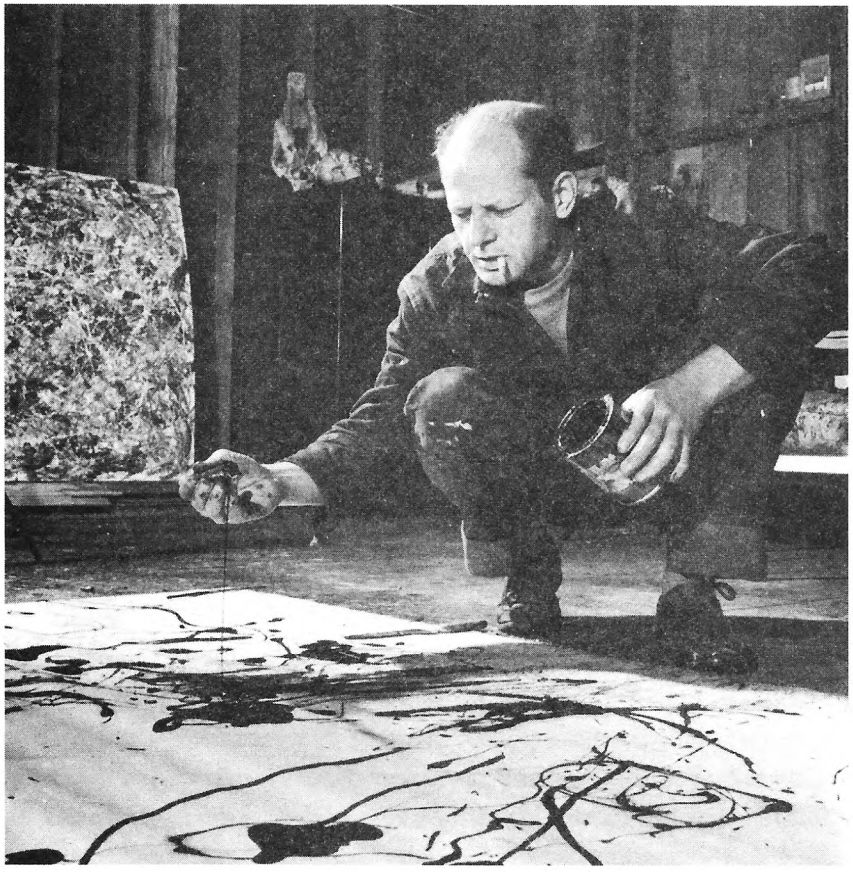
> Aquí te amo.
> En los oscuros pinos se desenreda el viento.
> Fosforece la luna sobre las aguas errantes.
> Andan días iguales persiguiéndose.
> Se desciñe la niebla en danzantes figuras.
> Una gaviota de plata se descuelga del ocaso.
> A veces una vela. Altas, altas las estrellas.

La mirada del poeta ha reunido en esos siete versos tres objetos equívocamente tridimensionales; pensemos en el tupido entramado de las agujas de los pinos, donde se desenreda el viento; en la porosa espuma que culmina esas aguas errantes sobre las que fosforece la luna, o el inaprensible hálito de un jirón danzante de niebla. A lo que hay que añadir la ubicuidad de las altas estrellas, esos puntos que se arraciman en el cielo conformando un mosaico de luz cuya complejidad inasible por el ojo casi alcanza la bidimensionalidad. Esa ambigüedad es, en realidad, consecuencia de la naturaleza fractal de esos objetos. Ocurre que nuestra pobre percepción visual es incapaz de apreciar la realidad de su dimensión fraccionaria; realidad que, en cambio, se pone de manifiesto al aplicar el afilado bisturí de la dimensión de Hausdorff o la aguda intuición onírica de Neruda.

La naturaleza fractal del *drip and splash* de Pollock

De las muchas aplicaciones que se podrían mostrar de los fractales, yo voy a comentar aquí una sumamente singular, una que los une con el expresionismo abstracto de Jackson Pollock. Y me refiero, naturalmente, al pintor norteamericano.

Pollock fue prototipo de artista maldito, incluyendo problemas con el alcohol y esas cosas. Murió en 1956 en un accidente de tráfico con tan sólo 44 años. Peggy Guggengheim fue su mecenas. «El pintor moderno —dijo una vez Pollock— no puede representar esta época del avión, la bomba atómica y la radio, con el viejo estilo renacentista. Cada época tiene su propia técnica.» Fiel a esa máxima, creó a mediados de la década de 1940 el expresionismo abstracto. Para ello usaba grandes lienzos a los que aplicaba su técnica del *drip and splash*, o «goteo y rociadura». En 1946



Jackson Pollock trabajando en su estudio a finales de la década de 1940.

convirtió un enorme granero de Long Island en su estudio; sobre el suelo colocaba las telas. «Aumenta así la intimidad con lo que pinto —manifestó el artista—; me hace sentirme parte de la pintura, puesto que puedo moverme alrededor, trabajar desde los cuatro lados y estar, literalmente, en la pintura. Por eso intento mantenerme al margen de los instrumentos tradicionales, como el caballete, la paleta y los pinceles. Prefiero los palos, las espátulas y la pintura fluida que gotea y se escurre, e incluso un empaste espeso a base de arena, vidrio molido u otros materiales.» Un crítico dijo: «Esa pintura no es arte; simplemente es. No es una pintura de una cosa, es la cosa en sí; no reproduce la naturaleza, es naturaleza.» Y es verdad, porque sus cuadrados destilan movimiento, ritmo gráfico, vitalidad no exenta de violencia; y, a la vez, una profunda ternura.

La relación de los cuadros de Pollock con los fractales la pusieron de manifiesto tres científicos australianos: R. Taylor, A. Micolich y D. Jonas. Publicaron en 1999 un artículo en *Nature* en el que anunciaban que los cuadros de Pollock de la época *drip and splash* tenían estructuras fractales, generadas tanto por cómo escurría la pintura —diferencias en la anchura de las gotas y regueros— como por la configuración geométrica que seguían los regueros que derramaba el pintor en sus vuelos alrededor del cuadro. Los científicos llegaron a medir la dimensión fractal de esas estructuras —procediendo como antes se ha explicado—.

Los cálculos de los tres australianos mostraban que esa dimensión empezó a tomar valores mayores que 1 —es decir, su pintura empezó de verdad a ser fractal— a mediados de la década de 1940; a partir de entonces fue en aumento constante y progresivo hasta alcanzar en 1952 valores cercanos al 1,7 para la dimensión de los patrones caóticos generados por el escurrir de la pintura, y 1,9 para la dimensión de las configuraciones caóticas debidas al movimiento de Pollock. El patrón de crecimiento de esos números era tan uniforme, tanta era su regularidad en las obras analizadas, que podía ser usado para determinar la autenticidad de las obras de Pollock, e incluso para datarlas.

Naturalmente, Pollock no controlaba adrede esas dimensiones fractales. Seguro que ni siquiera sabía nada del carácter fractal de sus cuadros. Era pura intuición, puro estilo. Se conoce bien la forma de trabajar que tenía Pollock, hay películas que muestran cómo creaba. Tocaba y retocaba una y otra vez; y añadía gotas por aquí y regueros por allí en un proceso que podía llevar meses hasta dar un cuadro por acabado. La cosa era compleja y se sabe que descartó muchos lienzos con los que no se sentía satisfecho; y que recortó los bordes de otros porque allí su pintura no era tan retorcida como en el resto del cuadro. Esas dimensiones fractales tan

características, que los científicos australianos lograron calcular, no son sino una medida de su estilo.

Volvamos ahora a la encuesta figurada con que comenzaba este capítulo. Por mucha armonía y valor estético que tenga un fractal, es posible que nuestro viandante siga pensando que los fractales dicen poco sobre la condición humana.

Nuestro imaginario viandante podría decir que esos empaquetamientos de Apolonio o la curva de Koch son sin duda hermosos, y que la dimensión de Hausdorff es una medida perfecta de su singular belleza. Pero, seguramente también, nuestro hipotético entrevistado añadiría que esa elucubración, a base de contar cuadraditos y calcular luego con logaritmos, tiene toda la pinta de ser la típica disquisición rara propia de unos matemáticos ociosos ajenos al mundo que los rodea. Y se equivocaría profundamente porque nadie puede ser ajeno al mundo que le rodea. Ni siquiera el propio concepto de la dimensión de Hausdorff, pues, como ya expliqué antes, ese concepto, por ser obra de humanos, tiene también circunstancias emocionales. Que, en este caso, son las de su descubridor y el mundo en el que se desenvolvió: porque Hausdorff no es un mero nombre vacío, ni una etiqueta vana, sino un ser de carne y hueso con sentimientos, ilusiones, penas y todo lo demás, que navegó en su día por el río de la vida como los lectores de este libro y yo mismo hacemos ahora.

¿Qué va a enseñarnos sobre el género humano, dirá el viandante, una ciencia que genera conceptos con el grado de abstracción de la dimensión de Hausdorff? El lector podrá juzgar, por lo que lea a continuación, si la contraposición de ese concepto matemático con sus circunstancias emocionales arroja o no algo de luz sobre la negra e insondable oscuridad de la naturaleza humana.

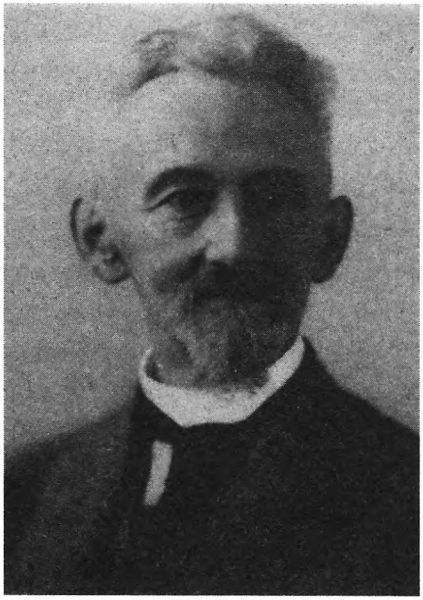
Hausdorff: el matemático más borgiano

Quizá no haya mejores adjetivos para calificar la mayor parte de la producción matemática de Felix Hausdorff que los que se les suelen aplicar a las ficciones de Borges: «imaginarias», «paradójicas», «irónicas», «laberínticas».

Con seguridad, la cumbre hausdorffiana de lo laberíntico es su concepto de dimensión. Con él enriqueció el concepto clásico y permitió una mejor clasificación de los objetos de acuerdo a ella. Así, los fractales, objetos laberínticos por excelencia, que tan célebres y populares hiciera Benoît Mandelbrot en el último cuarto del siglo XX, se describen precisamente como conjuntos cuya dimensión de Hausdorff no es un número natural.

Hausdorff también consideró el antecedente de lo que hoy en día se ha dado en llamar «cardinales inaccesibles». Estos conjuntos infinitos son entelequias mentales que poseen un inequívoco sentido de lo irónico. La característica que los determina es su inmensidad descomunal; pero ese amorfo gigantismo los hace tan improbables que se ignora si realmente existen. He ahí su ironía: ¡siendo tan enorme su tamaño, nadie hubiera dicho que los ojos de la mente iban a tener tantas dificultades para verlos! Porque la irrealidad de los cardinales inaccesibles persiste incluso cuando se le aplica al término *existencia* la más vaporosa e imprecisa interpretación que los matemáticos hayamos sido capaces de imaginar.

Y no sólo encontramos lo laberíntico o lo irónico en las matemáticas de Hausdorff, también lo contradictorio es protagonista principal. Con seguridad, la cumbre hausdorffiana de lo contradictorio es la descripción que hizo en su libro *Fundamentos de la teoría de conjuntos* de la descomposición paradójica de una superficie esférica, el origen de la de-construcción que diez años después harían los polacos Banach y Tarski de una esfera maciza, y que permite dividirla en trozos —cinco, por ejemplo— y obtener, encajándolos, dos esferas idénticas a la de partida; o dividir un guisante en trozos, convenientemente diseñados, de manera que al reorganizarlos de forma adecuada podemos obtener una esfera maciza del tamaño del Sol. Es la versión matemática de la multiplicación evangélica de los panes y los peces.



Una nueva fotografía de Felix Hausdorff. La mirada del matemático desprende una melancólica luz: ¿vería ya ante sí las tempestades que, según Nietszche, sacuden los árboles de la vida?

Hausdorff nació en Breslau en 1868, aunque tres años después se mudó con su familia a Leipzig. Allí, y también en Freiburg y en Berlín, estudió matemáticas y astronomía. A pesar de que sus trabajos matemáticos de juventud caen dentro de lo que se entiende por matemáticas aplicadas —a la astronomía y a la óptica, en su caso—, Hausdorff acabó siendo un «matemático puro». Su obra más influyente acaso sea *Fundamentos de la teoría de conjuntos*; ese monumental libro, publicado en 1914, se considera el acta fundacional de la topología.

Hausdorff tuvo otras inquietudes intelectuales aparte de las matemáticas. De adolescente quiso estudiar música y hacerse compositor y, aunque después su trayectoria profesional siguió otros derroteros, compuso alguna que otra pieza y fue siempre un consumado pianista.

Bajo el seudónimo de Paul Mongré, Hausdorff escribió poesía, ensayo filosófico y también una obra satírica de teatro. Su producción literaria se concentró principalmente en la década 1896-1906. En 1897 publicó su primer libro, *San Hilario: Pensamientos desde el país de Zaratustra*, cuyo título hace referencia a una casualidad: lo empezó a escribir el día de San Hilario en San Hilario, un pueblecito cerca de Génova. En este texto encontramos sonetos, poemas y aforismos más o menos filosóficos; uno de ellos dice: «Cuando no tenemos una mujer a la que amar, amamos a la humanidad, la ciencia o la eternidad [...] El idealismo, que siempre señala la falta de algo mejor, es un sucedáneo del erotismo.»

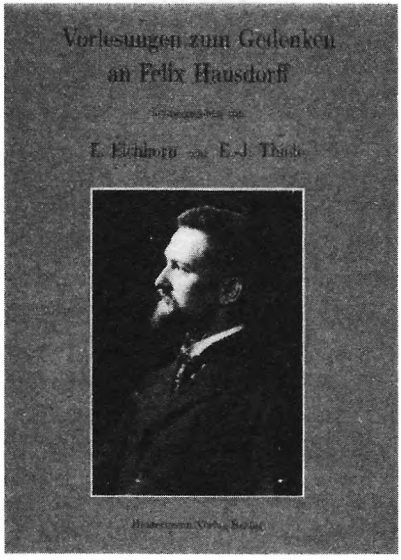
En 1898 apareció *El caos en interpretación cósmica*, en el que Hausdorff defiende un «nihilismo trascendente»; de ese libro alguien dijo que era demasiado matemático para un filósofo y demasiado filosófico para un matemático. La filosofía de Hausdorff estuvo muy influida por Nietzsche y Schopenhauer, y postulaba la ventaja de cierta individualidad elitista sobre las sociedades igualitarias. Hausdorff solía romper el sesudo discurso filosófico de sus libros con reflexiones, digamos, menos elevadas, referentes al egoísmo, al hedonismo, al amor, a la pasión, a la música de Mozart o a la hipnosis —no es difícil observar la influencia de Freud en sus escritos—.

Aparte de los sonetos contenidos en *San Hilario*, Hausdorff publicó otro poemario, titulado *Éxtasis* (1900), con 158 composiciones. Para que el lector pueda apreciar la poesía de Hausdorff, aquí recojo uno de sus poemas, titulado *Unendliche Melodie (Melodía infinita)* y traducido del alemán por José Luis Arantegui:

Ir yendo por trémulos planos lento
donde férreo el son del principio dura,

a humo y mundo en danza espiral oscura
desarrollarse el alma en firmamento.
Sin tropiezo el mirar ni impedimento
en ángulo o cara o comisura,
ir yendo por trémulos planos lento
donde el férreo son del principio dura.
De toda singularidad exento,
desligado del hombre, canción pura
un son sin manantial que se murmura,
flotar, pasar sin formas, movimiento,
ir yendo por trémulos planos, lento.

Fue su obra de teatro, sin embargo, la que más éxito alcanzó. Comparte título con un drama de nuestro Calderón, *El médico de su honra*, aunque el planteamiento de Hausdorff es bastante más satírico y alocado: la obra cuenta la historia de un arquitecto prusiano, un idealista, que habiendo seducido a la mujer de un consejero del Estado tiene que batirse en duelo con él. Pero, llegados el día y la hora fijados, hubo que suspender el lance dado el alarmante estado de embriaguez en el que se encontraban ambos contendientes y sus respectivos testigos. A consecuencia del escándalo, el consejero pierde su empleo pero acaba reconciliado con su mujer. La obra se representó en Berlín y Hamburgo y, según las crónicas locales, cosechó una calurosa acogida.



Los logros de Hausdorff han sido objeto de múltiples análisis, como los que reúne esta obra colectiva —dirigida por E.J. Thiele y E. Eichhorn— centrada en su figura.

«Coronas marchitas en el santuario de la vida»

Hausdorff fue profesor en las universidades de Leipzig (1902-1910), Greifswald (1913-1921) y Bonn (1910-1913 y 1921-1935). Se jubiló de esta última en marzo de 1935; tenía a la sazón 67 años, y tal y como él mismo había augurado unos años antes, las cosas en Alemania empezaban a ser diferentes. Si antes hablé del matemático, del escritor, del filósofo y del músico, toca ahora hacerlo del patriota alemán que Hausdorff siempre consideró que había sido.

El 30 de enero de 1933, Paul von Hindenburg, a la sazón presidente de Alemania, había nombrado a Adolf Hitler (43 años) canciller. El partido nazi, con 230 parlamentarios elegidos en julio de 1932, era el que contaba con mayor representación en la Cámara, aunque su mayoría no era absoluta. En las elecciones de primeros de marzo de 1933, los nazis consiguieron 288 parlamentarios, que unidos a los 52 del Partido Nacionalista, permitió a Hitler el control efectivo de un Parlamento con 647 diputados. La posterior exclusión o arresto de los 81 parlamentarios comunistas, y la compra de diputados de Centro, le permitió a Hitler alcanzar los dos tercios de la Cámara que necesitaba para la proclamación del Tercer Reich y la asunción de poderes absolutos.

Fiel a su discurso antisemita, Hitler no tardó en aprobar las primeras leyes de exclusión étnica. El 1 de abril de 1933 se llamó al boicot contra los negocios judíos. Una semana después, el 7 de abril, se decretó una ley de reforma de la administración pública, que impedía a los judíos trabajar para la administración del Estado; los que hasta ese momento lo hacían fueron despedidos.

Había entonces en las universidades alemanas 200 profesores de matemáticas, de los cuales 98 eran catedráticos; 35 fueron expulsados, 15 de ellos, catedráticos. De los expulsados, 30 lo fueron por ser «en mayor o menor grado» judíos. En 1935, la cifra de expulsiones rondaba ya los 60. Sesenta es sólo un número: detrás se esconden 60 tragedias, 60 infamias, 60 personas, 60 familias, que en no pocas ocasiones acabaron siendo exterminadas.

La ley del 7 de abril tenía, sin embargo, algunas cláusulas de exención: fueron eximidos aquellos judíos que se hubieran significado como patriotas alemanes —era el caso, por ejemplo, de los que habían participado como soldados en la Primera Guerra Mundial—, que podían seguir siendo servidores públicos.

Ése fue el caso de Hausdorff. Nunca ocultó sus orígenes judíos; y no es que abunden en sus escritos las cuestiones religiosas, que no abundan, y cuando las trató hay muchas más páginas sobre religiones orientales que sobre judaísmo o cristianismo.

Su esposa, Charlotte Goldschmidt, con quien se casó en 1899 y de la que tuvo una hija, Lenore, se había convertido al luteranismo en su juventud.

A pesar de que Hausdorff pronto vio las garras de la fiera nazi —tras conseguir el partido de Hitler 230 parlamentarios, había dicho: «Las cosas serán en el futuro muy diferentes»—, no hizo intentos decididos por abandonar Alemania; tan sólo se sabe de una carta enviada a Richard Courant (1888-1972) en 1939 informándose sobre la posibilidad de una plaza de investigador en Nueva York.

COURANT, HILBERT Y GOTINGA

Richard Courant, judío alemán como Hausdorff, abandonó Alemania en 1933; a pesar de haber sido herido durante la Primera Guerra Mundial, a pesar de las muchas personalidades de todo el mundo que enviaron cartas a la Universidad de Gotinga solicitando que le fuera respetado su puesto, a pesar de ser un excelente científico, la Universidad lo expulsó el 13 de abril de 1933 alegando que Courant había sido miembro del Partido Socialista; paradójicamente, ese abuso le acabó salvando la vida. Courant consiguió en 1936 un puesto en la Universidad de Nueva York; allí organizó el Instituto de Matemáticas Aplicadas —uno de los más prestigiosos del mundo— que desde 1964 lleva su nombre. Courant, naturalmente, no fue un caso único en Gotinga.

De Gotinga, las políticas étnicas del Tercer Reich habían amputado figuras de la talla de Courant, Edmund Landau, Emmy Noether o Hermann Weyl —la lista no es exhaustiva—. Muchos de ellos pertenecían a la escuela de David Hilbert, que no había permitido que ningún prejuicio, ya fuera nacionalista, racial o sexual, le afectara a la hora de seleccionar alumnos o colaboradores, y que con tanto esfuerzo y empeño había logrado convertir Gotinga en centro matemático del mundo; en tan sólo unos meses, Gotinga pasó a no ser prácticamente nada. «Cuando yo era joven —comentó Hilbert que tenía entonces 71 años de edad—, decidí que nunca repetiría lo que había oído decir a tanta gente mayor: "Aquellos eran buenos tiempos y no estos de ahora". Decidí que nunca jamás diría eso cuando fuera viejo. Pero, ahora, no queda otro remedio que decirlo.»

David Hilbert permaneció en la Universidad de Gotinga a pesar de la denominada «purga de 1933», la cual provocó la expulsión de numerosos investigadores. El insigne matemático falleció diez años después.

Posiblemente, de haber expulsado la Universidad de Bonn a Hausdorff, las cosas hubieran sido diferentes para él y su mujer. Pero Hausdorff se consideraba un patriota que, en su juventud, justo después de graduarse, había servido varios años como voluntario en la infantería alemana: allí alcanzó el rango de vice-sargento; así que le fue aplicada la exención de la ley del 7 de abril y siguió siendo catedrático en Bonn hasta su jubilación, por razones de edad, en marzo de 1935.

Su calvario no había hecho más que empezar. En abril de 1941, un colega de Hausdorff escribía sobre él y su mujer: «Las cosas les van a los Hausdorff tolerablemente bien, aunque naturalmente no pueden escapar a las vejaciones y la agitación que levantan los continuos legalismos antisemitas. Los gravámenes fiscales y monetarios que les han impuesto son tan altos que no pueden vivir con su sueldo de jubilado y han tenido que echar mano de sus ahorros, que afortunadamente aún conservaban. Han sido, además, obligados a ceder una parte de su casa y vive ahora allí demasiada gente [...] Es ciertamente alentador que todavía algún músico los visite para tocar con Hausdorff: por lo menos eso lleva algo de alegría a su casa.»

En octubre de 1941, los Hausdorff fueron obligados a llevar la estrella de David, y hacia finales de año recibieron la noticia de que serían deportados a Colonia: era el paso previo al internamiento en los campos de concentración que Hitler había establecido en Polonia. La amenaza pareció desvanecerse en Año Nuevo, pero sólo para dar paso a una nueva: a mediados de enero se les comunicó que el 29 de ese mes serían internados en un suburbio de Bonn llamado Endenich; era, de nuevo, el paso previo a su internamiento en un campo de exterminio.

Se conserva una carta que Hausdorff escribió el domingo 25 de enero de 1942; en ella afirmó: *«Auch Endenich ist noch vielleicht das Ende nicht»*. La frase es un macabro juego de palabras entre Endenich, un barrio de Bonn, y *ende* y *nicht* que significan «final» y «no»: «Aunque Endenich quizá todavía no sea el final». Siendo Hausdorff músico aficionado, seguro que sabía que en Endenich hubo un manicomio regentado por un tal doctor Richarz —quizá ya no existía en 1942—; un lugar tétrico donde el compositor Robert Schumann (1810-1856) pasó encerrado los dos últimos años de su vida. Un mal augurio, sin duda.

Así que «Aunque Endenich quizá todavía no sea el final» es un retruécano. Uno de los retruécanos más cargados de cruel ironía que se hayan escrito jamás, porque los Hausdorff habían decidido suicidarse: «Para cuando reciba estas líneas —se lee en esa carta del 25 de enero—, habremos resuelto nuestro problema; aunque será de la forma en que usted, incansablemente, ha intentado disuadirnos [...] Lo que se ha hecho contra los judíos en los últimos meses nos ha sumido en la más absoluta

pesadumbre, porque se nos ha colocado ante una coyuntura intolerable [...] Dele las gracias de todo corazón al señor Mayer, por todo lo que hizo por nosotros, pero también por todo lo que, con seguridad, habría hecho; nos maravillamos muy sinceramente con los logros y éxitos de su organización y, de no habernos acometido esta pesadumbre, nos habríamos acogido a sus cuidados; a ciencia cierta nos habrían procurado un sentimiento de relativa seguridad, aunque desafortunadamente no dejaría de ser relativa —Hausdorff tenía razón: este señor Mayer, abogado, murió en Auschwitz— [...] Si fuera posible, queremos que nuestros cuerpos sean incinerados; le adjunto tres declaraciones con ese propósito. Si no puede ser, que el señor Mayer o el señor Goldschmidt hagan lo que esté en sus manos (que tenga en cuenta que mi mujer y mi cuñada son luteranas). Cuente usted con que se pagará lo que cueste: mi mujer tiene ya pagados los gastos de su sepelio en una fundación protestante (encontrará los documentos en su dormitorio). Lo que todavía falte por pagar, lo aportará mi hija Nora. Perdónenos por causarle problemas incluso después de muertos. Estoy convencido de que hará lo que pueda, que quizá no sea mucho. ¡Perdone nuestra deserción! Le deseamos a usted y a todos nuestros amigos un futuro mejor.»

Hausdorff mostró en esa carta, escrita horas antes de suicidarse, una presencia de ánimo ciertamente sobrecogedora. Hausdorff había escrito sobre el suicidio alguna que otra vez, y acaso esas reflexiones le sirvieran para afrontar el suyo, aunque quién

Tumba de Felix Hausdorff, su esposa Charlotte, su cuñada Edith, su hija Lenore y el marido de ésta, en el cementerio de Poppelsdorf de Bonn.

es capaz de decir lo que servirá o no servirá cuando le llegue la hora. Hausdorff había publicado en 1899 un ensayo titulado *Muerte y regreso*, muy influido por el pensamiento niestzcheano sobre «la muerte libre». En esa carta de despedida que escribió Hausdorff la mañana de su muerte no dejan de resonar con fuerza las consignas de Zaratustra. «¡Muere a tiempo!» parecen gritarnos las frases de Hausdorff, como si nos quisiera enseñar con la dignidad de su conducta que «aquel que se realiza de manera completa muere su muerte victoriosamente». Hausdorff ya no estaba dispuesto a «colgar coronas marchitas en el santuario de la vida», de manera que eligió «la muerte libre, que viene a mí porque yo quiero».

La misma tarde en la que escribió esa carta, Hausdorff, su esposa Charlotte y la hermana de ésta, Edith, tomaron una sobredosis de veronal. Parece que sus deseos se pudieron cumplir, porque sus restos fueron incinerados y las cenizas, depositadas en el cementerio de Poppelsdorf.[1]

Coda

Tal vez el hipotético viandante, a quien interrogaba al principio del capítulo sobre las matemáticas y la condición humana, me diga que lo que he contado hasta ahora poco ayuda a comprendernos como especie. Y que la contraposición entre lo abstracto del concepto de dimensión de Hausdorff y lo emocional de sus circunstancias, más que luz sobre la condición humana, lo que arroja sobre ella es un buen montón de preguntas e interrogantes. Bien, de ser así, esa contraposición ya sería de mucho provecho, porque no es otra cosa que la reflexión, que las preguntas y los interrogantes provocan, el combustible que usa la mente para alumbrar la desnudez de nuestra condición.

1 Las circunstancias emocionales que vivieron las matemáticas en los trágicos años previos y durante la Segunda Guerra Mundial van mucho más lejos de lo expuesto aquí. No hay que olvidar que la barbarie nazi acabó desbordando el ámbito alemán, anegando en sangre y fuego al resto de Europa. Así que entre muchas otras cosas, esas circunstancias incluyen las infamias y el exterminio causados por los nazis entre los matemáticos polacos, o los matemáticos alemanes que colaboraron con los nazis, o, por cruzar al otro lado del Atlántico, como ese horror influyó en la diáspora de numerosos científicos y matemáticos europeos hacia América y su participación en el diseño y fabricación de las primeras bombas atómicas. Un hilo éste que conecta lo aquí contado con uno de los episodios más dramáticos y de mayor complejidad moral que la ciencia y la tecnología hayan tenido que enfrentar jamás. El lector interesado en profundizar más en algunas de las historias explicadas en este capítulo las encontrará más extensamente tratadas en *Pasiones, piojos, dioses... y matemáticas,* del mismo autor.

Capítulo 4

Objetivo: la belleza de los razonamientos matemáticos

Ya sabemos dónde hay que buscar la belleza de las matemáticas y por qué es difícil apreciarla; sabemos también de la conveniencia de poner a disposición del interesado las circunstancias emocionales de las matemáticas, además de las técnicas, porque predispone el ánimo para la apreciación de su belleza.

En este capítulo nos vamos a situar al otro lado del espejo: pongámonos en el caso de que la estructura de ideas donde reside el valor estético de un determinado razonamiento matemático ya haya llegado a nuestro cerebro. Lo que se va a intentar ahora es una especie de doble salto mortal: trataré de hacer explícitas qué características de esas ideas son las que le confieren su valor estético. Pero no se asuste el lector, tendré siempre muy presente la recomendación del filósofo George Santayana: «Sentir la belleza es cosa mejor que entender cómo la sentimos.»

Para recorrer este camino me voy a coger del brazo de un gigante —ya no se lleva eso de subirse a sus hombros— que nos aconseje y acompañe en este paseo lleno de dificultades. Ese gigante es G. Harold Hardy (1877-1947): pacifista en tiempos de guerra, homosexual no practicante —en palabras de su más cercano colaborador—, estilista de las matemáticas, gourmet de los números.

El inglés que no amaba a Dios

En sintonía con el resto del libro, antes de proceder con los argumentos de Hardy sobre el valor estético de las matemáticas, conviene dar a conocer al lector algunas de las circunstancias del personaje.

Harold Hardy fue, según su propia estimación, el quinto mejor matemático puro de su tiempo. Lo de establecer rankings era muy de su gusto —lo que quizá no haga sino revelarnos su carácter competitivo—. En otra ocasión, Hardy elaboró un ranking sobre habilidad matemática natural, en el que él mismo se atribuía 25 puntos sobre 100, mientras que a su más estrecho colaborador, John Littlewood, le atribuyó 30, y al alemán David Hilbert, el matemático más ilustre de la época,

80. La máxima puntuación de 100 puntos se la otorgó a Srinivasa Ramanujan, un matemático indio autodidacta, ex oficinista del puerto de Madrás, un diamante en bruto que Hardy había tenido la honradez profesional de descubrir —y del que más adelante habrá ocasión de añadir algo más—.

En opinión de Bertrand Russell, Hardy tenía la clase de ojos brillantes que sólo las personas muy inteligentes tienen. Acaso no fuera un genio como lo fue Einstein, pero, para muchos, tuvo una faceta en la que lo superó: su capacidad para convertir cualquier trabajo intelectual en una obra de arte. Capacidad que dejó bien patente en un librito que escribió unos años antes de morir; *A Mathematician's Apology* es su título, y, según Graham Greene, es la mejor descripción de lo que significa ser un artista creador. Precisamente ese opúsculo será la brújula que nos guíe en nuestro empeño de objetivar las características que dotan a una idea matemática de valor estético.

Alguien dijo una vez que para sentarse de la forma en que Hardy lo hace en esta fotografía tienes que haber sido educado en una escuela privada inglesa.

Hardy recibió una excelente educación inglesa, primero en el colegio de Surrey, al oeste de Londres, donde sus padres trabajaban como maestros; después, con trece años, obtuvo el primer puesto de entre 102 candidatos para estudiar en Winchester, en un prestigioso colegio privado. Y, finalmente, ingresó con 19 años en el Trinity College de Cambridge —donde dos siglos y pico antes se había formado y había trabajado Isaac Newton—.

Hardy tuvo el tipo de frialdad que el imaginario colectivo asocia con lo típicamente inglés, además de un carácter algo histriónico y excéntrico. Su odio por los

espejos —cuando llegaba a un hotel los tapaba con toallas— le obligaba a afeitarse al tacto; odio que hizo extensivo a algunos aparatos mecánicos: nunca usó reloj ni estilográfica, y aborrecía que le tomaran fotografías. Y tampoco usó el teléfono, salvo en situaciones extremas y sólo para hablar él. Aparte de las matemáticas, su otra gran afición fue el críquet, un juego casi tan arcano como las propias matemáticas.

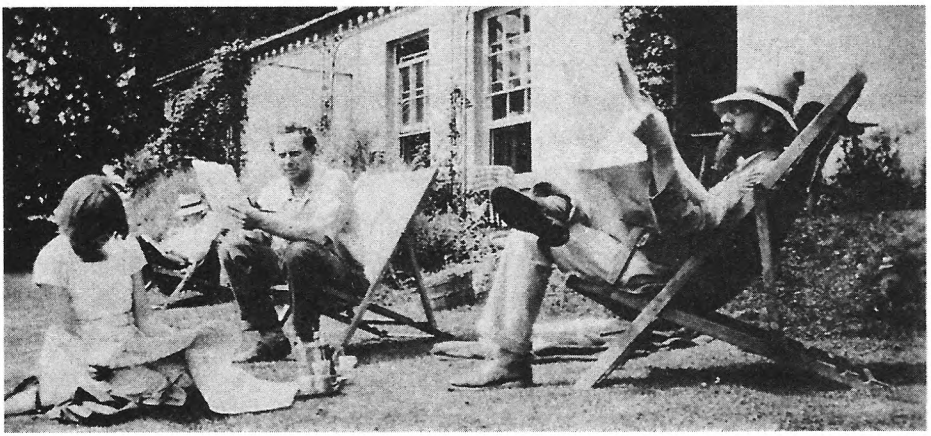
Buen amigo de Bertrand Russell y seguidor de sus posturas pacifistas durante la Primera Guerra Mundial, Hardy fue un leal defensor de la integridad y universalidad de la hermandad matemática. El ambiente que se vivió en Cambridge durante la Primera Guerra Mundial lo decidió a cambiar de universidad, aceptando en 1919 una cátedra en Oxford. Volvió a Cambridge doce años después. Echaba de menos estar en el centro de la matemática inglesa, entonces en Cambridge, y, también, la seguridad que tenía allí de seguir en su alojamiento del College una vez jubilado. Hardy permaneció siempre soltero, y los últimos años los pasó cuidado por su hermana Gertrude, a quien jugando de niños descuidadamente había dejado tuerta con un bate de criquet —el accidente nunca rompió la excelente relación que los hermanos mantuvieron toda su vida—.

Hardy fue un gran conversador, aunque acaso su aparente sinceridad y gracejo tapara más que mostraba; como consecuencia, fue amigo de muchos pero íntimo de muy pocos, como dijo alguien.

Apóstoles

Hardy perteneció al exclusivo club de los *Apóstoles,* una singular hermandad secreta creada en Cambridge que contó con miembros de gran solera y prestigio intelectuales: Edward M. Foster, John Maynard Keynes, Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein, Lytton Strachey y otros componentes de lo que luego se llamaría el grupo de Bloomsbury. «No había tabús —escribió Russell sobre los *Apóstoles*—, ni limitaciones, nada se consideraba escandaloso, ni se levantaba ninguna barrera a la libertad de reflexión y discusión.»

A pesar de que muchos de los *Apóstoles* no fueron homosexuales, una cierta corriente gay atravesó la hermandad. Foster, Keynes y Strachey lo fueron y, posiblemente, también Hardy, aunque su discreción hace difícil saberlo con certeza. Según Littlewood, con quien colaboró durante cuarenta años: «Hardy fue un homosexual no practicante»; lo más parecido a un affaire que se le conoce fue que compartió, en 1903, habitaciones y una gata con Russell Gaye, un experto en clásicos grecolatinos. «Eran absolutamente inseparables —escribió sobre ellos el marido de Virginia



Tres de los integrantes del grupo de Bloomsbury, con algunos de los cuales se relacionó Hardy. A la derecha se halla el escritor Lytton Strachey; a la izquierda, la pintora Dora Carrington, y en el centro, su marido Ralph Partridge; las relaciones entre estos tres personajes fueron llevadas a la gran pantalla en 1995.

Woolf—, y raramente se les veía hablando con otra gente»; seis años después Gaye se suicidó. «Es difícil saber si Hardy fue un homosexual practicante —escribió Robert Kanigel en la biografía de Ramanujan—; pudo llevar tanto una vida asexuada como una intensa vida sexual secreta tan bien oculta que incluso sus amigos nada supieron de ella y quienes sí supieron nada dijeron.» La única crónica que tenemos de Hardy como actor sexual se refiere a una reunión de los *Apóstoles* en 1899, cuando tras una discusión sobre la masturbación se votó si era buena como medio pero mala como fin, a lo que Hardy votó que sí.

Hardy dejó de creer en Dios siendo estudiante del Trinity College de Cambridge. Consecuente como era, le dijo al Decano que no volvería a ir a la capilla, algo obligatorio en el College; a lo que el Decano respondió que no se opondría si, a cambio, Hardy ponía a sus padres en antecedentes. El Decano y, por supuesto, Hardy sabían que éstos eran muy religiosos, y que el ateísmo del hijo les iba a causar dolor. Después de pensarlo mucho, Hardy les escribió y, efectivamente, les causó gran dolor; como dijo un buen amigo suyo, un dolor que a nosotros, más de un siglo después, nos es difícil imaginar. Así que Hardy, no sólo dejó de creer en Dios, sino que a partir de entonces lo consideró su enemigo personal. Algo que por su incongruencia acabó provocando más de una anécdota jugosa. Como cuando salía bien abrigado y cargado con un paraguas en las tardes soleadas: no es que Hardy fuera más precavido de la cuenta, es que pensaba que si Dios lo veía pertrechado con un paraguas no se iba a tomar la molestia de estropear la tarde con lluvia.

HARDY, DIOS Y LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

La más «divina» de las anécdotas que dan cuenta de la enemistad de Hardy con Dios tiene que ver con la hipótesis de Riemann. No hace falta explicar aquí en qué consiste dicha hipótesis, baste con apuntar que, de ser cierta, nos permitiría un conocimiento muy profundo de cómo los números primos están distribuidos entre los otros números. Desde que fue propuesta en 1859 por el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), la hipótesis se ha acabado convirtiendo en el reto más importante que los matemáticos tienen ante sí, y fue uno de los objetos de deseo matemático más intensos de Hardy. Justo antes de embarcarse para un viaje a Dinamarca, Hardy envió una postal en la que aseguraba haber demostrado la hipótesis de Riemann. Caso de desaparecer en un hipotético naufragio del barco, su prestigio convencería a sus colegas de que, efectivamente, había resuelto el problema más importante de las matemáticas; pensarían que sólo la mala suerte le había impedido hacer pública una demostración que, con seguridad, se había hundido con él. Hardy entraría, de esa forma, en el Olimpo matemático junto con Gauss, Arquímedes, Newton o Euler. En realidad, Hardy no hacía sino imitar a Pierre de Fermat y su célebre anotación en el margen de la *Aritmética* de Diofanto. Sólo que el barco no se hundió. Y luego Hardy explicó que todo había sido una treta para tener una travesía tranquila: para evitar que Hardy entrara en el panteón de la fama matemática, Dios, su archienemigo, calmó los vientos y las aguas del Mar del Norte, y le obsequió con la más tranquila de las singladuras.

La relación con Ramanujan

De la calidad moral de Hardy habla bien a las claras su relación con el matemático indio Srinivasa Ramanujan.

Ramanujan nació en 1887 en un pueblo al sur de Madrás en una familia de brahmines pobres; fue incapaz de obtener siquiera el equivalente al título de bachiller, y no tanto por razones económicas, sino porque nunca le interesó ningún otro estudio que no fueran las matemáticas. Fue un muchacho «especial» que cayó bajo el embrujo de los números y logró levantar de la nada un soberbio edificio matemático. Y lo hizo solo, sin la ayuda de nadie, sentado a la puerta de su casa, escribiendo en una pizarra y borrando con el codo.

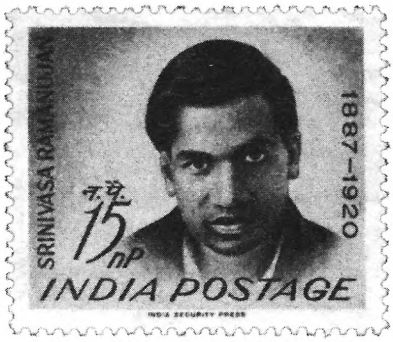
Cuando sus teoremas y fórmulas empezaron a trascender, la pequeña comunidad científica de Madrás fue incapaz de determinar si estaba ante un genio o ante un loco. Comprendiendo que nadie en su entorno más cercano podía entender sus fórmulas, Ramanujan decidió enviarlas a Cambridge, centro entonces de las mate-

máticas inglesas. Pero ni la primera carta que envió, ni la segunda, surtieron ningún efecto, porque los catedráticos ingleses a quienes iban destinadas estaban demasiado ocupados para intentar comprender lo que un desconocido oficinista del puerto de Madrás les enviaba. La tercera carta cayó en mejores manos: las de Harold Hardy.

Hardy se tomó la carta de Ramanujan en serio y, tras estudiar a fondo lo que el oficinista indio le había enviado, removió cielo y tierra hasta que consiguió llevar a Ramanujan a Cambridge. Allí llegó en 1914, casi coincidiendo con el comienzo de la Primera Guerra Mundial. Hardy pudo comprobar que Ramanujan era un diamante en bruto: tenía una intuición monstruosamente afinada para números y fórmulas, pero desconocía conceptos y herramientas básicas que cualquier aspirante aplicado a matemático debe dominar en los primeros años de la carrera. Pero el milagro se produjo, lo imposible sucedió, porque Ramanujan, que se había formado matemáticamente a sí mismo en el porche de su casa en el sur profundo de la India, fue capaz de colaborar fructíferamente y en pie de igualdad con Hardy, uno de los más logrados frutos del prestigioso sistema educativo inglés.

Ramanujan estuvo en Inglaterra casi cinco años —durante los cuales se desarrolló la Primera Guerra Mundial—, aunque los dos últimos los pasó enfermo e internado en varios sanatorios; la soledad, el clima húmedo de la campiña inglesa y los rigores de una dieta inflexible —Ramanujan era estrictamente vegetariano— agravada por la escasez de alimentos apropiados durante la guerra, lo hicieron enfermar de un mal que ninguno de los varios médicos que lo atendieron supo diagnosticar adecuadamente.

Ramanujan regresó a la India en 1919, pero lo hizo para morir. Salió de su país orondo y lozano y volvió consumido por la enfermedad; salió siendo un desconocido y volvió convertido en celebridad: fue elegido miembro de la Royal Society de Londres, el miembro más joven de su centenaria historia y el segundo de na-



Sello indio dedicado al matemático Srinivasa Ramanujan, el gran «descubrimiento» de Hardy.

cionalidad india, y el primer indio en ser nombrado *fellow* del Trinity College de Cambridge; el *Times* de Madrás le dedicó un artículo al poco de llegar, donde se podía leer: «Como alguien en Cambridge ha afirmado, desde Newton no ha habido nadie igual, lo que, no necesita decirse, es el mayor de los elogios.» Ramanujan murió en abril de 1920 con 32 años de edad.

«Mi asociación con Ramanujan —confesó Hardy en cierta ocasión— ha sido el único incidente romántico de mi vida. A él le debo más que a nadie en el mundo, con una sola excepción.» Hardy siempre se enorgulleció de haber colaborado con Ramanujan y lo consideró una medida de su valía personal; en *A Mathematician's Apology* escribió: «Todavía me digo, cuando estoy deprimido o tengo que escuchar a alguien vanidoso y aburrido: "Bueno, he hecho algo que usted nunca podría haber hecho, que es haber colaborado tanto con Littlewood como con Ramanujan en, digamos, igualdad de condiciones".» Y esa relación empezó cuando un día de finales de enero de 1913, con el correo de la mañana, le llegó un sobre expedido desde Madrás cubierto con sellos indios. «Ciertamente, la carta más extraordinaria que haya recibido jamás», afirmaría después Hardy.

Hardy vivió casi exclusivamente por y para las matemáticas, y lideró las matemáticas inglesas desde la primera década del siglo XX hasta el comienzo de la Segunda Guerra Mundial. Para él las matemáticas tenían mucho de competición: ser el primero en la historia en resolver un problema de reconocida dificultad. Autor de más de 300 artículos de investigación y once libros, su producción científica fue muy extensa y cubre casi cualquier rama del análisis matemático y la teoría de números.

Arte y matemáticas: ¿finalidad sin fin?

La vivencia matemática de Hardy fue, mayormente, estética. Y sobre ello encontramos continuas referencias en *A Mathematician's Apology:* «La belleza es la primera piedra de toque; en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas desagradables desde el punto de vista estético.»

Incluso defendió que es la belleza lo único que dotaba de valor a sus matemáticas, que es tanto como decir dotar de sentido a su vida entera: «Juzgado desde el punto de vista práctico, el valor de mi vida como matemático es nulo y, en cualquier caso, fuera de mi actividad profesional es insustancial. Tan sólo me queda una posibilidad de escapar al veredicto de completa insustancialidad: haber creado algo digno de serlo [...] Así pues, mi vida, o la de cualquier otro que haya sido matemático en el sentido en el que yo lo he sido, puede resumirse del modo siguiente: he añadido algo

al caudal del conocimiento de la humanidad y he ayudado a otros para que hicieran lo mismo. Los productos de nuestro trabajo tienen un valor que tan sólo difiere en grado, y no en especificidad, del de las creaciones de los grandes matemáticos, o de las de cualesquiera otros artistas, grandes o pequeños, que han dejado tras de sí alguna huella en el recuerdo de los hombres.»

A menudo, la insistencia de Hardy en la inutilidad de las «verdaderas» matemáticas ha sido considerado una muestra más de su faceta extravagante y, también, provocadora. Porque es casi una provocación escribir: «Las auténticas matemáticas no repercuten de ningún modo sobre la guerra. Nadie ha podido descubrir ninguna finalidad bélica ni ninguna aplicación a la guerra que pueda derivarse de temas tales como la teoría de números o la relatividad, y parece bastante improbable que nadie pueda hacerlo en un futuro próximo», casi a la vez que Estados Unidos ponía en marcha el Proyecto Manhattan y fabricaba las primeras bombas atómicas. Pero, ironías de la vida, lo primero que reseña la *Encyclopaedia Britannica* en su biografía de Hardy es la llamada ley de Hardy-Weinberg, a la que en una entrada posterior la *Britannica* dedica más espacio que al propio Hardy, para decir: «Hardy dio poco valor a esta ley, pero su importancia es central en el estudio de muchos problemas genéticos, incluyendo la distribución del Rh según grupos sanguíneos y las enfermedades hemolíticas.»

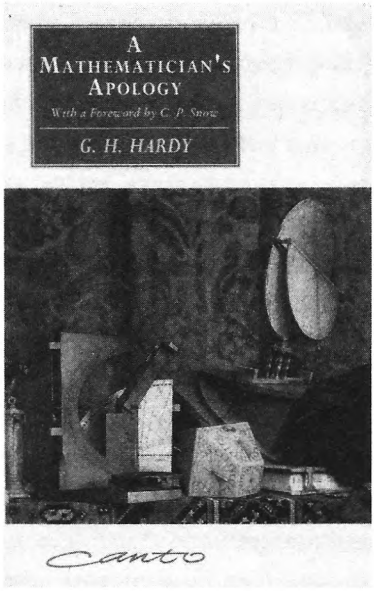
Aunque para mí la impúdica loa de Hardy a la inutilidad de las matemáticas tiene otro sentido que el de ser un mero rasgo de histrionismo: Hardy, a su manera, estaba declarando que en cuestiones de estética era un seguidor de Kant.

Las satisfacciones estéticas parecen ser de una naturaleza distinta a las otras satisfacciones más ligadas al hecho biológico de nuestra constitución animal, tanto en sus aspectos sensoriales como racionales. Así, poco tiene que ver la satisfacción que sentía un humano prehistórico ante un cuenco de arcilla decorado con la que sentía al satisfacer con el contenido de ese mismo cuenco su hambre o su sed; y, por lo mismo, también parece diferir el gusto que nos produce satisfacer los instintos sexuales o la complacencia que tenemos los humanos por la comodidad, de la dicha que obtenemos escuchando el *Segundo concierto para piano* de Rachmaninov. Según Kant, la diferencia entre la satisfacción estética y las otras deriva de que estas últimas se producen al dar cumplimiento a alguna necesidad y, por lo tanto, todas ellas tienen una motivación interesada; lo artístico, en cambio, no tiene ningún tipo de utilidad interesada. El hombre, venía a decir Kant, es el único animal que tiene capacidad de juicio estético: «La facultad de juzgar un objeto o una representación mediante una satisfacción o un descontento, sin interés alguno.» Precisamente esa

«falta de interés» es la característica fundamental de una obra de arte: el arte, dejó escrito Kant en la *Crítica del juicio,* es «finalidad sin fin».

Así que lo que pretendía Hardy ensalzando la inutilidad de las matemáticas no era hacerse el extravagante; siguiendo la teoría estética de Kant, Hardy estaba defendiendo que las matemáticas son más arte que ciencia.

Esa reivindicación estética de las matemáticas, y por tanto de su inutilidad, está presente de principio a fin en *A Mathematician's Apology*; dado que es el texto que usaré en lo que sigue para hacer explícito qué características de las ideas matemáticas son las que les confieren valor estético, debo acabar esta sección con un par de párrafos sobre la situación personal de Hardy en el momento en que lo escribió.



Portada de la edición inglesa de A Mathematician's Apology.

La pasión que sintió Hardy por las matemáticas lo acabó consumiendo. Al final de su vida, cuando ya su energía mental no daba para producir matemáticas, acabó deprimido e intentó suicidarse. Precisamente cuando encaraba esa última etapa de su vida, bien sobrepasadas ya seis décadas de existencia, fue cuando escribió *A Mathematician's Apology;* y esa amargura vital lo impregna: «Siempre que sea leído con la atención que se merece —escribió en el prólogo Charles P. Snow—, *A Mathematician's Apology* es un libro de devastadora tristeza. Ciertamente es ingenioso y agudo, con un humor muy intelectual; no es menos cierto que la claridad cristalina

y el candor siguen todavía presentes; no hay duda alguna de que es el testamento de un artista creador. A pesar de todo, no es menos cierto que se trata de una forma estoica de lanzar un apasionado lamento por el poder de creación del que se ha gozado y que ya nunca jamás volverá.»

Hardy dijo eso mismo en las primeras líneas de su librito, pero de la manera más brutal que pudo: «Decidirse a escribir sobre matemáticas es una experiencia realmente melancólica para todo matemático profesional. La función de un matemático es trabajar probando nuevos teoremas, acrecentar el campo de los conocimientos matemáticos, y en modo alguno hablar sobre lo que él u otros matemáticos han hecho. Los estadistas menosprecian a los agentes de publicidad, los pintores menosprecian a los críticos de arte, y fisiólogos, físicos o matemáticos comparten muy a menudo tales sentimientos: no existe desdén más profundo, o en su conjunto más justificable, que el que sienten los hombres que crean hacia los hombres que explican. Exposición, crítica y apreciación es una labor reservada para inteligencias de segunda fila.» Y siguió: «Así pues, si me encuentro escribiendo "sobre" matemáticas y no matemáticas, debo indicar que tal hecho no es más que una confesión de debilidad ante la que sólo me cabe esperar el desprecio o la conmiseración por parte de los matemáticos más jóvenes y vigorosos. Escribo sobre matemáticas porque, como cualquier otro matemático que haya sobrepasado la frontera de los sesenta, ya he perdido la frescura de pensamiento, la energía y la paciencia necesarias para enfrentarme de un modo efectivo con mi verdadera profesión.»

Generalidad y profundidad

El propósito de este apartado es proporcionar al lector una descripción de aquellas características que proporcionan a las matemáticas valor estético. Empezaré recordando que, según el propio Hardy escribió en *A Mathematician's Apology*, un matemático es un constructor de configuraciones cuyo material básico son las ideas: «Las configuraciones construidas por un matemático, lo mismo que sucede con las de un pintor o un poeta, deben poseer belleza; las ideas, los colores y las palabras deben ensamblarse de un modo armonioso.»

Para cumplir nuestro propósito debemos, pues, identificar qué cualidades fundamentales confieren a una idea matemática su valor estético. Siguiendo a Hardy, empezaremos identificando dos aspectos esenciales de carácter intrínseco —es decir, aspectos calificativos de su propia naturaleza de objeto— capaces de dotar de dimensión estética a una idea matemática. Son la generalidad y la profundidad.

Un ejemplo de Euler como punto de partida

Conviene ir ilustrando con un ejemplo las reflexiones de Hardy sobre estas características. He elegido un ejemplo no demasiado complicado —para que un lector sin excesivos conocimientos matemáticos lo pueda seguir—, pero lo suficientemente complejo como para que permita ilustrar adecuadamente todos los argumentos de Hardy en torno al valor estético de las ideas matemáticas y, también, permita establecer relaciones enriquecedoras con otras consideraciones sobre estética extraídas de la filosofía. El ejemplo elegido es la forma como sumó Euler el cuadrado de los inversos de los números naturales en su libro *Introductio in analysin infinitorum (Introducción al análisis de los infinitos);* la suma en cuestión que Euler consiguió calcular es la siguiente:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+...$$

Observe el lector que los denominadores son los cuadrados de los números naturales, y que los puntos suspensivos quieren decir que el número de sumandos es infinito. Los matemáticos llaman serie a una suma infinita; el valor de una suma infinita es el número al cual nos vamos aproximando más y más conforme más sumandos sumemos, de tal forma que la diferencia entre ese número y las sumas sucesivas desaparece conforme se van agregando más y más sumandos.

Como casi todo en matemáticas, la suma infinita de arriba tiene unas circunstancias que, después de lo explicado anteriormente, no puedo hurtar al lector.

La historia de esa suma es la siguiente. En marzo de 1672, un joven Leibniz de veintitantos años llegaba a París. Entre sus preocupaciones estaba mejorar su formación matemática, por entonces bastante deficiente. No muchos meses después había ideado un procedimiento ingenioso para calcular sumas infinitas: consistía en escribir los sumandos en forma de diferencia de manera que la cancelación sucesiva de unos términos con otros permitiera el cálculo final de la suma. El optimismo inherente al carácter de Leibniz y el diletantismo matemático que practicaba en esa época le hicieron pensar que había encontrado un método que le iba a permitir calcular cualquier suma. No olvidemos que Leibniz aseguró que vivimos en el mejor de los mundos posibles, y que un alemán dijera eso no mucho después de acabada la guerra de los Treinta Años ya tiene mérito —no tuvo Voltaire que exagerar demasiado la caricatura cuando decidió vestir a Leibniz con los ropajes del preceptor Pangloss de *Cándido*—.

A la izquierda, Leibniz, retratado por Wentzel hacia el año 1700; y a la derecha, Huygens, en un lienzo realizado por Netscher en 1671.

Pero este optimismo de Leibniz sobre su método para sumar series se vio reforzado cuando le contó su descubrimiento a Christiaan Huygens. Huygens era por entonces uno de los científicos más prestigiosos de Europa; nacido en Holanda, llevaba ya unos años trabajando en París en la Academia de Ciencias. Huygens, para probar el método de Leibniz, le propuso que sumara la serie de los inversos de los números triangulares. Los números triangulares tienen la forma $n \cdot (n + 1)/2$, y su nombre proviene de los pitagóricos y su concepción geométrica de los números: con las unidades de un número triangular se pueden formar configuraciones triangulares equiláteras. La suma que Leibniz tenía que calcular era pues: $1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + + 1/15 + 1/21 + 1/28 + \ldots$

Da la casualidad de que esta serie es de las pocas que pueden ser sumadas aplicando el procedimiento de Leibniz, que usándolo —véase el recuadro— obtuvo el valor correcto de la suma: $1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 + 1/28 + \ldots = 2$.

En 1673, Leibniz visitó Londres y allí hizo gala de su algo bobo optimismo y de su no menos imprudente diletantismo científico. Matemáticamente hablando, su actitud le llevó a meter la pata en varias ocasiones, lo que no dejaron de recordárselo los ingleses cuarenta años después en plena disputa con Newton sobre la invención del cálculo infinitesimal.

A su vuelta a París, Leibniz recibió una carta de John Collins en la que le proponía sumar los inversos de los cuadrados de los números naturales: $1 + 1/4 + 1/9 + + 1/16 + 1/25 + 1/36 + 1/49 + \ldots$

Collins no era lo que se dice un gran matemático, y su labor era más bien la de servir de intermediario entre matemáticos británicos y del continente. Su capacidad

RESTA CUANDO QUIERAS SUMAR

Como se dijo antes, el método de Leibniz consiste en escribir cada sumando de la suma que queremos hacer en forma de diferencia, de manera que la cancelación sucesiva de unos términos con otros permita calcular fácilmente la suma. Esto es, precisamente, lo que ocurre con los inversos de los números triangulares. En efecto el inverso de cada número triangular $2/(n \cdot (n+1))$ es la diferencia de $2/n$ y $2/(n+1)$:

$$\frac{2}{n \cdot (n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Dándole ahora valores a la variable $n = 1, 2, 3, 4\ldots$, encontramos: $1 = 2 - 1$; $1/3 = 1 - 2/3$; $1/6 = 2/3 - 2/4$; $1/10 = 2/4 - 2/5$; $1/15 = 2/5 - 2/6$; $1/21 = 2/6 - 2/7\ldots$ Y así sucesivamente. Al sumar ahora esas fracciones así escritas, observamos que el sustraendo de cada diferencia se cancela con el minuendo de la siguiente, de manera que al final sólo queda el minuendo de la primera diferencia: $1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 + 1/28 + \ldots = 2$

matemática no le daba para entender la dificultad del problema, por lo que muy posiblemente la propuesta le habría sido sugerida por matemáticos de mucha mayor categoría —por ejemplo, James Gregory o, incluso, Isaac Newton—. En cualquier caso, el malintencionado proponente del problema, cualquiera que fuera, podría haberle dicho a Leibniz que el cálculo de esa suma no podía ser tan complicado siendo los sumandos casi iguales a los de la serie que ya había logrado sumar Leibniz: en un caso esos sumandos tienen la forma $2/(n \cdot (n+1))$ y en el otro, $1/(n \cdot n)$.

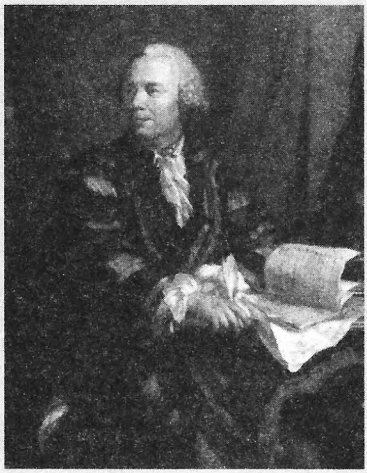
Leibniz no logró sumar la serie que le enviaron de Inglaterra, ni tampoco sus discípulos, los hermanos Jacob y Johann Bernoulli. No hay constancia documental de que Gregory o Newton estudiaran el problema, aunque eso no implica que no lo hicieran, probablemente con la misma falta de éxito que los otros.

Hubo que esperar casi medio siglo hasta que alguien la lograra sumar. Ese alguien fue Leonhard Euler.

La idea que usó Euler para sumar la serie de los inversos de los cuadrados de los números naturales es muy simple. El punto de partida es el siguiente: consideremos un producto de la forma $(1 - 2z^2) \cdot (1 - 5z^2) \cdot (1 - 6z^2)$, y desarrollémoslo en potencias de z:

$$(1 - 2z^2) \cdot (1 - 5z^2) \cdot (1 - 6z^2) = 1 - 13z^2 + 52z^4 - 60z^6.$$

LEONHARD EULER (1707-1783)



Euler es uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos y, sin duda, el mejor de todo el siglo XVIII. Nació en Basilea en 1707; estudió en la universidad local y también recibió clases particulares de Johann Bernoulli —uno de los discípulos de Leibniz—. En 1727 se incorporó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde estuvo trabajando hasta que en 1741 se trasladó a la Academia de Berlín. A pesar de las desavenencias con el rey Federico II de Prusia, aguantó en Berlín 25 años y acabó presidiendo la Academia. Según Federico II, que hizo de Berlín uno de los centros culturales más activos de Europa, Euler carecía de la brillantez, el ingenio y la elegancia imprescindibles para «la vida de salón» que tanto le gustaba al rey. Euler era más bien sencillo, directo e ingenuo, nada que ver con Voltaire —otro de los fichajes de Federico— que, antes de enemistarse, tanto hiciera las delicias del rey; precisamente en una carta al filósofo francés, Federico II se refirió a Euler como «el gran cíclope de la geometría», broma de pésimo gusto pues Euler había perdido la visión de un ojo en 1738. Después de su estancia en Berlín, Euler volvió a la Academia de San Petersburgo. Murió allí en 1783.

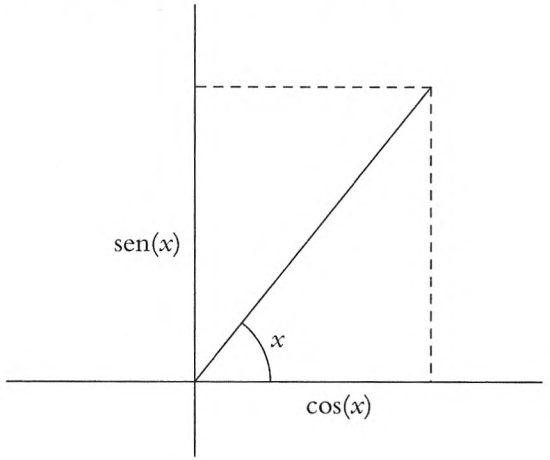
Sobre la influencia de Euler en los matemáticos posteriores baste recordar aquí la clásica cita de Laplace: «¡Leed a Euler, leed a Euler, él es el maestro de todos nosotros!». O la siguiente de Gauss, menos conocida, pero igualmente ilustrativa: «El estudio de los trabajos de Euler es la mejor e insustituible escuela para los distintos campos matemáticos.»

No es muy difícil darse cuenta de que el número que va multiplicando a z^2 en la expresión desarrollada es, precisamente, la suma de los números que multiplican a z^2 en el producto sin desarrollar de la izquierda; y, como no es difícil de comprobar, esto es así cualquiera que sea el número de factores que aparezcan en ese producto. Euler entendió que lo que valía para productos y sumas finitas valía también para productos y sumas infinitas; o sea, si escribimos:

$$(1 - az^2) \cdot (1 - bz^2) \cdot (1 - cz^2) \cdot \ldots = 1 - Az^2 + Bz^4 - Cz^6 + \ldots$$

entonces $A = a + b + c + \ldots$

A continuación, Euler hizo entrar en juego la función seno. La función seno, junto con la del coseno, son las dos funciones trigonométricas básicas. Su definición es muy sencilla: usando unos ejes coordenados, dibujamos un ángulo x del siguiente modo: de los lados que forman el ángulo, uno es el eje horizontal, mientras que el otro tiene longitud igual a 1. El seno es la longitud que tiene la proyección de ese lado sobre el eje vertical, mientras que el coseno es la longitud de la proyección sobre el eje horizontal, tal y como muestra la figura adjunta.



Euler consideró seguidamente dos desarrollos para la función seno; uno en producto infinito, que el mismo había descubierto:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z}=\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{4\cdot\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{9\cdot\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{16\cdot\pi^2}\right)\cdot\ldots,$$

donde en el denominador de z^2 aparecen los cuadrados de los números naturales multiplicados por el cuadrado del número π. Y otro en suma infinita, descubierto por Newton:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}+\frac{z^6}{720}+\ldots,$$

donde la regla que siguen los denominadores es el factorial: el factorial de un número genérico n se obtiene multiplicando ese número por todos los números menores que él: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Entonces, la regla que siguen los denominadores en la fórmula anterior es el factorial del exponente de z más 1; o sea, si z tiene

exponente 2, entonces el denominador es el factorial de 3: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; si z tiene exponente 4, entonces el denominador es el factorial de 5: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Y así sucesivamente.

Puesto que los dos desarrollos representan al seno, ambos deben ser iguales. Concretamente:

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{4\cdot\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{9\cdot\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{16\cdot\pi^2}\right)\cdot\ldots=1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}-\ldots$$

Según lo comentado en el párrafo anterior, de ahí se deduce que:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\cdot\pi^2}+\frac{1}{9\cdot\pi^2}+\frac{1}{16\cdot\pi^2}+\ldots,$$

o lo que es igual:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Dicho con palabras, al sumar los inversos de los cuadrados de los números naturales se obtiene como resultado el cuadrado del número π dividido por 6.

Las reflexiones de Hardy, aplicadas

Una vez presentado el ejemplo de Euler, retomemos el hilo argumental de Hardy sobre las dos propiedades esenciales cuya presencia dota a las ideas matemáticas de valor estético; escribió Hardy: «Hay dos aspectos que parecen ser esenciales, una cierta generalidad y una cierta profundidad, pero ninguna de ambas cualidades puede ser definida con precisión de un modo sencillo.»

En relación a la generalidad de una idea matemática Hardy puntualizó: «Una idea matemática significativa, un teorema matemático serio, debe ser general en un cierto sentido de dicho término. Tales ideas deben integrarse en varios esquemas matemáticos, deben poder ser empleadas en las demostraciones de teoremas de diversos tipos diferentes. El teorema debe ser tal que, aun habiendo sido planteado originariamente en una forma muy especializada, sea susceptible de ser extendido a otras ramas y constituya el punto de referencia para toda una clase de teoremas de idéntico tipo. Las relaciones reveladas a lo largo de la demostración deberán ser tales que interrelacionen varias ideas matemáticas distintas.» Y para que no quepa duda

de la dificultad de precisar el término «generalidad» acabó: «Todo cuanto acabo de indicar es sumamente vago y queda sujeto a todo tipo de reservas.»

Ilustremos con el ejemplo de Euler: ¿hay generalidad, en el sentido que Hardy explicó, en la suma de Euler? La hay, y en varios sentidos, además.

La idea fundamental de Euler es utilizar dos expresiones de una determinada función, una en forma de producto y otra en forma de serie, para calcular el valor de ciertas sumas infinitas. En el caso concreto anterior, usando la función seno Euler logró sumar los inversos de los cuadrados de los números naturales. Usando otras funciones, Euler logró sumar en la *Introductio* con idéntico método un catálogo variadísimo de sumas infinitas; para muestra un botón:

$$1-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}},$$

donde en la suma aparecen, con signos alternados, los inversos de los cubos de los números impares excluyendo a los múltiplos de 3.

Pero la generalidad de la idea de Euler va mucho más allá de cambiar la función seno por otra. En efecto, su método considera el desarrollo

$$(1-az^2)\cdot(1-bz^2)\cdot(1-cz^2)\cdot\ldots=1-Az^2+Bz^4-Cz^6+\ldots$$

y relaciona el número que va multiplicando a z^2 en la expresión desarrollada con la suma de los números que multiplican a z^2 en el producto sin desarrollar de la izquierda. Con una ligera modificación, la idea de Euler es todavía más fructífera. Para ello basta fijarse en los números que multiplican a las demás potencias en la expresión desarrollada y escribirlas en términos de los números que multiplican a z^2 en el producto sin desarrollar de la izquierda —véase recuadro de la página siguiente—. Explotando adecuadamente esta idea Euler consiguió sumar no sólo los inversos de los cuadrados de los números naturales, sino también los inversos de las potencias cuartas, sextas, octavas:

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90},$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945},$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{\pi^8}{9.450},$$

y así, en una verdadera orgía de sumas infinitas, llegó hasta la potencia número 26:

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\ldots=\frac{76.977.927\cdot 2^{24}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 27}\pi^{26}.$$

Espero que esto le haya permitido al lector calibrar toda la generalidad del razonamiento de Euler, y por extensión, comprender mejor lo que quería decir Hardy cuando hablaba de la generalidad de una idea matemática: generalidad —además de genialidad— es justamente lo que trasciende esa idea de Euler.

Según Hardy, la otra característica intrínseca que dota a una idea matemática de valor estético es la profundidad. «La segunda cualidad que le he pedido a una idea

EULER Y SU ORGÍA DE SUMAS INFINITAS

Euler refinó su idea del siguiente modo: volvamos a considerar el desarrollo

$$(1-az^2)\cdot(1-bz^2)\cdot(1-cz^2)\cdot\ldots=1-Az^2+Bz^4-Cz^6+\ldots$$

Nos vamos a fijar ahora en el número B que multiplica a la potencia de z^4. No es difícil deducir que ese número B se obtiene multiplicando dos a dos y sumando los números a, b, c... que multiplican a z^2 en el producto sin desarrollar de la izquierda: $B = ab + ac + bc + \ldots$

De manera que si escribimos: $P = a + b + c + \ldots$ y $Q = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$, un simple cálculo nos dice que: $P = A$ y $Q = A \cdot P - 2 \cdot B$.

Si volvemos a considerar los dos desarrollos de la función seno:

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{4\cdot\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{9\cdot\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{16\cdot\pi^2}\right)\cdot\ldots=1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}-\ldots$$

y tenemos en cuenta que en este caso $A = 1/6$ y $B = 1/120$ y, según se calculó antes, $P = \pi^2/6$, obtenemos el valor de la suma de los inversos de las potencias cuartas de los números naturales: $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \ldots = \pi^4/90$.

Algo parecido se puede hacer con la potencia z^6 y siguientes, lo que permitió a Euler obtener las sumas de los inversos de las potencias pares de los números naturales, desde la segunda hasta la vigesimosexta. Algunos años después, Euler encontró la fórmula general para las sumas de los inversos de cualquier potencia par de los números naturales. Del valor de la suma de los inversos de las potencias impares de los números naturales apenas sabemos hoy en día nada: tan sólo que el primer puñadito de esos valores son números irracionales.

para que sea significativa es la profundidad, concepto aún más difícil de definir que el que hemos abordado antes. Algo puede hacerse abordando la cuestión por el lado de la dificultad. Las ideas más profundas acostumbran a ser las más difíciles de comprender, pero ello no siempre es cierto. Parece ser que las ideas matemáticas se hallan agrupadas en algo así como una serie de estratos, de tal modo que todas las que pertenecen a uno determinado aparecen vinculadas entre sí, a la vez que con las pertenecientes a los estratos inmediatamente superior e inferior, a través de una compleja trama de relaciones. Cuanto más bajo es el estrato, más profunda, y en general de más difícil comprensión, es la idea.»

Al igual que ocurría con el concepto de «generalidad», de nuevo las sumas de Euler nos deben servir para comprender lo que Hardy quiere dar a entender cuando habla de «profundidad». La idea de Euler pone en relación conceptos matemáticos pertenecientes a diferentes estratos. En todo el procedimiento seguido por Euler subyace el concepto de infinito —estrato, digamos, metafísico—. Aparece también el estrato de la aritmética, pues el problema se plantea en términos de los números naturales, el cuadrado de cuyos inversos pretendemos sumar. El cómputo de esa suma hace aparecer en escena un estrato geométrico, pues el valor de la suma se expresa mediante el cuadrado del número π, que es quien rige y ordena la geometría de la circunferencia. Por último, toda la idea bascula en torno a los desarrollos de funciones en sumas y productos infinitos, algo propio de la variable compleja. Y toda esa rica trama de relaciones entre estratos tan diversos ha sido puesta de manifiesto por la aparentemente sencilla idea euleriana. A eso es a lo que se refiere Hardy cuando habla de profundidad de una idea: a su capacidad para vincular entre sí varios estratos matemáticos diferentes de una manera ineludible, luminosa y fructífera.

Inesperada, inevitable, económica e iluminadora

A las dos propiedades intrínsecas de generalidad y profundidad, Hardy añadió otras tres capaces de dotar a una idea matemática de valor estético. No se trata en este caso de propiedades, sino de capacidades, es decir, de disposiciones que miden la capacidad de la idea para producir una determinada respuesta estética; Hardy las llamó calidad de lo inesperado, calidad de lo inevitable y economía. Calidades que describió del siguiente modo: «Los razonamientos toman una forma singular y sorprendente —calidad de lo inesperado—, los medios empleados parecen ser simples si tomamos en consideración el enorme alcance de los resultados —economía—, pero no hay forma alguna de eludir las conclusiones —calidad de lo inevitable—.»

Todas estas calidades son fácilmente detectables en las sumas de Euler.

Por un lado, la propia sencillez de la idea euleriana la hace ser ciertamente singular, lo que acaba dotando a los manejos de Euler de bastante capacidad para sorprender —cómo algo tan simple puede conducir a resultados tan profundos—. Convendrá el lector conmigo, además, en lo absolutamente inesperado del resultado al que conducen los cálculos de Euler: antes de que nos hagan saber la solución, es desde luego difícilmente imaginable que sumando las potencias pares de los números naturales vayamos a darnos de bruces con el número π. A todo eso se refería precisamente Hardy cuando hablaba del carácter inesperado de una idea matemática.

Y no es menos reconocible en la idea de Euler la inevitabilidad de sus conclusiones. En vista del simple e impecable argumento de Euler, el valor de $\pi^2/6$ para la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales se nos presenta como absolutamente inevitable.

Y por último, es también nítida la economía con la que Euler ha procedido: en tan sólo una cuantas líneas Euler consigue resolver un problema profundo y difícil que escapó a la sagacidad matemática de Leibniz, o los Bernoulli —y quizá también a la del mismísimo Newton—. Es sin duda una ilustración perfecta de lo que el filósofo George Santayana llamó en su libro *El sentido de la belleza* «la expresión de lo económico»: nuestra aprobación de la economía de las cosas se eleva hasta convertirse en apreciación estética.

En cierta forma, las tres calidades de Hardy están emparentadas con lo que Santayana denominó «ingenio» en *El sentido de la belleza,* o con lo que el matemático Gian Carlo Rota llamó capacidad *iluminadora* de una idea —*enlightenment* fue el término inglés usado por Rota en el capítulo titulado *The Phenomenology of Mathematical Beauty* de su libro *Indiscrete Thoughts*—. Por un lado Santayana relacionó directamente el ingenio con la profundidad: «Es característico del ingenio penetrar hasta las ocultas profundidades de las cosas, para extraer de allí alguna circunstancia o relación significativa que hace que el objeto se presente bajo una nueva y más clara luz». Por otro lado, según Rota, una idea iluminadora arroja luz sobre los conceptos o problemas que relaciona o resuelve, los aclara, nos permite comprenderlos mejor. Y eso es justamente lo que ocurre con la idea que Euler pone en juego para sumar los inversos de las potencias pares de los números naturales.

Esa capacidad iluminadora que tienen las ideas matemáticas ha sido loada a lo largo de la historia por científicos, ingenieros y arquitectos. Y para muestra he aquí lo que escribió el arquitecto Le Corbusier cuando se hallaba atascado elaborando el proyecto de una de sus casas: «La ausencia de una regla, de una ley, saltaba a mi

vista. Lo que me llenó de terror, pues me hizo ver que estaba trabajando en pleno caos. Descubrí en ese momento la necesidad de hacer intervenir a las matemáticas, la necesidad de un regulador. Una obsesión que, a partir de entonces, ocupó siempre un rincón en mi cerebro.»

Los infinitos de Euler y lo sublime de Kant

Las dos últimas secciones de este capítulo las dedicaré a la *Introductio in analysin infinitorum,* el libro de Euler de donde he tomado los ejemplos que me han servido para ilustrar las reflexiones de Hardy sobre la belleza de las matemáticas.

En la *Introductio* no hay ni cálculo diferencial ni cálculo integral; lo que hace Euler en ese libro es, como reza su título, enseñar a sus lectores a manejarse con cantidades infinitamente grandes y pequeñas. En particular, se estudian las funciones elementales por medio de procesos infinitos; se desarrollan en series, algunas en productos infinitos —por primera vez en la historia de las matemáticas—; y se usa todo esto con diversos propósitos. Algunos propios del análisis: sumar sumas infinitas, por ejemplo —como los ejemplos que recogimos en la sección tercera de este capítulo–; otros, más propios de la teoría de números. [2]

La propia metafísica de los infinitos sumada a la habilidad expositiva de Euler hacen de la *Introductio* uno de los textos más cargados de belleza de toda la historia de las matemáticas. Hasta el punto de que, como comentaré más adelante, pudo influir en uno de los textos fundamentales de la estética. Me refiero a la *Crítica del juicio* del filósofo alemán Immanuel Kant, o, más concretamente, a la categoría estética de lo sublime, tal y como Kant nos la presenta en ese libro.

Para poner al lector en situación, debo comenzar hablando brevemente de los infinitos tal y como los entendió Euler, y que dan título a su libro. Ahora bien, Euler no dio en la *Introductio* ninguna definición de esas cantidades infinitamente pequeñas y grandes —cantidades que trascendieron todos los conceptos del análisis durante los siglos XVII, XVIII y buena parte del XIX—, sino que las manejó intuitivamente. El propósito de Euler era que leyendo su libro uno acabara desarrollando cierta práctica en el manejo de los infinitos, cierta intuición sobre la manera en que funcionan.

---

2 Advierto al lector en esta nota de que todo lo que yo pueda decir sobre la *Introductio* de Euler está muy contaminado por mi experiencia como editor y anotador de la edición castellana —facsímile y crítica— que preparé para la Real Sociedad Matemática Española y Thales: vio la luz en 2001 y supuso la primera traducción al español del clásico de Euler.

LA *INTRODUCTIO*: UNO DE LOS TRES TEXTOS CLÁSICOS DE LAS MATEMÁTICAS

La *Introductio* no es un libro cualquiera: es un texto fundamental en el nacimiento del análisis matemático. El historiador de las matemáticas Carl Boyer en un artículo de 1969, en el que repasaba los textos de matemáticas más sobresalientes de la historia, incluyó la *Introductio* en una tríada formada nada menos que por los *Elementos* de Euclides y el *Álgebra* de Al-Khowarizmi: «Es fácil decidir que el texto de matemáticas más influyente de los tiempos antiguos (o, a este respecto, de todos los tiempos) son los *Elementos* de Euclides. El texto medieval que más decisivamente influyó en el desarrollo de las matemáticas no es tan fácil de identificar, aunque una buena elección es el *Álgebra* de Al-Khowarizmi. ¿Es posible indicar un texto moderno comparable en influencia y prestigio? Sí, es posible señalar un texto que se alza sobre los grandes textos escritos en el barroco y la Ilustración y con el que prácticamente todos los autores posteriores admiten tener una deuda. Se trata de la *Introductio* de Euler. Con él, Euler llevó a cabo lo que Euclides y Al-Khowarizmi habían hecho con la geometría sintética de los griegos y el álgebra elemental, respectivamente. El concepto de función y los procesos infinitos habían surgido durante el siglo XVII, pero fue la *Introductio* de Euler la que los elevó al grado de tercer miembro del triunvirato matemático compuesto por geometría, álgebra y análisis.»

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

Portada de la primera edición de la Introductio in analysin infinitorum *de Euler, publicada en 1748.*

Una breve descripción de la personalidad de estos infinitos, tal y como quedan reflejados en el libro de Euler, podría ser la siguiente. Una cantidad infinitesimal es una cantidad indefinidamente pequeña, pero sin llegar a ser cero. El ser diferente de cero le permitía aparecer como denominador en cocientes, y al ser indefinidamente pequeña se podía tomar como cero cuando interesaba simplificar las expresiones. Por su parte, una cantidad infinitamente grande queda invariante cuando se le agrega un número normal, lo que quiere decir que si N es uno de estos números infinitamente grandes, entonces nos encontramos con la inquietante igualdad $N + 1 = N$. De igual forma, un número infinitamente pequeño w es un número que no es el cero, pero que por más que lo repitamos será incapaz de superar al 1, al

1/2, o a cualquier otro número positivo que imaginemos. Para alcanzar el 1 con un número infinitamente pequeño w hace falta poner en funcionamiento un número infinitamente grande N de manera que entonces sí $N \cdot w = 1$.

«Difícilmente podemos encontrar otra obra en la historia de las matemáticas que produzca en el lector una impresión tan fuerte de la genialidad de su autor como produce la *Introductio*», escribió E.W. Hobson sobre la *Introductio*. Y, posiblemente, cualquiera que haya leído el libro de Euler coincidirá plenamente con lo que dice Hobson. Ahora bien, esa impresión de la genialidad de Euler se produce porque la *Introductio* tiene una enorme capacidad de emocionar; es, sin duda, un texto que deja huella, porque la genialidad que muestra Euler en ese libro se traduce en un texto cargado de belleza, y por eso deja huella indeleble en quienes lo leen.

Como se ha dicho, la manera como Euler maneja los infinitos en la *Introductio* es puramente intuitiva. Y ahí, precisamente, radica la genialidad a la que hace referencia la cita de Hobson. Los infinitos son entidades peligrosas que gozan de propiedades extrañas; su manejo, si no se hace con la debida prudencia, puede tener consecuencias desastrosas. Para los griegos el infinito fue una especie de bestia temible, pongamos un minotauro gigantesco del que había que huir. En cambio Euler no huyó; al contrario, se acercó al monstruo, le acarició el lomo y le unció un yugo que le permitió hacer fértil un campo antes estéril. Es admirable la docilidad que el infinito muestra en los manejos de Euler. Una docilidad que, dada la idiosincrasia del concepto, llega a conmocionar, a escalofriar. Y en esa conmoción en ese escalofrío está, precisamente, el logro estético. Les recuerdo lo que decía Voltaire: «Para el gusto no basta ver o conocer la belleza de una obra: hay que sentirla, ser afectado por ella.» También el filósofo alemán Theodore Adorno aseguraba que el logro estético de un objeto reside precisamente en su capacidad de conmocionar, de producir algún tipo de escalofrío. Y esta idea aparece en las célebres conferencias que, para la gente de la calle, impartió Serge Lang en el Palais de La Découverte de París a principios de la década de 1980 bajo el título *La belleza de hacer matemáticas*; allí Lang se refería a «ese escalofrío en la columna vertebral» que los más hermosos razonamientos matemáticos producen.

En su obra sobre estética, *Crítica del juicio*, el filósofo Kant introdujo la categoría estética de lo sublime. Kant (1724-1804) fue de la generación posterior a Euler, y nació y vivió prácticamente toda su vida en Königsberg —que hoy se llama Kaliningrado y pertenece a Rusia—. Königsberg es una de las ciudades eulerianas, junto con Basilea, donde nació, y San Petersburgo y Berlín, donde ejerció como matemático en las correspondientes academias de ciencias. Euler no residió en Königsberg,

pero sí resolvió el célebre problema de sus siete puentes. En el siglo XVIII había en la ciudad siete puentes que unían las orillas con dos islas del río Pregel, y la gente se preguntaba si era o no posible recorrerlos todos sin pasar dos veces por el mismo puente. Euler, con un razonamiento tan sencillo como imaginativo, que luego dio origen a la teoría de grafos, mostró que ese recorrido era imposible.

Retrato de Immanuel Kant (1724-1804), uno de los principales filósofos de toda la historia de la humanidad.

Teniendo en cuenta la descripción que hace Kant de lo sublime, no es exagerado decir que la inspiración para definir ese concepto estético bien la pudo encontrar Kant en los razonamientos de Euler con las cantidades infinitesimales —podrían ser los de Euler o los de cualquier otro matemático del siglo XVIII; lo que pasa es que Euler fue quien, con diferencia, expuso mejor la fuerza de los infinitos—. «Lo sublime es aquello —escribió Kant en *Crítica del juicio*— en comparación con lo cual toda otra cosa es pequeña; es lo que, sólo porque se puede pensar, demuestra una facultad de espíritu que supera toda medida de los sentidos. El sentimiento de lo sublime es un sentimiento de dolor y, al mismo tiempo, un placer despertado, una conmoción, un movimiento alternativo, rápido, de atracción y repulsión de un mismo objeto.»

Ahora bien, ese «en comparación con lo cual toda otra cosa es pequeña», o ese «supera toda medida de los sentidos» que usa Kant en su definición de lo sublime, no

es sino una trascripción retórica de la inquietante fórmula $N+1=N$, que describe la propiedad de una cantidad infinitamente grande, y que Euler usó una y otra vez en la *Introductio*. Y ese «sentimiento de dolor» no es sino el que produce en nuestro corazón de matemáticos ver escrito que $N+1=N$, o ver en el denominador de una división una cantidad que dos renglones después desaparece por ser cero. Pero, por otro lado, «el placer despertado» kantiano describe a la perfección lo que uno siente ante las maravillas que Euler logró obtener con esas atormentadoras propiedades de los infinitos. Todo lo cual hace que leyendo los manejos de Euler en la *Introductio* no dejemos de sentir «una conmoción, un movimiento alternativo, rápido, de atracción y repulsión» hacia esos objetos mágicos que protagonizan su libro: los infinitos.

Con todo el encanto de las exploraciones geográficas

Los razonamientos de Euler tienen fama de no parecer muy sólidos desde el punto de vista del rigor lógico. Por eso los matemáticos se decidieron durante el siglo XIX a sustituir las cantidades infinitamente pequeñas y grandes por los límites. Las matemáticas que uno encuentra en la *Introductio* parecen poco rigurosas. Pero sólo lo parecen, porque hoy sabemos que el análisis usando cantidades infinitesimales es tan riguroso como el que hacemos hoy en día usando límites. Para ser exactos, el fundamento lógico del análisis del siglo XVIII lo hizo Abraham Robinson en 1966 usando teoría de modelos para construir una extensión no estándar de la teoría de primer orden de los números reales. Es lo que hoy conocemos como análisis no estándar.

El matemático Abraham Robinson (1918-1974), quien desarrolló el análisis no estándar.

No creo de todos modos que Euler perdiera el sueño por el mucho o el poco rigor con el que hacía sus matemáticas, porque a Euler, como antes a Descartes, a Newton o a Leibniz, le preocupaba más descubrir que demostrar. Esto lo deja meridianamente claro en el prólogo de la *Introductio*, en el que hay referencias continuas al hecho de desentrañar, resolver, solucionar, inventar. Tan numerosas menciones al hecho de descubrir contrastan con la falta absoluta de referencias relativas a demostrar o a probar.

Y es que la *Introductio* de Euler está redactada de forma que las matemáticas que contienen se despliegan ante nosotros como las maravillas de la naturaleza se desplegaban ante los ojos atónitos de los exploradores del Renacimiento —nada por tanto que ver con esos aburridísimos, sobados y manipulados razonamientos lógico-deductivos tan abundantes en los libros de texto de hoy en día—. Leer la *Introductio* es como adentrarse en una exploración geográfica por lo desconocido. A mí me recuerda los apuntes históricos de Antonio de Pigaffeta sobre el viaje de Magallanes alrededor del mundo, o los de Juan Sebastián de Elcano cuando se hizo cargo de la expedición; en la *Introductio,* Euler no nos hurta intentos infructuosos, pero ilustrativos, para resolver determinados problemas, al igual que en la narración de Pigaffeta no se nos hurtan los diversos intentos infructuosos de Magallanes para dar con el paso del océano Atlántico al Pacífico antes de descubrir la ruta correcta.

No cabe duda de que la *Introductio* es un viaje iniciático al mundo de los infinitos, y que Euler logra hacernos sentir con su texto el mismo vértigo de aventura que nos transmite la lectura de esos apuntes sobre la primera vuelta al mundo. Una razón más para leer la *Introductio*: posiblemente la mejor obra de la historia para descubrir lo que significa la genialidad creativa en matemáticas, y una de las más apropiadas para sentir la conmoción que genera su singular belleza.

Capítulo 5

Historia y belleza

Al final de la introducción de su celebrada *Historia del arte*, Ernest Gombrich defendía la conveniencia de conocer la historia del arte porque ese conocimiento ayuda a comprender por qué los artistas procedieron como lo hicieron o se propusieron producir determinados efectos. El conocimiento de la historia del arte, venía a decirnos Gombrich, acrecienta nuestra sensibilidad para captar los más finos matices de diferencia y facilita la apreciación estética de una obra de arte. Dicho de otra forma, el adecuado bagaje cultural de un determinado arte facilita la apreciación de la belleza de ese arte, y el conocimiento de la historia es parte integrante del bagaje cultural. El propósito de este capítulo será aplicar este argumento a las matemáticas; su planteamiento cae, por tanto, dentro del contextualismo. Esa posición estética afirma que una obra de arte debe considerarse en su contexto —histórico, social, religioso, cultural, etc.; cuanto más completo el contexto, mejor—. Por lo tanto, un conocimiento histórico adecuado sobre ella la enriquece. En oposición, el aislacionismo asegura que una obra de arte debe ser autosuficiente, y que será más deficiente cuanto más necesite del conocimiento de su contexto para ser apreciada —de manera que los aislacionistas, a lo Clive Bell, absténganse de seguir—.

De la *Venus de Willendorf* a los *ready-made* de Duchamp

En este capítulo final recuperamos la línea de los dos primeros, así que antes de proceder con la discusión sobre las matemáticas, haré una incursión ilustrativa por el territorio de las bellas artes. Se trata en este caso de mostrar —necesariamente a vuela pluma— cómo la historia del arte puede ayudar a apreciar la belleza de una determinada escultura.

Comenzaré el recorrido con la *Venus de Willendorf*; es innegable que una parte de la belleza y fascinación de esa escultura radica en que sabemos que es antiquísima: podemos estimar su edad en torno a los 25.000 años. Sabemos, porque sabemos historia del arte, que es una de las esculturas más antiguas hoy conservadas y eso la dota de un valor especial. Es discutible si este valor añadido es, o no, valor estético;

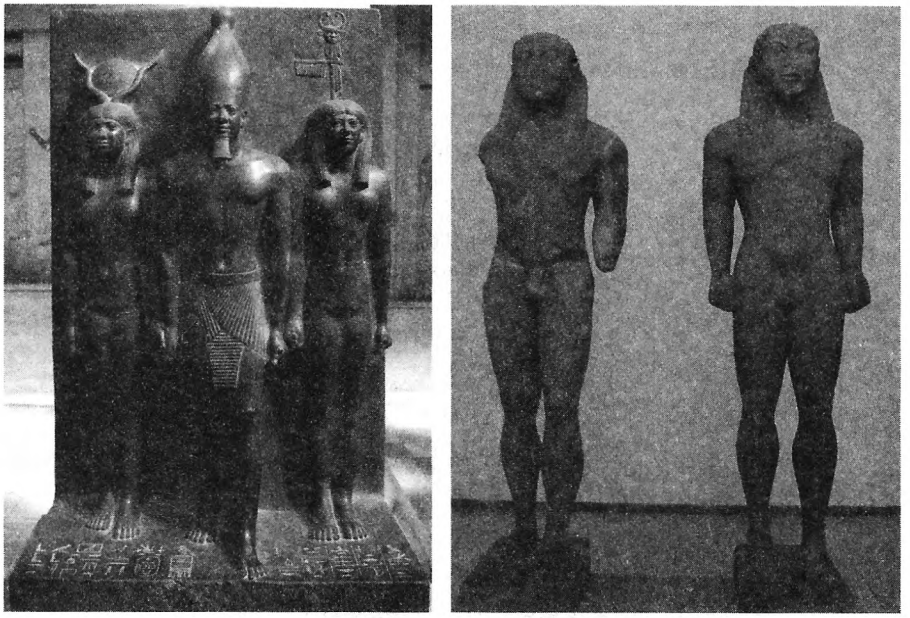
lo que es indiscutible es que es valor histórico, y que su conocimiento predispone a la hora de la apreciación estética de la Venus.

La Venus de Willendorf *fue descubierta en 1908 por el arqueólogo Josef Szombathy en el pueblo de Willendorf, Austria. Se conserva en el Naturhistorisches Museum de Viena (fotografía: Matthias Kabel).*

Igualmente, es la historia del arte la encargada de informarnos acerca de cuál fue la intención, el propósito y las técnicas del escultor, cuál es el significado de la escultura, etc. En resumen, la historia aporta un enriquecimiento cultural que facilitará la apreciación estética de la propia obra.

¿No será acaso importante, para una correcta ponderación de la escultura griega, conocer cuál fue su herencia, qué aprendieron, por ejemplo, de los egipcios? Huelga decir que este conocimiento lo aporta la historia, y que su adquisición nos permitirá valorar mejor las contribuciones griegas, apreciar mejor la armonía y perfección que alcanzaron en la representación del cuerpo humano.

Será también la historia del arte la encargada de ponernos al tanto de qué pudo ocurrir durante la Edad Media para que la representación humana sufriera la transformación que refleja la ilustración siguiente: esa infantilización de la escultura románica con respecto a la clásica grecorromana; ese aparente retroceso en la calidad de la representación, en la perfección del acabado. Porque los conocimientos que nos proporciona la historia del arte nos permitirán una mejor apreciación de toda la escultura románica, al ilustrarnos sobre la nueva dimensión religiosa que impregnó la representación del cuerpo humano. La religión católica, omnipotente

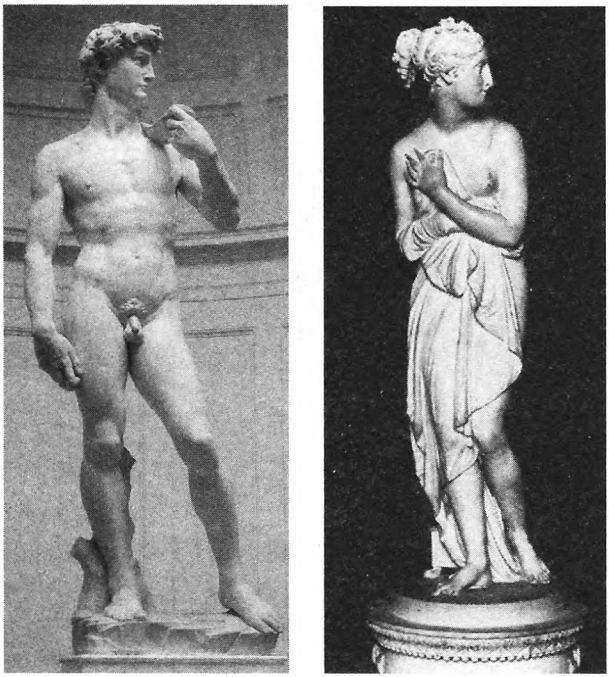


Un retazo de lo que en escultura los griegos aprendieron de Egipto: a la izquierda, el conjunto escultórico egipcio conocido como Tríada de Micerino*; a la derecha, esculturas griegas dedicadas a Cleovis y Bitón.*

y omnipresente en la sociedad medieval europea, forzó la supeditación a Dios de todo lo humano, con la consecuencia de que la representación simbólica de esta sumisión a la divinidad sustituyó el papel fundamental que tuvo en el mundo clásico la representación naturalista del cuerpo.

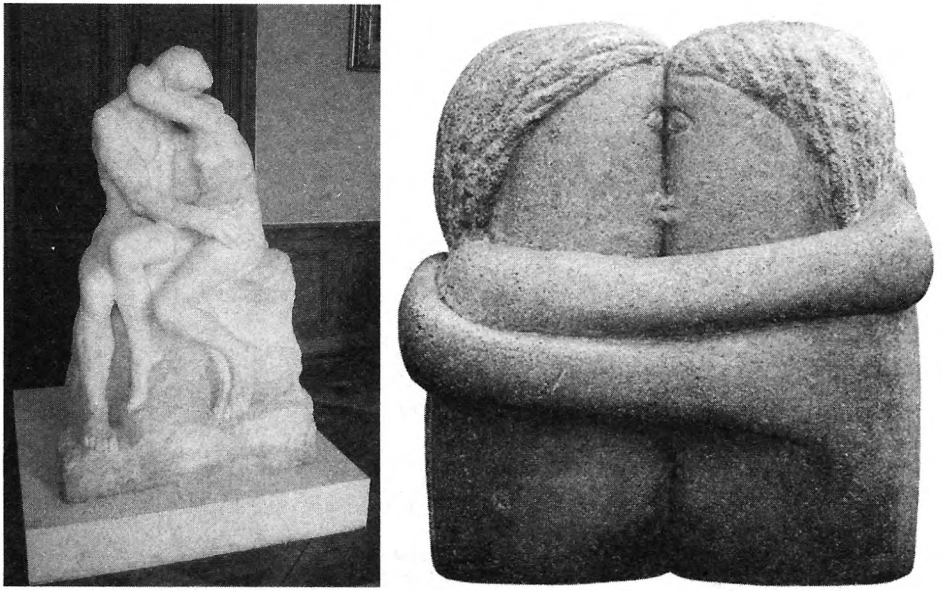
Detalle de una de las esculturas presentes en el claustro de la abadía románica de Millstatt, en Austria, construida en el siglo x.

Nuevamente, es la historia del arte la encargada de explicarnos las razones por las que la escultura recuperó otra vez el canon clásico, en un nuevo retorno de la figura del hombre y la mujer como centro de interés del artista. Y será también importante su ayuda a la hora de revelar las diferencias con la escultura clásica y su evolución hasta el neoclasicismo romántico.



David *de Miguel Ángel (1501-1504) (fotografía: Rico Heil)*
y Venus Itálica *de Antonio Canova (1804-1812).*

Y, finalmente, para apreciar mejor la belleza de las nuevas formas que, tras la recuperación del realismo clásico, se empiezan a imponer en escultura, conviene saber los nuevos propósitos que se había marcado el artista. Y es la historia la encargada de ponernos al tanto de la renuncia del escultor a la fría perfección del acabado para conseguir esculturas con más capacidad para impresionar al espectador. ¿Cómo entender el proceso de aceleración que ha sufrido el arte en el último siglo y medio sin saber historia del arte? ¿Es posible entender y apreciar estéticamente la versión de Constantin Brancusi de *El beso* de su maestro Rodin, sin unos conocimientos históricos que nos expliquen esa especie de vuelta a los orígenes paleolíticos que observamos en la secuencia de besos de las ilustraciones siguientes?



«Besos» de Auguste Rodin (1889) y Constantin Brancusi, una serie que este último artista inició en 1908.

¿Es posible apreciar la belleza de algunas de las propuestas artísticas de este siglo —la célebre fuente de Duchamp, por ejemplo— si no se conoce del valor estético que cabe asignar a la trasgresión?

Fountain *(1917), el más célebre* ready made *de Marcel Duchamp. Como puede verse en la foto, el nombre con el que aparece firmada la obra no es el de Duchamp; el artista, llevando el esperpento hasta el final, firmó como R. Mutt, nombre de un fabricante de sanitarios alemán.*

DUCHAMP Y LOS *READY MADE*

Marcel Duchamp con sus *ready made* —objetos ya existentes— propugnó que cualquier cosa era susceptible de convertirse en arte si así lo decidía el artista: todo un gesto revolucionario dirigido al corazón de la institución llamada arte. Duchamp, al que ciertamente interesaron las matemáticas y la física y, sobre todo, el ajedrez, dedicó mucho tiempo a meditar sobre una pregunta muy relacionada con el valor estético de las matemáticas: ¿se pueden producir obras de arte mentales que no se basen en efectos primariamente retinianos?

Marcel Duchamp como Rrose Sélavy, fotografía realizada en 1921 por Man Ray.

De los babilonios a la teoría de conjuntos

La historia de las matemáticas puede ayudar a apreciar el valor estético de los razonamientos matemáticos de manera parecida a como lo hace la historia del arte con la escultura. Teniendo en cuenta la mayor dificultad para captar la belleza de las matemáticas —según se analizó en el capítulo 2—, la ayuda que puede prestar la historia es más necesaria en las ciencias exactas que en cualquier disciplina artística.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente resultado: todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo. Este teorema lo atribuye de segundas fuentes Diógenes Laercio a Tales, que sacrificó un buey cuando lo descubrió y demostró, aunque Apolodoro lo atribuye, quizás con más fundamento histórico, a Pitágoras.

Es un resultado aparentemente ingenuo que se puede demostrar sencilla y elementalmente de varias formas. Es, sin embargo, la historia de las matemáticas la que nos da la verdadera clave del teorema: fue uno de los primeros resultados que iba acompañado de un razonamiento con la pretensión de garantizar su validez general, esto es, lo custodiaba una demostración. Una demostración no es más que una disección lógica del resultado hasta reducirlo a verdades universales y evidentes. Para entender la grandeza de este hecho —imponer a los resultados la compañía necesaria de una demostración— habrá que compararlo con el tipo de razonamientos matemáticos que hacían los egipcios o los mesopotámicos, esto es,

acudir de nuevo a las historia de las matemáticas. La historia, al situarnos en la época, transformará la pretendida ingenuidad del teorema en sutileza, incluso sentiremos la cercanía conceptual del proceder de los griegos frente al cierto primitivismo que advertiremos en los manejos matemáticos egipcios o babilónicos —haciendo buena la frase: «Los matemáticos griegos no fueron hábiles colegiales, sino colegas de otra universidad», que Hardy dijo haberle escuchado una vez a Littlewood—. Al igual que la *Venus de Willendorf*, ese teorema tiene valor histórico, y el conocimiento de ese valor predispone a la hora de su apreciación estética.

Hay otro motivo de reflexión en la historia de ese teorema, que tiene que ver con lo explicado en el capítulo 3 sobre las matemáticas y sus circunstancias emocionales. Me refiero al asunto del sacrificio de un buey. Aunque Diógenes Laercio atribuye ese sacrificio a Tales, son mayoría los historiadores clásicos que aseguraron que fue Pitágoras quien ofreció una hecatombe cuando descubrió su célebre teorema. El diccionario establece como primera acepción para «hecatombe» la de «sacrificio de cien reses vacunas u otras víctimas, que hacían los antiguos a sus dioses». La hecatombe atribuida a Pitágoras fue más bien modesta y no fueron muchos los bueyes sacrificados —aunque sobre esto no se ponen de acuerdo las fuentes, entre las que se cuentan Vitrubio, Cicerón, Plutarco, Diógenes Laercio y varios autores más—. Si a alguien le parecen pocos los animales sacrificados a mayor gloria de estos descubrimientos matemáticos, tenga también en cuenta que una hecatombe no se celebraba por cualquier minucia; más aún, sus causas estaban trufadas de recónditas implicaciones simbólicas, aunque no por ello esas razones dejaban de estar apegadas a las preocupaciones más vitales del ser humano, a los insondables miedos que desde siempre han nublado nuestras entendederas, o a nuestros más íntimos desvelos, ilusiones y miserias. Las hecatombes, no lo olvidemos, fueron una especie de sacramento primigenio preñado de religión, magia y misterio —valga la redundancia—, y se ofrecían con la esperanza de evitar calamidades y maldiciones divinas, para tratar de ganar una guerra, o para intentar poner fin a una epidemia o a una hambruna. El hecho de que una hecatombe con toda su carga, no sólo ritual sino también de sangre y vísceras, aparezca entre las circunstancias de un simple teorema geométrico debería dar que pensar al lector. Habrá quien argumente que esas hecatombes atribuidas a Pitágoras o a Tales tienen poco fundamento histórico y que puede ser que nunca sucedieran; que son, en fin, un mito. En ese caso, digo yo, todavía daría más que pensar: ¿por qué Vitrubio, Cicerón, Plutarco, Diógenes Laercio y tantos otros, gentes todas ellas serias y seguro que ocupadas, se dieron el trabajo de concebir o transmitir un mito, tan sanguinario además, para ensalzar algo

aparentemente tan insignificante para el ser humano como un teorema? ¿Por qué asociar el parto intelectual que dio origen a las matemáticas griegas con un acontecimiento tan carnal y cruento? ¿Por qué ligar un proceso puramente abstracto con algo tan emocional como una matanza ritual?

Tal y como ocurría con la escultura griega, será la historia la que nos permita valorar mejor, también estéticamente, la evolución de las matemáticas griegas desde la ingenuidad de los primeros teoremas hasta la profundidad y sofisticación que alcanzó después. Y una buena medida de su diferencia se obtiene al comparar el teorema anterior con el cálculo del área del segmento de parábola que realizó Arquímedes y que se expuso en el capítulo 1.

Para considerar el valor estético de algo, aparentemente más *feo* que la geometría sintética griega, como el sistema de numeración posicional y con cero, o los procedimientos elementales del álgebra, convendría, al igual que para valorar la escultura románica, saber que aquél radica en la potencialidad simbólica que implica su simpleza, precisamente en esa falta de sofisticación que oculta su valor estético. Y aquí es donde interviene la historia para decirnos que esa tal simpleza, o sencillez, no es más que un hecho educativo: nos parecen sencillos porque han quedado insertos en nuestra educación primaria. ¿Cómo no calificar nuestro sistema de numeración de sofisticado al compararlo con el de los griegos, o cómo, si no, explicar que éstos carecieran casi por completo de aparato algebraico? ¿Cómo calibrar la dificultad conceptual del sistema de numeración, o del álgebra, sin saber su proceso histórico de gestación, tan arduo y lento? ¿No será también esencial para su correcta valoración conocer la importancia que ambos tuvieron en el nacimiento durante el siglo XVII de teorías, muchos más sofisticadas, como la geometría analítica y, después, el cálculo diferencial e integral?

La misma valoración estética del cálculo infinitesimal precisa del conocimiento de sus orígenes: cómo necesitó para su nacimiento de una serie de avances sobre la matemática griega, su contribución, cuando todavía tenía un carácter esotérico —Carlos Marx *dixit*—, a la consolidación de la revolución científica —que vivió Europa durante los siglos XVI y XVII, y que encaminó a la ciencia por la senda de éxitos y trascendencia social que hoy tiene—, y cómo estimuló, asimismo, el desarrollo no sólo de las matemáticas sino también de la física. La historia de las matemáticas facilita entender y valorar todo esto.

Escribió Gombrich en su *Historia del arte* que tanto el arte moderno como el antiguo han surgido como respuesta de los artistas ante determinados problemas concretos. Así, los procesos revolucionarios e innovadores, que cambiaron tan radicalmente el

arte desde mediados del siglo XIX, surgieron cuando los pintores, sobre todo, se preguntaron por qué se habían de contentar con pintar, tan fielmente como supieran, lo que tenían delante, ya fuera un paisaje natural o un grupo humano. Surgió entonces el dilema sobre cuál era realmente la función del artista: si la de ser mero testigo mudo cuya función es reflejar fielmente lo que el ojo ve —como si el pintor fuera una mera cámara fotográfica—, o la de convertirse en protagonista al reflejar en el cuadro la experiencia emocional interior generada por lo que se está viendo. Usando la libertad creativa del artista como uno de sus grandes argumentos, el arte, como todo el mundo sabe, optó por la segunda opción, y construyó un nuevo mundo, criticado unas veces, despreciado otras, mal comprendido la mayoría, por el que fueron desfilando impresionistas, expresionistas, arte abstracto, vanguardias, arte experimental, etc. En este nuevo escenario, complejo, a menudo extraño hasta lo estrambótico, y cambiante como nunca antes, la historia del arte se convierte, para la valoración y apreciación estética, en una herramienta casi tan imprescindible como el sentido de la vista.

Las matemáticas iniciaron también a finales del siglo XIX un proceso de progresiva abstracción, que culminó con la inserción de casi toda la matemática en la atmósfera, aparentemente aséptica y neutra, de la teoría de conjuntos. El gran animador de ese proceso fue el matemático alemán Georg Cantor, y el motor que lo impulsó fue su ansia por entender y controlar al más temido monstruo del bestiario matemático: el infinito. Como queriendo demostrar que en las culturas se dan ciertos patrones de uniformidad aun en sus aspectos aparentemente más desconectados, o como queriendo dar la razón a la frase de Marcel Proust de que todo lo que es del mismo tiempo se parece, la evolución de las matemáticas tiene similitudes, muy sugerentes e iluminadoras, con lo ocurrido casi en las mismas décadas en pintura, escultura, arquitectura, música o literatura. No en vano, el lema de Cantor, «la esencia de las matemáticas es la libertad», apelaba al motivo repetido incansablemente por pintores, escultores o compositores para justificar buena parte de sus propuestas artísticas.

Al infinito, a su domador Cantor y, naturalmente, a sus circunstancias les dedicaré las páginas finales de este libro.

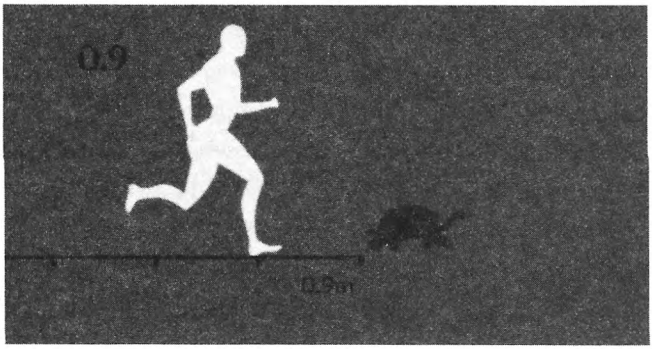
La víbora en su nido

El infinito es como un nido de víboras, y al intelecto humano le ha llevado varios milenios y muchas picaduras poder meter ahí la mano. El infinito es un producto de la estructura lógica de nuestro cerebro. Esta estructura tiene la capacidad de crear conceptos por negación de otros existentes. Partiendo de lo que nuestros sentidos aprecian,

surge de manera natural el concepto de lo que tiene fin, término, límite; o sea, de lo finito, de lo limitado. Al concepto de infinito llegamos por negación de lo finito, y no por experiencia. Lo paradójico es que, a pesar de ser producto de la estructura lógica de nuestro cerebro, el infinito muestra cierta incompatibilidad con la lógica, o mejor dicho con el sentido común —que muchas veces se confunde, erróneamente, con la lógica—. El sentido común está muy condicionado por la información que nos proporcionan los sentidos, y ésta es necesariamente información sobre, o de, lo limitado. Así que el infinito tiene muy poco respeto por el sentido común, y recibiremos una mordedura del monstruo cada vez que se lo intentemos aplicar.

No es, pues, de extrañar que el infinito causara tanto espanto a los griegos, que hicieron de la lógica del sentido común santo y seña de su revolución cultural.

La historia de Aquiles y la tortuga, el rompecabezas lógico de Zenón de Elea contra la pluralidad y el movimiento, está tan integrada en el imaginario colectivo como el teorema de Pitágoras, el Quijote o la *Novena sinfonía* de Beethoven. Para construir su paradoja Zenón usó encubiertamente el infinito. Ese mismo infinito rezumaba también en la crisis pitagórica creada por el descubrimiento de los irracionales: que $\sqrt{2}$ no fuera una fracción, y que se necesitaran infinitas para poder describir exactamente el valor de ese número tenía el hedor inconfundible del monstruo.



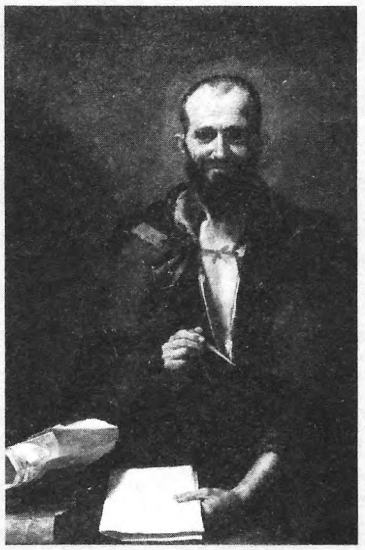
La historia de Aquiles y la tortuga representa la aproximación del filósofo griego Zenón de Elea al concepto de infinito. En la ilustración, fotograma perteneciente a la película de Takeshi Kitano que lleva por título esta famosa paradoja.

Pero el infinito era un producto de la lógica, de su capacidad para generar conceptos por negación. Y tenía también una cara amable: había objetos matemáticos que manifiestamente casaban mal con lo limitado. Ahí están los números, tan prolíficos que cualquiera diría que no tienen fin; o las líneas rectas, que uno siempre puede mentalmente estirar y alargar sin límite aparente.

Dadas las circunstancias del infinito, en las que se mezclaban lo absurdo, y de ahí los escándalos y polémicas, con cierta sensatez, innegable aunque tenue, los griegos optaron por separar el infinito en dos partes: una aceptable, el infinito en potencia, y otra aborrecible, el infinito en acto. El sempiterno «sentido común» aristotélico fue el cuchillo que se usó para sajar al monstruo. Dado que era imposible negar la existencia de procesos que no tienen fin —la división sucesiva de un segmento por su punto medio, o el interminable suceder de los números—, Aristóteles, en el Libro III de la *Física*, dio carta de naturaleza al infinito en potencia: «Es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles», de manera que «el infinito existe potencialmente», esto es, «el infinito es o por adición o por división». Ahora bien, el infinito en sí, como cosa completa, no iba a estar permitido: «No es posible que el infinito exista como un ser en acto o como una sustancia y un principio. [...] La magnitud no es actualmente infinita, aunque infinitamente divisible.» La regulación aristotélica impide considerar a los números formando un todo acabado, aunque admite que existan números tan grandes como se desee; prohíbe considerar un segmento como una colección de infinitos puntos alineados, pero sí permite divisiones del segmento por la mitad, digamos, tantas veces como se quiera.

ARQUÍMEDES Y EL INFINITO

Arquímedes fue quizás el único matemático griego que se saltó la prohibición aristotélica del infinito en acto; aunque lo hizo con mesura y templanza. En los razonamientos de Arquímedes para el cálculo del área de un segmento de parábola, explicados en el capítulo 1, entra en acción el infinito en acto, toda vez que una superficie se considera formada por una colección infinita de segmentos rectos —«las rectas trazadas en un triángulo constituyen el propio triángulo»—; pero Arquímedes no pretendía encabezar una revolución contra Aristóteles pues, como él mismo aclaró, sus argumentos «distaban de ser una demostración».

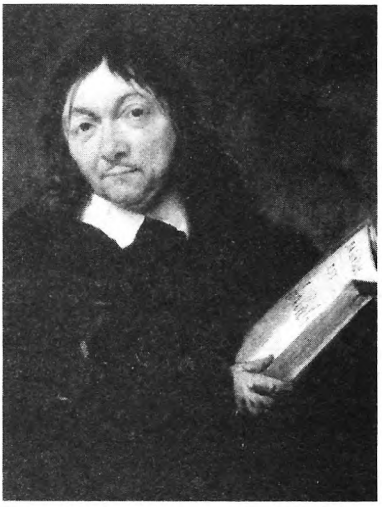


Arquímedes según la visión del pintor José de Ribera (1591-1652).

Pero el uso del infinito en acto también contravenía a Euclides, que en sus *Elementos* incluyó como noción común o axioma que «el todo es mayor que la parte» —axioma éste generado por nuestra intuición de lo limitado—. Quien supo explicar mejor que nadie esta incompatibilidad del infinito con el axioma euclidiano fue Galileo en sus *Discorsi* (1638). Puesto que cada número genera un cuadrado distinto —el 2 genera el 4; el 3, el 9; el 4, el 16, etc.— y a su vez cada cuadrado viene generado por un único número, argumentó Galileo, podemos emparejar los números con sus cuadrados concluyendo que habrá tantos cuadrados como números; pero es de todo punto obvio que los números cuadrados son sólo una parte de los números —el 2, el 3, el 5, el 7 son números, pero no cuadrados— y, en consecuencia, concluimos que hay más números que cuadrados —el todo es mayor que la parte—. Nos encontramos, pues, con la paradoja de que los números son, a la vez, tantos y más que los cuadrados. Galileo concluía que «los atributos de mayor, menor e igual no se aplican a los infinitos».

La asociación del Dios cristiano con el infinito acabó facilitando la superación de los viejos miedos que los griegos le tuvieron al monstruo, y el infinito, en potencia y en acto, se instaló definitivamente en el corazón de las matemáticas desde el siglo XVII. Siguiendo a Aristóteles, los escolásticos vetaron al hombre el entendimiento del infinito en acto, pero no les quedó más remedio que introducirlo en la discusión teológica. Así, Tomás de Aquino consideraba a Dios como el primer infinito, plenamente y en toda línea: el infinito en acto. Esta concepción aparece con bastante frecuencia en los filósofos del siglo XVII, algunos de los cuales, no se olvide, fueron también científicos y matemáticos. Así lo encontramos en Descartes: «Por Dios entiendo una sustancia infinita, eterna, inmutable, independiente, omnisciente, omnipotente», y también: «Reservamos solamente para Dios la calificación de infinito, tanto en razón de que no observamos límites en sus perfecciones, como también a causa de que estamos muy seguros de que no puede tenerlos»; en Spinoza: «Entiendo por Dios un ser absolutamente infinito, es decir, una sustancia constituida por una infinidad de atributos, cada uno de los cuales expresa su esencia eterna e infinita»; y también en Leibniz: «Cabe juzgar que esa Sustancia Suprema, que es única, universal y necesaria debe ser incapaz de límites y contener tanta realidad cuanta sea posible.»

Ninguna prohibición puede acabar con aquello que es realmente útil. Y ningún concepto ha fertilizado las matemáticas como lo hizo el infinito, pues ninguno ha hecho a las matemáticas tan útiles para explicar los fenómenos de la naturaleza: el infinito es el ingrediente fundamental del cálculo infinitesimal, y el cálculo infini-



Desde los escolásticos medievales, como Santo Tomás de Aquino (ca. 1224-1274), hasta los filósofos racionalistas, como Descartes (1596-1650), tuvieron que hacer frente al problema conceptual del infinito «en acto».

tesimal es, sin duda, la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza que hayan desarrollado jamás los matemáticos. Lo que no es más que otra muestra de las paradojas que encierra el infinito: ¿cómo es posible que, a pesar de no ser otra cosa que un subproducto de la estructura lógica de nuestro cerebro, el infinito sea tan imprescindible para la comprensión científica del universo que nos rodea —cuando en ese universo el infinito es como un inmigrante sin papeles en cualquier país occidental—?

A pesar de esa incontestable, aunque incomprensible, utilidad, la mala prensa del infinito en acto siguió viva, y a ella se unió hasta el llamado «príncipe de los matemáticos». El gran Gauss escribió: «Protesto contra el uso que se hace de una cantidad infinita como cantidad completa, lo que en matemáticas jamás está permitido. El infinito es sólo una forma de hablar en la que propiamente debería hablarse de límites a los que ciertas cantidades pueden acercarse tanto como se desee, mientras otras pueden aumentar sin cota.»

Cantor y la esencia libertaria de las matemáticas

Casi a la vez que Gauss escribía esas palabras, nacía Georg Cantor (1845-1918). Cantor hizo posible el sometimiento del infinito, en la manera en la que ese monstruo se ha dejado someter.

Cantor empezó comparando los distintos conjuntos infinitos de números que tenía a su disposición. Para comparar infinitos usó la técnica de emparejar elementos: si puedes emparejar los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que ni sobren en uno ni falten en otro, entonces es que los dos conjuntos tienen igual número de elementos.

Así, logró emparejar los números naturales con los enteros y, también, con las fracciones; contra lo que parece decir la lógica —el todo es mayor que la parte—, los manejos de Cantor mostraron que hay tantos números naturales como fracciones.

Pero, para poder hacer matemáticas con el infinito, Cantor necesitaba cierta variedad, necesitaba conjuntos infinitos de distinto tamaño. El primer resultado decisivo lo obtuvo a finales de 1873, cuando encontró dos infinitos que no se pueden emparejar. Más concretamente, Cantor mostró que el conjunto de los números naturales no se puede emparejar con el de los puntos de un segmento. Es, sin duda, uno de los resultados más revolucionarios de toda la historia de las matemáticas. Para este resultado, tan trascendente como profundo, Cantor encontró en 1899 una demostración sumamente sencilla y elegante: una pura delicia estética; y, al igual que ocurre con los cuadros de los impresionistas, su sabor quedará realzado con el aderezo de un adecuado conocimiento de su historia y circunstancias.

Cantor en 1894, con 49 años, en la época en la que trataba de sistematizar su teoría de conjuntos.

La demostración de Cantor

Para simplificar, en vez de los puntos de un segmento, voy a considerar todos los desarrollos binarios infinitos de la forma $0,a_1a_2a_3\ldots$, donde cada cifra a_1, a_2, $a_3\ldots$ del desarrollo vale 0 o 1. No es difícil ver, aunque sea un poco técnico para este libro, que hay tantos puntos en un segmento como desarrollos binarios de ese tipo.

La prueba de Cantor usa un procedimiento diagonal para, dado un emparejamiento cualquiera entre los números 1, 2, 3, 4... y los desarrollos binarios, generar un desarrollo binario que no aparece como pareja de ningún número. Imagine el lector que tenemos un emparejamiento cualquiera de números y desarrollos binarios. Para simplificar tomemos el siguiente, del que es suficiente con mostrar las primeras parejas.

$$
\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow 0,\boxed{1}0010011\ldots\\
2 &\leftrightarrow 0,1\boxed{1}011110\ldots\\
3 &\leftrightarrow 0,00\boxed{0}10001\ldots\\
4 &\leftrightarrow 0,111\boxed{1}1011\ldots\\
5 &\leftrightarrow 0,0101\boxed{0}100\ldots\\
&\ \ \vdots \qquad\quad \vdots\\
¿? &\leftrightarrow 0,00101\ldots
\end{aligned}
$$

Fíjese que he recuadrado ciertos dígitos: la primera cifra del primer desarrollo, la segunda cifra del segundo desarrollo, la tercera cifra del tercer desarrollo, etc., y he construido un nuevo desarrollo —el que aparece al final de la lista tras los puntos suspensivos verticales— modificando esas cifras: donde había un 0 he puesto un 1 y donde había un 1 he puesto un 0 —así, la primera cifra del nuevo desarrollo es pues 0, la segunda también 0, la tercera un 1, la cuarta un 0 y así sucesivamente—. Con esa elección tengo garantizado que, sean cuales sean las cifras que sigan, el desarrollo que estoy construyendo es distinto a los que aparecen antes, pues el nuevo desarrollo difiere del primero en su primera cifra, del segundo en su segunda cifra, del tercero en su tercera cifra, y así sucesivamente. Eso deberá convencer al lector de que la lista de arriba deja a ese desarrollo binario sin pareja. A poco que lo piense, además, verá que el procedimiento de Cantor no depende de la lista anterior. Si se cambia la lista puedo sin ningún problema adecuar el procedimiento a la nueva lista y generar otro desarrollo sin pareja.

EL PROCEDIMIENTO DIAGONAL DE CANTOR

Ese mismo procedimiento diagonal, junto con el concepto de partes de un conjunto, le permitió a Cantor mostrar cómo construir conjuntos infinitos tan grandes como se quiera. El lector se hará una idea cabal con un ejemplo sencillo: imagínese que tiene el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ formado por los tres números 1, 2, 3. El conjunto de las partes del conjunto A es el nuevo conjunto que se obtiene al considerar todos los conjuntos que podemos formar con los elementos de A, incluido el conjunto vacío $\varnothing$; si lo llamamos $P(A)$, entonces:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Si partimos de un conjunto A infinito, Cantor probó que el infinito correspondiente al conjunto de las partes de A es siempre mayor que el de partida. Y lo demostró usando otra vez su procedimiento diagonal. La idea es la misma, pero hay que adaptarla a la nueva situación. Tomemos un emparejamiento cualquiera de un conjunto A con el conjunto de sus partes $P(A)$. Cada elemento x de A tendrá como pareja un conjunto X formado por elementos de A. Definimos ahora una parte de A que no va a tener pareja: es el conjunto que llamo Y y está formado por aquellos elementos x de A que no están en su correspondiente pareja X. En efecto, si un elemento x de A está en su pareja X, entonces, por definición de Y, ese x no estará en Y. Luego $X \neq Y$, pues x es un elemento de X pero no de Y. Por otro lado, si un elemento x de A no está en su pareja X, entonces por definición de Y, ese x estará en Y. Y otra vez $X \neq Y$, pues x es un elemento de Y pero no de X. Eso muestra que ningún elemento x de A puede tener como pareja al conjunto Y.

El infinito absoluto y el legado de Cantor

Tras dedicar un cuarto de siglo a estudiarlos, Cantor logró ordenar el universo de los infinitos: como si fuera un desfile de monstruos, los dispuso unos a continuación de otros en un orden parecido —esto es sólo una manera de hablar— a como están ordenados los números, y estipuló cómo se podían sumar, multiplicar, elevar unos infinitos a la potencia de otros, etcétera, etcétera. Cantor, sin embargo, no dejó al infinito completamente domado. Hay todavía unas «multiplicidades incompletables», un infinito absoluto como lo llamaba Cantor, fuera de cualquier control o dominio matemático —no digamos ya lógico—: «Lo Absoluto —escribió Cantor en 1883— sólo puede ser reconocido, pero nunca conocido, ni siquiera aproximadamente conocido.» El infinito que a Cantor le interesaba está situado entre lo finito y lo absoluto.

EL CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS Y OTROS MONSTRUOS POR EL ESTILO

El infinito absoluto está emparentado con esas entelequias inmensas e inimaginables como el conjunto de todos los conjuntos, o el conjunto de los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, por citar sólo dos ejemplos. Esta última monstruosidad es la protagonista de la paradoja que Bertrand Russell encontró en 1901: ¿pertenece a sí mismo el conjunto formado por aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos? Si pertenece a sí mismo, contradice que ese conjunto esté formado por los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, pero si no pertenece a sí mismo entonces tendría que pertenecer a sí mismo por definición.

Pero a Cantor nunca le preocuparon esas paradojas porque siempre tuvo la convicción de que no afectaban al tipo de conjuntos e infinitos que él estudió, sino a esas entidades excesivas y monstruosamente enormes emparentadas con lo absoluto, esa cosa que podemos reconocer, pero no conocer.

Las paradojas surgieron por la consideración un tanto ingenua de que un conjunto es cualquier colección de cosas. Esa paradoja tiene una formulación similar a las que se pueden proponer para contradecir el carácter omnipotente de Dios —otra ingenuidad—: ¿puede Dios crear una piedra que Él mismo no pueda levantar? Si la puede crear ya hay algo que Dios no puede hacer: levantar esa piedra; si no la puede crear, también hay algo que no puede hacer: crearla.

De la contienda con el infinito, Cantor salió razonablemente victorioso, aunque no sin graves heridas. Debido precisamente a sus investigaciones con el infinito, Cantor se ganó la animadversión de una parte del *establishment* matemático alemán. En 1879 obtuvo una cátedra en la Universidad de Halle, donde permanecería toda su vida, a pesar de su interés por llegar a Berlín o a Gotinga, universidades que le cerraron sus puertas. A pesar de alguna que otra falta de tacto por su parte, pocas dudas caben sobre las causas del hostigamiento que Cantor sufrió por parte de colegas influyentes: su investigación fue calificada a menudo de insignificante y carente de todo interés, y cuando sus esfuerzos empezaron a reconocerse, las malas lenguas pusieron en boca de Henri Poincaré (1854-1912), uno de los gigantes matemáticos del momento, una célebre infamia: «Las generaciones venideras considerarán la teoría de conjuntos de Cantor como una enfermedad de la que uno tiene que recuperarse.»

Las matemáticas, sin embargo, acabaron por hacer justicia a Cantor: poco a poco, y gracias al cambio generacional, se fue reconociendo la importancia de sus trabajos, hasta el punto de que la revolución que pusieron en marcha acabó cambiando la

forma de hacer matemáticas. Cantor inició un proceso de abstracción caracterizado por la aparición de pruebas de existencia no constructiva; o sea, después de Cantor los matemáticos hemos acabado por admitir que la existencia de un determinado objeto matemático puede quedar garantizada aunque no se especifique cómo se puede construir dicho objeto. Los desvelos de Cantor culminaron con la creación de la teoría de conjuntos, ese territorio donde finalmente David Hilbert, el matemático más influyente de la época, ubicó el paraíso de los matemáticos.

El colapso de un genio

Georg Cantor fue una figura pletórica y excesiva, y, quizá por eso, emocionalmente inestable. A mediados de 1884, cercano ya a los cuarenta años, sufrió su primer colapso mental, una crisis de la que apenas se sabe que duró más o menos dos meses y llegó tan fulminantemente como se fue. A partir de entonces, la personalidad de Cantor, ya de por sí controvertida y con pronunciadas tendencias místicas, se hizo aún más excéntrica. En cierta forma abandonó la investigación matemática como primera actividad, y se dio a otros menesteres intelectuales de índole bastante más dudosa. Como resultado de esos estudios llegó a sostener y defender que Francis Bacon fue el autor de las obras de Shakespeare y que José de Arimatea era el padre carnal de Jesucristo. Las crisis nerviosas siguieron de forma recurrente, sobre todo a partir de 1899, a consecuencia de las cuales fue internado en clínicas de reposo cada dos o tres años aquejado de manías persecutorias y cuadros maníaco-depresivos. No fue extraño que recibiera la noticia de la concesión de premios y honores en el manicomio de la Universidad de Halle.

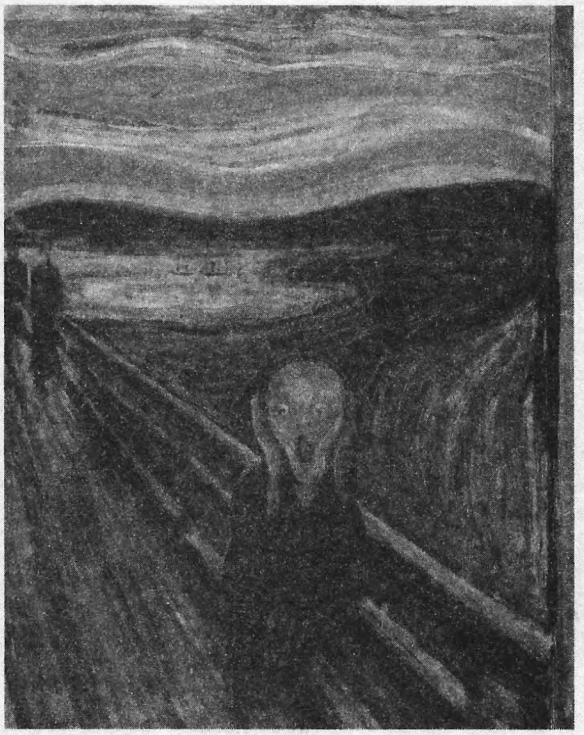
En el folclore de la historia de las matemáticas esos colapsos se atribuyen a su batalla con el infinito; pero, ¿fue su enfrentamiento con el monstruo lo que causó realmente la enfermedad mental de Cantor? Es innegable que cierta tentación melodramática puede inclinarnos a contestar afirmativamente a esa pregunta. Y, como digo, no han sido pocos los autores que se han dejado arrastrar por ella hasta convertirla en un hito del folclore matemático. Quizá fuera Bertrand Russell quien más colaboró con esa causa —tal vez inadvertidamente—. Cantor visitó por primera vez Gran Bretaña en septiembre de 1911, al haber sido invitado a los fastos por el quinientos aniversario de la creación de la Universidad de St. Andrews en Escocia; después viajó a Londres y escribió a Russell un par de cartas proponiendo un encuentro con él, que finalmente no se produjo. El caso es que Russell incluyó en su autobiografía, publicada en 1967-1969, una referencia a esas dos cartas y al comportamiento un tanto excéntrico de

CANTOR Y MUNCH

«Solo, temblando de angustia, sentí el grito, vasto, infinito, de la naturaleza.» Así describió el pintor noruego Edvard Munch la sensación que le llevó a pintar *El grito,* su cuadro más célebre. Y, efectivamente, la fuerza simbólica del cuadro, el uso dramático de la perspectiva, la irrealidad y violencia de los colores, sugieren también aspectos desmesurados, cercanos a lo infinito, a la infinita angustia del que grita. Un grito que se ve pero que no se oye, y no oír el grito, que sin embargo se siente, produce angustia porque nos mantiene a la expectativa ante la amenaza de empezar a oírlo en cualquier momento.

Las obras de Munch causaron en Alemania una polémica artística parecida a la polémica matemática generada por los trabajos de Cantor, y en fechas no muy alejadas. El 5 de noviembre de 1892 se inauguró la exposición de Munch en Berlín. Se cerró una semana después dando paso a una dura polémica, conocida como *el affaire Munch*. Durante la polémica se discutió mucho y con acritud sobre los límites de la libertad del artista. Una música parecida le tocaron a Cantor, lo que le llevó a decir aquello de «la esencia de las matemáticas es la libertad».

Como pasó con la obra de Cantor en matemáticas, la de Munch ha tenido enorme influencia en pintura, y no sólo en los grupos expresionistas alemanes, sino también en Picasso —en *El Guernica* sin ir más lejos—. Y todavía hay una última e inquietante similitud entre Munch y Cantor: también Munch sufrió crisis nerviosas, aunque quizá no tan agudas ni persistentes como las que aquejaron a Cantor.



La versión más conocida del cuadro de El grito *de Munch (1893), se encuentra en la Galería Nacional de Oslo, de donde fue robada en 1994 y recuperada en 2006.*

Una nueva fotografía de Cantor; en esta ocasión, realizada en 1917, cuando el matemático tenía 72 años y estaba a punto de ingresar o ya dentro del manicomio de Halle, donde moriría pocos meses después.

Cantor —quizá consecuencia de la excitación que le produjo pisar por primera vez la tierra de Shakespeare y Bacon—. «Georg Cantor fue, en mi opinión —escribió Russell—, uno de los mejores cerebros del siglo XIX [...] Después de leer la siguiente carta, nadie se sorprenderá de saber que estuvo buena parte de su vida en un asilo para lunáticos.» Al respecto de este comentario, el historiador británico de las matemáticas Ivor Grattan-Guinness, uno de los que primero levantaron su voz contra las razones matemáticas de la locura de Cantor, escribió en 1971: «Las dos cartas de Cantor tienen un carácter innegablemente errático: de hecho, los manuscritos son todavía más reveladores. Muestran varios de los hábitos que tenía cuando la agitación se apoderaba de él. La caligrafía es muy florida y los renglones tienden a irse hacia arriba conforme progresan en la página; y no sólo continúan en los márgenes —algo típico de Cantor—, sino que en una página de la segunda carta llegó a escribir de arriba a abajo sobre otros renglones que iban, según lo habitual, de izquierda a derecha. Hay, incluso, un párrafo de la carta que está escrito en el dorso del sobre.»

Es muy posible que la enfermedad mental de Cantor tuviera causas genéticas; aunque esto no signifique que la tirantez de sus relaciones académicas o la tensión de su pelea con el infinito agudizaran o precipitaran sus crisis mentales. Como también pudieron hacerlo otras tragedias de la vida, como la que sufrió en 1899 cuando Rudolf, el más joven de sus seis hijos, murió a los 13 años de edad.

En mayo de 1917 Cantor fue otra vez ingresado, contra su voluntad, en el manicomio de la Universidad de Halle; según Grattan-Guinness: «La guerra provocó escasez de alimentos, y Cantor adelgazó y fue presa, además del cansancio y la enfermedad, también del hambre [...] Por Año Nuevo, Cantor envió a su mujer las últimas cuarenta hojas del calendario del año anterior, dándole a entender que había vivido esos días; pero el 6 de enero murió de repente y sin dolor de un ataque al corazón. Fue enterrado en Halle cerca de su hijo Rudolf.»

Bibliografía

ARQUÍMEDES, *El método,* edición de Luis Vega, Madrid, Alianza, 1986.

ARQUÍMEDES, *Obras escogidas,* edición facsimilar y crítica de Antonio J. Durán, Sevilla, Real Sociedad Matemática Española, Patrimonio Nacional e International Congress of Mathematicians, Madrid, 2006.

CELA, C.J., *La colmena*, Barcelona, Seix Barral, 1985.

CUSICK, T. y FLAHIVE, M.E., *The Markoff and Lagrange Spectra,* Providence, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 1989.

DIOFANTO, *La aritmética y el libro sobre los números poligonales,* edición de Manuel Benito, Emilio Fernández y Mercedes Sánchez, Madrid, Nivola, 2007.

DURÁN, A.J., *El valor estético de las matemáticas,* La Gaceta de la RSME, 4.2, 329-254, Real Sociedad Matemática Española, 2001.

—: *Pasiones, piojos, dioses... y matemáticas,* Barcelona, Destino, 2009.

EULER, L., *Introductio in Analysin Infinitorum*, edición facsimilar y crítica con traducción al castellano de J.L. Arantegui y notas de Antonio J. Durán, Sevilla, Real Sociedad Matemática Española y SAEM Thales, 2000.

FORD, L.R., «Fractions», The American Mathematical Monthly, 45, 586-601, 1938.

GOMBRICH, E.H., *Historia del arte,* Madrid, Debate, 1997.

GRATTAN-GUINNESS, I., «Towards a Biography of Georg Cantor», Annals of Science, 27, 345-391, 1971.

HARDY, G.H., *A Mathematician's Apology*, Cambridge, Cambridge University Press, 1940 (hay versiones castellanas: *Autojustificación de un matemático,* Barcelona, Ariel, 1981; *Apología de un matemático,* Madrid, Nivola, 1999).

KANT, E., *Crítica del juicio,* Madrid, Espasa Calpe, 1977.

ROTA, G.C., *Indiscrete Thoughts*, Boston, Birkhäuser, 1997.

SANTAYANA, J., *El sentido de la belleza*, Madrid, Tecnos, 1999.

SAVATER, F., *Las preguntas de la vida,* Barcelona, Ariel, 1999.

Índice analítico

A Mathematician's Apology 12, 100, 105-108
Adorno, T. 121
Alain, E.C. 23
Alejandría 28, 48
Al-Khowarizmi 120
Antemio de Tralles 29
Apolonio 47-48, 81-82
Apóstoles 101-102
aproximación racional 46-47, 52-61, 71-74
Aristóteles 9, 37, 135, 136
Aritmética (de Diofanto) 65-69, 103
Arquímedes 11-34, 54-55, 103, 132, 135

Beardsley, M.C. 39
Boyer, C. 120

cálculo infinitesimal 110, 132, 136
calidad
  de lo económico 117-118
  de lo inesperado 117-118
  de lo inevitable 117-118
Cantor, G. 133, 137-145
capacidad iluminadora 76, 118
Cela, C.J. 45-47, 51-53, 61, 73, 74
circunferencia 20, 48-49, 54, 59, 62, 82
circunferencias
  de Ford 49-52, 61-64
  tangentes 46-52, 62, 63, 81-82
Constantinopla 27-31
Courant, R. 94
curva de Koch 83-85

Denevan, J. 82
Descartes, R. 124, 136-137
dimensión de Hausdorff 78-90
Diofanto de Alejandría 65-69, 103
Dios 99, 102-103, 127, 136, 141
Dirichlet, L. 55-58, 61, 63, 70
doña Rosa 46-47, 51, 52, 61, 73
Dos Passos, J. 45
drip and splash 87-88
Duchamp, M. 125, 129, 130
Durero, A. 60

ecuación de Markov 70-74
ecuaciones diofánticas 46-47, 65-67, 70, 73
Elcano, J.S. 124
elipse 20
empaquetamiento de Apolonio 81-82, 84
espejos ustorios 19
Euclides 28, 37, 67, 120, 136
Euler, L. 109-124
¡Eureka! 17-19
Eutocio 29

Federico II de Prusia 112
Fermat, P. de 68-70, 103
fracciones 49-58, 62-64, 71-72
fractales 77-90

Galileo 19, 136
Gauss, K.F. 56, 106, 112, 137
generalidad 108, 114-117
Goldschmidt, C. 94
Gombrich, E. 125, 132
Grattan-Guinness, I. 144-145
Greene, G. 100

Hardy, G.H. 13, 99-109, 114-119, 131
Hausdorff, F. 77-79, 89-97
Hawking, S. 18
Heiberg, J.L. 30-34
Hilbert, D. 94, 99, 142
Hipaso de Metaponto 52
hipérbola 20
hipótesis de Riemann 103
Hitler, A. 93-95
Hobson, E.W. 121
Hurwitz, A. 58, 61-64, 71-74
Huygens, C. 110

infinitesimales 122-123
infinito 81, 85, 109, 117, 119-124, 133-145
Introductio in analysin infinitorum 109
Isidoro de Mileto 29

Jonas, D. 88
Julita Moisés Leclerc 47, 72-73
Justiniano 28-29

Kant, I. 106-107, 119-123
Kerameus, P. 31

La colmena 45-46, 53, 61, 64, 73
Lang, S. 121
Le Corbusier 118
Leibniz, G.W. 40, 109-112, 118, 124, 136
Littlewood, J. 99, 101, 105, 131
logaritmo 20, 80, 85, 89
Luca Pacioli 60

Magallanes, F. 124
Mandelbrot, B. 79, 84-86, 90
Marcelo 14-15
Martín Marco 47, 52, 61, 72, 73
Método (de Arquímedes) 14, 21, 27-33
Méziriac, B. de 65, 68-69
Micolich, A. 88
Mongré, P. 91
Munch, E. 143

Neruda, P. 86
Newton, I. 105, 110-111, 113, 118
Niestzche, F. 97
número π 54-55, 58, 113, 114, 188
números
  algebraicos 56-58
  irracionales 52-58, 61-64, 71-74
  naturales 57, 66-67, 70, 109-118, 138
  racionales 49, 52, 62-63, 66
  transcendentes 56-58

Pappus de Alejandría 48
parábola 20-27, 33, 132, 135
paraboloide de revolución 20
Partenón 11-13
partes de un conjunto 140
Pigaffeta, A. 124

Pitágoras 52, 53, 66-67, 130-131
Platón 9, 29, 37
Poincaré, H. 7, 141
Pollock, J. 87-88
principio del palomar 56-57
problema de Apolonio 48
profundidad 108, 114, 116-118

Ramanujan, S. 100, 102-105
razón áurea 58-61, 71-74
Riemann, B. 103
Rilke, R.M. 10
Robinson, A. 123
Rota, G.C. 118
Russell, B. 9, 100-101, 141-144

San Agustín 18
Santayana, G. 12, 44, 99, 118
Santo Tomás de Aquino 136-137
Savater, F. 26-27, 44
Schnirelman, L. 79
Siracusa 14-17, 19, 28
Spinoza, B. 136
Stendhal 10
Stomachion 32
sublime 119, 121-123

Tales 130-131
Taylor, R. 88
teorema de Fermat 70
teoría de conjuntos 90, 133, 138, 141-142
ternas pitagóricas 67, 69
Tischendorf, C. 31
topología 90
Tsu Ch'ung-Chih 54-55

Voltaire 10, 109, 112, 121

Wagensberg, J. 45
Wiles, A. 70
Wittgenstein, L. 44, 101

Zenón de Elea 134