Curvas peligrosas

Elipses, hipérbolas y otras maravillas geométricas

Josep Sales - Francesc Banyuls

El mundo es matemático

Curvas peligrosas

Elipses, hipérbolas y otras maravillas geométricas

Un famoso escritor distinguió en cierta ocasión entre las «líneas del intelecto» y las «curvas de la emoción». Si damos por buena la metáfora, que el lector y la lectora queden avisados de que este libro, aun siendo de matemáticas, rebosa emoción en cada página. Sus heroínas, elegantes y sinuosas, responden a nombres tan sugerentes como elipse, hipérbola, espiral o concoide, y su definición y propiedades han llevado de cabeza a los matemáticos, desde los albores del pensamiento.

A mis queridos Marta, Dèlia, Otger, Bernat y Pau
JS

A las tres chicas de casa, Aina, Mar y Sònia
FB

© 2010, Josep Sales y Francesc Banyuls por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6977-5
Depósito legal: NA-1673-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. Para qué se emplean las curvas 9
Sistemas de referencia. Coordenadas cartesianas 9
Curvas para dibujar objetos con ordenador 27
Curvas que definen fenómenos físicos y químicos 30
Curvas de los estudios de mercado 33
Las curvas de la bolsa 36
Las curvas del mercado 37
Una curva para las hipotecas 38
Curva de la probabilidad normal o de Gauss 38

Capítulo 2. Las curvas. Cómo se dibujan. Cómo se miden 41
Curvas definidas por una propiedad geométrica 41
Curvas definidas por una fórmula o ecuación 45
Curvas explícitas e implícitas 50
Curvas y funciones 50
Funciones trascendentes 53
Pendientes, rectas tangentes de una curva y derivadas 56
Extremos de una función 61
Ceros de una función 62
Simetrías de una función 62
Dominio de una función 63
Concavidad y puntos de inflexión de una función 66
¿Cómo se mide la longitud de un tramo de curva? 67
¿Cómo se determina el área encerrada por una curva? 73

Capítulo 3. Los caminos de las curvas. Trayectorias de objetos 79
Las trayectorias, el movimiento y las curvas 79
La curva se convierte en recta 80
La recta se convierte en curva 80
Las curvas en las distancias cortas 84
Las curvas se mueven. Curvas definidas por movimiento 87
Curvas de persecución o arrastre 96

Capítulo 4. Las curvas en la vida, la sociedad y la ciencia 101
Curvas eléctricas y magnéticas 101
Curvas de Lissajous o de Bowditch 109
Curvas sonoras 112
Las curvas se hacen difusas. Zonas de movimiento 116

Capítulo 5. Curvas en la naturaleza, el arte y el diseño 121
Secciones cónicas 121
Circunferencias 125
Curvas de anchura constante 126
Elipses 127
Superelipses 130
Hipérbolas 130
Hipérbolas cúbicas 132
Parábolas 134
Curvas bonitas 135
Involuta de círculo 137
Espiral de Arquímedes 138
Otras espirales 139
Espiral logarítmica 141
Cardioide 143
Catenaria 144
Curvas del diseño asistido por ordenador (CAD) 148
Curva que sigue a un conjunto de puntos. Interpolación 152
Curvas en las tipografías del diseño gráfico 153

Bibliografía 155

Índice analítico 157

Prefacio

Durante toda nuestra vida hemos oído decir que la línea más corta entre dos puntos es la línea recta. Las curvas no son solamente un camino más largo entre dos puntos, en contraposición a las líneas rectas, sino que tienen entidad por ellas mismas; de hecho, si nos detenemos a mirar a nuestro alrededor veremos que están más presentes en la vida cotidiana que las propias rectas.

Desde las «curvas peligrosas» del código de circulación hasta las familias de espirales, existe una gran variedad de curvas y una inmensidad de aplicaciones para ellas. Las curvas son la evidencia de la inmensidad del pensamiento, de la sistematización y capacidad de explicación de la mente humana. Las curvas son trayectorias de grandes ideas, de dibujos, de expresiones matemáticas, de aplicaciones en la predicción científica y social. Son caminos zigzagueantes de propiedades y relaciones con valores de parámetros concretos. Aparecen curvas simples en la resolución de problemas difíciles y familias de curvas como posibilidad de solución en situaciones complicadas. Las curvas tienen un espíritu rebelde y flexible, abierto y, en ocasiones, cerrado, que puede llegar a reducirse en la curva más simple, la línea recta. Las curvas suponen un descanso en el pensamiento matemático, la puerta a un universo infinito de relaciones, de formas, de sorpresas, familias, parientes y representaciones.

Desde la Antigüedad, las curvas intentan ser explicación de la dimensión humana y del universo. Definen ruedas de carros y trayectorias de cohetes espaciales, zonas de movimiento de electrones en un núcleo atómico y desplazamiento de huracanes. Construyen bóvedas y arcos de catedrales, figuras de esculturas y formas constructivas en museos modernos.

El hombre intenta dominar las curvas obligándolas a explicarse mediante números, ecuaciones... y aplicándoles los conocimientos matemáticos más potentes, como el cálculo infinitesimal, las ecuaciones diferenciales o las integrales elípticas.

Las curvas se presentan como estructuras cáusticas, envolventes, involutas, inversas, podarias, lemniscatas, cicloides, concoides, espirales, estrofoides, rodantes, deslizantes, deltoides, astroides, rosas... un conjunto infinito y maravilloso.

El lector puede abordar este libro sin necesidad de seguir el orden de los capítulos y ahorrarse también la lectura de los apartados que considere de un nivel matemático excesivo sin por ello sufrir pérdidas en la comprensión global del mismo. Y también puede ampliar su viaje por el mundo de las curvas en las obras que se mencionan en la bibliografía.

Deseamos señalar la gran ayuda que ha supuesto en el desarrollo de este libro el uso de algunos de los magníficos programas de representación de curvas y de cálculo simbólico actuales, como Geogebra y Derive. Tras su lectura, nos complacería que el lector pasara tan buenos ratos con estos programas como nosotros, y nuestra última intención es que ponga el ojo en la mirilla de la puerta de la casa de las curvas y descubra que en el recibidor hay una inmensidad de maravillas y peligros matemáticos sorprendentes.

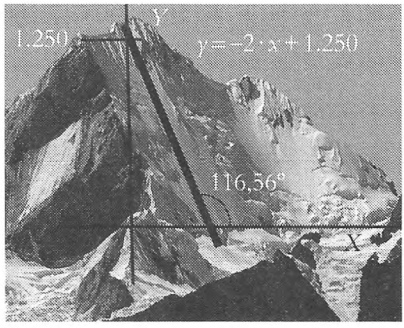
Capítulo 1

Para qué se emplean las curvas

Las curvas se usan en todos los campos de la vida, la ciencia y la tecnología. Este capítulo ofrece una visión general sobre los usos de las curvas y describe con detalle los principales sistemas de representación que se han desarrollado para explicarlas: sistemas cartesiano, polar y paramétrico. Veremos cómo se «matematizan» los caminos de montaña sobre un plano, cómo se conocen las órbitas de los planetas, cómo se dibujan con ordenador los más variados objetos, cómo se trazan las curvas de los estudios de mercado, y estudiaremos la desintegración radiactiva, la trayectoria de un electrón dentro de un átomo, la composición de dos ondas de luz y el uso de la corriente eléctrica. Con curvas se realizan estudios sobre la oferta y la demanda, la probabilidad, el crecimiento de las poblaciones, la evolución de la bolsa, el cálculo de hipotecas y cómo lanzar cohetes al espacio. La forma del camino seguido por un esquiador, una bala o un planeta se denomina trayectoria. Si este camino se encuentra sobre una superficie plana, se puede definir con exactitud mediante una fórmula matemática que relacione sus coordenadas horizontal (X) y vertical (Y) con respecto a unos ejes de referencia elegidos previamente.

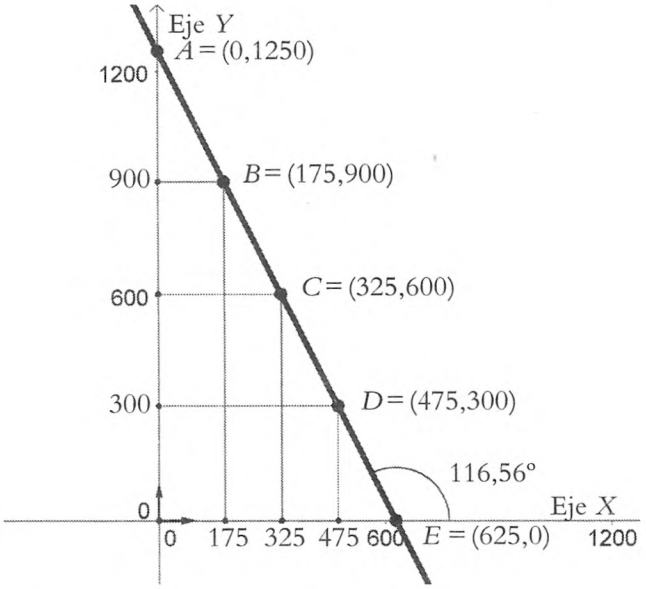
Sistemas de referencia. Coordenadas cartesianas

Un caso sencillo que estudiaremos es la trayectoria de un esquiador que baja en línea recta por una pista de esquí de montaña, partiendo de una altitud de 1.250 m.



Trayectoria o camino recto del descenso de un esquiador.

Naturalmente un esquiador sensato nunca seguiría esa trayectoria porque no saldría vivo, pues su velocidad al final del recorrido sería de 563 km/h.



Ecuación de la trayectoria: $y = -2 \cdot x + 1.250$ *con respecto a los ejes* X *e* Y *elegidos previamente.*

Para determinar una fórmula matemática que represente su trayectoria, se puede observar que:

$$\frac{300-1250}{475} = \frac{600-1250}{325} = \frac{900-1250}{175} = -2.$$

De estas igualdades parece deducirse que cada punto (x,y) de la recta cumple la relación siguiente:

$$\frac{\text{Coordenada } y - 1250}{\text{Coordenada } x} = -2.$$

Por lo tanto, los valores de las coordenadas (x,y) de cada punto de la recta estarán relacionados matemáticamente mediante la fórmula:

$$\frac{y-1250}{x} = -2,$$

en la cual, aislando la coordenada y, queda:

$$y = -2x + 1250.$$

Dicha fórmula se denomina ecuación cartesiana de la recta.

Todas las rectas del plano X–Y tienen ecuaciones del estilo $y = m \cdot x + n$, donde m se llama *pendiente* de la recta que, en este caso, es una cantidad constante, dado que se trata de una recta.

Puede comprobarse que este valor $m = -2$ es precisamente la tangente («tan», en la calculadora) del ángulo (116,56°) que forma la recta con el sentido positivo del eje horizontal (eje X).

La ecuación representa la recta de descenso con respecto a un sistema de coordenadas de referencia: dos ejes perpendiculares (a los que llamamos X e Y), dos sentidos positivos de las coordenadas sobre ellos y una unidad de medida, como se indica en la figura. Este sistema de referencia se elige antes de buscar la ecuación de cualquier curva o recta.

Este tipo de sistema de coordenadas se denomina cartesiano en honor a René Descartes, que lo inventó a principios del siglo XVII (aunque ya era usado por otro matemático contemporáneo suyo, Pierre de Fermat).

Para calcular m medimos el ángulo que forma el camino con el sentido tomado positivo en la horizontal (el eje X) con un instrumento usado por los topógrafos llamado teodolito. En nuestro caso resultará 116,56°. Entonces, la tangente de ese ángulo se obtiene mediante una calculadora y resulta: $\tan(116{,}56°) = -2$.

En el resto de las curvas la pendiente es diferente en cada punto. La única «curva» con igual pendiente en todos sus puntos es la línea recta.

En la ecuación de una recta genérica, $y = m \cdot x + n$, el número n indica la altura en la que el camino (la recta) corta el eje de coordenadas vertical Y elegido.

Los puntos A, B, C, D, E marcados son cinco de los puntos de paso del esquiador a lo largo de su trayectoria recta. Cada punto tiene sus coordenadas x e y indicadas entre paréntesis.

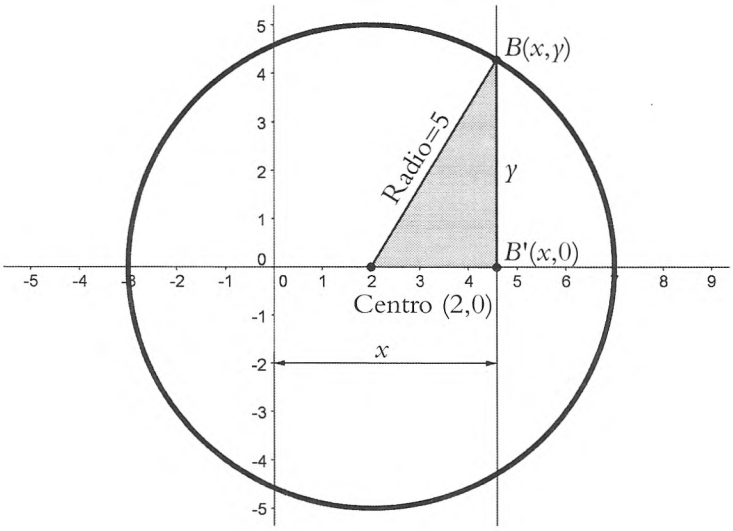
La pendiente m de una recta está relacionada con el ángulo que forma dicha recta con el eje horizontal o eje X, e indica la inclinación de la trayectoria. Esta relación se denomina tangente trigonométrica del ángulo, e indica los metros que el esquiador desciende verticalmente por cada metro que avanza en horizontal. El número constante m es negativo en el caso de una trayectoria de descenso, y positivo en una trayectoria de ascenso. La fórmula o ecuación de la trayectoria de descenso del esquiador *representa todas las posiciones* por las que va pasando a lo largo del

descenso, cada una de las cuales se indica mediante sus dos coordenadas. Se puede decir que la ecuación, una simple fórmula matemática, «contiene o explica toda la curva», todos sus puntos y su forma característica. La fórmula o ecuación cartesiana de la recta $y=-2x+1.250$ permite calcular todas esas posiciones, como se observa en la tabla siguiente:

x	Cálculo de la coordenada y con la fórmula $y=-2x+1.250$	Posiciones del esquiador (x,y)	Punto
0	$-2\cdot 0+1.250=1.250$	(0,1.250)	*A*
175	$-2\cdot 175+1.250=900$	(175,900)	*B*
325	$-2\cdot 325+1.250=600$	(325,600)	*C*
475	$-2\cdot 475+1.250=300$	(475,300)	*D*
625	$-2\cdot 625+1.250=0$	(625,0)	*E*

Cuando se trata de curvas en general, la pendiente cambia en cada uno de sus puntos. Por ello suele decirse que la recta es la curva más sencilla.

La curva más perfecta, muy conocida desde la Antigüedad, es la circunferencia. La religión griega clásica afirmaba que los dioses la usaban en los fenómenos más importantes, como en las trayectorias de los objetos celestes. Tiene una ecuación cartesiana más compleja que la recta. Se puede deducir dicha ecuación aplicando el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo:



Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo CBB' resulta que:

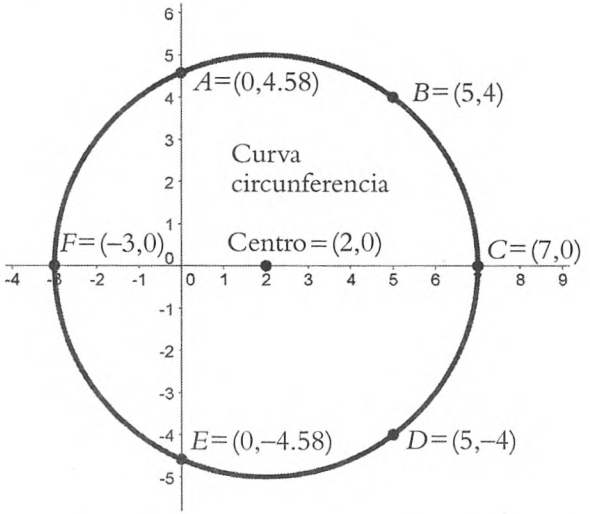
$$\text{hipotenusa } CB^2 = \text{cateto } CB'^2 + \text{cateto } BB'^2.$$

Como la distancia BC = radio = 5, la distancia $BB' = y$, y la distancia $CB' = x-2$, resulta que: $5^2=(x-2)^2+y^2$, o bien: $(x-2)^2+y^2=25$.

Si se despeja la variable y, la ecuación de la circunferencia sería:

$$y=\pm\sqrt{25-(x-2)^2}.$$

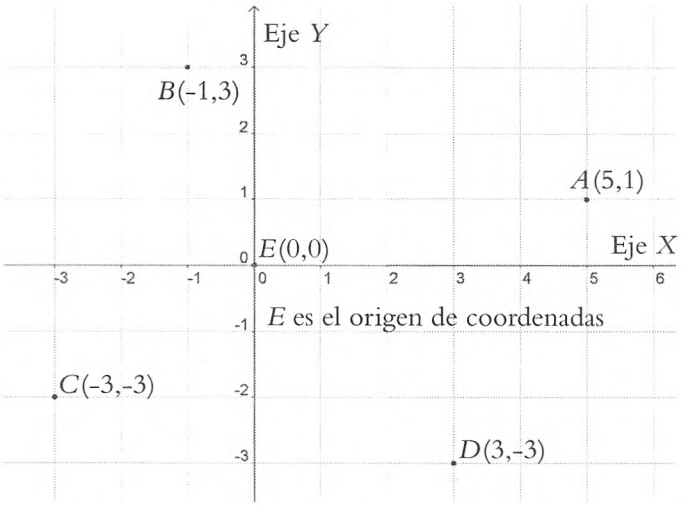
En el caso de la circunferencia de centro (2,0) y radio 5, se obtiene la gráfica y la tabla de valores siguientes:



x	Cálculo de la coordenada y de cada punto, con la fórmula: $y = \pm\sqrt{25-(x-2)^2}$	y	Punto
0	$y=+\sqrt{25-(0-2)^2}=\sqrt{21}=4{,}58$	4,58	A
5	$y=+\sqrt{25-(5-2)^2}=\sqrt{16}=4{,}00$	4	B
7	$y=+\sqrt{25-(7-2)^2}=\sqrt{0}=0{,}00$	0	C
5	$y=-\sqrt{25-(5-2)^2}=-\sqrt{16}=-4{,}00$	–4	D
0	$y=-\sqrt{25-(0-2)^2}=-\sqrt{21}=-4{,}58$	–4,58	E
–3	$y=-\sqrt{25-(-3-2)^2}=-\sqrt{0}=0$	0	F

Las curvas que se encuentran sobre un plano pueden dibujarse con varios sistemas de representación o sistemas de coordenadas. El más conocido es el sistema de coordenadas cartesianas, que ya hemos empleado para escribir la ecuación de la trayectoria recta del esquiador y la ecuación de la circunferencia. Éste se emplea, por ejemplo, en el popular «juego de los barcos», en el que dos jugadores intentan destruir la escuadra del contrincante. Ambos dibujan previamente la posición de sus barcos en dos hojas de papel y las determinan con un sistema de coordenadas cartesianas. Un jugador prueba un punto (dos coordenadas) en un intento de identificar alguno de los barcos del adversario y en él «lanza un torpedo». Al decir las dos coordenadas de su intento, el otro jugador contesta «tocado», «hundido» o «agua», en función de que uno de sus barcos se halle, total o parcialmente, en dicho punto, o bien no se encuentre en él.

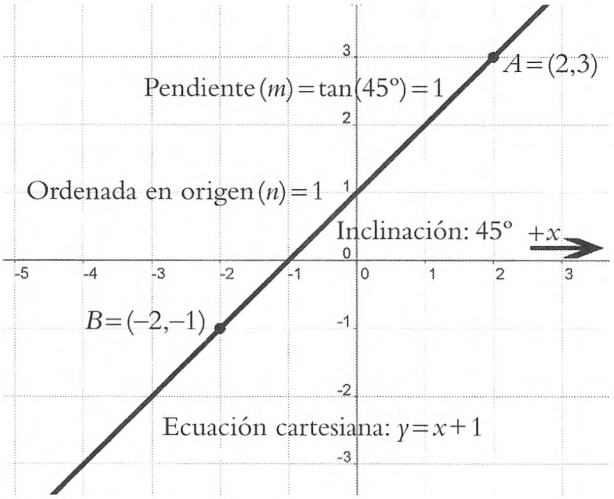
Este sistema de coordenadas del plano se basa en dos líneas rectas perpendiculares (llamadas ejes coordenados X e Y) sobre las cuales se marcan una serie de puntos a igual distancia (unidad de medida) a partir del punto de intersección de ambos ejes, que es el punto inicial u origen de coordenadas, (0,0). Normalmente, sobre el eje X y desde el 0 hacia la derecha se designan puntos con cotas positivas crecientes y hacia la izquierda, puntos con cotas negativas decrecientes, que reciben el nombre de abscisas. Del mismo modo, sobre la parte superior del eje Y se designan puntos con cotas positivas crecientes, y en la inferior, puntos con cotas negativas decrecientes, llamadas ordenadas.



Los puntos en la parte derecha del eje X se indican como (1,0), (2,0), (3,0),..., y los puntos a la izquierda, como (–1,0), (–2,0), (–3,0),... De un modo semejante,

los puntos superiores e inferiores del eje Y son los (0,1), (0,2), (0,3),... y (0,–1), (0,–2), (0,–3),... Un punto cualquiera del plano X-Y se designa por sus dos coordenadas (x, su abscisa, e y, su ordenada). Por ejemplo, el punto (5,1) indica que dicho punto se halla a una distancia de 5 unidades del eje Y, y a una distancia de 1 unidad del eje X, tal como se indica en la figura anterior.

Los dos ejes dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes. El punto A se halla en el primer cuadrante; el B, en el segundo; el C, en el tercero, y el D, en el cuarto. Por lo tanto, las referencias necesarias para definir un sistema de coordenadas cartesianas son *dos ejes* perpendiculares (abscisas y ordenadas, X e Y), con los *sentidos* positivo y negativo indicados y una *unidad de medida* para determinar la distancia entre dos coordenadas seguidas. Tal como se muestra en la ilustración siguiente, si se dibuja la recta que pase por los puntos A (2,3) y B (–2,–1) sobre un plano que ya tiene indicados los ejes coordenados X e Y, se observa que todos los puntos de dicha recta tienen la misma relación entre su coordenada Y y su coordenada X.



En este caso, esta relación matemática se expresa así: el valor de Y de cada punto es siempre el correspondiente valor de X más 1.

Puede pensarse que la expresión matemática (ecuación o fórmula) $y=x+1$ «representa» todos los puntos de la recta dibujada y «contiene», en cierto modo, toda esa recta y la forma que tiene. Esta fórmula se denomina *ecuación* de la recta.

A los valores que pueden tomar x e y se les llama *variables* (porque pueden tener muchos valores). En las ecuaciones expresadas en el sistema cartesiano, la x se conoce como *variable independiente*, y la y, como *variable dependiente* o *variable función*.

Esto significa que la variable x puede adoptar un conjunto de valores a voluntad (todos los que desee el que traza la curva), pero los valores de y «dependen» del resultado que se obtiene para cada valor de x seleccionado en la ecuación (o fórmula) de la curva en concreto.

Comparando la ecuación de esta recta con la ecuación más general de una recta en coordenadas cartesianas, $y = m \cdot x + n$ vista anteriormente, ocurre que, en este caso, los valores de m y n son: $m = 1$, $n = 1$. El ángulo que forma la recta con el eje X es el ángulo o *inclinación* cuya tangente (tan en la calculadora) es 1. Y esto corresponde a un ángulo de 45°, como puede comprobarse en la gráfica. El valor $n = 1$ indica que el punto de corte de la recta con el eje Y es el punto (0,1).

Todos los puntos de esa recta tienen sus coordenadas en la relación $(x, x+1)$, como por ejemplo, (–3,–2), (–2,–1), (–1,0), (0,1), (1,2), (2,3),... En este caso, los valores seleccionados de la variable independiente x son: –3, –2, –1, 0, 1, 2, y los valores «dependientes» de y que les corresponden son: –2, –1, 0, 1, 2, 3.

Evidentemente, el que traza la recta puede dar muchos más valores a x, obteniendo los que corresponden de y. Pero en el caso de las rectas solamente son necesarios dos puntos, ya que «por dos puntos sólo pasa una recta».

Si ahora se considera la circunferencia anteriormente dibujada de radio 5 y centro en (0,2), puede afirmarse que su ecuación en coordenadas cartesianas es: $y = \pm\sqrt{25-(x-2)^2}$. Para dibujar esta circunferencia es necesario conocer más de dos puntos para establecer su forma y posición. El signo + de la raíz corresponde a los puntos de la parte superior, y el signo –, a los de la curva en la parte inferior del eje X. Todos los puntos de la parte superior de esta circunferencia tienen por coordenadas $(x, +\sqrt{25-(x-2)^2})$, y todos los de su parte inferior, $(x, -\sqrt{25-(x-2)^2})$.

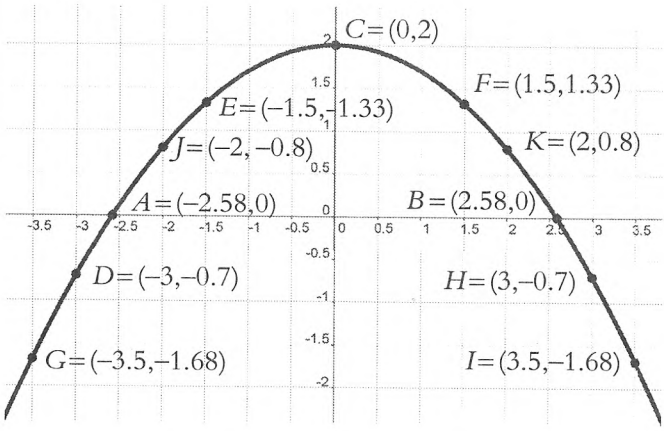
Como se ha visto, todas las rectas tienen ecuaciones que son de primer grado, lo que significa que en la ecuación la x y la y están elevadas a la primera potencia (por tanto, no aparecen x^2, y^2 o potencias superiores de x e y). Se dice que todas las rectas forman la familia de las curvas de primer grado.

En cambio, la ecuación de la circunferencia escrita con la y despejada (este tipo de ecuación cartesiana se llama explícita porque la variable y está aislada a la izquierda de la ecuación) es: $y = \pm\sqrt{25-(x-2)^2}$, o bien en la forma llamada implícita (en que no está aislada ninguna de las dos variables, x e y): $(x-2)^2 + y^2 = 25$. En las ecuaciones de este tipo de curvas aparecen potencias de las variables x o y superiores a uno. Por esta razón se dice que la circunferencia y otras curvas parecidas como la parábola, la hipérbola y la elipse, pertenecen a la familia de las curvas de segundo grado (también se las conoce como cónicas, más adelante sabremos por qué).

Las *parábolas* tienen ecuaciones cartesianas del estilo $y = ax^2 + bx + c$; por ejemplo, $y = -0{,}3x^2 + 2$, o bien $y = 3x^2 - 2$.

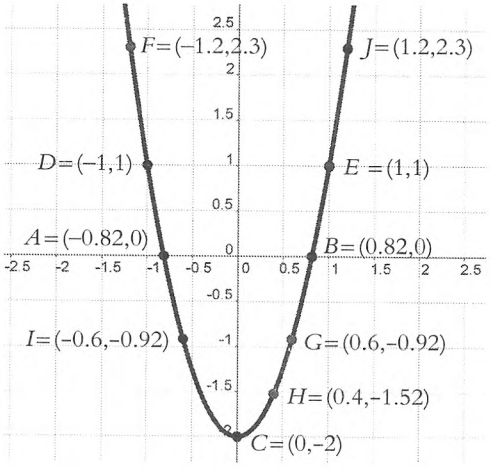
Como se comprueba en las gráficas siguientes, las dos parábolas tienen como eje de simetría el eje *Y*. En el primer caso, sus ramas se dirigen hacia abajo, y en el segundo, hacia arriba. Las dos ramas están más «cerradas» en la parábola $y = 3x^2 - 2$ y más «abiertas» en la parábola $y = -0{,}3x^2 + 2$. Se han dibujado estas dos curvas calculando diferentes puntos de las mismas a partir de su ecuación.

x	*y*	Punto
–3,5	–1,68	*G*
–3	–0,7	*D*
–2,5	0,13	cerca de *A*
–2	0,8	*J*
–1,5	1,33	*E*
0	2	*C*
1,5	1,33	*F*
2	0,8	*K*
2,5	0,13	cerca de *B*
3	–0,7	*H*
3,5	–1,68	*I*



Curva parábola con simetría vertical de ecuación cartesiana $y = -0{,}3x^2 + 2$.

x	*y*	Punto
–1,20	2,32	*F*
–1,00	1	*D*
–0,80	–0,08	cerca de *A*
–0,60	–0,92	*I*
–0,40	–1,52	*H*
0,00	–2	*C*
0,60	–0,92	*G*
0,80	–0,08	cerca de *B*
1,00	1	*E*
1,20	2,32	*J*



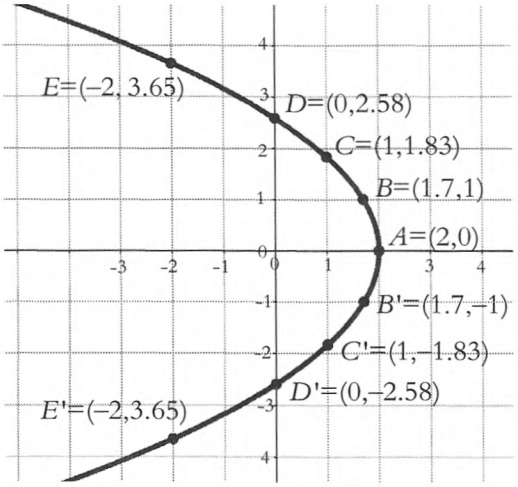
Curva parábola con simetría vertical de ecuación cartesiana: $y = +3x^2 - 2$.

Existe otro tipo de curvas parabólicas con ecuaciones parecidas a las anteriores pero con las variables x e y intercambiadas. Dos ejemplos serían $x=-0{,}3y^2+2$; $x=3y^2-2$. Si se despeja la variable y quedarían así:

$$y=\pm\sqrt{\frac{-x+2}{0{,}3}};\quad y=\pm\sqrt{\frac{x+2}{3}}.$$

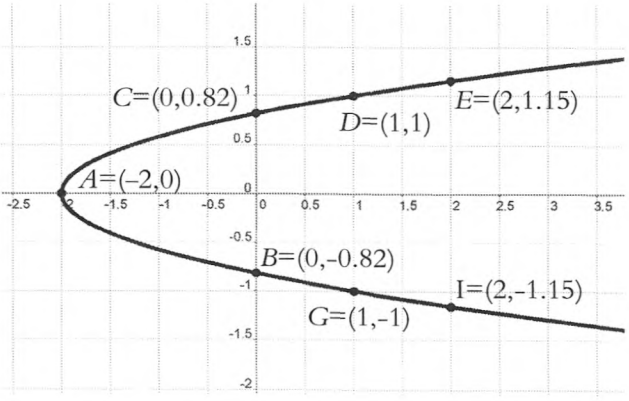
El eje de simetría de estas dos parábolas es X, y sus gráficas son las siguientes:

x	y	Punto
–2	3,65	E
0	2,58	D
1	1,83	C
1,7	1	B
2	0	A
1,7	–1	B'
1	–1,83	C'
0	–2,58	D'
–2	–3,65	E'



Curva parábola con simetría horizontal de ecuación cartesiana $x=-0{,}3y^2+2$, *o bien* $y=\pm\sqrt{\frac{-x+2}{0{,}3}}$.

x	y	Punto
2	1,15	E
1	1	D
0	0,82	C
–2	0	A
0	–0,82	B
1	–1	G
2	–1,15	I



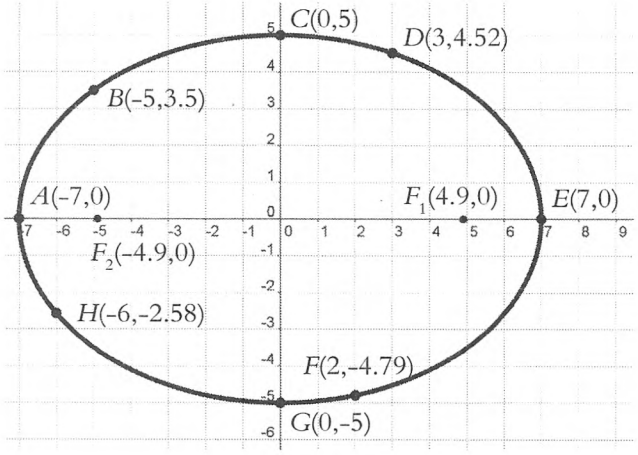
Curva parábola con simetría horizontal. Ecuación cartesiana: $x=3y^2-2$, *o bien* $y=\pm\sqrt{\frac{x+2}{3}}$.

La *elipse* es otra curva de la familia de las curvas de segundo grado. Su ecuación cartesiana puede expresarse de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

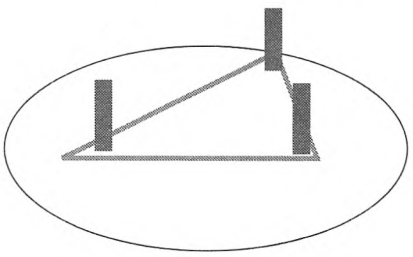
en la que a y b son las longitudes de la mitad de su diámetro mayor y su diámetro menor. En la gráfica siguiente puede verse una elipse de diámetro mayor 14 y diámetro menor 10. Sus focos son los puntos F_1 y F_2. La propiedad básica de la elipse es que la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos a los dos focos es constante, y su valor es $2a$. En el caso de la elipse que se indica a continuación, esta suma es: $2a=2\cdot 7=14$.

x	y	Punto
–7	0	*A*
–5	3,5	*B*
0	5	*C*
3	4,52	*D*
7	0	*E*
2	–4,79	*F*
0	–5	*G*
–6	–2,58	*H*



Curva elipse. Ecuación cartesiana: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$, *o bien* $y=\pm 5\sqrt{(1-\frac{x^2}{49})}$.

La elipse es una curva muy conocida desde la Antigüedad griega clásica. Se la conoce como «*curva del jardinero*» pues los jardineros dibujan en el suelo elipses para plantar flores. Consiguen esta curva mediante una cuerda y dos palos clavados en el suelo en los focos de la elipse, como se indica en la ilustración. Los puntos fijos son los focos de la elipse.



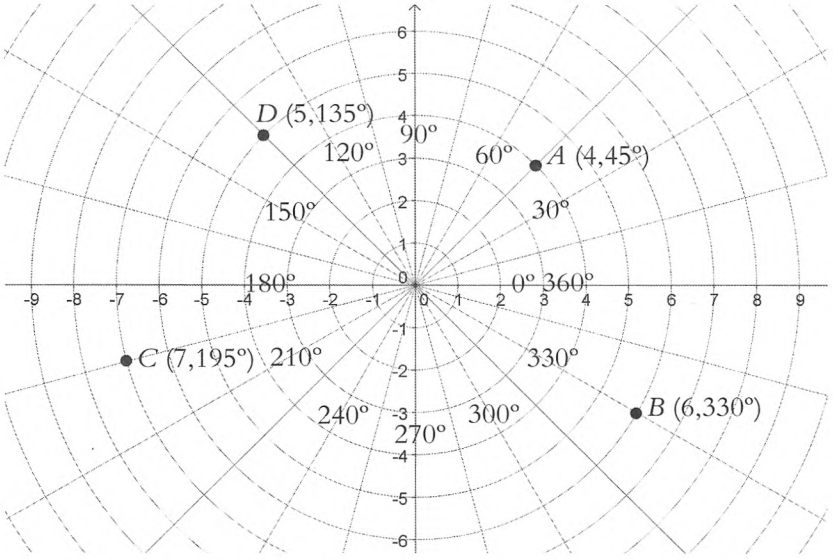
La humanidad ha creído durante siglos que las curvas que seguían los plane-

tas y las estrellas eran circunferencias, pues ésta se consideraba la curva más perfecta y, por tanto, los dioses tenían que haberla elegido para las trayectorias de todos los astros del firmamento. Naturalmente, el centro de todas esas circunferencias debía ser la Tierra. El primero que se atrevió a desafiar esa hipótesis fue Johannes Kepler (1571-1630), quien llegó a la conclusión de que las curvas planetarias eran elípticas.

Para representar las curvas, además de las *coordenadas cartesianas*, se han definido otros sistemas de coordenadas, como las *coordenadas polares* y las *coordenadas paramétricas*.

El concepto de sistema de coordenadas polares fue definido por Isaac Newton (1642-1727) en su primer libro *Método de las fluxiones* (escrito en 1671 y publicado en 1736), donde inventó el concepto de derivada, aunque este método ya había sido empleado por el suizo Jakob Bernoulli (1654-1705) en diversos trabajos de la revista científica *Acta eruditorum* en 1690.

Para definir un sistema de coordenadas polares, las referencias que se toman son un punto de origen (polo) y un eje a partir del cual se miden ángulos que se consideran positivos si giran en sentido contrario a las agujas del reloj. En la figura siguiente se indican cuatro puntos y sus coordenadas polares. Están situados uno en cada cuadrante; son: $A\,(4,45°)$, $B\,(6,330°)$, $C\,(7,195°)$ y $D\,(5,135°)$.



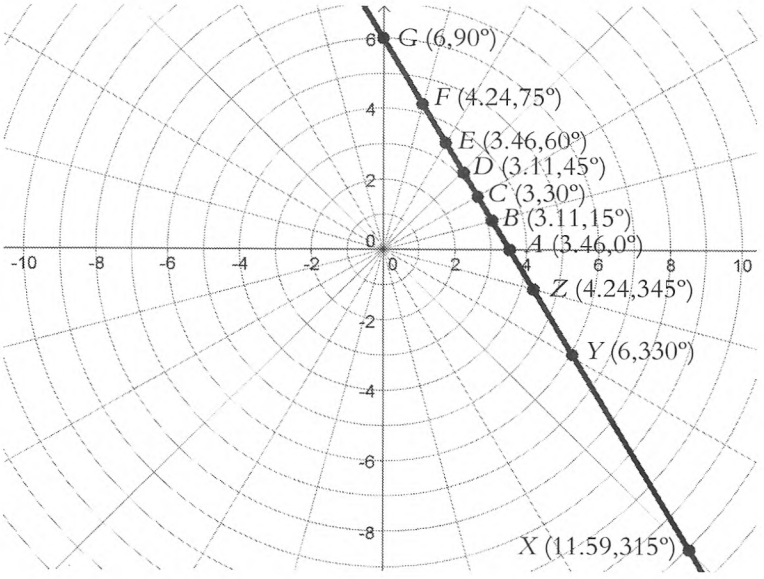
Las coordenadas polares de un punto, en lugar de ser dos longitudes como en las coordenadas cartesianas, son una longitud y un ángulo. La longitud es la distancia del punto al polo del sistema de coordenadas. El ángulo es el formado por el segmento

que lo une al polo y el eje polar tomado en el sentido positivo de giro. En general se emplean la letra r y la letra griega θ, es decir, un punto en polares se indica $P(r,\theta)$.

La ecuación o fórmula de una curva también puede expresarse en coordenadas polares. En el caso de una recta como la de la figura, que tiene una ecuación cartesiana $y=-1{,}73x+6$, en coordenadas polares tiene la ecuación:

$$r=\frac{3}{\cos(\theta-30)}.$$

Punto	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	...	...		...	*X*	*Y*	*Z*	*A*
Ángulo	0	15	30	45	60	75	90	105	120	...	300	315	330	345	360
Radio	3,46	3,11	3,00	3,11	3,46	4,24	6,00	11,59	∞		∞	11,59	6,00	4,24	3,46

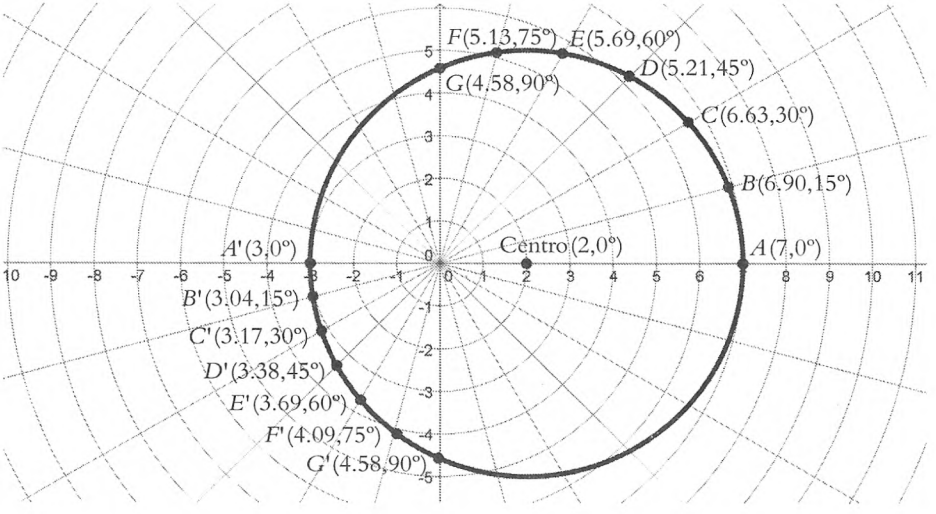


En el caso de la circunferencia de radio 5 y centro (2,0) descrita anteriormente con ecuación cartesiana $y=\pm\sqrt{25-(x-2)^2}$, su ecuación en coordenadas polares es:

$$r=2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta+21}.$$

La posición y las coordenadas polares de 14 de sus puntos están señaladas en el gráfico y tabla adjuntos: r_1 corresponde al signo más de la ecuación, y r_2, al signo menos para el mismo ángulo θ.

Ángulo θ	r_1	Punto	r_2	Punto
0	7,00	A	–3,00	*A'*
15	6,90	B	–3,04	*B'*
30	6,63	C	–3,17	*C'*
45	6,21	D	–3,38	*D'*
60	5,69	E	–3,69	*E'*
75	5,13	F	–4,09	*F'*
90	4,58	G	–4,58	*G'*



Ecuación de la circunferencia en coordenadas polares: $r = 2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta + 21}$.

La elipse cuya gráfica se ha realizado anteriormente a partir de su ecuación en coordenadas cartesianas,

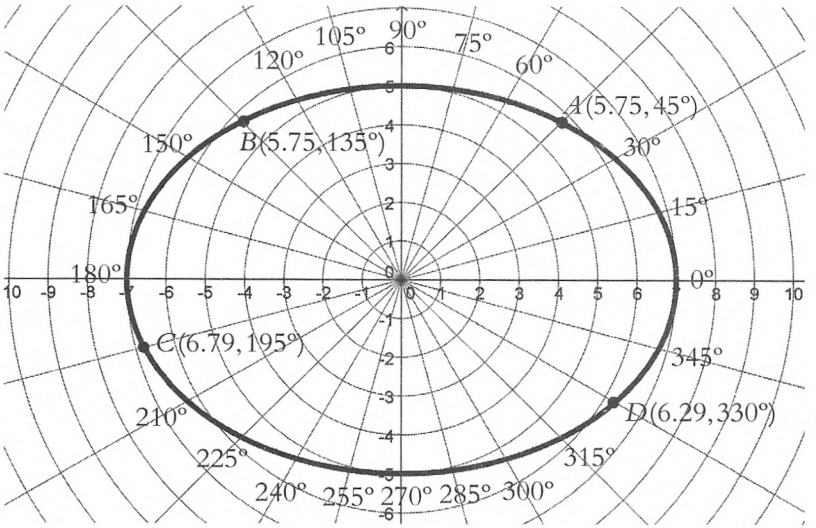
$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

puede también expresarse en coordenadas polares:

$$r = \frac{35}{\sqrt{49\text{sen}^2\theta + 25\cos^2\theta}},$$

y ser dibujada con un sistema polar de representación:

Ángulo θ	Punto	*r*
0	...	7,00
15	...	6,79
30	...	6,29
45	*A*	5,75
.....		
135	*B*	5,75
150	...	6,29
165	...	6,79
180	...	7,00
195	*C*	6,79
.....		
330	*D*	6,29
345	...	6,79
360	...	7,00



Al comparar las ecuaciones de una misma curva en los sistemas cartesiano y polar puede observarse que su aspecto es muy distinto, e incluso presentan diferente complejidad.

La ecuación de la recta en coordenadas cartesianas,

$$y = -1{,}73x + 6,$$

resulta en coordenadas polares:

$$r = \frac{3}{\cos(\theta - 30)}.$$

La ecuación de la circunferencia en coordenadas cartesianas,

$$y = \pm\sqrt{25 - (x-2)^2},$$

resulta en coordenadas polares:

$$r = 2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta + 21}.$$

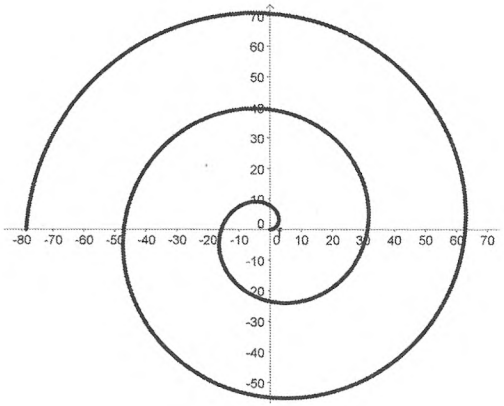
La ecuación en cartesianas de la elipse centrada en el origen,

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

resulta en coordenadas polares:

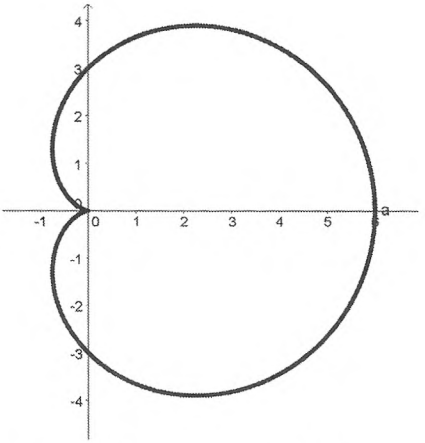
$$r = \frac{35}{\sqrt{49\,\mathrm{sen}^2\theta + 25\cos^2\theta}}.$$

En estos tres casos, los dos tipos de ecuaciones (cartesianas y polares) de rectas, circunferencias y elipses parecen igual de complicadas. Sin embargo, en otras curvas, la diferencia de complejidad de sus ecuaciones según el sistema de coordenadas elegido es enorme. Es el caso de la lemniscata y de la espiral de Arquímedes, como puede comprobarse en las figuras siguientes:



Espiral de Arquímedes. Ecuación en polares: $r=5\theta$. *Ecuación implícita en cartesianas:*

$$y - x\tan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{5}\right)=0.$$



Cardioide. Ecuación en polares: $r=3(1+\cos\theta)$. *Ecuación implícita en cartesianas:* $(x^2+y^2)^2-6x(x^2+y^2)-9y^2=0$.

Otro tipo de sistemas de representación de curvas muy empleado es el denominado *paramétrico*. Dichos sistemas son más sofisticados y se deben a Euler y Gauss (siglos XVIII y XIX), quienes los usaron ampliamente en sus estudios sobre curvas y superficies. Las coordenadas paramétricas tienen la ventaja de ser *intrínsecas*, ya que no dependen de unos ejes externos, como en el caso de las coordenadas cartesianas o polares, sino que se basan en un sistema de referencia incluido en el propio objeto o curva.

Un ejemplo de coordenadas paramétricas son las que se usan para determinar una posición sobre la Tierra (longitud y latitud). Son dos parámetros que no se refieren a un sistema de coordenadas cartesiano externo a nuestro planeta, que sería tridimensional, sino a unos círculos imaginarios situados sobre la propia superficie terrestre, que se puede considerar bidimensional.

El número de parámetros necesario para describir un objeto geométrico (una curva plana o un cuerpo 3D) indica su dimensión. En el caso de las rectas y las curvas planas es uno; por lo tanto, su expresión requiere tan sólo un parámetro.

Para poder representar gráficamente una curva plana es preciso transformar las coordenadas paramétricas en coordenadas cartesianas. Ello conduce a dos ecuaciones que nos permiten calcular la x y la y de cada punto en función del parámetro, designado en general por las letras u o t. Estas ecuaciones se llaman *paramétricas*.

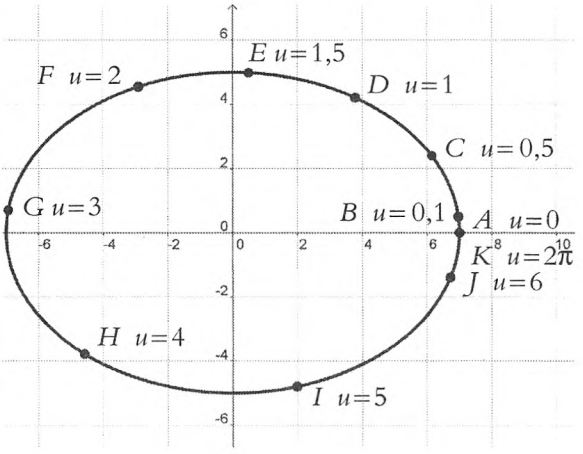
Las ecuaciones paramétricas de la elipse (de semiejes 7 y 5) con su centro en el origen de coordenadas son:

$$\begin{cases} x = 7\cos(u) \\ y = 5\ \text{sen}(u) \end{cases}$$

Pueden obtenerse las coordenadas cartesianas de todos sus puntos asignando valores al parámetro u entre 0 y 2π radianes ($\cong 6{,}28$), que equivalen a una vuelta completa (de 0° a 360°). Un radián es un ángulo de medida

$$\frac{360}{2\pi} \cong 57{,}30°.$$

u	*x(u)*	*y(u)*	Punto
0	7,00	0,00	*A*
0,1	6,97	0,50	*B*
0,5	6,14	2,40	*C*
1	3,78	4,21	*D*
1,5	0,50	4,99	*E*
2	–2,91	4,55	*F*
3	–6,93	0,71	*G*
4	–4,58	–3,78	*H*
5	1,99	–4,79	*I*
6	6,72	–1,40	*J*
2π	7,00	0,00	*K*



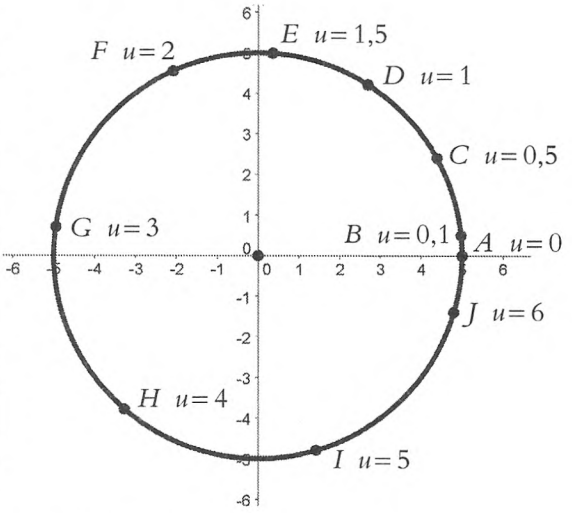
Curva elipse. Ecuaciones paramétricas: x=*7 cos*(u)
y=*5 sen*(u)

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio 5 y centro en el origen (0,0) son:

$$\begin{cases} x = 5\cos(u) \\ y = 5\,\text{sen}(u) \end{cases}$$

También pueden obtenerse las coordenadas cartesianas de todos sus puntos a partir de valores asignados al parámetro u entre 0 y 2π radianes ($\cong 6{,}28$), que equivalen a una vuelta completa.

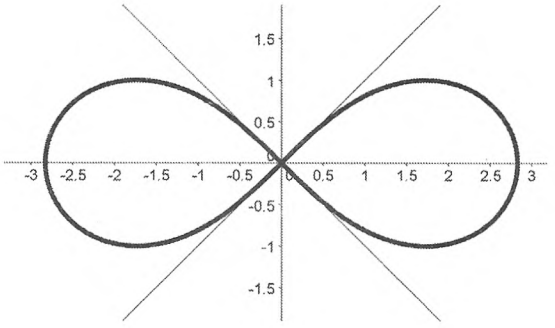
u	*x(u)*	*y(u)*	Punto
0,00	5,00	0,00	*A*
0,10	4,98	0,50	*B*
0,50	4,39	2,40	*C*
1,00	2,70	4,21	*D*
1,50	0,35	4,99	*E*
2,00	–2,08	4,55	*F*
3,00	–4,95	0,71	*G*
4,00	–3,27	–3,78	*H*
5,00	1,42	–4,79	*I*
6,00	4,80	–1,40	*J*
2π	5,00	0,00	*A*



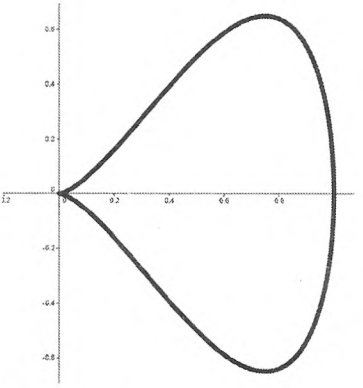
Ecuaciones paramétricas: $x = 5\cos(u)$, $y = 5\,sen(u)$

Curvas para dibujar objetos con ordenador

Las formas de objetos muy diversos, naturales o artificiales, pueden construirse con curvas matemáticas, como el signo de infinito o una fruta como la pera.



Óvalo de Cassini. Ecuación $y = \pm\sqrt{\sqrt{16x^2+16} - x^2 - 4}$ *en coordenadas cartesianas.*

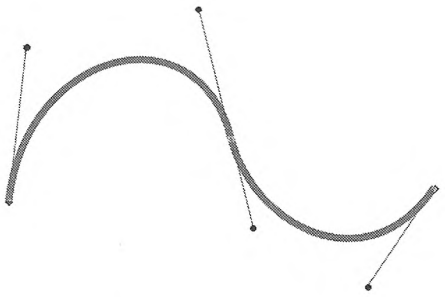


Curva cuártica piriforme. Ecuación $y = \pm 2x\sqrt{x - x^2}$ *en coordenadas cartesianas.*

Las ecuaciones paramétricas de las curvas explicadas anteriormente se emplean en gran medida en la generación de los gráficos por ordenador (aplicaciones de Diseño Asistido por Ordenador o CAD). Para trazar segmentos rectos con un pro-

grama de CAD se hace clic en el útil de dibujo (generalmente un icono con forma de pluma), se mueve el ratón y se hace clic en un nuevo punto. Pero para dibujar trazos suavemente curvados, se hace un clic y se mantiene apretado el botón mientras se ajusta la forma de la curva. Cuando dejamos el ratón queda establecido el punto o los puntos de control. La forma inicial que se ha trazado puede modificarse después moviendo la posición de los puntos de control.

Las ecuaciones paramétricas para las curvas del CAD, llamadas curvas de Bézier, se remontan a 1962 y fueron definidas por el ingeniero francés Pierre Bézier, que las utilizó en el diseño de piezas de automóvil para la empresa Renault.



Curva de Bézier con tres puntos de control.

Existen diferentes tipos de curva Bézier. Las *curvas lineales* de Bézier se definen con dos puntos, A y B. La curva lineal de Bézier es una línea recta que pasa por esos puntos y se expresa por la fórmula o ecuación matemática paramétrica:

$$\text{CURVA_Bezier_1}\,(u)=(1-u)\,A+uB \text{ para valores de } u \text{ entre } 0 \text{ y } 1,$$

que puede desarrollarse en dos ecuaciones paramétricas como las siguientes:

$$\begin{cases} x(u)=(1-u)\cdot x_A+u\cdot x_B \\ y(u)=(1-u)\cdot y_A+u\cdot y_B \end{cases}$$

Si los puntos de paso son A (0,0) y B (3,2), entonces la ecuación de la línea CURVA_Bezier_1 es la de una recta como:

$$\begin{cases} x=(1-u)\cdot 0+u\cdot 3 \\ y=(1-u)\cdot 0+u\cdot 2 \end{cases} \quad \text{o sea:} \quad \begin{cases} x=3u \\ y=2u \end{cases} \quad \text{o sea:} \quad y=\frac{2}{3}x,$$

que es una recta que pasa por el origen (0,0) y tiene pendiente 2/3.

Para dibujar con un programa de dibujo CAD una curva que venga determinada por tres puntos (dos de paso y uno de control) se emplean las *curvas cuadráticas* (o parábolas de segundo grado) de Bézier. Dados tres puntos $A\ (x_A,y_A)$, $B\ (x_B,y_B)$ y $C\ (x_C,y_C)$, puede determinarse una curva de segundo grado que pase por los puntos A y C con la condición de control que tenga en ellos unas rectas tangentes que sean precisamente las rectas AB y BC (B es el llamado punto de control).

La curva que propuso Bézier que cumple estas condiciones se expresa en coordenadas paramétricas con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x(u) = (1-u)^2 \cdot x_A + 2u(1-u) \cdot x_B + u^2 \cdot x_C \\ y(u) = (1-u)^2 \cdot y_A + 2u(1-u) \cdot y_B + u^2 \cdot y_C \end{cases}$$

El proceso de trazado empieza en el punto A (de paso), se dirige hacia B (punto de control, en la dirección AB, aunque la curva no pasa por B) y acaba en C (de paso), pero el trazo de la curva viene de la dirección BC.

Esto significa matemáticamente que AC es una recta tangente a la curva en el punto A, y BC es una recta tangente a la curva en el punto C.

Para valores del parámetro u entre 0 y 1 pueden calcularse los puntos de paso que se deseen para dibujar la curva que cumpla las condiciones indicadas.

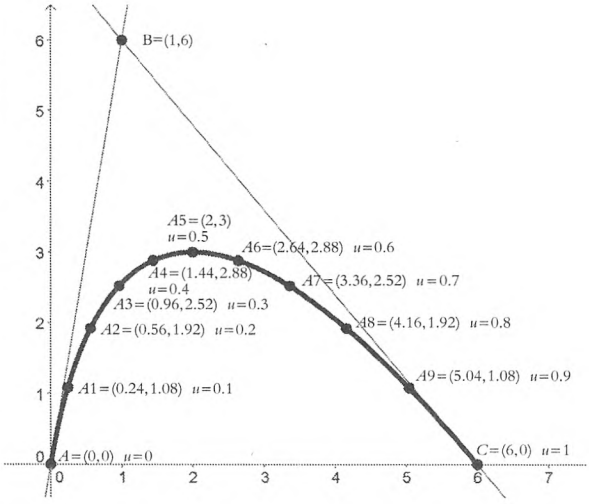
Para los puntos de paso A (0,0) y C (6,0) y el punto de control B (1,6), la ecuación de la línea CURVA_Bezier_2 se desarrolla en dos ecuaciones paramétricas que dan lugar a una curva parabólica de segundo grado:

$$\begin{cases} x(u) = (1-u)^2 \cdot 0 + 2u(1-u) \cdot 1 + u^2 \cdot 6 \\ y(u) = (1-u)^2 \cdot 0 + 2u(1-u) \cdot 6 + u^2 \cdot 0 \end{cases}$$

o sea: $$\begin{cases} x(u) = 4u^2 + 2u \\ y(u) = -12u^2 + 12u \end{cases}$$

Entonces el ordenador asigna valores de u entre 0 y 1, según los puntos necesarios que requiera la precisión del dibujo que se pretenda obtener, calcula las coordenadas de los puntos de la curva de Bézier y los «marca» en la pantalla. Esto permite aumentar el número de puntos en función del zoom del dibujo que se haya decidido. En el ejemplo de la ilustración de la página siguiente, el ordenador ha calculado 11 puntos de paso de la curva, incrementando el parámetro u de décima en décima.

u	*x(u)*	*y(u)*
0	0	0
0,1	0,24	1,08
0,2	0,56	1,92
0,3	0,96	2,52
0,4	1,44	2,88
0,5	2	3
0,6	2,64	2,88
0,7	3,36	2,52
0,8	4,16	1,92
0,9	5,04	1,08
1	6	0



Curva (parábola) de Bézier para los puntos de paso A*(0,0),* C*(6,0) y el punto de control* B*(1,6).*

Ecuaciones paramétricas $x(u) = 4u^2 + 2u$

$y(u) = -12u^2 + 12u$

Esta curva de Bézier expresada en coordenadas paramétricas da lugar, tras una serie de operaciones con un software de cálculo simbólico, como Derive, a una ecuación en coordenadas cartesianas que, efectivamente, es una parábola de segundo grado con la ecuación cartesiana adjunta entre $x=0$ y $x=6$:

$$y=\frac{3}{2}(3\sqrt{4x+1}-2x-3),$$

en la forma explícita (con la y despejada), o bien en la forma implícita: $9x^2+6xy-$ $-54x+y^2+9y=0$.

Curvas que definen fenómenos físicos y químicos

Muchos fenómenos físicos pueden representarse con curvas matemáticas mediante su fórmula o ecuación expresada en los diversos sistemas de coordenadas descritos. Un ejemplo son algunas de las trayectorias que un electrón puede describir en el interior de un átomo, que tienen la forma $\cos(n\theta)$, con n siempre par. Para n impar, tenemos, por ejemplo, una curva llamada rosa polar, estudiada por Guido Grandi, cuya ecuación en coordenadas polares es $r=\cos(5\theta)$.

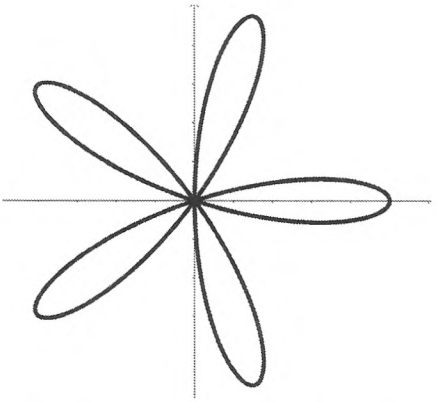
También aparece una curva muy atractiva al estudiar la trayectoria de una partícula sobre la que actúan a la vez dos movimientos armónicos (como el del péndulo)

que actúen en ángulo recto. Un ejemplo es el movimiento compuesto de un objeto material estirado a la vez por dos muelles diferentes que actúan en direcciones perpendiculares, o la onda resultante de la composición de dos ondas de distinta frecuencia que chocan en dos direcciones perpendiculares.

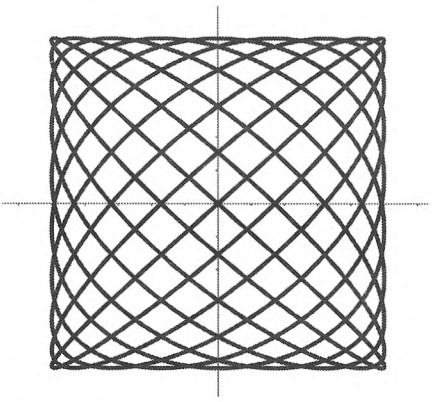
La trayectoria final de la partícula material, o la onda resultante, genera las llamadas curvas de Lissajous, un ejemplo de las cuales puede verse en la ilustración siguiente y que corresponde a las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \text{sen}(10u) \\ y = \text{sen}(9u) \end{cases}$$

En este caso la variable u es el tiempo.



Trayectoria de un electrón curva Rosa de Guido Grande. Ecuación en polares: $r = \cos(5\theta)$.



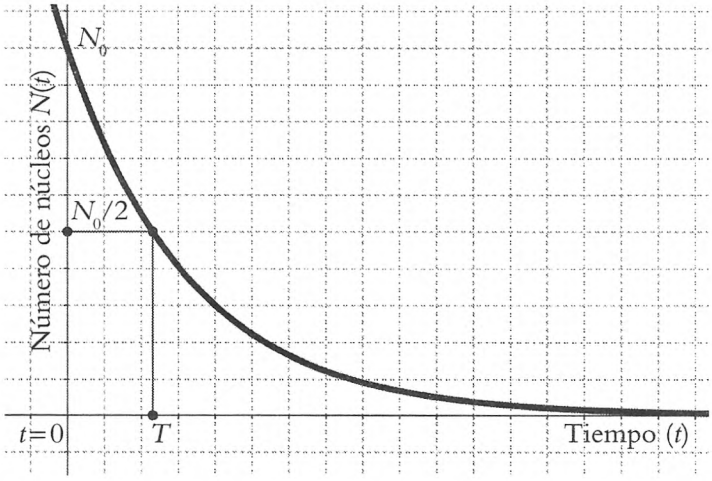
Curvas de Lissajous. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = sen(10u) \\ y = sen(9u) \end{cases}$$

Los núcleos de los átomos se componen de protones y neutrones, que se mantienen unidos por la denominada fuerza fuerte. Algunos núcleos tienen una combinación de protones y neutrones que no conducen a una configuración estable, por lo que son inestables o radiactivos; para llegar a la configuración estable emiten ciertas partículas. Los diferentes tipos de desintegración radiactiva se clasifican según el tipo de partículas emitidas: alfa, beta o gamma.

Se ha observado experimentalmente que todos los procesos radiactivos sencillos siguen una *curva exponencial decreciente*. Si N_0 es el número de núcleos radiactivos que había en el instante inicial, después de un cierto tiempo t, el número de núcleos radiactivos presentes, N, se ha reducido.

El número de núcleos radiactivos presentes en el instante t contado a partir de $t=0$ es $N=N_0e^{-kt}$, donde k es una característica de la sustancia radiactiva llamada constante de desintegración.



Curva exponencial decreciente $N=N_0e^{-\lambda}$.

Para cada sustancia radiactiva hay un intervalo $T_{1/2}$ fijo, denominado periodo de semidesintegración, tras el cual el número de sus núcleos iniciales se ve reducido a la mitad. Poniendo en la ecuación

$$N=\frac{N_0}{2},$$

se obtiene

$$\frac{N_0}{2}=N_0e^{-\lambda T},$$

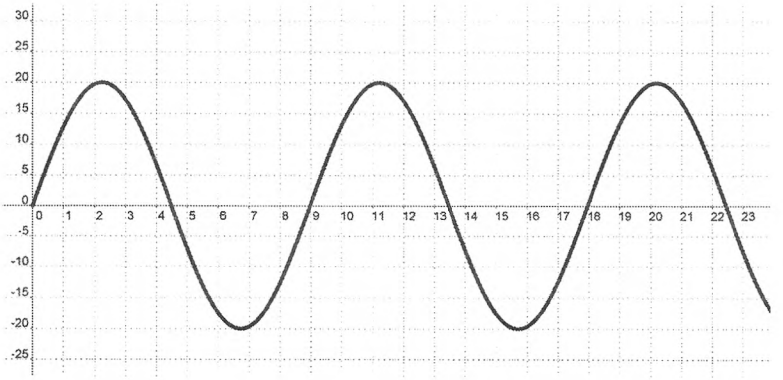
de donde:

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda},$$

que permite calcular el periodo de semidesintegración $T_{1/2}$ a partir de la constante de desintegración λ. Para el uranio 238, $T_{1/2}=4{,}468\cdot 10^9$ años.

La corriente eléctrica alterna se explica como una curva periódica que indica la intensidad de corriente en función del tiempo, o sea, el número de cargas por segundo que se mueven por el conductor. Su magnitud y dirección varían perió-

dicamente entre unos valores máximos y mínimos. Es el modo de distribución habitual de la energía que se genera a partir de fuentes solares, eólicas, hidráulicas, nucleares y térmicas, entre otras. La forma de la onda de la corriente alterna más utilizada es la de una *curva sinusoidal*, ya que produce una transmisión más eficiente de la energía. Su ecuación es $I = I_{max}\text{sen}(t)$. Sin embargo, en determinadas aplicaciones electrónicas se utilizan otros tipos de curvas periódicas, como la triangular o la cuadrada.



Curva sinusoidal $y = sen(2\pi/9x)$.

La corriente alterna suele ser el modo por el cual la electricidad de potencia llega a hogares y empresas, aunque las señales de audio y de radio transmitidas mediante cables eléctricos son también ejemplos de corriente alterna. En estos casos, la finalidad suele ser la transmisión y recuperación de información codificada sobre la señal de la corriente alterna.

La frecuencia de la alternancia entre máximo y máximo en la curva de la corriente alterna es de 50 Hz (50 veces por segundo) en Europa y 60 Hz en Estados Unidos.

Curvas de los estudios de mercado

En los fenómenos sociales también se emplean las curvas. En algunos casos estas curvas tienen su ecuación matemática, lo que permite dibujarlas con precisión a priori. En otros casos, son curvas construidas con datos empíricos (tomados de la realidad, a posteriori).

Las curvas tienen una aplicación muy importante en los estudios de mercado para averiguar la certeza de determinadas hipótesis sobre la venta de un objeto de consumo. Por ejemplo, para estudiar el uso de un determinado detergente se ha estimado que lo emplea el 26% de los hogares de un país. Se quiere comprobar la fiabilidad de dicho porcentaje mediante una encuesta que pregunte sobre su uso en 12 hogares. Suponiendo que sea cierto que se emplee en el 26% de las casas del país, se desea calcular la probabilidad de encontrar en la muestra de 12 hogares un número de usuarios de dicha marca comprendido entre 6 y 9.

En este caso, se trata de una variable con sólo dos valores («sí» lo usa, «no» lo usa). La probabilidad estimada del sí es del 26%, y la del no, del 74% (100-26).

Aplicando las leyes de la combinatoria puede deducirse que la probabilidad $PB(k)$ de que aparezcan k usuarios de la marca en una muestra de n usuarios, es:

$$PB(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

donde $p=0{,}26$ y $(1-p)=1-0{,}26=0{,}74$ (las probabilidades están en tantos por uno).

Esta fórmula corresponde a una función de probabilidad llamada binomial diseñada por Jakob Bernoulli en el siglo XVII. La fórmula

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

indica el número de combinaciones distintas que pueden obtenerse con n objetos tomados en grupos de k objetos.

De las leyes de la probabilidad se deduce que la probabilidad de que ocurra uno o varios de los sucesos posibles se calcula sumando las probabilidades individuales de cada uno de ellos, en el caso de que sean independientes (o sea que no puedan ocurrir a la vez).

En este caso, la probabilidad de que aparezcan seis usuarios en la muestra es de:

$$PB(6)=\binom{12}{6}0{,}26^6\cdot 0{,}74^6=0{,}0468708012.$$

Empleando la fórmula dada, se disponen en la tabla calculada con Excel los valores de $PB(6)$ a $PB(9)$.

k	6	7	8	9
PB(k)	0,0468708012	0,0141155309	0,0030996943	0,0004840363

El gráfico de la distribución de probabilidad se presenta como una función de variable discreta que tiene por fórmula:

$$PB(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

con $n = 12$ y $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. La probabilidad pedida, que corresponde a los valores entre 6 y 9, es:

$$\begin{aligned} PB(6 \le x \le 9) &= PB(6) + PB(7) + PB(8) + PB(9) = \\ &= 0{,}0468708012 + 0{,}0141155309 + 0{,}0030996943 + 0{,}0004840363 = \\ &= 0{,}0645700627 = 6{,}46\%. \end{aligned}$$

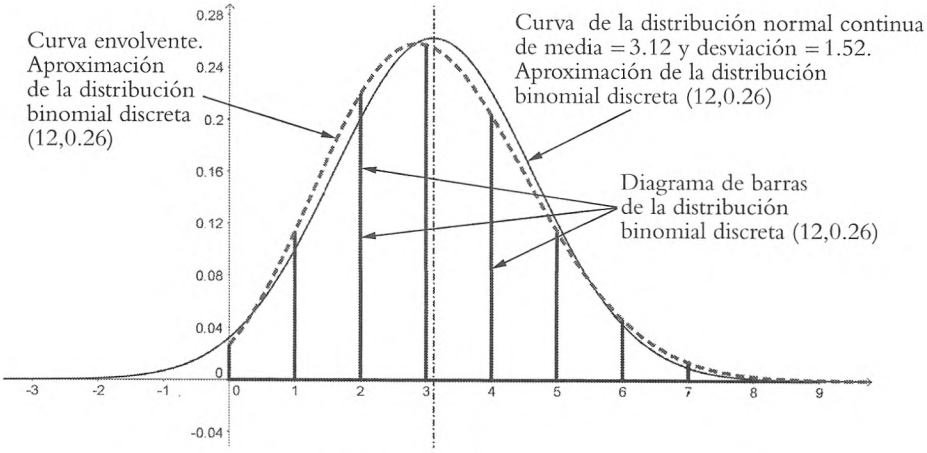


Diagrama de barras de probabilidad PB(k) *de que aparezcan* k *usuarios de la marca en una muestra de 12 hogares (si se estima el uso de la marca en un 26% de los hogares). Es una función de variable discreta de ecuación cartesiana:*

$$PB(k) = \binom{12}{k} \cdot 0{,}26^x \cdot 0{,}74^{12-k}.$$

Cabe recordar que $\binom{12}{k} = \frac{12!}{(12-k)!k!}$.

Cuando el número de hogares encuestados es muy grande, la distribución binomial discreta se aproxima con una distribución normal de media $= 12 \cdot 0{,}26 = 3{,}12$

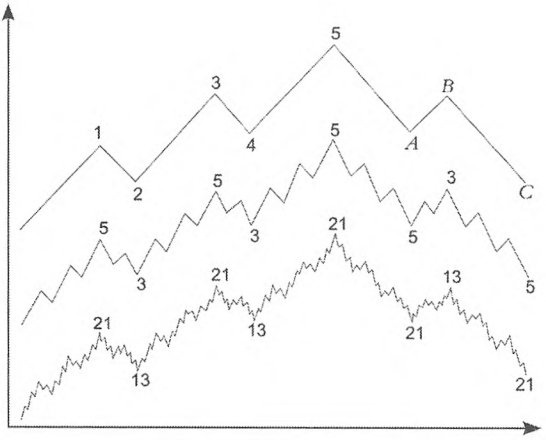
y desviación típica $\sigma = \sqrt{12 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}74} = 1{,}52$, que es una función continua exponencial de ecuación cartesiana:

$$PN(x) = \frac{1}{1{,}52\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3{,}12)^2}{2 \cdot 1{,}52^2}}.$$

Las curvas de la bolsa

Ralph Nelson Elliott (1871-1948) realizó una gran aportación sobre el comportamiento de la bolsa. Las ondas de Elliott explican las oscilaciones que tiene la bolsa. El economista estadounidense elaboró una serie muy larga de las cotizaciones de la Bolsa de Nueva York y estudió la evolución del índice Dow-Jones. Del análisis de dicha curva empírica concluyó que la evolución presenta unas formas con pautas repetitivas de diferente periodo y amplitud.

Las ondas de Elliot explican que los mercados de acciones tienen un ritmo que se repite, que siguen una curva periódica. No se conoce su ecuación matemática, pues se trata de una curva empírica. Sin embargo, su repetición y su forma conocida permiten a los analistas hacer ciertas previsiones. El tramo alcista tiene cinco ondas hacia arriba seguidas de otras tres hacia abajo. El ciclo completo, ocho ondas, cinco de alza y tres de baja. En el tramo de ascenso del ciclo, las ondas 1, 3 y 5 son ondas de impulso, mientras que las 2 y 4 corrigen la 1 y la 3. Tras cinco ondas de ascenso se inicia un tramo de descenso con tres ondas *A*, *B* y *C*.



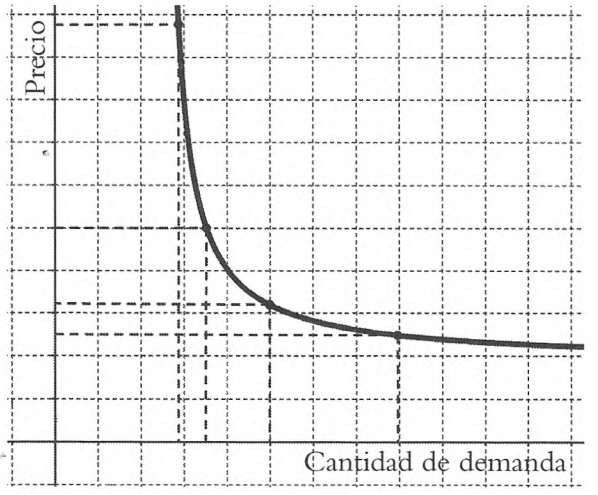
Ondas de Elliott (fuente: Masur). La ecuación es desconocida al tratarse de una curva empírica.

Las curvas del mercado

El mercado es tan viejo como la existencia humana, pero, sin embargo, en la actualidad es un mecanismo sumamente evolucionado y complejo. Los productos pueden haber sido producidos a miles de kilómetros de distancia, y haber pasado por varias transformaciones y comercializaciones. Puede que un grupo reducido de fabricantes (oferta) se ponga de acuerdo y fije unos precios monopolísticos y, a su vez, que un grupo poderoso de consumidores presione sobre los precios. Pero en definitiva, el mercado continúa siendo el mecanismo por el cual la concurrencia de vendedores (oferta) y compradores (demanda) fija los precios. El precio de equilibrio de mercado es aquel en el que compradores y vendedores se ponen de acuerdo en unas condiciones llamadas competencia perfecta, que es una situación idealizada.

La demanda se estudia a través de la elaboración de unos cuadros estadísticos históricos de las cantidades demandadas de un producto en función de la evolución de los precios. A cada precio le corresponde una cantidad demandada.

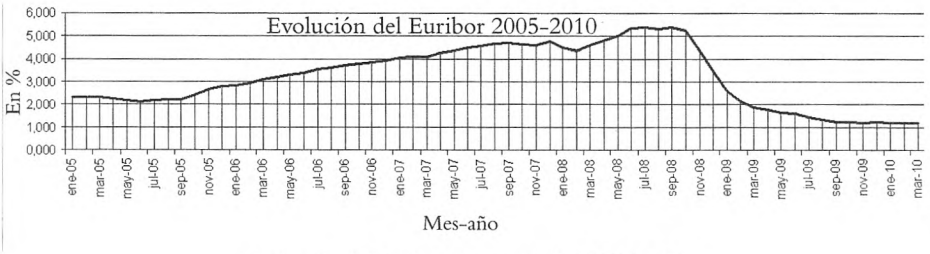
La curva precio-demanda sigue una curva matemática llamada *hipérbola* en la que en el eje de ordenadas se representan los precios, y en el de abscisas, las cantidades demandadas. Esta curva es la representación gráfica de la proporcionalidad inversa (un proceso que funciona así, cuanto más hay de una de las variables, menos hay de la otra). En este caso, cuanto menor es el precio del bien en el mercado, más demanda se genera del mismo.



Curva hipérbola. Ecuación en coordenadas cartesianas: $y = \frac{1.000}{x}$.

Una curva para las hipotecas

El índice Euribor, que se utiliza para calcular el interés que se aplica en las hipotecas en Europa, varía cada mes. Se puede generar una curva que indique su evolución a lo largo de un periodo de tiempo. Se trata, pues, de una curva elaborada empíricamente, o sea, a partir de datos recogidos en un largo espacio de tiempo. Estos datos son la recopilación mes a mes de dicho índice; por tanto, carece de una ecuación matemática. Sin embargo el análisis de esa curva empírica permite recabar datos sobre la evolución histórica de las finanzas mundiales y sobre los acontecimientos sociales que hayan producido cambios bruscos en ellas.



Evolución del Euribor en el periodo 2005-2010.
La ecuación o fórmula es desconocida, al tratarse de una curva empírica.

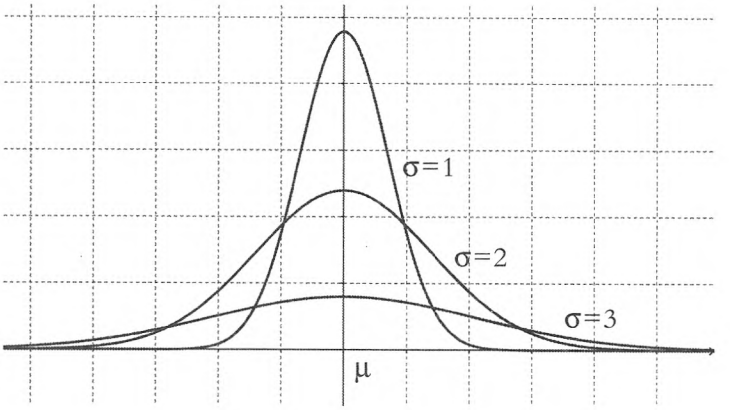
Curva de la probabilidad normal o de Gauss

Esta curva es muy utilizada en toda clase de aplicaciones estadísticas. Fue estudiada por Carl Friedrich Gauss a principios del siglo XIX. Su uso está muy extendido debido a que numerosos fenómenos tienden a comportarse siguiendo los valores de esta ecuación, y muchas variables aleatorias (con valores al azar) que sean continuas (que puedan adoptar valores de todo tipo) siguen una curva con esta forma de campana.

El valor central μ (media) es el valor promedio de todos los valores y el que aparece con más frecuencia. El número σ (desviación típica) indica el grado de variabilidad de los valores con respecto a la media. Una distribución con una σ grande indica que en ella hay muchos más valores alejados del valor promedio que cercanos a la media.

La importancia de la *curva de probabilidad normal* se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo matemático de la ley normal. Por ejemplo, ciertos caracteres morfológicos de las personas, como la talla o el peso; fisiológicos, como el efecto de una dosis de fármaco en

diversos individuos; sociológicos, como el consumo de un producto por un grupo de personas; psicológicos, como el coeficiente intelectual, y otros, como la desviación de la calidad deseada en una pieza que se fabrica en una máquina herramienta de una fábrica.



Curvas de la ley normal o campana de Gauss para la misma media y varias desviaciones típicas. Ecuación en cartesianas:

$$PN(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

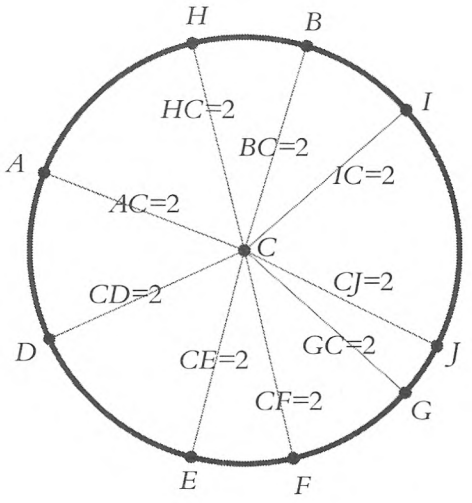
Capítulo 2

Las curvas. Cómo se dibujan. Cómo se miden

Curvas definidas por una propiedad geométrica

Hasta ahora se han definido algunas curvas mediante su ecuación usando tres tipos de sistemas de referencia: coordenadas cartesianas, polares y paramétricas. Sin embargo, las curvas también pueden definirse mediante una propiedad geométrica, sin necesidad de conocer su ecuación. Cada propiedad geométrica asegura la forma de la curva correspondiente. Como ejemplos de esta otra clase de definición de curvas se describen la circunferencia, la elipse la parábola, la tractriz y la lemniscata.

La *curva circunferencia* de radio 2 y centro en un punto *C* puede definirse geométricamente como el conjunto de los puntos (o el lugar geométrico de los puntos) que se hallan a una distancia 2 del punto *C*.

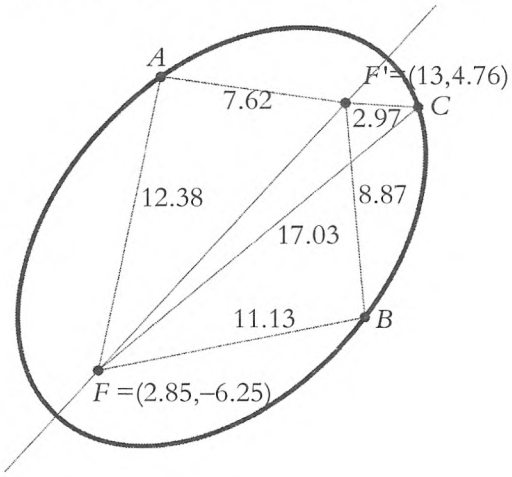


Puede comprobarse la propiedad geométrica que define esta circunferencia, ya que: $AC=BC=DC=EC=FC=GC=HC=IC=JC=2$.

Si *C* es el punto $(-4,3)$, su ecuación cartesiana sería: $(x+4)^2+(y-3)^2=4$.

Todos los puntos de una *curva elipse*, cumplen la condición geométrica de que la suma desde cualquiera de ellos a los dos puntos fijos F y F' (focos) resulta siempre una cantidad constante (la longitud del diámetro mayor de la elipse $2a$). Puede comprobarse la propiedad geométrica que define esta elipse, ya que:

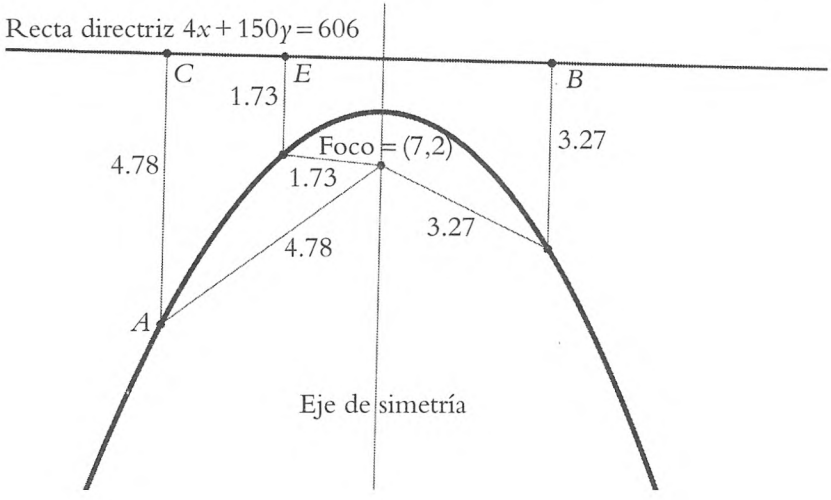
$$AF+AF'=BF+BF'=CF+CF'=20=2a.$$



Y su compleja ecuación cartesiana sería:

$$118747x^2-89498xy+111459y^2-1949383x+875856y+1032543=0.$$

Una *curva parábola* se define como el conjunto de los puntos que se hallan a igual distancia de un punto F (foco de la parábola) y de una recta (directriz de la parábola).



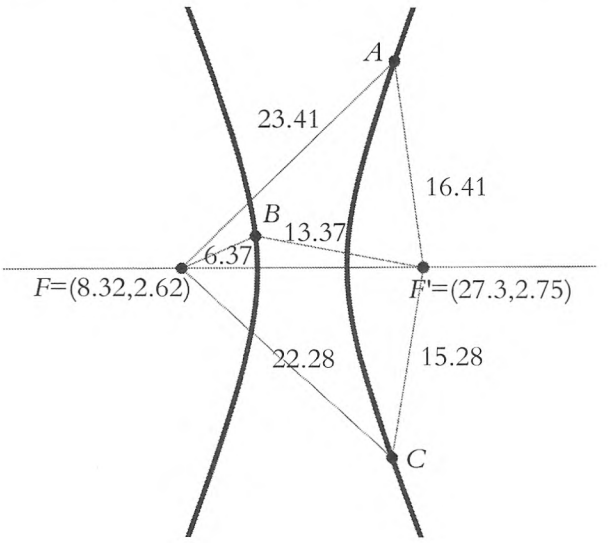
Puede comprobarse la propiedad geométrica que define esta parábola en sus puntos A, D y P, ya que:

$$AC=AF=4{,}78;\ DE=DF=1{,}73;\ PB=PF=3{,}27.$$

Y su compleja ecuación cartesiana sería:

$$225x^2-11xy-3103x+919y+8239=0.$$

Los puntos de la *curva hipérbola* se definen con la propiedad geométrica según la cual la diferencia de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos (focos de la hipérbola) es un valor constante. En la hipérbola de la figura dicho valor es 7.



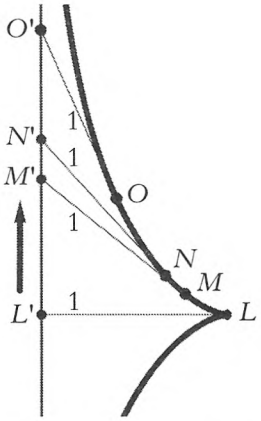
Puede comprobarse la propiedad geométrica que define esta hipérbola en sus puntos A, B y C, ya que:

$$CF-CF'=BF-BF'=AF-AF'=7.$$

Y su compleja ecuación cartesiana sería:

$$15.895\,x^2+159.994\,y^2-1.847xy-61.206\,x-826.525\,y+4.518.289=0.$$

La *curva tractriz* se define geométricamente como la trayectoria que sigue un punto (situado inicialmente en L) cuando es arrastrado por otro (situado inicialmente en L'), que se mantiene a distancia constante (en este caso se ha elegido la unidad). L' se desplaza por una línea recta (tomando las posiciones M', N', O'). La trayectoria viene definida por puntos como M, N, O, etcétera.



La compleja ecuación cartesiana de las dos ramas de la *tractriz* es:

$$y = \pm(\sqrt{1-x^2} - \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})).$$

Los puntos de la *curva lemniscata* se definen por la propiedad geométrica según la cual el producto de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos (focos de la lemniscata) resulta un valor constante. En la lemniscata considerada entre -1 y $+1$, este valor es 0,5.

Punto	r_1	r_2	$r_1 \cdot r_2$
G	0,29	1,69	0,490
T	0,29	1,71	0,496
C	0,3	1,66	0,498
A	0,31	1,6	0,496
H	0,33	1,51	0,498
E	0,36	1,4	0,504
B	0,4	1,25	0,500
I	0,47	1,05	0,494

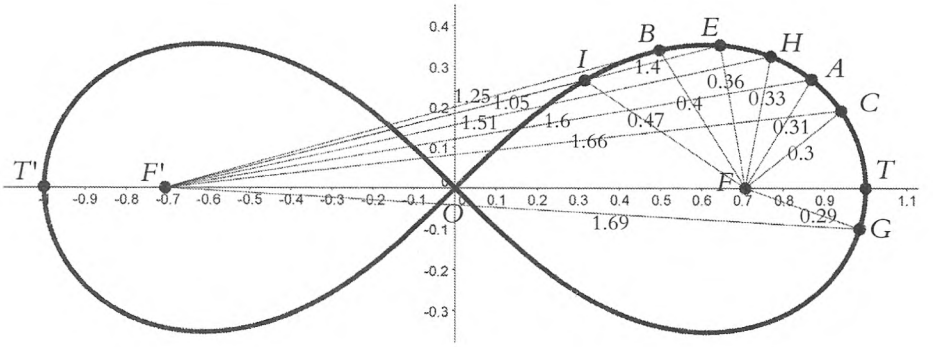
Aproximando las longitudes de los segmentos, el valor constante buscado va dando valores muy cercanos a 0,5 para los puntos seleccionados. Estas pequeñas diferencias son debidas a la baja precisión del software de representación gráfica empleado. Pero aplicando la propiedad de los puntos extremos F y F', tenemos:

$$OF \cdot OF' = OF^2 = (1-OF)\,(1+OF') = 1 - OF^2.$$

Como OF y OF' miden lo mismo, aislando OF quedará: $OF^2 = 1 - OF^2$, y de aquí:

$$2 \cdot OF^2 = 1; \qquad OF^2 = \frac{1}{2}; \qquad OF = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707.$$

En la figura se ha tomado un valor aproximado para los focos de $OF = 0{,}7$.



Como $a = 1$, la ecuación de esta lemniscata en cartesianas sería:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

En cambio, la ecuación en polares es mucho más sencilla:

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

La curva lemniscata, desde su descubrimiento por Jakob Bernoulli, fue adoptada como símbolo para el infinito.

Curvas definidas por una fórmula o ecuación

Este método de representación es el más habitual en nuestros tiempos, debido a las facilidades de cálculo numérico y simbólico que aportan los ordenadores.

Algunos de los numerosos tipos de curvas que existen son combinaciones de otras ya conocidas. Se representan efectuando las operaciones que se hallan descritas en su ecuación. Por ejemplo, la curva definida por la ecuación

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

puede dibujarse efectuando la división de las ordenadas de la curva $y = x$ (una recta) por las de la curva $y = x^2 - 1$ (una parábola). En una hoja de cálculo Excel se plantean los cálculos para dibujarla:

Punto	x	y recta $y=x$	y parábola $y=x^2-1$	$\frac{y \text{ recta}}{y \text{ parábola}}$; $y=\frac{x}{x^2-1}$	Coordenadas punto
E_1	–2,5	–2,5	5,25	–0,48	(–2.5,–0,48)
D_1	–2	–2	3	–0,67	(–2,–0,67)
C_1	–1,5	–1,5	1,25	–1,20	(–1.5,–1.2)
B_1	–1	–1	0	$-\infty$	(–1,$-\infty$)
A_1	–0,5	–0,5	–0,75	0,67	(–0.5,0.67)
O	0	0	–1	0,00	0
A	0,5	0,5	–0,75	–0,67	(0.5,0,67)
B	1	1	0	$-\infty$	(1,$-\infty$)
C	1,5	1,5	1,25	1,20	(1.5,1.2)
D	2	2	3	0,67	(2,0.67)
E	2,5	2,5	5,25	0,48	(2.5,0.48)

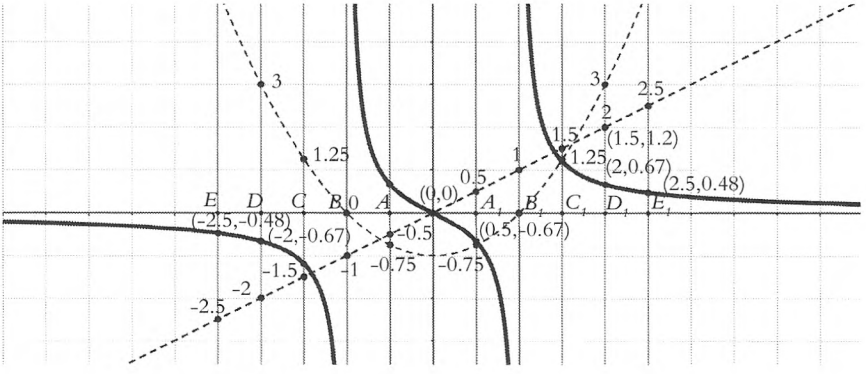
En el cálculo de los puntos de la curva

$$y=\frac{x}{x^2-1},$$

los valores cercanos a $x=-1$ y a $x=+1$ conducen a valores de y que tienden a ser números muy grandes o muy pequeños (según sean positivos o negativos).

Se suele comentar que los puntos que tienen valores cercanos a $x=-1$ por el lado izquierdo producen valores de y muy pequeños (se dice que y tiende a $-\infty$) y los puntos que tienen valores cercanos a $x=-1$ por el lado derecho producen valores muy grandes de y (tiende a $+\infty$). Con los datos de la figura y la tabla de valores puede entenderse la forma resultante de la *curva racional*:

$$y=\frac{x}{x^2-1}.$$



Para ver mejor la figura se ha tomado una escala distinta en el eje X y en eje Y. Estas curvas racionales tienen una ecuación que es el cociente de otras dos curvas polinómicas de una variable. Un *polinomio* de una variable es una suma o resta de expresiones en las que aparecen potencias de la variable con exponentes enteros y positivos, multiplicadas por constantes numéricas. Se adjuntan diversos ejemplos de polinomios para profundizar en el concepto.

Expresión	Tipo de polinomio	Términos
$3x^2-1$	Polinomio de segundo grado en x	Tiene dos términos: $3x^2$, -1
x	Polinomio de primer grado en x	Tiene un término: x
1	Polinomio de grado cero en x	Tiene un término: 1
$(3x^2-1)^2=9x^4-6x^2+1$	Polinomio de cuarto grado en x	Tiene tres términos: $9x^2$, $-6x^2$, $+1$
$x\sqrt{2}-6x^2+3$	Polinomio de segundo grado en x	Tiene tres términos: $x\sqrt{2}$, $6x^2$, 3
$\frac{3}{x^2-1}$	NO es un polinomio	—
$13\sqrt{x^3}+26x^2-18$	NO es un polinomio	—

Una *curva polinómica* tiene siempre una ecuación cartesiana de la forma $P(x,y)=0$, donde $P(x,y)$ es un polinomio de dos variables x e y de cualquier grado. Un ejemplo es la curva: $225x^2-11xy-3.103x+919y+8.239=0$. La curva

$$y=\frac{x}{x^2-1},$$

que se ha dibujado mediante el cociente de las ordenadas y de los puntos de las gráficas de $y=x$ e $y=x^2-1$, ya no es del tipo polinómico.

Las curvas cuya ecuación es el cociente de dos polinomios se denominan *curvas racionales*. Para ampliar la práctica en el trazado de curvas de este tipo se aplica un proceso similar al de la curva anterior para dibujar la curva:

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2}.$$

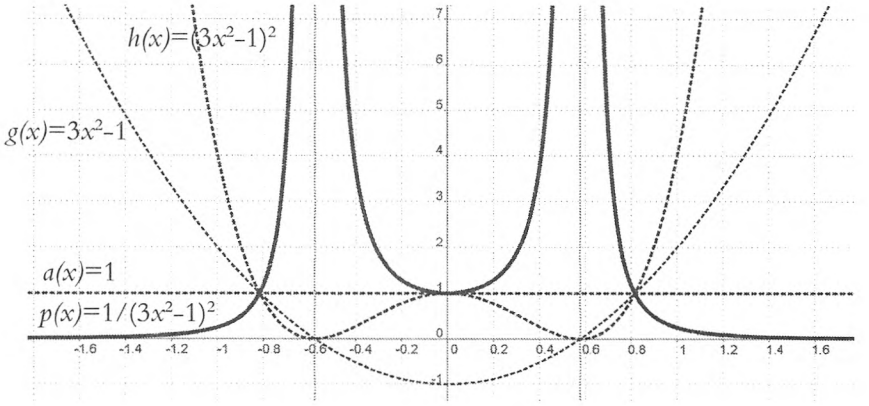
Puede observarse el proceso de trazado de la curva analizando la tabla de valores y la gráfica adjunta, en la que pueden verse las curvas polinómicas $y=1$ e $y=(3x^2-1)^2$.

Abscisa x	Recta $y=1$	Cuadrática $y=(3x^2-1)^2$	$\frac{y\ \text{recta}}{y\ \text{parábola}}$, $y=\frac{1}{(3x^2-1)^2}$
–2,000	1,000	121,000	0,008
–1,750	1,000	67,035	0,015
–1,500	1,000	33,063	0,030
–1,250	1,000	13,598	0,074
–1,000	1,000	4,000	0,250
–0,750	1,000	0,473	2,116
$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-0{,}577350269$	1,000	0,000	$+\infty$
–0,500	1,000	0,063	16,000
–0,250	1,000	0,660	1,515
0,000	1,000	1,000	1,000
0,250	1,000	0,660	1,515
0,500	1,250	0,910	1,765
$+\frac{1}{\sqrt{3}}=+0{,}577350269$	1,000	0,000	$+\infty$
0,750	1,000	0,473	2,116
1,000	1,000	4,000	0,250
1,250	1,000	13,598	0,074
1,500	1,000	33,063	0,030
1,750	1,000	67,035	0,015
2,000	1,000	121,000	0,008

Realizando la división

$$\frac{1}{(3x^2-1)^2}$$

para los puntos indicados se obtiene aproximadamente la forma de la curva de la figura siguiente:



Se puede afirmar que los puntos de una curva racional en los que «se dispara» el valor de y (tiende a $+\infty$ o a $-\infty$) son los correspondientes a las abscisas x que dan un resultado cero en el polinomio denominador de la ecuación de la curva. En el caso de

$$y = \frac{x}{x^2 - 1},$$

la curva «se dispara» para los valores de x que hacen el denominador $x^2 - 1 = 0$, o sea, $x^2 = 1$; $x = +1$, $x = -1$. En el caso de

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2},$$

la curva «se dispara» para los valores de x que hacen el denominador $(3x^2 - 1)^2 = 0$, o sea, $3x^2 = 1$; $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Las rectas verticales en las cuales «se dispara» la función (y tiende hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$) reciben el nombre de *asíntotas verticales* de la curva racional. En la curva

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

las asíntotas son las rectas verticales: $x = +1$ y $x = -1$. En la curva

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$$

las asíntotas son las: $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (en el gráfico anterior se han aproximado a $+0{,}6$ y $-0{,}6$).

Curvas explícitas e implícitas

Algunas curvas tienen una ecuación cuya variable y (variable dependiente) está completamente aislada en uno de los dos lados de la misma. Estas curvas se dice que están en forma *explícita*, como las siguientes:

La curva de tipo racional: $y=\dfrac{1}{(3x^2-1)^2}$;

la tractriz en cartesianas: $y=\pm(\sqrt{1-x^2}-\ln(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}))$;

la circunferencia: $y=\pm\sqrt{25-(x-2)^2}$;

la elipse $y=\pm 5\sqrt{(1-\dfrac{x^2}{49})}$.

En otros casos, las dos variables se hallan muy entremezcladas dentro de la ecuación y resulta casi imposible aislar completamente una de ellas en uno de los miembros de la misma. En ese caso, las curvas están en forma *implícita*, como la lemniscata $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$; la circunferencia $(x-2)^2+y^2=25$ o la elipse

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Sin embargo, en general, todas las curvas pueden ser dibujadas sin dificultad si se conoce su ecuación mediante el uso de un software adecuado de representación de curvas, como Geogebra o Derive.

Curvas y funciones

Las curvas están muy relacionadas con las funciones. En la época de Euler (siglo XVIII), uno de los mejores matemáticos que han existido jamás, no había prácticamente diferencia entre un concepto y otro. En aquel entonces, una función era una curva en la que se podía seguir con un lápiz toda su longitud sin levantarlo nunca del papel y sin que se cruzase con ella misma en su recorrido; era «continua». Además, se exigía que la curva de una función no tuviera puntos «en ángulo» que estropearan la «suavidad» del crecimiento o decrecimiento de la misma. Después de Euler se han realizado grandes cambios en los conceptos de curva y de

función, pero esta visión intuitiva de aquella época sigue siendo adecuada para la mayor parte de las curvas matemáticas empleadas en la vida cotidiana y en el ámbito profesional.

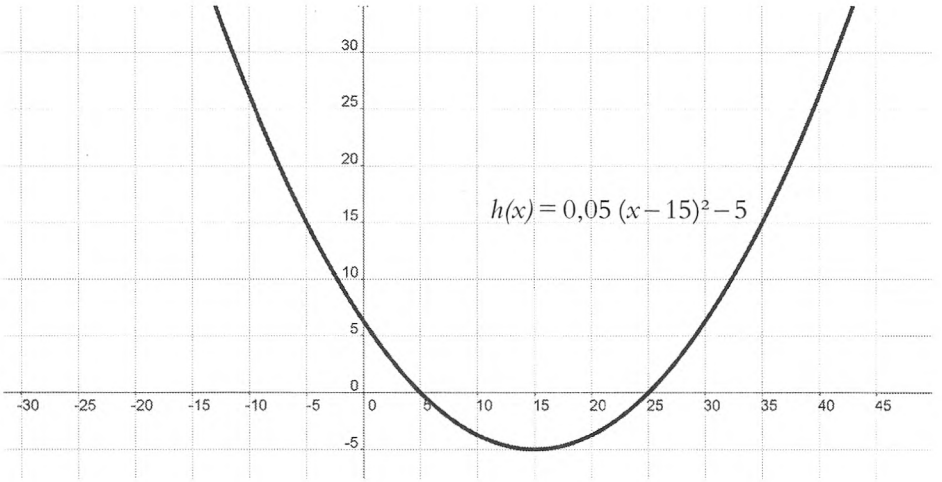
Una *función* es toda correspondencia entre los valores de una variable independiente x y otra y dependiente de aquélla, de modo que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y. En este caso se dice que y es función de x.

Las conocidas curvas circunferencia, elipse, parábola de eje de simetría horizontal, lemniscata y tractriz NO son estrictamente funciones. Puede observarse en sus gráficas que a cada valor de x le corresponden DOS valores de y.

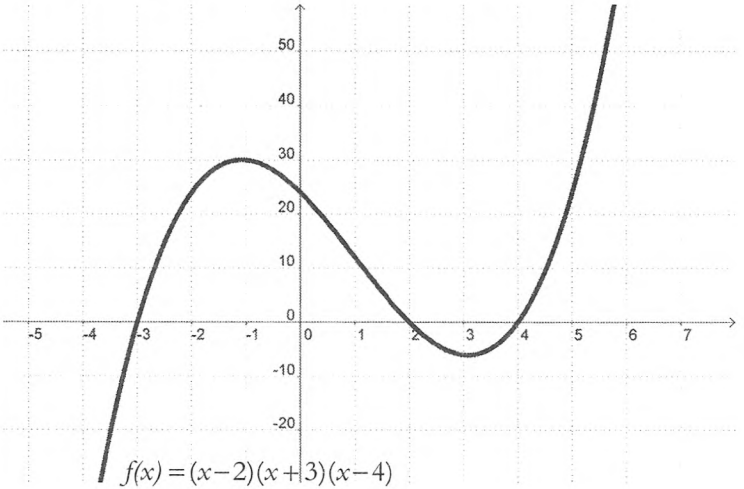
Las curvas racionales son funciones que tienen algunas excepciones en su forma «continua». Son continuas excepto en los valores de x en que la curva «se dispara». En $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ la curva es continua para todos los valores de x menos para $x=+1$, $x=-1$.

En $y=\dfrac{1}{(3x^2-1)^2}$ la curva es continua para todos los valores de x menos para $x=+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

En cambio, todas las *funciones polinómicas* son continuas siempre, como las de segundo, tercer y sexto grado que se reseñan. Y, evidentemente, todas las rectas son funciones polinómicas de primer grado. Las funciones polinómicas corresponden a las curvas polinómicas ya conocidas, como la parábola de segundo grado $h(x)=0{,}05(x-15)^2-5$, una curva polinómica de segundo grado:

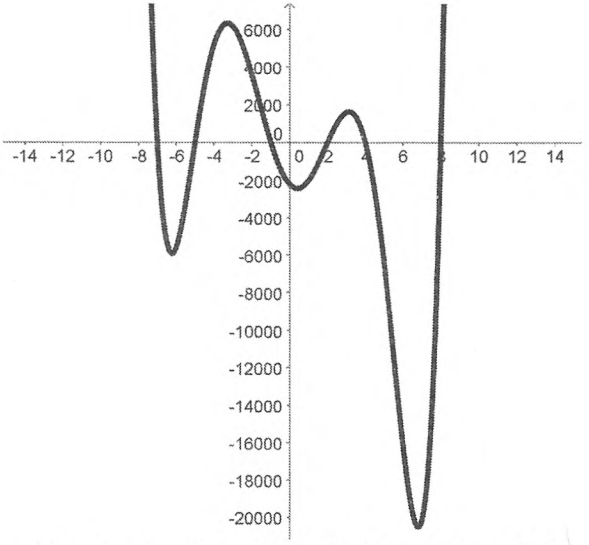


O bien la función polinómica de tercer grado: $y = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.



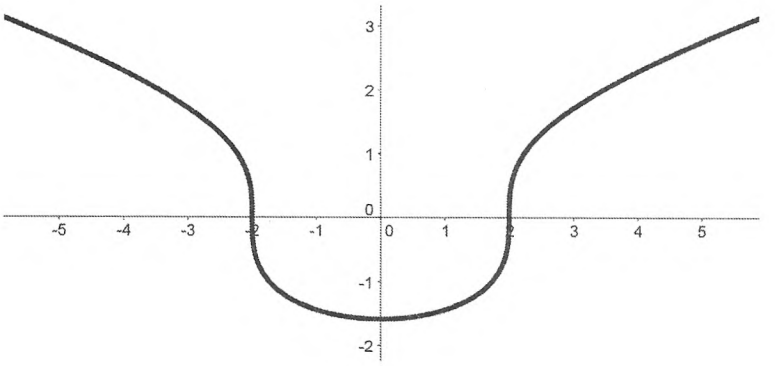
$f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$

O la función polinómica de sexto grado: $y = x^6 - x^5 - 79x^4 + 41x^3 + 1310x^2 - -1048x - 2240$.

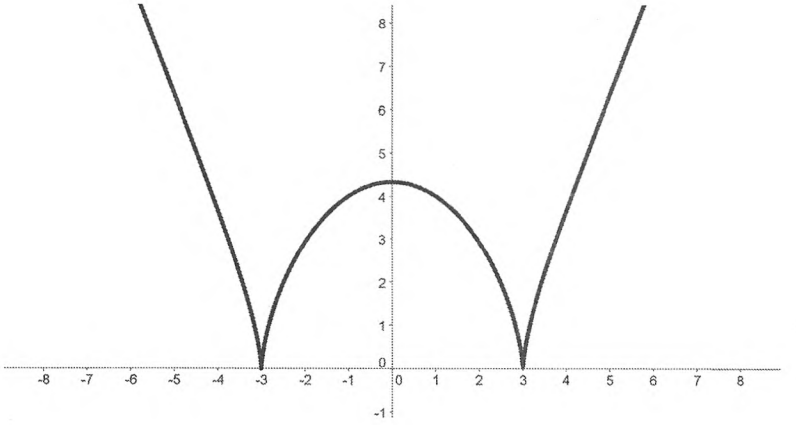


$g(x) = x^6 - x^5 - 79x^4 + 41x^3 + 1310x^2 - 1048x - 2240$

Las *funciones racionales* corresponden a las curvas racionales descritas anteriormente. Las *funciones irracionales* son aquellas cuya ecuación contiene alguna variable bajo el signo de raíz, como la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$, cuya gráfica es la siguiente:



O como la función $y=\sqrt[3]{(x^2-9)^2}$, cuya curva es:



O la curva más compleja $\sqrt{y^2-x^2}+\sqrt[4]{x^3+4}-xy+12=0$.

El conjunto de las funciones polinómicas, racionales e irracionales, se agrupa en el conjunto de las *funciones algebraicas.*

Funciones trascendentes

Las funciones que no pueden ser expresadas en forma de polinomios o raíces se conocen como *funciones trascendentes.* Las más sencillas son la función exponencial, la función logarítmica y las funciones trigonométricas e hiperbólicas. La *función exponencial* tiene una ecuación cartesiana del tipo $y=k\cdot a^x$, siendo k un número real, y a, un número real positivo, como, por ejemplo, las funciones $y=2\cdot 3^x$, $y=10^x$, $y=13\cdot(\sqrt{5})^x$.

Entre las muchas funciones exponenciales existe una muy particular, la que tiene por base el número constante e, $y = e^x$. Esta *curva exponencial* tiene la particularidad de que en ella la pendiente de la recta tangente en cada punto es igual a la ordenada del punto, como puede observarse en la figura siguiente. Esto significa que es la única función cuya derivada coincide con la misma función, o sea, que $y' = y = e^x$.

EL NÚMERO e

La constante e fue hallada por el suizo Jakob Bernoulli al estudiar el siguiente problema del interés compuesto: Si se invierte 1 € a un interés del 100% anual y se pagan los intereses una vez al año, al cabo del periodo se obtendrán 2 €. Si se pagan los intereses 2 veces al año, dividiendo el interés por 2 (el 50% semestral), la cantidad obtenida es 1 € multiplicado dos veces por 1,5, es decir:

$$1\,€ \cdot (1+\frac{1}{2})^2 = 1 \cdot 1{,}5^2 = 2{,}25\,€.$$

Si se pagan los intereses en 4 periodos trimestrales y dividimos por 4 la tasa de interés anual (25% trimestral), al cabo del año se obtendrán:

$$1\,€ \cdot (1+\frac{1}{4})^4 = 1 \cdot 1{,}25^4 = 2{,}4414...\,€.$$

En caso de pagos mensuales el capital acumulado asciende a:

$$1\,€ \cdot (1+\frac{1}{12})^{12} = 2{,}61303...\,€.$$

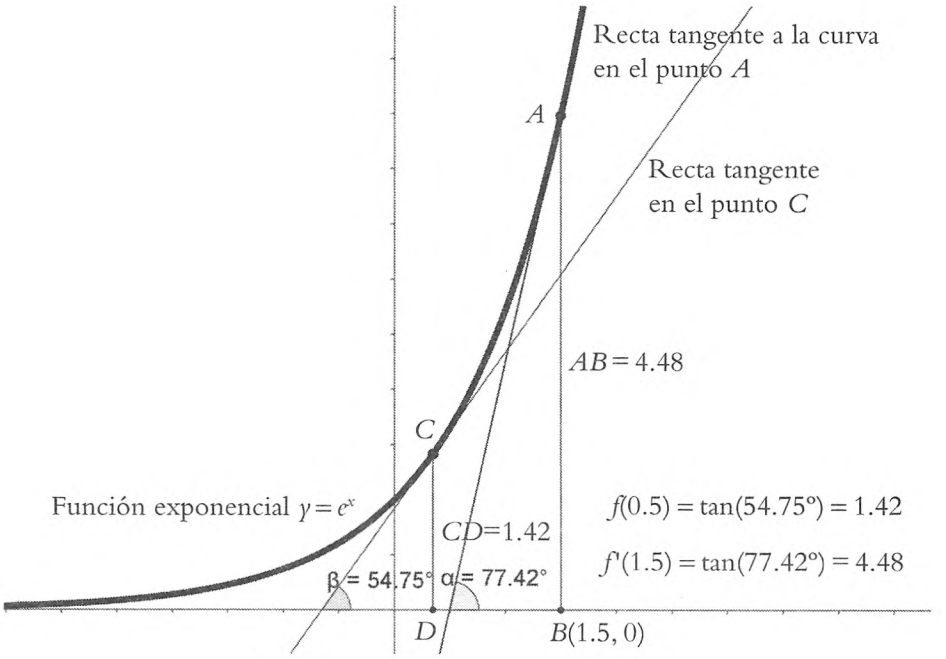
Al aumentar el número de periodos de pago n veces (que tiende a crecer indefinidamente) y dividir por n la tasa de interés en el periodo, la cantidad total obtenida por 1 € al cabo del año sería:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

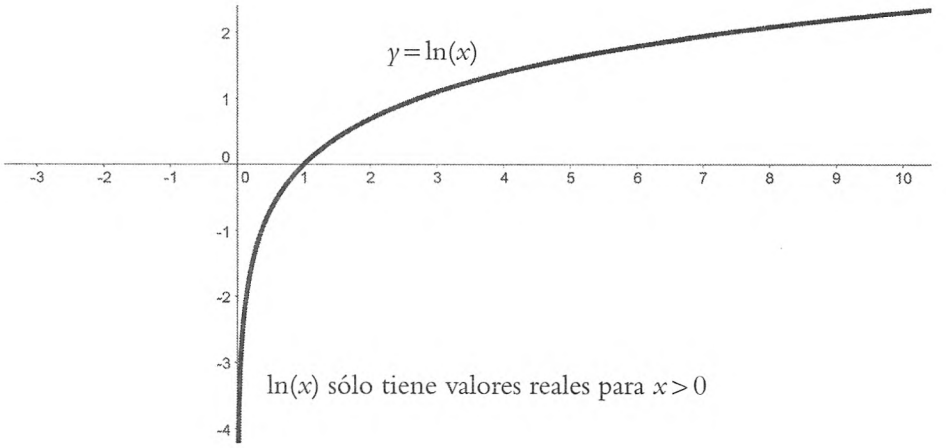
Dando valores crecientes a n, Bernoulli comprobó que esta expresión se aproxima a:

$$e = 2{,}7182818...$$

De aquí que en matemática financiera el número e se defina como el capital límite acumulado mediante una inversión de 1 € con una tasa de interés compuesto del 100% anual con un pago de intereses de forma continua. El primer matemático que dio a esta constante el nombre de e fue Leonhard Euler en 1727.



La *función logaritmo* es la función inversa de la función exponencial. Responde a la pregunta: ¿a qué exponente debe elevarse un número concreto (llamado base del sistema de logaritmos) para obtener otro determinado número? La expresión: $\log_a N = x$ quiere decir que el número a (la base) elevada a x debe resultar N, o sea que: $a^x = N$. La *curva logarítmica* de base e, de ecuación $y = \ln(x)$, tiene el siguiente aspecto:



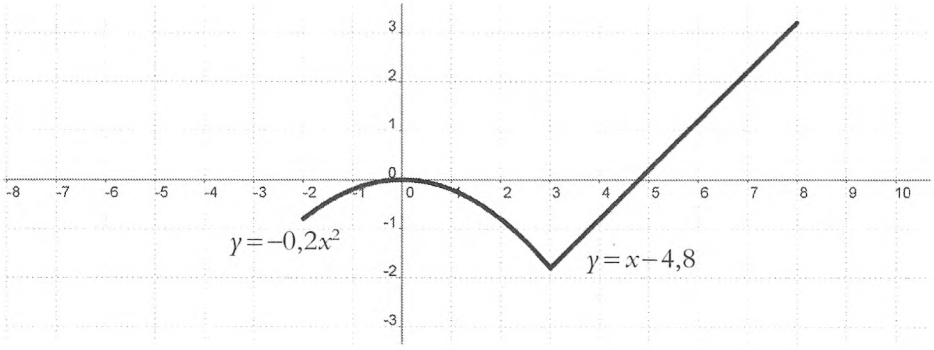
Sólo existe para valores de x positivos, y en $x=0$ la y «se dispara» hacia $-\infty$ (tiene una asíntota vertical).

Otro tipo de funciones son las *funciones definidas a tramos*, aquellas que presentan una ecuación distinta según el conjunto de valores de la variable independiente x del que se hable. Un ejemplo es la siguiente función definida en dos tramos:

$$y(x)=\begin{cases}-0,2x^2 \text{ para } -2\leq x<3\\ x-4,8 \text{ para } 3\leq x\leq 8\end{cases}$$

Se trata de una *curva parábola* entre los valores de $x=-2$ a $x=3$, y de una *recta* entre los valores de $x=3$ a $x=8$.

El punto (3,–1.8) es un punto «extraño» en el que la función tiene dos rectas tangentes distintas según se considere la primera o la segunda ecuación, ya que parece que el punto se halle a la vez en ambos tramos, tal como se aprecia en la figura. En matemáticas este tipo de funciones ya empiezan a complicarse.



Pendientes, rectas tangentes de una curva y derivadas

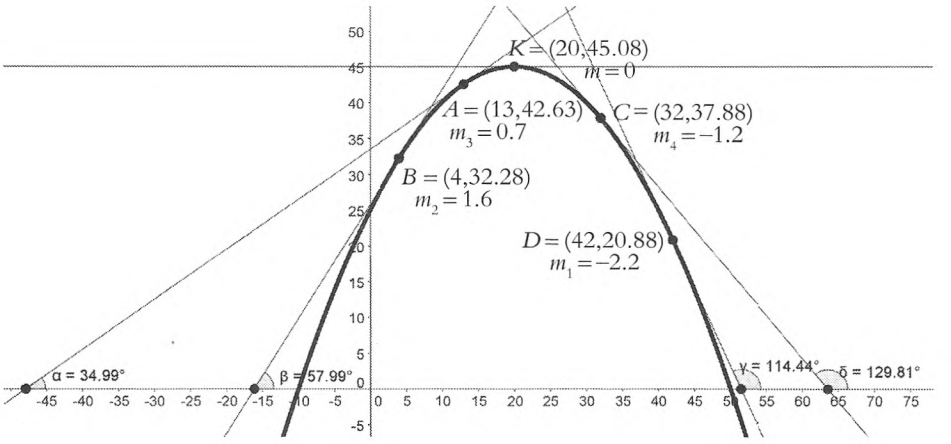
Para conocer el grado de variación o tendencia de la variable dependiente y respecto de la independiente x en un punto A de la curva se requiere conocer si la función que las representa está creciendo mucho o poco en ese punto A. Esto permite comparar el nivel de variación (mayor o menor crecimiento o decrecimiento) respecto del que tiene en otros puntos de la curva. Para medir dicho nivel de variación se utiliza la pendiente que hay en ese punto, calculando la inclinación de la recta tangente a la curva en el punto A. Esto se determina calculando el ángulo que forma la recta tangente en A con la horizontal. Si el ángulo α es muy grande, significa que la curva tiene mucha pendiente en ese punto, y al contrario. Y, como ya se ha

visto, la pendiente m de cada una de las rectas (en sus ecuaciones cartesianas, $y = m \cdot x + n$) es la tangente de su ángulo de inclinación. Por ejemplo, en los puntos B, A y K, la pendiente va disminuyendo, y en los puntos K, C y D, va aumentando.

A partir de este concepto, en la segunda mitad del siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, de manera independiente, diseñaron un método para calcular dichas pendientes en cada punto de la curva a partir de la ecuación de la misma. De este modo ya se puede conocer si la curva crece o decrece y si lo hace mucho o poco. Dicho método matemático se conoce como *derivación de una función*.

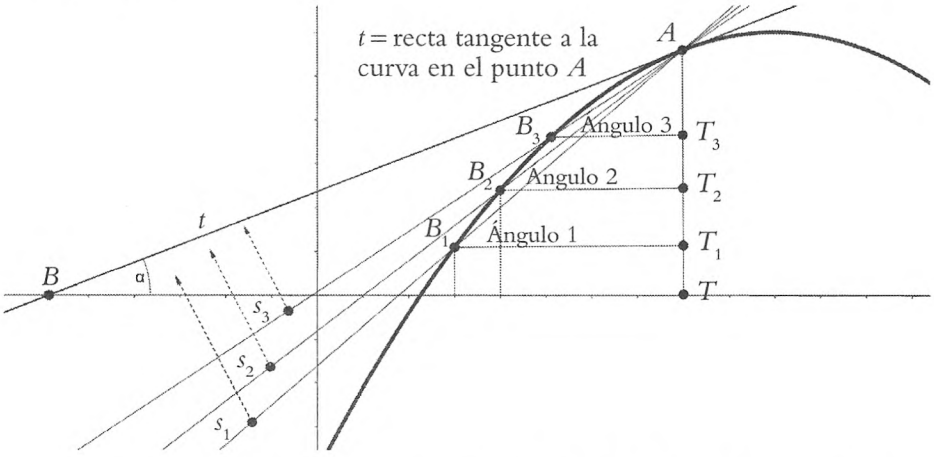
Ambos matemáticos también diseñaron otro método para determinar, antes de disponer de la gráfica de la curva, en qué puntos de la misma la variable y adquiriría valores máximos y mínimos. Este segundo método se denomina cálculo de los *extremos de una función*.

Para atacar el primer problema partieron de los estudios desarrollados por Apolonio de Perga (siglo III a.C.) y, para el segundo, de los trabajos de Fermat (principios del siglo XVII). Para solucionar el llamado «problema de la tangente», seguramente dibujaron, con la máxima precisión, una curva sencilla, como la parábola de la figura siguiente ($y = -0{,}05x^2 + 2x + 25{,}08$), y trazaron las diversas rectas tangentes a la curva, midiendo sus ángulos de inclinación y sus pendientes.



Leibniz y Newton idearon entonces un procedimiento para hallar la pendiente en el punto A mediante un cálculo llamado «paso al límite», al que Newton llamó «cálculo de fluxiones». Partieron de las pendientes de las rectas secantes a la curva que pasan por A, las rectas $s_1, s_2, s_3, \ldots$ que pasan por los puntos de la curva, B_1, B_2, B_3. Estas rectas secantes van acercándose, poco a poco, hacia el punto A. Por tanto,

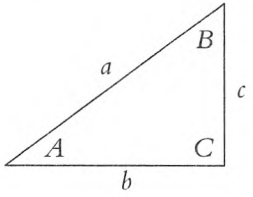
tienden a convertirse en la recta t, que es, precisamente, la recta tangente a la curva en el punto A:



Los tres pequeños triángulos rectángulos AB_1T_1, AB_2T_2, AB_3T_3 van reduciendo su tamaño durante este movimiento de los puntos $B_1, B_2, B_3\ldots$ hacia A. Cuando se llega a A, el triángulo correspondiente «desaparece» (tiene tamaño cero).

Los ángulos de las rectas secantes s_1, s_2, s_3, con la horizontal se van reduciendo hasta que, cuando los puntos B_1, B_2, B_3 llegan a coincidir con el A, el ángulo con la horizontal es el de la recta tangente (α, alfa).

En un triángulo rectángulo ABC se cumple que: $\tan(A) = \dfrac{c}{b}$.



El cociente de los dos catetos de cada triángulo AB_1T_1, AB_2T_2, AB_3T_3 va variando al cambiar la posición. En cada caso, es la tangente del ángulo 1, la del ángulo 2, la del ángulo 3,... hasta que los puntos $B_1, B_2, B_3,\ldots$ llegan al destino de su «movimiento»: el punto A. Matemáticamente se dice que el límite de los puntos B_1, $B_2, B_3,\ldots$ es el punto A, y que el límite de las pendientes de las rectas secantes es la tangente del ángulo α de la recta tangente t:

$$\frac{AT_1}{B_1T_1} = \tan(\text{ángulo 1}),\quad \frac{AT_2}{B_2T_2} = \tan(\text{ángulo 2}),\quad \frac{AT_3}{B_3T_3} = \tan(\text{ángulo 3}),\ldots\quad \frac{AT}{BT} = \tan(\alpha).$$

La *pendiente* de la recta t (recta tangente a la función $f(x)$ en el punto A) es el

$$\lim_{B_i \to A} \tan(\text{ángulo } i) = \frac{AT}{BT} = \tan(\alpha).$$

Al valor del

$$\lim_{B_i \to A} \tan(\text{ángulo } i) = \frac{AT}{BT}$$

se le llama actualmente *derivada de la función $f(x)$ en el punto A* y coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente a dicha función en el punto A.

En el caso de la función considerada $y = -0{,}05x^2 + 2x + 25{,}08$, Newton y Leibniz hicieron seguramente un cálculo parecido al siguiente: llamando Δx a la longitud en que varía la abscisa x entre B_3 y A, y llamando Δy a la longitud de la ordenada y entre B_3 y A, entonces:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{AT_3}{B_3T_3} = \tan(\text{ángulo } 3).$$

Se puede expresar en el caso de la curva de ecuación $y = -0{,}05x^2 + 2x + 25{,}08$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-0{,}05(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) + 25{,}08) - (-0{,}05x^2 + 2x + 25{,}08)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{-0{,}05x^2 - 0{,}05 \cdot 2x \cdot \Delta x - \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 25{,}08 + 0{,}05x^2 - 2x - 25{,}08)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{-0{,}05 \cdot 2x \cdot \Delta x - \Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = -0{,}05 \cdot 2x - \Delta x + 2.$$

Cuando la longitud de Δx se va reduciendo y haciéndose muy, muy pequeña, es decir, cuando $\Delta x \to 0$, el valor de la pendiente en el punto A será el valor límite:

$$\text{límite}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha) = \text{Derivada de } f(x) \text{ en } A(x_0, y_0) = f'(x_0) = -0{,}05 \cdot 2 \cdot x_0 + 2.$$

En este caso, el punto A es (13,42.63) y, por tanto, $f'(13) = -0{,}05 \cdot 2 \cdot 13 + 2 = 0{,}7$, que coincide con el resultado de la pendiente medido sobre la curva.

En la tabla siguiente se comprueba en cinco puntos de la curva que la derivada en cada punto tiene el mismo valor que la pendiente en dicho punto.

Punto	x	Función $f(x)$ $y=-0{,}05x^2+2x+25{,}08$	Derivada $f'(x)$ $y'(x)=-0{,}05\cdot 2x+2$	Pendiente medida (m)
D	42	20,88	−2,2	tan(129,81°) = −2,2
C	32	37,88	−1,2	tan(114,44°) = −1,2
K	20	45,08	0	tan(0) = 0
A	13	42,63	0,7	tan(34,99°) = 0,7
B	4	32,28	1,6	tan(57,99°) = 1,6

Para calcular la pendiente de la tangente en cualquier punto de la curva $y=-0{,}05x^2+2x+25{,}08$ se emplea la función derivada $y=-0{,}1x+2$. En el caso de funciones del tipo $y=k\cdot x^n$, su derivada será $y'=k\cdot n\cdot x^{n-1}$. Por ejemplo, en la función $y=5x^4$, su derivada es $y'=20x^3$.

Aplicando el mismo método de paso al límite empleado en la función $y=-0{,}05x^2+2x+25{,}08$ se han obtenido las funciones derivadas de todos los tipos de funciones. Experimentando con diversas funciones se han diseñado las reglas básicas de derivación:

a) La derivada de una suma de varias funciones es la suma de sus derivadas.
b) La derivada del producto de una constante por una función es la constante por la derivada de dicha función.
c) La derivada de una constante es cero.

Por esta razón, obtener la función derivada de una función polinómica es sencillo: basta con calcular la derivada de cada uno de sus términos. En el caso de la función polinómica $y=-3x^2+7x-2$, resulta fácil comprobar que su función derivada sería: $y'=-6x+7$.

Si se quiere calcular la derivada de cualquier otro tipo de función tampoco es necesario repetir el proceso de paso al límite empleado anteriormente. Para ello se emplean unas reglas de derivación que han sido deducidas mediante el cálculo de los límites antes mencionados para cada tipo de función.

Las tablas de funciones derivadas de cada tipo de función se emplean para resolver en cada caso el estudio de las tendencias de una función, o sea las zonas y grados de crecimiento y decrecimiento de la curva correspondiente. El lector interesado en profundizar en el tema de derivación puede remitirse a las obras de análisis contenidas en la bibliografía.

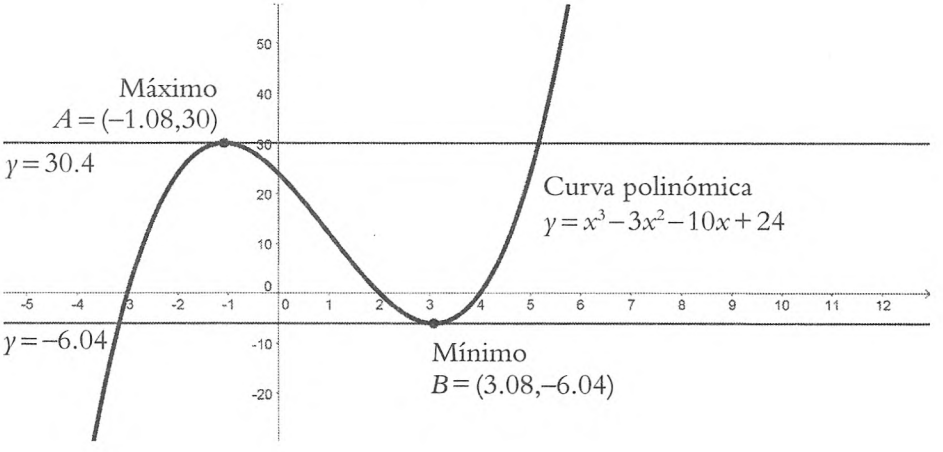
Extremos de una función

El segundo problema importante atacado por Newton y Leibniz para determinar la forma de la gráfica de una función (su curva) era la determinación de los puntos extremos, es decir, aquellos en los que la curva alcanza un valor máximo o mínimo. Este problema fue tratado por Newton y Leibniz en la década de 1660 a partir de los resultados de la geometría analítica desarrollada por Pierre de Fermat: aplicaron el ya resuelto problema de las tangentes a los puntos singulares de la curva en los cuales la recta tangente es una recta horizontal.

Dado que una recta horizontal forma un ángulo de 0° con la horizontal y que la tangente de un ángulo de cero grados vale cero, lograron reducir el problema de la determinación de los extremos de una función a la búsqueda de los valores de x, que hacían que la derivada primera (que es la pendiente de la recta tangente en ese punto) valiera cero, o sea, a resolver la ecuación $f'(x)=0$. En el caso de la función polinómica de tercer grado $y=x^3-3x^2-10x+24$, su derivada es $y'=3x^2-6x-10$, y los valores que le dan un valor cero son las soluciones de la ecuación de segundo grado $0=3x^2-6x-10$ que se obtienen con la fórmula habitual:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 3\cdot(-10)}}{2\cdot 3}=\frac{6\pm\sqrt{36+120}}{6}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{6+\sqrt{156}}{6}=3{,}08\\[2ex]\dfrac{6-\sqrt{156}}{6}=-1{,}08\end{cases}$$



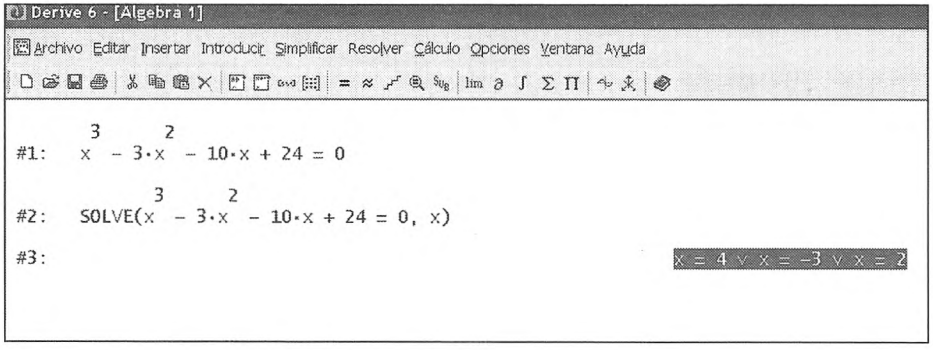
Ceros de una función

Los *ceros* de una función $f(x)$ son los valores de x en los que la función se anula, es decir, los valores de x que cumplen: $f(x) = 0$.

Dicho de otro modo, son los diferentes puntos en los que la curva corta al eje X, dado que los puntos del eje de abscisas son los únicos puntos del plano cartesiano cuyas ordenadas y son cero.

Estos puntos de corte de la función con el eje X tienen un gran interés en la elaboración de la gráfica de la función, ya que son los puntos por los que la curva atraviesa el eje x. Para calcularlos debe resolverse la ecuación $f(x) = 0$. Naturalmente, en función de lo compleja que sea la ecuación de la función $y = f(x)$ se incrementará la dificultad para resolverla.

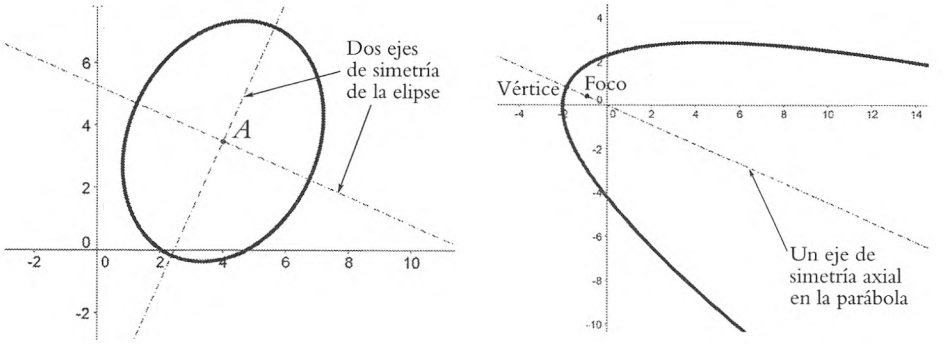
En el caso de la curva $y = x^3 - 3x - 10x + 24$ se ha de resolver la ecuación $0 = x^3 - 3x - 10x + 24$, que es de tercer grado. Para ello se puede emplear un software de cálculo simbólico adecuado, como Derive:



De este modo se obtienen las tres soluciones: $x = 4$, $x = -3$, $x = 2$. Por lo tanto, la curva corta al eje X en los puntos (4,0) (–3,0) y (2,0), como puede comprobarse en la gráfica de la curva de la página anterior.

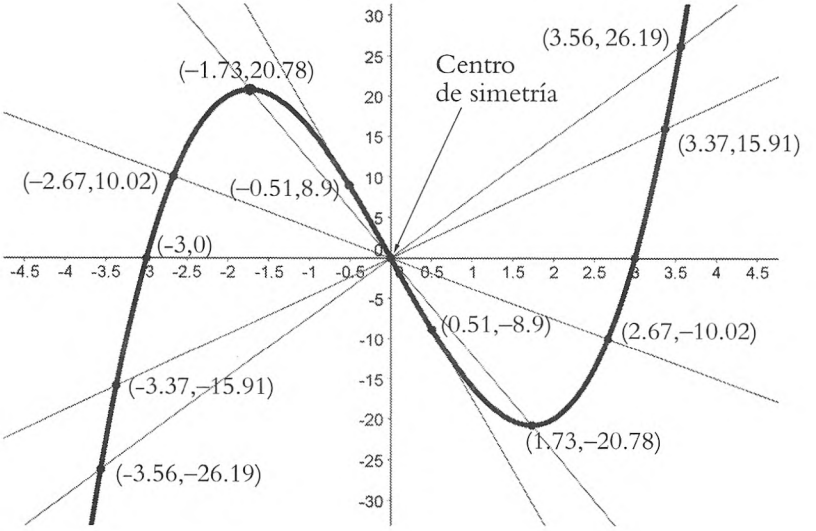
Simetrías de una función

La curva de algunas funciones presenta un aspecto como si una parte de ella fuera su imagen reflejada. Esta especie de «espejo» es lo que se llama eje de simetría de la función. En este caso se dice que la función tiene una *simetría axial* (simetría respecto de un eje):



En las figuras pueden observarse los dos ejes de simetría de la elipse y sus centros, así como el único eje de simetría de la parábola, su foco y su vértice.

En las curvas existe otro tipo de simetría, la *simetría central*. En ella, todos los puntos de la curva tienen su simétrico respecto de un punto llamado centro de simetría (o sea, que los puntos simétricos se encuentran a igual distancia del centro). La figura siguiente muestra una función polinómica de tercer grado con centro de simetría.



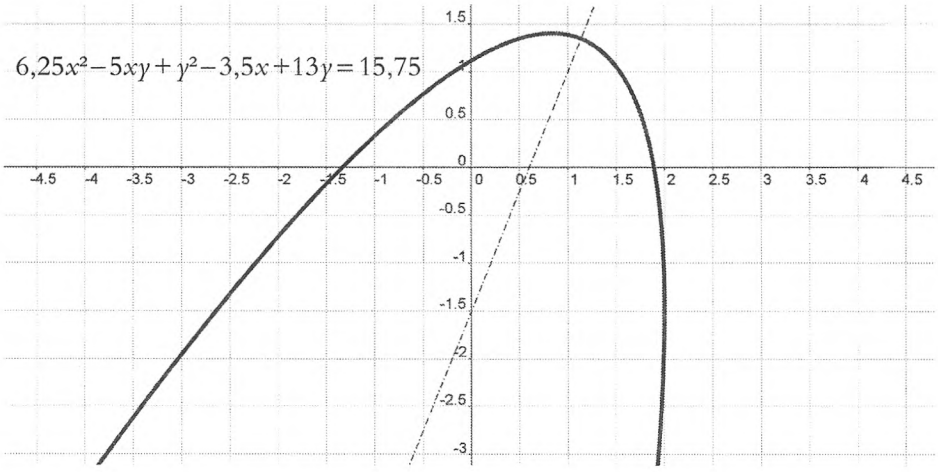
Dominio de una función

El dominio de una función es el conjunto de valores de la variable x en los que esta función existe. Se dice que una función no existe en el campo real cuando adquiere valores «extraños», como infinito ($+\infty$ o $-\infty$), o bien cuando el valor de y resul-

te un número como $\sqrt{-16}$, que ya no se encuentra dentro del campo de los números usados hasta el momento, que en matemáticas son los llamados *números reales*. Efectivamente, no existe ningún número real conocido que sea resultado de $\sqrt{-16}$. ¿Por qué? Porque, en el caso de existir dicho número, al elevarlo al cuadrado (o sea al multiplicarlo por sí mismo) debería resultar −16. Pero al multiplicar un número por sí mismo (tanto si es positivo como si es negativo) siempre resulta positivo, y nunca un número negativo, como −16:

$$(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = +16 \quad \text{y} \quad (+4)^2 = (+4)\cdot(+4) = +16.$$

Las funciones polinómicas y las exponenciales tienen su dominio en todo el campo de los números reales. Matemáticamente se escribe: D(funciones polinómicas) = $\mathbb{R}$. Las figuras muestran una función polinómica de segundo grado:

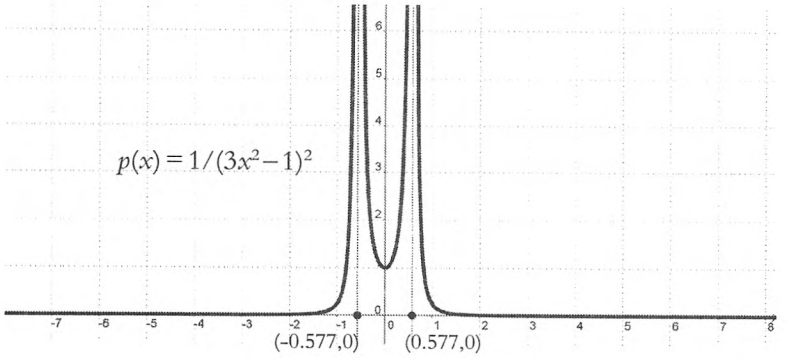


Curva polinómica de segundo grado inclinada.

Aunque parezca que las curvas de funciones polinómicas que se han visto «empiecen y se acaben», en realidad dichas curvas continúan su trazo indefinidamente. Las funciones racionales como

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$$

tienen algunos puntos en los que la función «se dispara», es decir, tiende a infinito, como se puede observar en la curva siguiente:

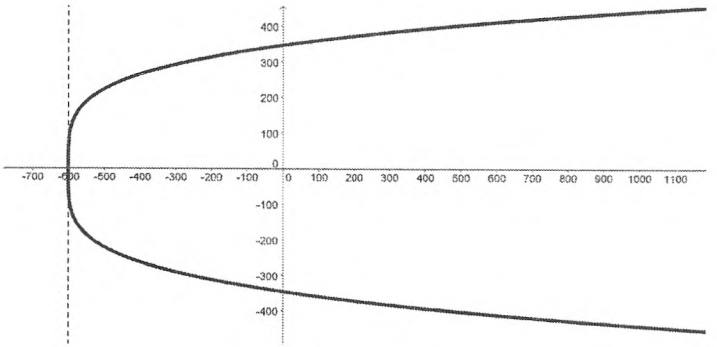


En matemáticas se suele decir que la función no existe en dichos puntos y, por ello, el dominio de este tipo de funciones es todo el campo de los números reales menos estos valores de x donde la función «se dispara». Esto suele escribirse matemáticamente:

$$D\left(\frac{1}{(3x^2-1)^2}\right) = \mathbb{R} - \left\{x = +\frac{1}{\sqrt{3}},\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

La función logaritmo no existe para valores negativos de x como puede observarse en la curva de la página 55. Suele escribirse: $D(\ln(x)) = \mathbb{R}^+$, lo que significa que su dominio son solamente los números reales positivos.

El dominio de la función irracional $y = 70\sqrt[4]{x+600}$ comprende todos los números reales menos los valores de x menores de -600 (o sea, $-601, -602, -603$, etc...) como puede verse en la curva siguiente:

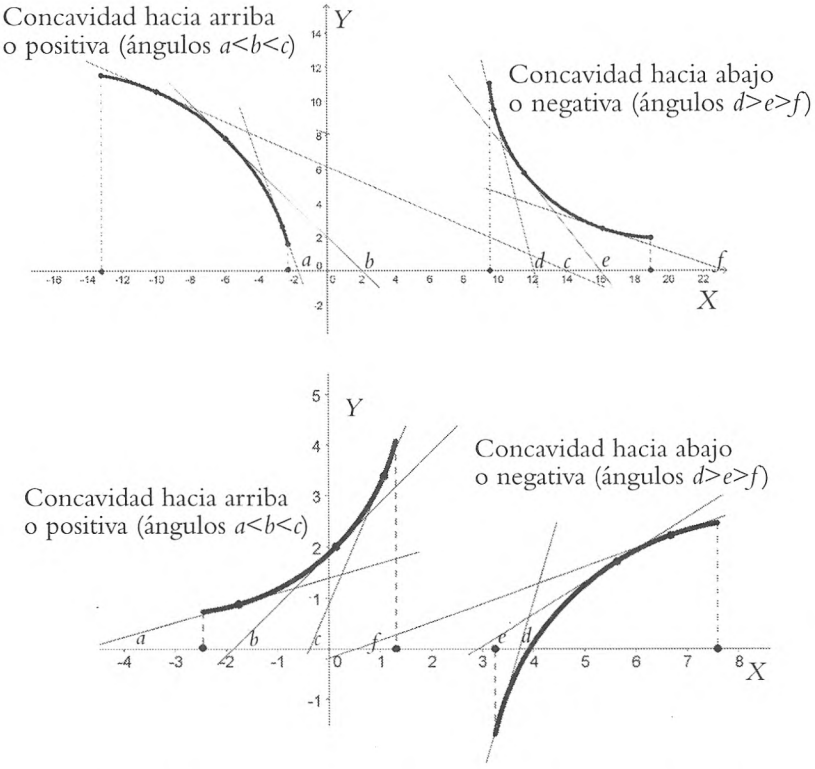


Y su dominio se expresa matemáticamente de este modo:

$$D(70\sqrt[4]{x+600}) = \mathbb{R} - \{x < -600\}.$$

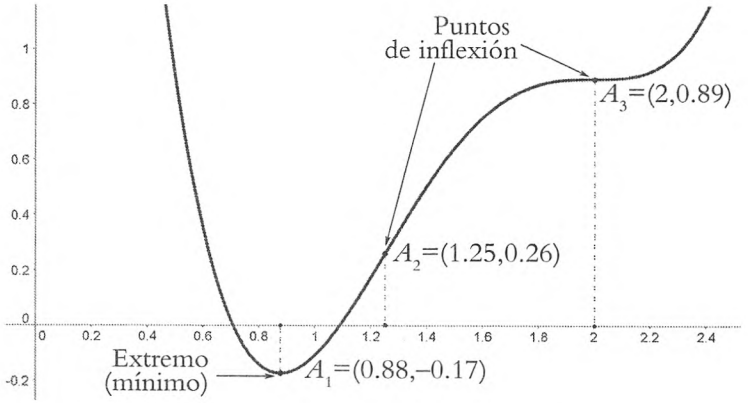
Concavidad y puntos de inflexión de una función

En los tramos de una curva en que hay un crecimiento de los valores de la misma, pueden ocurrir dos cosas: que su velocidad de crecimiento vaya aumentando o que vaya disminuyendo. En los tramos de una curva en que hay un decrecimiento de los valores de la misma también pueden ocurrir dos cosas: que vaya aumentando su velocidad de decrecimiento o que vaya disminuyendo. En ambos casos, si la velocidad aumenta se trata de un tramo de la curva de concavidad hacia arriba o positiva; en caso contrario, es un tramo de la curva de concavidad hacia abajo o negativa. Tal como se puede observar en las figuras siguientes:



Dos tramos de decrecimiento (arriba) y dos tramos de crecimiento (abajo) de una curva con concavidad diferente.

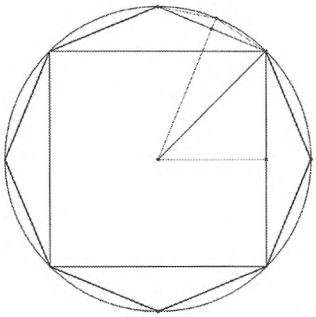
Cuando una curva pasa de un tramo de concavidad positiva a otro de concavidad negativa, o a la inversa, los puntos de cambio de tendencia se denominan *puntos de inflexión*.



Existen otras características de las funciones que se emplean en el trazado de las curvas que las representan de un modo gráfico, como su recorrido, la curvatura, las rectas normales (perpendiculares a la curva en un punto), etcétera.

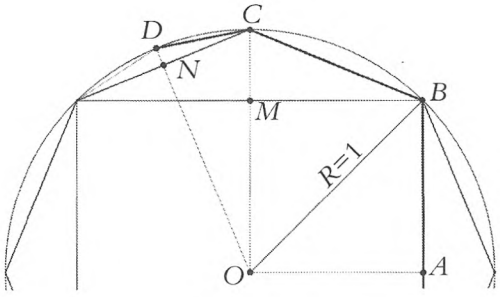
¿Cómo se mide la longitud de un tramo de curva?

Los primeros intentos de determinar la longitud de una curva fueron realizados por Arquímedes de Siracusa en el siglo III a.C., y los aplicó a la circunferencia. El método empleado consistió en dibujar dos enormes polígonos regulares de 96 lados, uno inscrito y el otro circunscrito a una circunferencia. Midiendo los perímetros de ambos polígonos asumió que la longitud de la circunferencia dibujada se encontraba entre ambos valores. Este método, conocido como «método de exhaución», fue la base que Fermat, Newton y Leibniz emplearon en el siglo XVII para desarrollar el cálculo infinitesimal. Esta gran idea de Arquímedes resultó un avance genial de lo que fue posteriormente el gran descubrimiento de los sabios del siglo XVII, el paso al límite en el que se han basado todas las matemáticas conocidas actualmente como cálculo diferencial y cálculo integral. En las figuras y cálculos siguientes se intenta reproducir el proceso realizado por Arquímedes, aunque utilizando el modo actual de escritura matemática. El cálculo que vamos a realizar consiste en obtener la longitud de una circunferencia de radio unidad (1 cm, 1 m, 1 km...). Hoy en día se sabe que el resultado es aproximadamente 2π, y que esta aproximación será tanto mayor cuantos más lados consideremos en el polígono. En la figura siguiente se puede ver la circunferencia, el cuadrado (polígono regular de 4 lados) inscrito, el octógono (polígono regular de 8 lados) inscrito y el hexadecágono (polígono regular de 16 lados) inscrito. Haciendo un zoom, quizá podrían verse el polígono de 32 lados, el de 64 lados, etcétera.



En la ampliación pueden observarse los polígonos de 4, 8 y 16 lados. Las medidas de sus lados se nombran:

$$AB = BM = \frac{l_4}{2}, \text{BC}= l_8 \text{ y CD}= l_{16}.$$



Se consideran los triángulos rectángulos *OAB*, *BMC* y *CND* en los que

$$AB = BM = OM = \frac{l_4}{2};\ BC = l_8;\ CN = \frac{l_8}{2};\ CD = l_{16}.$$

Como el radio $OB = 1$, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo *OAB* tendremos:

$$1^2 = \left(\frac{l_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_4}{2}\right)^2;\ 1^2 = 2\left(\frac{l_4}{2}\right)^2;\ 2\cdot\frac{l_4^2}{4} = 1;\ \frac{l_4^2}{2} = 1;\ l_4^2 = 2;\ l_4 = \sqrt{2}.$$

Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *BMC* se obtiene:

$$l_8^2 = \left(\frac{l_4}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{l_4}{2}\right)^2;\ l_8^2 = \frac{l_4^2}{4} + 1 - l_4 + \frac{l_4^2}{4};\ l_8^2 = \frac{2}{4} + 1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4} = 2 - \sqrt{2};\ l_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *CND*, debe calcularse previamente *ND*, que es precisamente 1−*ON*. Por tanto, se debe calcular antes *ON* en el triángulo rectángulo *ONC*.

$$ON^2 = OC^2 - CN^2;\ \ ON^2 = 1^2 - (\frac{l_8}{2})^2;\ \ ON^2 = 1^2 - (\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})^2;$$

$$ON = \sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{4-2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$ND = 1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\ \ l_{16}^2 = CN^2 + ND^2 = (\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})^2 +$$

$$+ (\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})^2 = 2 - \sqrt{2+\sqrt{2}};\ \ l_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Y puede deducirse que:

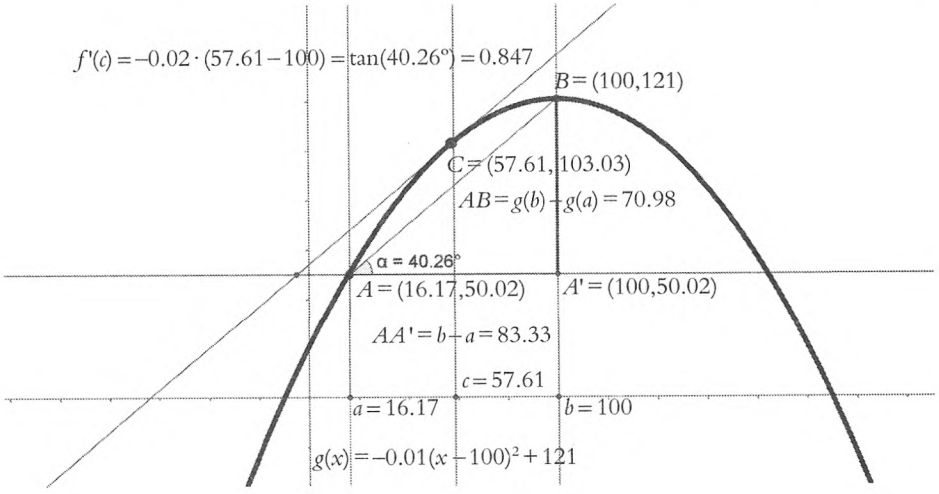
$$l_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};\ \ l_{64} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}};...$$

Multiplicando por el número de lados se calcula el perímetro de cada polígono y la mitad del perímetro es la aproximación del número π correspondiente.

Nº de lados	Lado	Perímetro	$\frac{\text{Perímetro}}{2}$ = *= valor aproximado de π*
4	$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	2,828427125
8	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$8\sqrt{2-\sqrt{2}}$	3,061467459
16	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	3,121445152
32	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	3,136548491
64	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$	$64\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$	3,140331157

Más tarde, el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) aplicó un nuevo concepto para calcular la longitud de un tramo de curva: partió del teorema del

valor medio, que afirma que en un tramo de curva continua entre dos puntos A y B existe un punto intermedio C cuya recta tangente a la curva es paralela a la recta AB:

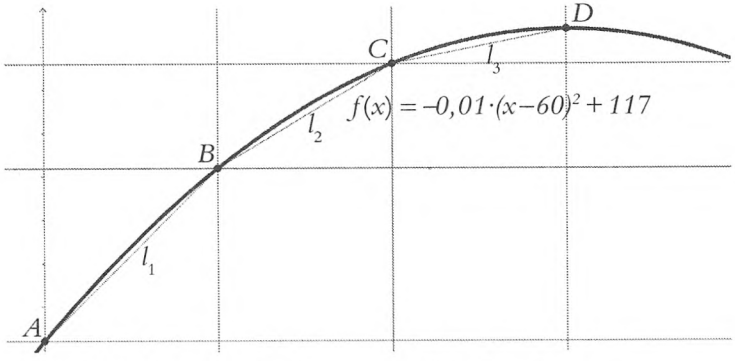


Dicho de otro modo, como la tangente en C es la derivada en el punto $C, f'(c)$ debe existir un punto C entre A y B tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En el caso concreto de la figura se puede comprobar que:

$$f'(57,61) = -0,02 \cdot (57,61 - 100) = 0,847 = \frac{f(100) - f(16,17)}{100 - 16,17} = \frac{70,98}{83,83} = 0,847.$$



Longitud de un tramo de curva dividido en tres segmentos.

Para calcular la longitud del arco de curva $L(ABCD)$, se hace una aproximación inicial mediante tres segmentos rectos cuya longitud total es $l_1 + l_2 + l_3$. Aplicando el teorema de Pitágoras en cada tramo, tenemos:

$$l_1 + l_2 + l_3 =$$

$$= \sqrt{[f(b)-f(a)]^2+(b-a)^2} + \sqrt{[f(c)-f(b)]^2+(c-b)^2} + \sqrt{[f(d)-f(c)]^2+(d-c)^2}.$$

Si aplicamos el teorema del valor medio explicado anteriormente a cada tramo *AB*, *BC* y *CD*:

$$[f(b)-f(a)] = f'(m)\cdot(b-a)$$
$$[f(c)-f(b)] = f'(n)\cdot(c-b)$$
$$[f(d)-f(c)] = f'(p)\cdot(d-c)$$

donde m, n y p son abscisas intermedias de los segmentos *AB*, *BC* y *CD*.

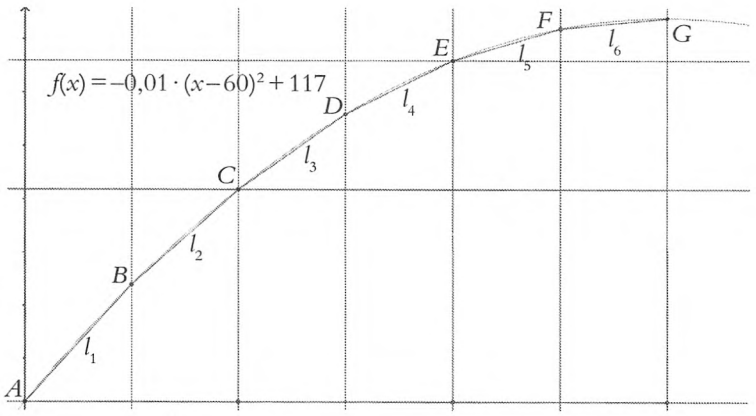
Si se toman tramos de igual anchura, $(b-a)=(c-b)=(d-c)=\Delta x$:

$$L \cong l_1+l_2+l_3 = \sqrt{f'(m)^2\cdot\Delta x^2+\Delta x^2} + \sqrt{f'(n)^2\cdot\Delta x^2+\Delta x^2} + \sqrt{f'(p)\cdot\Delta x^2+\Delta x^2}.$$

Si se aumenta el número de tramos de 3 a n:

$$L \cong l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n = \sum_1^n \sqrt{f'(x_i)^2\cdot\Delta x^2+\Delta x^2} = \sum_1^n \sqrt{f'(x_i)^2+1}\cdot\Delta x.$$

Se puede aumentar el número de segmentos y entonces la suma de sus longitudes se aproxima más a la longitud del tramo de curva.



Longitud de un tramo de curva dividido en seis segmentos.

Si se aumenta indefinidamente el número de tramos, la suma $l_1 + l_2 + l_3 \ldots + l_n$ se aproxima cada vez más a la longitud L del arco de curva, y la longitud Δx se hace cada vez más pequeña, tendiendo a cero. Y cuando Δx está ya muy próximo a cero se le llama *diferencial de x (dx)*.

El límite de estas sumas cuando se va reduciendo Δx y hay cada vez más sumandos (n tiende a ∞) es aquello que en matemáticas se conoce como *integral definida* de la función $\sqrt{f'(x)^2+1}$ entre los puntos de abscisas a y d:

$$L = \lim_{n\to\infty} (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \sqrt{f'(x_i)^2+1} \cdot \Delta x = \int_a^d \sqrt{f'(x)^2+1} \cdot dx.$$

Existen curvas rectificables que son aquellas que tienen longitudes calculables exactamente. Pero hay curvas no rectificables. Curvas rectificables son la circunferencia, la parábola, la catenaria, la cicloide, la espiral logarítmica, la recta... En cambio, la elipse no es rectificable, dado que al calcular su longitud con la fórmula de la integral anterior se obtiene una integral llamada integral elíptica de segunda especie que sólo puede calcularse con métodos aproximados. Se han propuesto algunas aproximaciones notables para la longitud de la elipse, como la del matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920):

$$L(\text{elipse},\ a,\ b) = \pi[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}].$$

Ramanujan inventó en 1903 un algoritmo que, en 1987, permitió calcular el número π con 100 millones de cifras decimales después de dos milenios y medio.

El cálculo de más y más cifras de π es una carrera inacabable de hombres y ordenadores. Sin embargo, esta carrera infinita no parece muy razonable, dado que bastan 39 cifras de π para calcular el perímetro de una circunferencia que abarcara todo el universo conocido con un error menor que el radio de un átomo de hidrógeno.

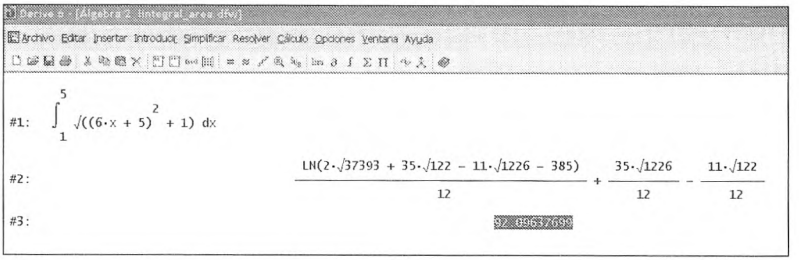
En el caso de una curva rectificable como la parábola se puede calcular la longitud de un arco de la misma. Por ejemplo, la longitud de la curva parabólica $y = 3x^2 + 5x - 10$ entre los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 5$ se calcularía del modo siguiente: en este caso la derivada de la función es $f'(x) = 6x + 5$, y la longitud entre 1 y 5 se puede obtener calculando la integral

$$\int_1^5 \sqrt{(6x+5)^2+1} \cdot dx$$

mediante el software de cálculo simbólico Derive, resultando:

$$L = \int_1^5 \sqrt{(6x+5)^2+1}\,dx = \int_1^5 \sqrt{36x^2+60x+26}\,dx =$$

$$= \frac{\ln(2\sqrt{37393}+35\sqrt{122}-11\sqrt{1226}-385)}{12} + \frac{35\sqrt{1226}}{12} - \frac{11\sqrt{122}}{12} \cong 92{,}09637699.$$

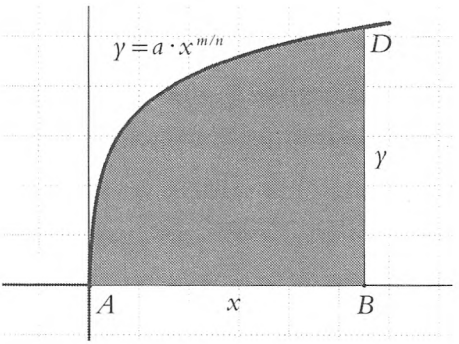


¿Cómo se determina el área encerrada por una curva?

En 1711 apareció el libro *De Analysi*, escrito por Isaac Newton en 1669. En él aparecían las fluxiones por primera vez. Newton envió el libro a Isaac Barrow, su profesor de matemáticas en el Trinity College de Cambridge, quien valoró muy positivamente su trabajo. La primera regla para realizar cuadraturas (calcular áreas) que se encuentra en *De Analysi* es:

«Supongamos que la base AB de una curva cualquiera AD tiene una ordenada perpendicular BD, y llamemos $AB = x$, $BD = y$, y supongamos que $a, b, c, \ldots$ son cantidades dadas, y m, n, números enteros. Entonces:

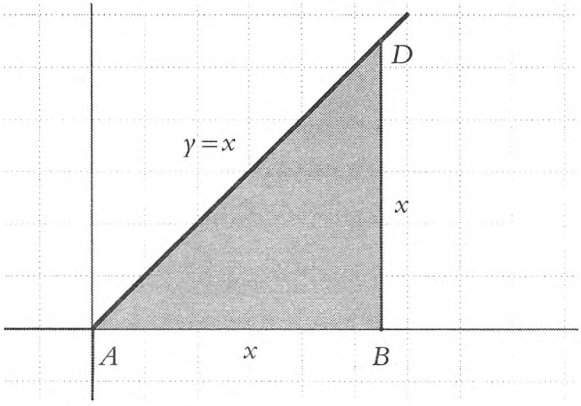
Regla 1: Si $y = a \cdot x^{m/n}$, será $\dfrac{an}{m+n} \cdot x^{(m+n)/n}$ = área ABD.»



Usando la figura de la página anterior, Newton calculó el área por encima del eje horizontal abarcada por la curva $y = a \cdot x^{m/n}$ hasta el punto de abscisa x. Según él, y tal como se indica en una traducción de 1745 de su obra *De Analysi*, esta área era:

$$\frac{an}{m+n} \cdot x^{(m+n)/n}.$$

Con tal afirmación, Newton comenzó a desarrollar lo que actualmente se conoce como cálculo integral. Si se aplica este descubrimiento a la recta $y = x$, donde $m = n = a = 1$, la fórmula anterior nos da $1/2\,x^2$, lo que se confirma fácilmente con la fórmula del área del triángulo: $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$.



De un modo similar, el área bajo una parábola $y = x^2$ entre el origen y el punto de abscisa x es:

$$\frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}.$$

En la regla 2 de *De Analysi* se dice:

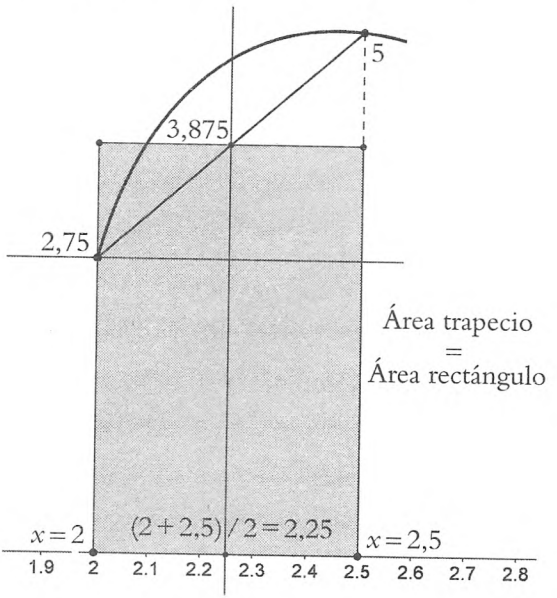
«Si el valor de y se puede hacer igual a varios de estos términos, el área también podrá constar de las áreas que resultan de cada uno de estos términos».

Como ejemplo Newton probó que el área bajo la curva $y = x^2 + x^{3/2}$ es:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{2}{5} \cdot x^{5/2}.$$

Dicho en términos actuales, la integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada una de ellas.

Riemann desarrolló un método sistemático para calcular el área entre una curva y el eje *OX*. Para ello dividió el intervalo entre las abscisas mínima y máxima en zonas de forma trapecial con igual longitud de la base y de alturas, las ordenadas correspondientes de la curva, como en la figura siguiente:



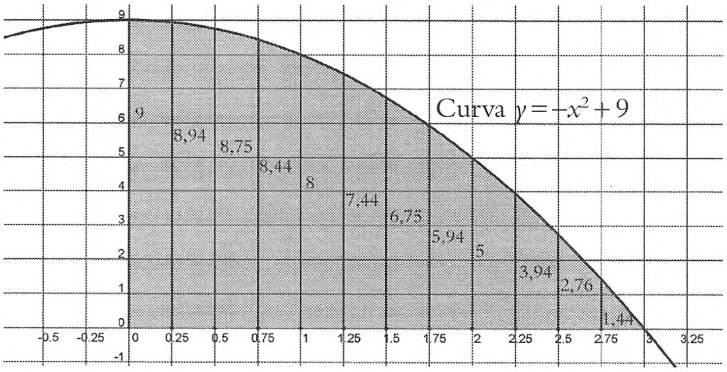
Como ejemplo vamos calcular el área bajo la función $y=-x^2+9$ entre $x=0$ y $x=3$, considerando cuatro aproximaciones y empleando cuatro divisiones diferentes en trapecios de anchuras 1, 0,5, 0,25 y 0,125. Con divisiones de anchura 1 se obtiene una aproximación del área entre $x=0$ y $x=3$ de 17,5 unidades cuadradas.

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$(f(x_2)+f(x_1))/2$	Δx	$(f(x_2)+f(x_1)/2)\cdot\Delta x$
2	3	5	0	2,5	1	2,5
1	2	8	5	6,5	1	6,5
0	1	9	8	8,5	1	8,5
						17,5

Con divisiones de anchura 0,5 se obtiene una aproximación del área de 17,875 unidades cuadradas.

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$(f(x_2)+f(x_1))/2$	Δx	$(f(x_2)+f(x_1)/2)\cdot\Delta x$
2,5	3	2,75	0	1,375	0,5	0,6875
2	2,5	5	2,75	3,875	0,5	1,9375
1,5	2	6,75	5	5,875	0,5	2,9375
1	1,5	8	6,75	7,375	0,5	3,6875
0,5	1	8,75	8	8,375	0,5	4,1875
0	0,5	9	8,75	8,875	0,5	4,4375
						17,875

Con divisiones de anchura 0,25 se obtiene una aproximación del área de 17,984375 unidades cuadradas:



x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$(f(x_2)+f(x_1))/2$	Δx	$(f(x_2)+f(x_1)/2)\cdot\Delta x$
2,75	3	1,4375	0	0,71875	0,25	0,1796875
2,5	2,75	2,75	1,4375	2,09375	0,25	0,5234375
2,25	2,5	3,9375	2,75	3,34375	0,25	0,8359375
2	2,25	5	3,9375	4,46875	0,25	1,1171875
1,75	2	5,9375	5	5,46875	0,25	1,3671875
1,5	1,75	6,75	5,9375	6,34375	0,25	1,5859375
1,25	1,5	7,4375	6,75	7,09375	0,25	1,7734375
1	1,25	8	7,4375	7,71875	0,25	1,9296875
0,75	1	8,4375	8	8,21875	0,25	2,0546875
0,5	0,75	8,75	8,4375	8,59375	0,25	2,1484375
0,25	0,5	8,9375	8,75	8,84375	0,25	2,2109375
0	0,25	9	9,0625	9,03125	0,25	2,2578125
						17,984375

Con divisiones de anchura 0,125 se obtiene una aproximación mejor del área, 17,9921875 unidades cuadradas.

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$(f(x_2)+f(x_1))/2$	Δx	$(f(x_2)+f(x_1)/2)\cdot\Delta x$
2,875	3	0,734375	0	0,3671875	0,125	0,045898438
2,75	2,875	1,4375	0,734375	1,0859375	0,125	0,135742188
2,625	2,75	2,109375	1,4375	1,7734375	0,125	0,221679688
2,5	2,625	2,75	2,109375	2,4296875	0,125	0,303710938
2,375	2,5	3,359375	2,75	3,0546875	0,125	0,381835938
2,25	2,375	3,9375	3,359375	3,6484375	0,125	0,456054688
2,125	2,25	4,484375	3,9375	4,2109375	0,125	0,526367188
2	2,125	5	4,484375	4,7421875	0,125	0,592773438
1,875	2	5,484375	5	5,2421875	0,125	0,655273438
1,75	1,875	5,9375	5,484375	5,7109375	0,125	0,713867188
1,625	1,75	6,359375	5,9375	6,1484375	0,125	0,768554688
1,5	1,625	6,75	6,359375	6,5546875	0,125	0,819335938
1,375	1,5	7,109375	6,75	6,9296875	0,125	0,866210938
1,25	1,375	7,4375	7,109375	7,2734375	0,125	0,909179688
1,125	1,25	7,734375	7,4375	7,5859375	0,125	0,948242188
1	1,125	8	7,734375	7,8671875	0,125	0,983398438
0,875	1	8,234375	8	8,1171875	0,125	1,014648438
0,75	0,875	8,4375	8,234375	8,3359375	0,125	1,041992188
0,625	0,75	8,609375	8,4375	8,5234375	0,125	1,065429688
0,5	0,625	8,75	8,609375	8,6796875	0,125	1,084960938
0,375	0,5	8,859375	8,75	8,8046875	0,125	1,100585938
0,25	0,375	8,9375	8,859375	8,8984375	0,125	1,112304688
0,125	0,25	8,984375	8,9375	8,9609375	0,125	1,120117188
0	0,125	9	8,984375	8,9921875	0,125	1,124023438
						17,9921875

Calculando el área mediante la integral definida del método de cuadratura de Newton descrito anteriormente se obtiene:

$$\text{Área} = \int_0^3 (-x^2+9)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3}+9x\right]_0^3 = \left(\frac{-3^3}{3}+9\cdot 3\right)-\left(\frac{-0^3}{3}+9\cdot 0\right) = -9+27 = 18.$$

Y se observa una aproximación creciente en cada una de las divisiones trapeciales hacia el valor exacto del área, que es 18.

Capítulo 3

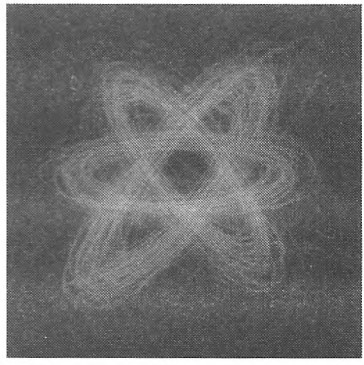
Los caminos de las curvas. Trayectorias de objetos

Las trayectorias, el movimiento y las curvas

La trayectoria es el camino que sigue un objeto en su movimiento. Se puede definir como el conjunto de todas las posiciones que ocupa dicho objeto en su movimiento. Es posible definir trayectorias desde partículas elementales (electrones, fotones...) hasta objetos de tamaño superior (proyectiles, coches, satélites, planetas...) e incluso de fluidos (agua, material estelar, huracanes...); lo que tienen en común todas las trayectorias es el movimiento.

La forma de las trayectorias puede ser recta, curva, cíclica... También hay trayectorias continuas y no continuas. Las que pueden observarse son continuas, asociadas al movimiento de un objeto, pero si se definen trayectorias de objetos atómicos, cuando entra en juego la mecánica cuántica, éstas pueden ser no continuas. La mecánica cuántica es la parte de la física que estudia el movimiento de los objetos del tamaño de los núcleos atómicos. Un ejemplo de estas trayectorias es la que sigue un electrón alrededor del núcleo atómico; en este caso se habla de trayectorias probabilísticas. Se trata de «zonas» de diferente probabilidad de movimiento y no exactamente de una línea definitoria de la trayectoria.

Trayectoria de un cohete espacial.

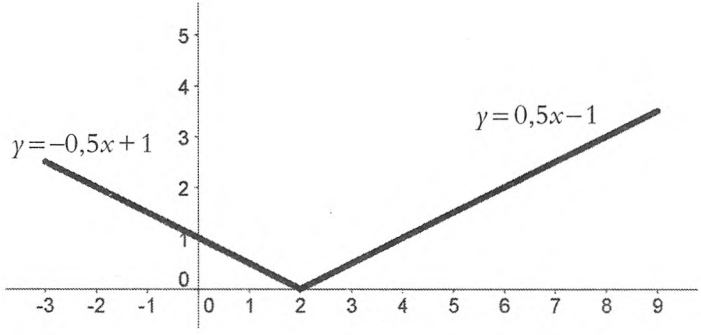


Trayectoria de un electrón.

La curva se convierte en recta

Vamos a estudiar la trayectoria que sigue un objeto que cae sobre la Tierra y la de una bala a corta distancia. En el caso del objeto, la representación gráfica es la de una recta vertical. En el de una bala, la trayectoria que sigue es recta si se considera una distancia corta, mientras que en distancias largas, la trayectoria de la bala no es recta, sino que tiende a curvarse, puesto que la fuerza de la gravedad supera el impulso dado a la bala por el arma. De forma habitual, la policía lleva a cabo investigaciones de las trayectorias balísticas considerando el hecho de que sean líneas rectas.

En el escenario de un tiroteo se puede saber el punto de impacto del proyectil y el del rebote en el suelo tomando medidas simples, de modo que es posible calcular la trayectoria del disparo y determinar la posición exacta del tirador y el ángulo de tiro. En la figura siguiente se ha simulado un disparo con rebote para poder hacer los cálculos. En sus simulaciones, la policía utiliza haces de luz láser, hilos de colores tensados o tubos extensibles; todos ellos dibujan en el espacio una línea recta.



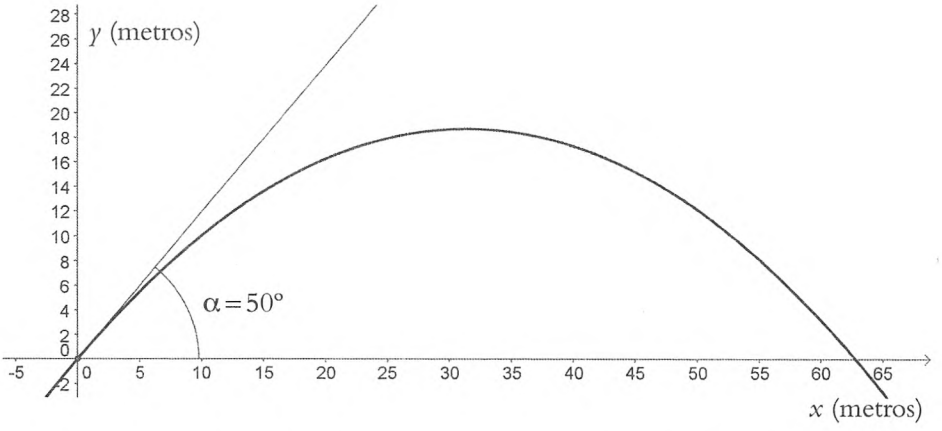
La recta se convierte en curva

Por lo general, las trayectorias de los movimientos suelen ser curvas definidas o la combinación de dos o más curvas. En el caso del lanzamiento de un proyectil o de cualquier otro objeto a larga distancia, la trayectoria no es una recta, como se ha comentado en el apartado anterior. La razón de que dicha trayectoria se curve reside en la influencia que ejerce la gravedad sobre el objeto, el rozamiento y la fuerza de Coriolis (efecto de la rotación terrestre que tiende a desviar el proyectil hacia la derecha de su trayectoria cuando el movimiento tiene lugar en el hemisferio Nor-

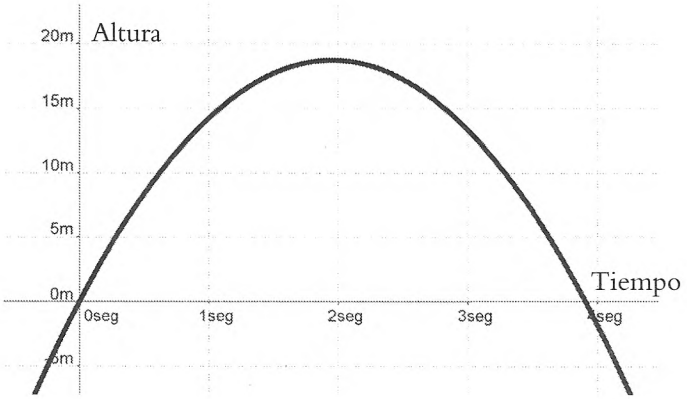
te). Si sólo se tuviese la influencia de la gravedad, la curva que se obtendría sería una parábola, pero en realidad la trayectoria que sigue el objeto es una curva que se aproxima a una parábola.

Galileo fue el primero que abordó el cálculo de la caída vertical, y lo hizo desde lo alto de la torre de Pisa. Sin embargo, este movimiento era demasiado rápido para efectuar mediciones precisas. Para «rebajar» el efecto de la gravedad, realizó un mítico experimento en el que dejaba caer una bola por un plano inclinado de ángulo α, lo que rebajaba la aceleración de la gravedad. Repitió la prueba para diferentes inclinaciones. Con un reloj de agua observaba el tiempo que tardaba en caer la bola, y del análisis de los datos recogidos dedujo la fórmula (ecuación) del movimiento, es decir, la altura a la que estaba la bola en cada instante de su caída en función del tiempo de descenso. A partir de esos datos obtuvo la ecuación que relacionaba la altura con el tiempo de descenso. De los datos obtenidos para diferentes ángulos dedujo que el movimiento generaba unas velocidades en la bola que eran proporcionales al tiempo de descenso, de lo que se deduce que el aumento de velocidad en la caída es uniforme. Con los datos obtenidos para diferentes ángulos pudo calcular un valor de dicha aceleración de la gravedad sobre la Tierra muy aproximado al valor aceptado hoy en día: $g = 9{,}8$ m/s^2.

Tras ese experimento, Galileo estudió en profundidad el movimiento de los proyectiles y aportó grandes avances a la artillería de su época. A partir de los trabajos del griego Apolonio (siglo III a.C.) dedujo que la trayectoria de una bala de cañón era una curva llamada parábola que ya era conocida en la Grecia clásica.



Curva de la trayectoria de la bala disparada con una inclinación de 50° y una velocidad de salida de 90 km/h. $y = 1{,}19x - 0{,}019x^2$.



Parábola de tiro de Galileo. La altura del proyectil depende del tiempo desde el disparo; tiene un máximo a la mitad del tiempo de viaje. La curva muestra la altura *que alcanza la bala en función del* tiempo *transcurrido desde el disparo, con una inclinación de 50° y una velocidad de salida de 90 km/h.*
Altura $= 19{,}15 \cdot$ *tiempo* $- 4{,}9 \cdot$ *tiempo*^{2}.

Las dos curvas anteriores, aunque parecen similares, se refieren a cuestiones muy distintas y tienen una utilidad muy diferente. La curva de $y = 1{,}19x - 0{,}019x^2$ es una curva que puede observarse en la realidad. Es la trayectoria, o sea, las diferentes posiciones x-y que sigue la bala en el aire, tras el disparo, hasta que llega al suelo. En cambio, la *curva de altura* $= 19{,}15 \cdot \text{tiempo} - 4{,}9 \cdot \text{tiempo}^2$ o, simplificando los nombres de las variables, $y = 19{,}15 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$, no es una curva real, sino que describe un fenómeno de la ciencia, y no puede visualizarse físicamente en el campo de tiro. Si se va siguiendo la curva, cada punto (descrito por un par de valores y-t) indica la altura a que se halla la bala en cada instante t de su movimiento, desde el momento del disparo.

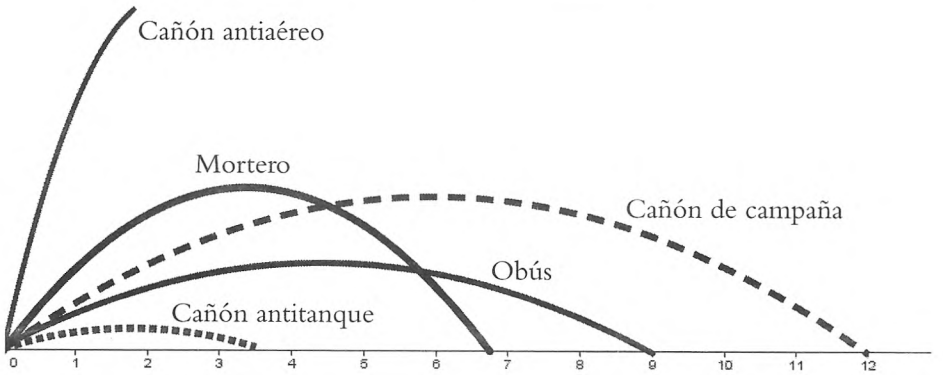
Las tablas de la página siguiente, de valores calculados con las fórmulas, también explican las dos curvas anteriores. En la tabla de trayectoria puede verse que la bala llega al suelo (altura $y = 0$) a los 62,78 m desde el punto de disparo. En la de la curva altura-tiempo puede comprobarse que la bala choca contra el suelo ($y = 0$) entre los 3,9 y los 4,0 segundos.

Galileo elaboró unas tablas de tiro parabólico que fueron muy usadas en las guerras europeas hasta el siglo XVII. Cuando en el lanzamiento se tiene en cuenta el rozamiento, la trayectoria es casi-parabólica. El efecto del rozamiento se incrementa con el aumento de la velocidad de lanzamiento.

Trayectoria	
x metros	*y* metros
0	0
5	5,48075
10	10,013
15	13,59675
20	16,232
25	17,91875
30	18,657
35	18,44675
40	17,288
45	15,18075
50	12,125
55	8,12075
60	3,168
62,7833	0

Curva altura-tiempo	
t segundos	*y* metros
0	0
0,3	5,3040
0,6	9,7260
0,9	13,2660
1,2	15,9240
1,5	17,7000
1,8	18,5940
2,1	18,6060
2,4	17,7360
2,7	15,9840
3	13,3500
3,3	9,8340
3,6	5,4360
3,9	0,1560
4,0	−1,8000

El lanzamiento de objetos es una disciplina que se ha estudiado desde la Antigüedad con el fin de aplicarla a los lanzamientos de proyectiles en las batallas. Como se observa en la figura, todas las trayectorias forman una familia de parábolas dependientes de dos parámetros: ángulo de disparo y velocidad de salida.



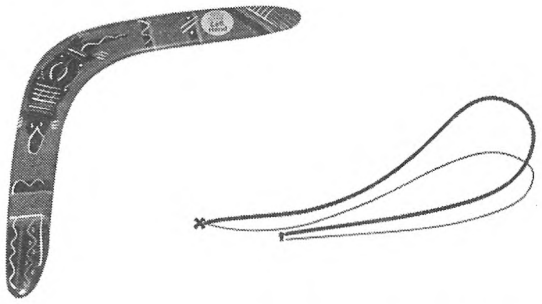
Diferentes trayectorias de lanzamiento de proyectiles.

Existen objetos cuyo lanzamiento no responde al esquema parabólico de los proyectiles. Un ejemplo es el bumerán, objeto para la caza de origen muy antiguo

y que ha sido utilizado en todo el mundo y no sólo en Australia, como comúnmente se cree, aunque su nombre es una transcripción de la pronunciación de los aborígenes australianos. Con el paso del tiempo, algunos tipos de estas armas arrojadizas han evolucionado y ahora subsisten como actividades físico-deportivas.

El bumerán clásico consta de dos alas de la misma longitud, unidas por un codo. Las alas, una de ataque y la otra de salida, son rectas o ahusadas, y el ángulo que queda entre ellas puede ser de 105° a 110°. Las palas tienen un perfil similar a las alas de un avión, en las cuales la velocidad del viento es mayor en la parte superior que en la inferior, de manera que en esta última la presión que se ejerce es mayor, empujando el ala hacia arriba. Este principio también es aplicable al bumerán, haciendo que «vuele»; en física se conoce como principio de Bernoulli.

Cuando se lanza el bumerán se consigue que éste gire sobre su propio eje y, por lo tanto, se crea un efecto giroscópico (se desplaza y da vueltas) que hace que la trayectoria sea tal que vuelva al punto de partida. La trayectoria que se describe es más o menos elíptica.

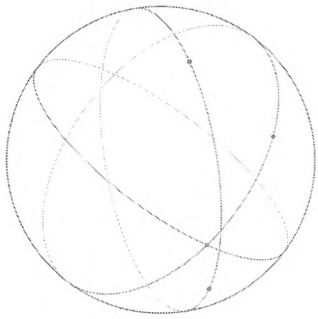


Esquema de la trayectoria que sigue un bumerán como el de la fotografía. La línea delgada es la proyección del movimiento en el suelo.

Las curvas en las distancias cortas

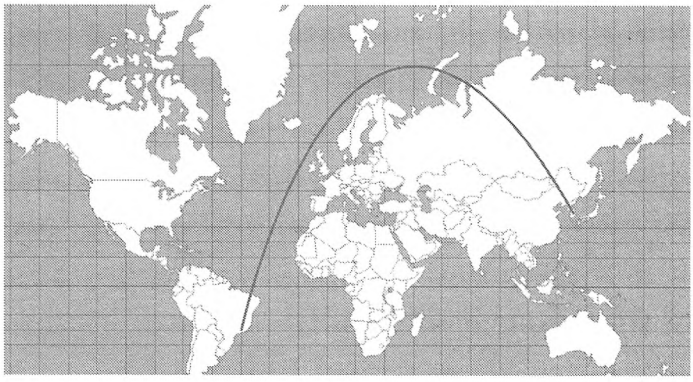
El cálculo o estimación de la distancia más corta entre dos puntos tiene un gran interés desde la perspectiva matemática, física y de la vida cotidiana, y abarca, por ejemplo, el cálculo de la trayectoria que sigue un vehículo dotado con GPS, las trayectorias de los vuelos internacionales, o el trazado de los cables de comunicaciones, entre otros muchos aspectos. El concepto matemático asociado a la idea de distancia más corta entre dos puntos es el de la línea geodésica. Aunque pueda sonar extraño, la línea recta no siempre es el camino más corto entre dos puntos. Si en el

espacio en que se trabaja, la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta, se dice que se trata de un espacio euclideo con una distancia o métrica definida. La recta, el plano y el espacio 3D son espacios euclideos de una, dos y tres dimensiones. Sin embargo, cuando se trata de trasladarse de un punto a otro sobre una superficie esférica, la línea más corta es una circunferencia y no una línea recta.



Geodésicas en una esfera.

Existen muchas situaciones en las que se plantea la necesidad de calcular caminos cortos sobre una superficie esférica, como sucede con las rutas aéreas o los viajes por tierra a grandes distancias (para distancias cortas puede considerarse que la Tierra es plana). En este caso, la línea más corta entre dos puntos es el arco de circunferencia o círculo máximo. En el caso de nuestro planeta, si se dibujan las líneas correspondientes a la distancia más corta entre dos puntos, las geodésicas, y luego se traza una proyección plana sobre el papel, se obtiene una imagen como la siguiente:

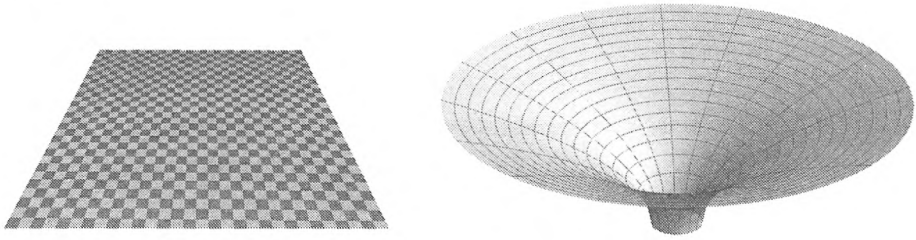


En un mapa de la superficie terrestre, las geodésicas adoptan la forma que se observa en el planisferio. Eso significa que, por ejemplo, un avión que quisiera via-

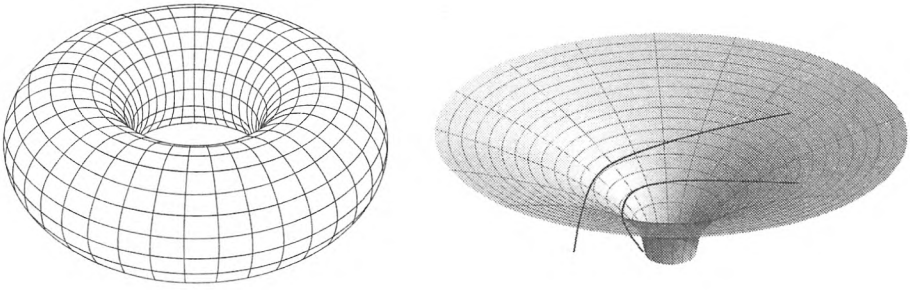
jar entre dos puntos cubriendo la menor distancia posible debería hacerlo siguiendo alguna de esas líneas geodésicas.

En el caso de espacios de formas curvas complejas, las geodésicas son muy importantes para calcular formas, distancias mínimas, trayectorias de la luz... Son elementos fundamentales en el caso de la teoría de la relatividad general y en situaciones de gravedad elevada, donde se producen fuertes curvaturas del espacio.

La «forma» de un espacio se describe matemáticamente con una ecuación llamada métrica. Se trata de una relación entre las dimensiones del espacio (que se pueden representar por x, y, z) que nos indica su forma: éste puede ser plano, esférico o adoptar formas más complejas, con diferentes curvaturas en diferentes partes del mismo.



Espacio plano (izquierda) y curvado.



A la izquierda, curvatura de toro. La figura de la derecha muestra cómo Las líneas geodésicas se «adaptan» al espacio curvo para conseguir el camino más corto.

Para poder calcular las geodésicas en un determinado espacio se formula la ecuación de la longitud de la curva en forma de función y se calcula cuándo ese valor es mínimo. La complejidad del proceso es elevada, y es necesario conocer el cálculo de variaciones para poder llevarlo a cabo.

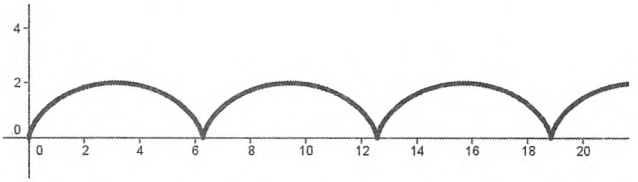
Las geodésicas son las líneas de flujo en el caso de zonas con un campo gravitatorio, es decir, son los caminos «naturales» por donde se mueven los objetos bajo los efectos de la gravedad. Frente a las líneas de recorrido mínimo se encuentran las líneas de tiempo menor en el recorrido, conocidas como braquistócronas.

Todas estas geodésicas están definidas por la curvatura propia del espacio, ya sea por la fuerte gravedad, ya sea por la forma concreta del espacio. El elemento importante es la curvatura del espacio donde existe movimiento del objeto.

Se pueden encontrar situaciones en las cuales el espacio es plano y la geodésica correspondiente no es una línea recta, como en un campo magnético. En esta situación, la distancia mínima de la trayectoria entre los puntos del campo magnético de una partícula es una cicloide, con la condición de que el campo magnético y el eléctrico sean uniformes y perpendiculares entre sí. Lo que se obtiene es una cicloide ortogonal al campo magnético.

Las curvas se mueven. Curvas definidas por movimiento

No solamente hay curvas que definen trayectorias y movimiento, sino que también existen otras que se definen por el movimiento de figuras geométricas siguiendo una determinada curva. Es el caso de la cicloide de la figura:



Las ecuaciones paramétricas de la cicloide tienen el siguiente aspecto (para hacer la gráfica se ha tomado el valor de $R = 1$):

$$\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

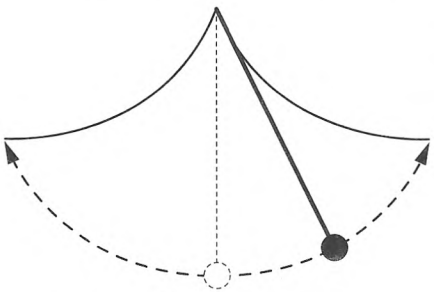
La cicloide es la curva trazada por un punto de una circunferencia (llamada circunferencia generatriz) cuando ésta gira sobre una línea (recta directriz) sin deslizarse por ella. La cicloide ha sido estudiada por muchos matemáticos debido a sus interesantes propiedades. La primera es que el área encerrada por un arco de cicloide es exactamente tres veces el área de la circunferencia que la genera; la segunda,

que la longitud del arco de la cicloide es cuatro veces el diámetro de la circunferencia que genera la curva.

El gran interés suscitado por esta curva proviene de las curiosas características que presenta. Aparte de la relación con el área y con el diámetro, tiene dos características curiosas: la de ser braquistócrona y tautócrona. Así, la cicloide es la trayectoria de menor tiempo en el movimiento de un objeto entre dos puntos situados en el mismo plano, pero no en la vertical; por lo tanto, es braquistrócrona. Además, si se coloca una cicloide mirando hacia arriba y se dejan caer dos objetos desde puntos diferentes, éstos llegarán a la parte inferior al mismo tiempo. Dicho de otro modo: si se deja caer un objeto que se desplace uniformemente en caída por efecto de la gravedad, lo hace en el mismo tiempo de forma independiente de la posición inicial del objeto; por lo tanto, la cicloide es tautócrona.

En épocas pretéritas, la necesidad y la dificultad para medir con exactitud el tiempo durante las travesías marítimas obligó a muchos científicos a realizar investigaciones sobre el tema. En 1673, el descubrimiento de la propiedad tautócrona de la cicloide permitió a Christiaan Huygens (1629-1695) resolver el problema de la construcción de un reloj de péndulo isócrono. La solución consiste en forzar el movimiento de regreso del péndulo mediante un tope en cada extremo que tenga la misma forma que la curva cicloide que sigue el extremo del péndulo. En su obra *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae* (París, 1673) da una demostración geométrica de este hecho. En la figura se observa que un péndulo construido con esas características sigue la trayectoria de una cicloide cuyo periodo (tiempo que tarda el péndulo en hacer una oscilación) resulta independiente de la amplitud de la oscilación.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) comenzó a trabajar en el problema de la tautócrona hacia 1754. En agosto del año siguiente, cuando contaba tan sólo 19 años de edad, comunicó por correspondencia a Euler sus avances en la resolución del problema de la tautócrona, así como su método para la resolución de máximos y mínimos condicionados (método de los multiplicadores). Posteriormente, en 1823, Niels Henrik Abel (1802-1829) propuso una generalización del problema de la tautócrona. Más concretamente, planteó la cuestión de determinar una curva tal que un objeto material que se desplace uni-

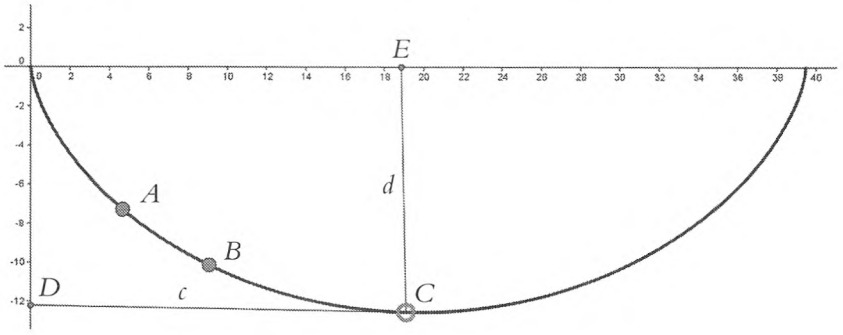


Péndulo de Huygens oscilando.

formemente en caída por efecto de la gravedad y sin rozamiento a través de ella hasta un punto dado de la misma, lo haga en un tiempo prefijado de antemano para cada altura posible desde la que deba caer. Como es evidente, si se exige que el tiempo de caída sea independiente de la altura desde la que debe caer el objeto, entonces se obtiene el problema original de la tautócrona. Volviendo a las ecuaciones de la curva cicloide,

$$\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

y suponiendo que A y B son dos puntos de la cicloide en la figura inferior, se puede calcular el tiempo que tardarían en llegar al punto C. Para realizar los cálculos se tiene que determinar la distancia entre los puntos A y C, y entre B y C. Se supone que el movimiento se produce a lo largo de la cicloide y que no hay rozamiento. La causa del movimiento es únicamente la fuerza de la gravedad.



La velocidad a lo largo del arco es:

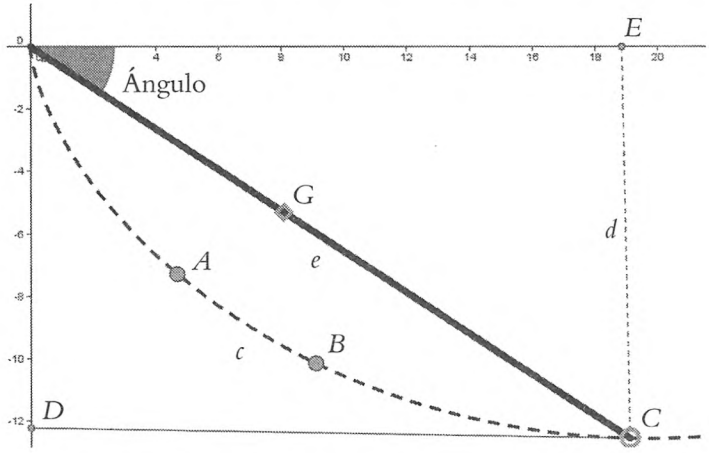
$$\frac{ds}{dt} = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Para cada punto de la curva y para cada valor de t se obtiene un valor para la longitud del arco. En el caso de la figura anterior, el valor del arco desde A hasta C es de 15,36 cm, mientras que en el caso de B hasta C es de 10,31 cm.

Se calcula el tiempo en función de la velocidad y de la posición. Los cálculos incluyen realizar algunas integrales, y el resultado final es:

$$\text{Tiempo} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

El tiempo que tarda el objeto en llegar al punto C es independiente de la posición inicial, y solamente depende del radio R de la circunferencia generatriz y del valor de la gravedad ($g = 9{,}8$ m/s^2). Este resultado es sorprendente, ya que en caso de la cicloide, el tiempo de caída al mínimo de la misma (punto C) es independiente de la posición inicial, y es menor que en el caso de la caída sobre una recta.



Caída de un objeto por una recta en relación a su caída por la curva cicloide. Si desciende por la recta, tarda más en llegar abajo. Partiendo de cualquier altura el tiempo de descenso es el mismo, pero no la velocidad de llegada a la parte inferior.

Para hacer los cálculos se necesita saber que la aceleración del objeto que cae por la recta es proporcional a la aceleración de la gravedad g multiplicada por el seno del ángulo indicado en la figura anterior. En esa situación el tiempo de caída hasta el punto C es

$$\text{Tiempo} = \sqrt{4+\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}},$$

que es claramente superior al caso de la cicloide.

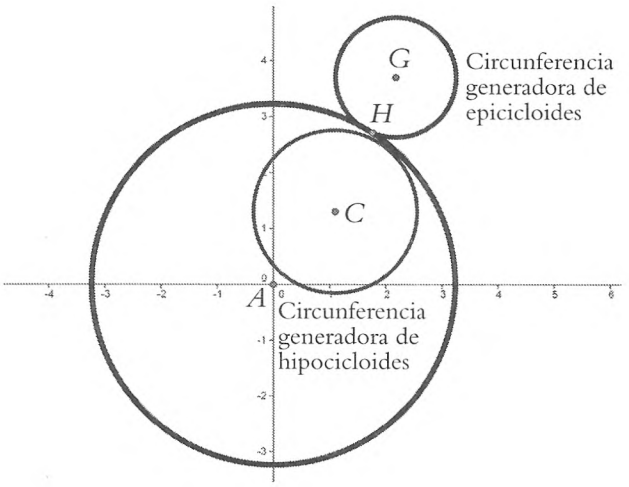
Las propiedades de la cicloide permiten construir un péndulo que tiene un periodo de oscilación independiente de la amplitud con la que realiza el movimiento, tal como corresponde al péndulo isócrono de Huygens, un instrumento que se reveló imprescindible para conocer la hora en un barco en movimiento. En los navíos que navegaban en alta mar se podía calcular la latitud sin excesiva dificultad mediante la observación astronómica: la altura del Sol sobre el horizonte al mediodía permite obtener la distancia en grados de latitud desde el ecuador; de este modo, midiendo la

elevación del Sol o, en el caso del hemisferio norte terrestre, midiendo la posición de la estrella Polar durante la noche, podía determinarse la latitud con cierta exactitud.

Por el contrario, el problema del cálculo de la longitud resultaba mucho más complejo: era necesario saber la hora local y la de referencia, puesto que la diferencia de tiempo entre el momento en que el Sol alcanza su punto más alto en un lugar concreto y el momento en que lo alcanza en otro lugar puede usarse para obtener la distancia angular entre ambos. Pero para ello eran necesarios relojes lo suficientemente precisos.

En general se pueden clasificar las curvas que se construyen por el movimiento de una curva sobre otra figura introduciendo el concepto de «ruleta». Se trata de una curva que se forma por la trayectoria de un punto, llamado generador, que está unido a una curva dada y que rueda sin deslizarse a lo largo de otra curva fija. Algunos ejemplos de este tipo de curvas son las cicloides, que ya hemos visto, las hipocicloides, las epicicloides, las hipotrocoides y las epitrocoides.

La *hipocicloide* es la curva que describe la trayectoria de un punto situado sobre una circunferencia que rueda por el interior de otra sin deslizamiento. La *epicicloide* es la curva que describe la trayectoria de un punto situado sobre una circunferencia que rueda por el exterior de otra sin deslizamiento; se asocia al movimiento planetario.



En el caso de la hipocicloide y de la epicicloide, la circunferencia rueda sobre otra. En el caso de la cicloide, la circunferencia rueda sobre otra circunferencia de radio infinito, es decir, sobre una recta. La ecuación de la hipocicloide tiene la forma:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \\ y = (R-r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

donde R es el radio de la circunferencia fija y r, el de la circunferencia que se mueve. El ángulo θ es el parámetro que define la curva y el ángulo que describe el movimiento de la circunferencia que se mueve.

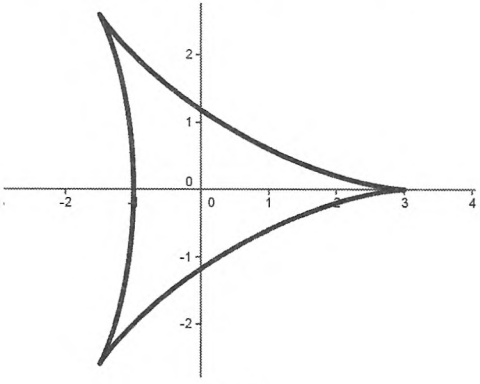
Un elemento importante en las curvas definidas por el movimiento de otras es la relación entre las dimensiones de las mismas, en este caso entre los radios de las circunferencias. Dicha relación nos proporcionará formas diferentes de las curvas. Introduciendo el valor de $K = \dfrac{R}{r}$, las ecuaciones se pueden escribir del siguiente modo:

$$\begin{cases} x = r(K-1)\cos\theta + r\cos\big((K-1)\theta\big) \\ y = r(K-1)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\big((K-1)\theta\big) \end{cases}$$

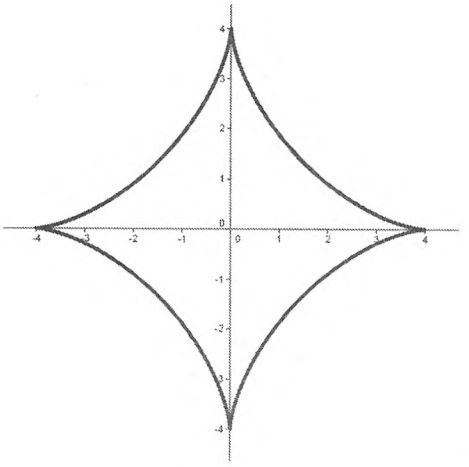
Como sucede en las epicicloides, si K es un número natural, la forma de la curva tiene K puntos singulares. Un punto singular es un punto «anguloso» en el cual no puede definirse una recta tangente única en el punto.

Si K es un número racional, se puede escribir como una fracción irreductible $K = p/q$, la curva es cerrada y tiene p puntos singulares, mientras que si K es un número irracional, como $\sqrt{2}$, la curva no es cerrada y ocupa todo el espacio entre las circunferencias definidas por R y $R-2r$.

Si $K = 1$, la hipocicloide es un punto; si $K = 2$, se convierte en una recta; si $K = 3$, se trata de un deltoide con tres puntos singulares, como se observa en la figura:

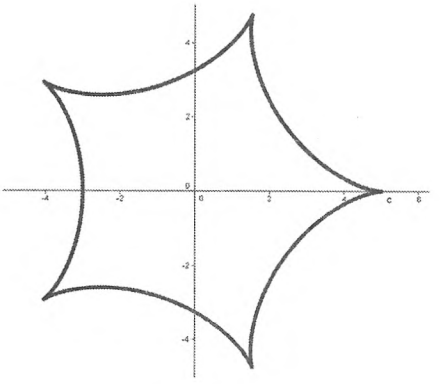


Deltoide.

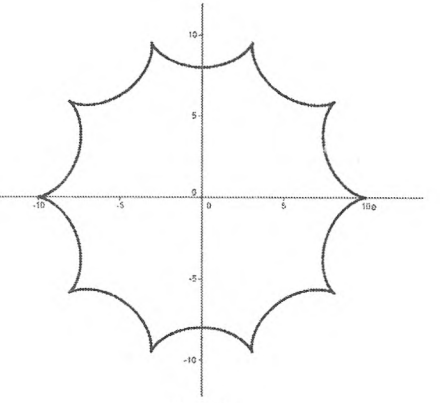


Astroide.

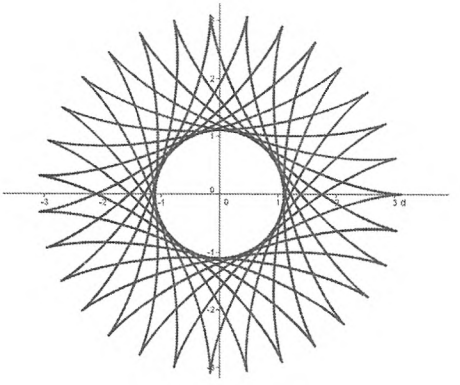
En el caso de que $K=4$, la curva que se obtiene es un astroide. Tiene cuatro puntos singulares y su ecuación de puede escribir como una «super-elipse» por la forma que recuerda a la ecuación de una elipse. Su ecuación es $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. Su nombre alude a su parecido con una estrella, aunque también se la conoce como tetracúspide, cubocicloide o paraciclo. Su forma es la que aparece en la figura de la izquierda. Algunos ejemplos de hipocicloides para diferentes valores de K son:



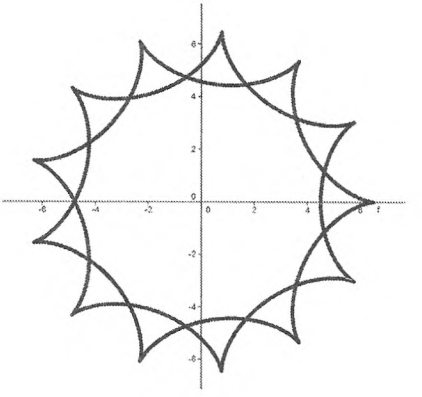
K=*5.*



K=*10.*



K=*31/10.*

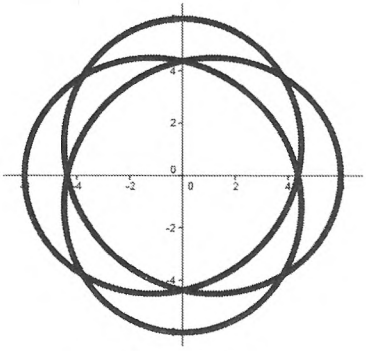


K=*13/2.*

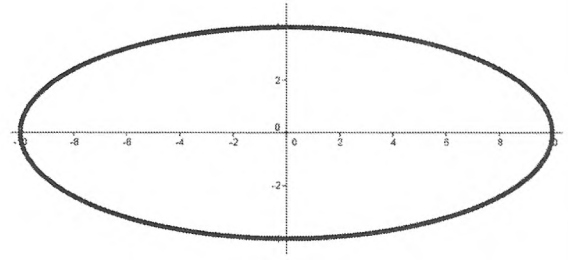
Otro ejemplo de curvas generadas por movimiento son las *hipotrocoides* y las *epitrocoides*. En ambos casos son curvas de la trayectoria de un punto que no está situado sobre la circunferencia sino que se encuentra a cierta distancia del centro de una circunferencia que rueda sobre otra, que está fija, sin deslizarse. Si la circunferencia móvil rueda por la parte exterior de la fija, las curvas que se obtienen son las epitrocoides, mientras que si rueda por el interior son las hipotrocoides. Las ecuaciones polares de una hipotrocoide son

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + d\cdot\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \\ y = (R-r)\operatorname{sen}\theta - d\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

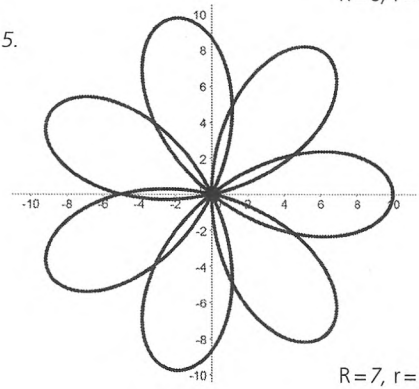
donde R es el radio de la circunferencia fija; r, el de la circunferencia generatriz que rueda por dentro de la fija, y d, la distancia del punto al centro. Cuando $d=r$ (el punto está sobre la circunferencia), se obtienen las curvas llamadas hipocicloides. Cuando $R=2r$, se obtienen elipses.



R=*4/3*, r=*1/3* d=*5*.



R=*6*, r=*3*, d=*7*.

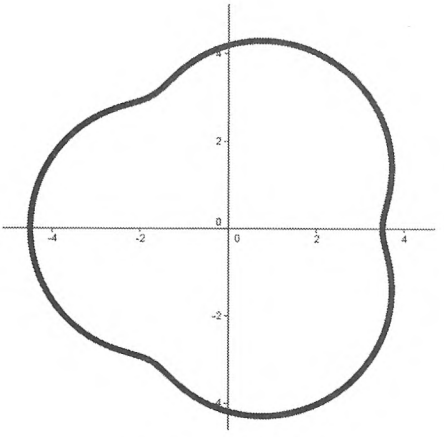


R=*7*, r=*2*, d=*5*.

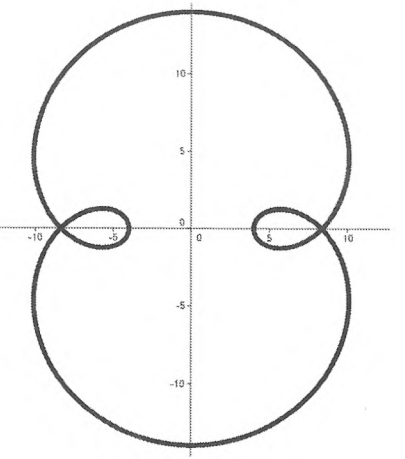
En el caso de la epitrocoides, las ecuaciones paramétricas son de la forma:

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\ \theta - d\cdot\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right) \\ y = (R+r)\text{sen}\ \theta - d\cdot\text{sen}\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

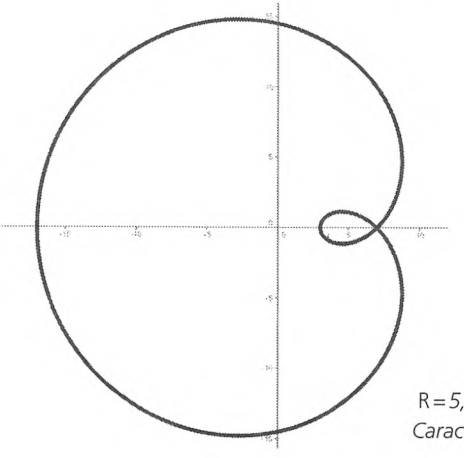
donde R es el radio de la circunferencia fija; r, el de la circunferencia generatriz que rueda por dentro de la fija, y d, la distancia del punto al centro. Dos casos especiales se dan cuando $d=r$ (se obtienen curvas epicicloides) y cuando $R=r$ (se obtiene el caracol o *limaçon* de Pascal).



R=*3*, r=*1*, d=*1/2*.



R=*6*, r=*3*, d=*5*.

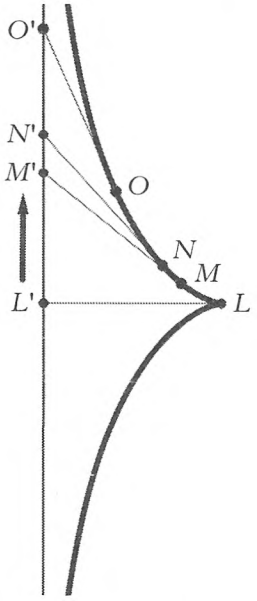


R=*5*, r=*5*, d=*7*.
Caracol de Pascal.

Curvas de persecución o arrastre

La *curva de persecución* es aquella que describe un objeto que se mueve a velocidad w constante y que persigue a otro que se desplaza en línea recta a velocidad v también constante. La curva de persecución es el movimiento que se hace cuando se intenta perseguir a alguien de forma óptima. Esto, que a priori puede parecer muy complicado de plantear matemáticamente, es en realidad un caso muy sencillo y entretenido, que permite conocer lo que se puede hacer con matemática básica.

Lo primero que se requiere para resolver el problema es plantearlo adecuadamente, así que debe entenderse cómo se produce la persecución. La cuestión fundamental es no perder de vista el objeto que se persigue, ir directamente hacia él e ir corrigiendo la trayectoria a medida que se desplaza. Se parte del hecho de que ambos puntos se mueven con una velocidad constante, pero no necesariamente la misma. Desde el punto de vista matemático, el problema consiste en dibujar la línea que une el punto que persigue con el que es perseguido.



Esquema del planteamiento cinemático de la curva de persecución.

Fue el astrónomo y matemático francés Pierre Bouguer (1698-1758) quien describió esta curva, en 1732, como ejemplo de lo que ocurría cuando un perro seguía a su amo, razón por la cual también se la conoce como la curva del

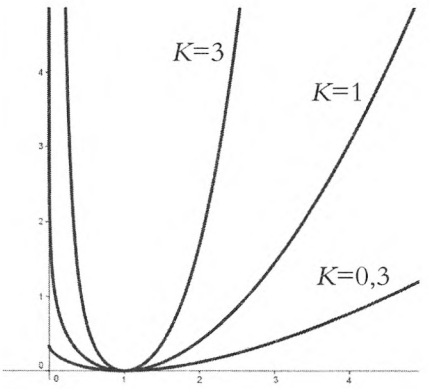
perro. Más tarde, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) generalizó el problema de la curva de persecución a otras situaciones. En la actualidad, la curva tiene aplicaciones en problemas de seguimiento de robótica y dinámica de seguimiento y vigilancia.

Como se vio en otras curvas la relación entre dos magnitudes define una parte importante del comportamiento de la curva. Se define $K=\frac{v}{w}$ como la relación entre las dos velocidades. La velocidad del objeto que se mueve en línea recta es v, y la velocidad de quien lo persigue es w. Como las dos velocidades son constantes, K es una constante. Las ecuaciones son:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^{(1-K)}}{(1-K)}-\frac{1-x^{(1+K)}}{(1+K)}\right) \text{ si } K\neq 1;$$

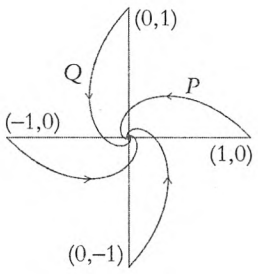
$$f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2\ln(x)-1) \text{ si } K=1.$$

Si $K=1$, las dos velocidades son iguales ($v=w$). Si $K=3$, una de las velocidades es el triple de la otra. En función de los valores de K, Las formas de las curvas son diferentes, como puede verse en la figura siguiente:

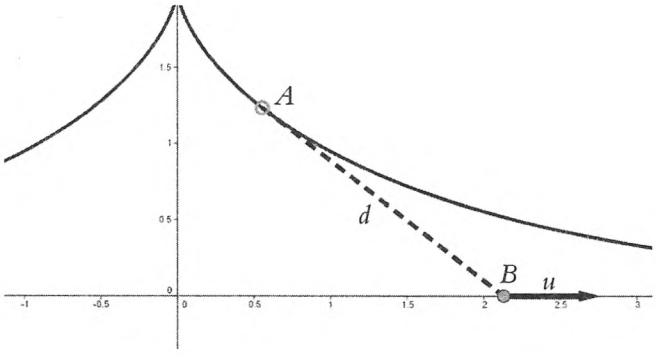


El procedimiento para escribir las ecuaciones de estas curvas es bastante complejo, e incluye el cálculo de las ecuaciones de las tangentes, de derivadas, minimizar los cálculos, resolver ecuaciones diferenciales... La situación puede generalizarse para diversos tipos de movimiento y curvas de visión. Un ejemplo clásico es la curva de persecución dentro de un polígono. El planteamiento del problema es el siguiente: desde cada vértice del polígono sale un perro o un animal que persigue a

otro de manera que el primero no pierde nunca la visión del segundo. A su vez, el segundo hace lo mismo con un tercero, y así sucesivamente hasta que el último hace lo mismo con el primero. Por lo tanto, se produce una persecución encadenada entre los diferentes puntos de cada vértice. En el caso de un cuadrado, la curva resultante es la que se puede ver en la figura siguiente:



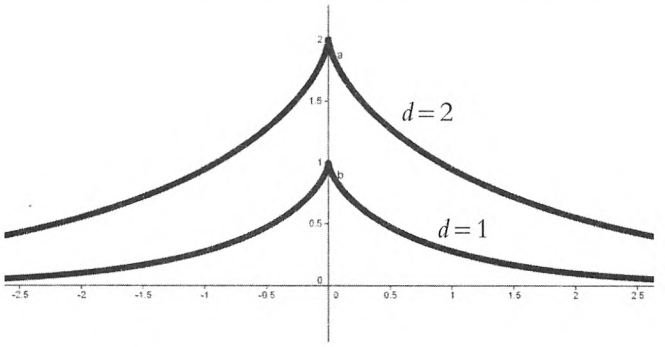
Una situación diferente tiene lugar cuando no se produce una persecución, sino un «arrastre». En este caso se obtiene una curva denominada *tractriz*.



La tractriz es la curva que describe un objeto (situado en A en la figura) que es arrastrado por otro (situado en B), que se mantiene a distancia constante d y que se desplaza en línea recta. Su ecuación en coordenadas polares puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{cases} x = d \cdot \left(\log\ (\tan\frac{\theta}{2}) + \cos\theta \right) \\ y = d \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Para diferentes valores de la distancia d, las curvas correspondientes son:



Esta curva es conocida en el mundo de la matemática como la curva del hueso del perro. Esto es debido a que se puede considerar el caso análogo en que el amo se sitúa inicialmente en el origen, y el perro en A; el amo caminaría en sentido positivo del eje de la x, mientras el perro, que sería arrastrado por la correa del amo, haría resistencia para volver al punto A, que sería donde estaría situado el hueso.

Esta curva fue estudiada por Claude Perrault en 1670 y, posteriormente, por Newton y Huygens. Una de sus aplicaciones es la del altavoz P.G.A.H.Voigt, que se patentó en 1927. Se conoce con el nombre de altavoz de bocina, y su diseño está basado en la superficie de revolución de la tractriz, esto es la superficie que se genera al hacer rodar la figura alrededor de uno de sus ejes.

Capítulo 4

Las curvas en la vida, la sociedad y la ciencia

Es bien conocida la presencia de las curvas en la vida cotidiana, en la sociedad y en la ciencia. En este capítulo se incluyen las curvas más destacadas y que, en muchos casos, están relacionadas con acciones que se realizan con cierta frecuencia en el día a día. Así, no resulta extraño conocer mediante curvas el resultado de un escáner, de una ecografía, de un electrocardiograma, determinar el desarrollo de un niño con las curvas de percentil, estudiar la evolución del crecimiento de la población o ver las ondas sonoras que genera un instrumento.

Curvas eléctricas y magnéticas

Estas curvas son las formas básicas relacionadas con la electricidad, la luz y el sonido; son las formas curvas que tienen las ondas. Las formas matemáticas de estas curvas pertenecen a la familia de las sinusoidales, que tienen como base la forma de la función seno o coseno. Entre el seno y el coseno existe una relación que permite pasar de uno a otro con un simple cambio de variable:

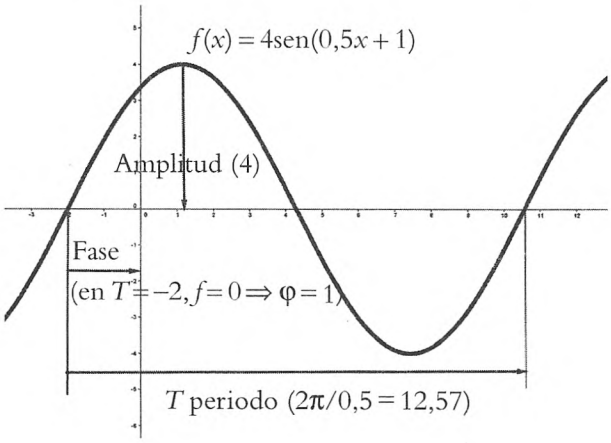
$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}).$$

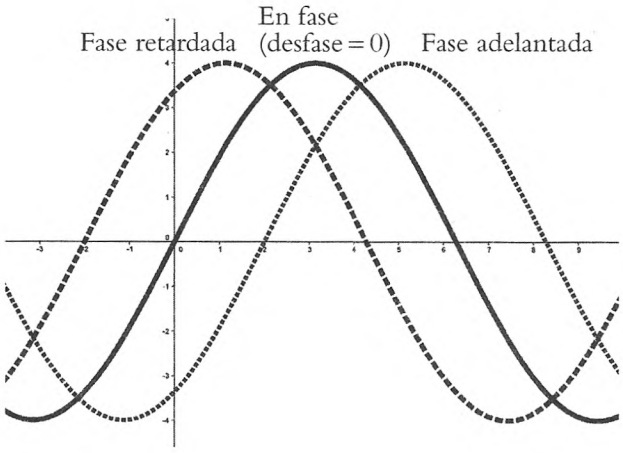
Si se decide emplear solamente la función seno, pueden definirse las funciones sinusoidales de las ondas de esta manera:

$$f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T} x + \varphi) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot x + \varphi),$$

donde A es la amplitud de la función e indica el máximo alejamiento de la función del eje X. T es el periodo, que no es más que el tiempo que se tarda en completar un ciclo, el tiempo que tarda la función en volver al mismo estado. φ es la fase inicial e indica el desplazamiento horizontal de la función; este valor indica si la función está adelantada o retardada.

En las figuras siguientes pueden verse con detalle las definiciones anteriores:





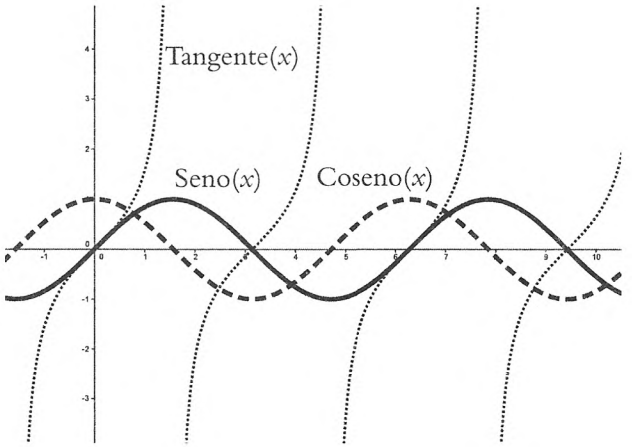
La corriente alterna tiene el aspecto de una función sinusoidal. El flujo eléctrico cambia constantemente en el tiempo, de manera que aumenta hasta llegar al máximo, luego disminuye hasta llegar a cero. En este caso, la variación de la magnitud y el sentido es cíclica.

Todos los aparatos modernos que funcionan con corriente alterna tienen alguna relación con las funciones sinusoidales o con alguna combinación de ellas. Las funciones trigonométricas básicas son el seno, el coseno y la tangente. Entre ellas existen relaciones; las más conocidas son:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1;$$

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

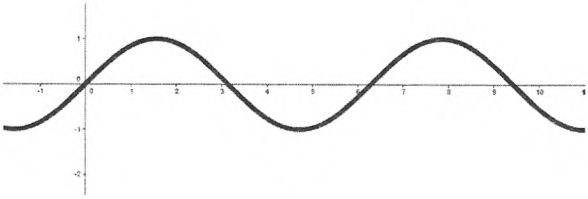
Por lo tanto, para trabajar con las funciones sinusoidales es suficiente conocer alguna de las funciones, seno, coseno o tangente; las otras se pueden deducir de las relaciones anteriores. Las representaciones gráficas pueden verse en la figura siguiente:



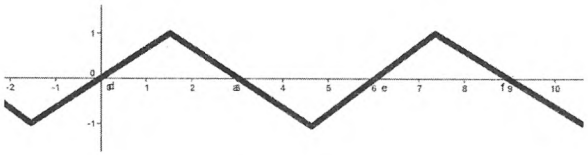
Existen otros tipos de funciones que también representan curvas eléctricas. Algunas tienen la característica de ser una señal periódica que muestra unas velocidades de subida y de bajada constantes; son las *ondas triangulares*.

Otras, como la *onda cuadrada*, alteran sus valores entre dos límites extremos sin pasar por los valores intermedios, al contrario de lo que pasa en las ondas sinusoidales y triangulares.

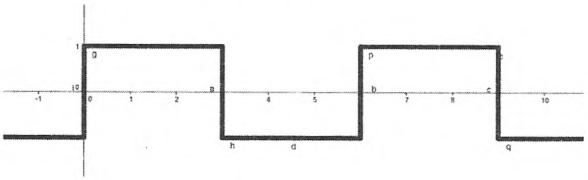
En otros casos la función pasa por los valores intermedios, pero al llegar al valor límite, pasa del máximo al mínimo sin pasar por los intermedios. Se puede decir que la función toma los valores entre el máximo y el mínimo y que, al llegar a un extremo, cambia de signo. Éste es el caso de las funciones en forma de *diente de sierra*. Estas funciones u ondas se utilizan para la generación de impulsos eléctricos, con aplicaciones en fisioterapia, pues ayudan a fortalecer los músculos; también se emplean en la electrónica digital, para la creación de imágenes en las pantallas de televisión y del ordenador, entre otras aplicaciones. Por lo general tenemos la imagen de una onda como aquella que oscila suavemente, es decir, como una función sinusoidal, pero no siempre es así, como se observa en las figuras siguientes:



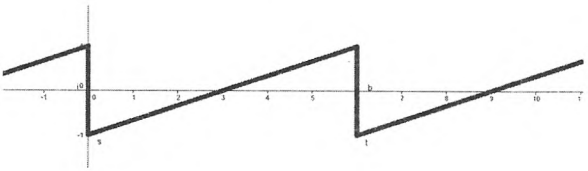
Onda sinusoidal.



Onda triangular.



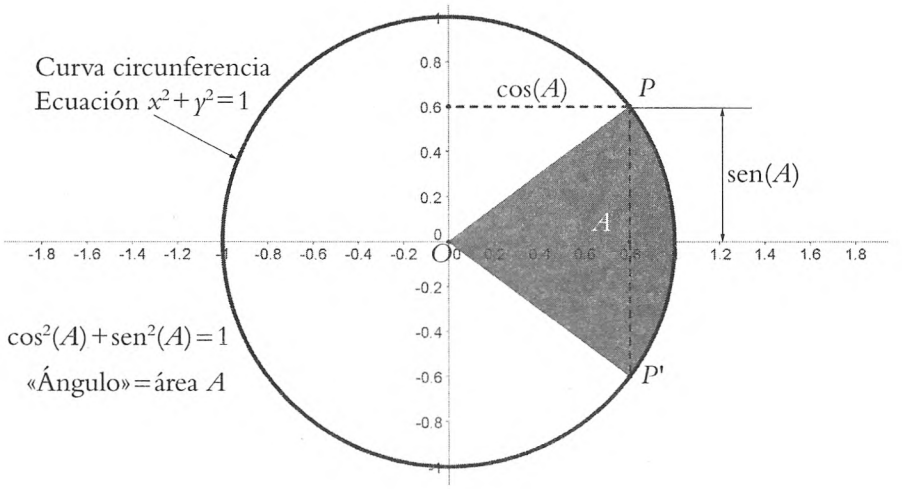
Onda cuadrada.



Onda de diente de sierra.

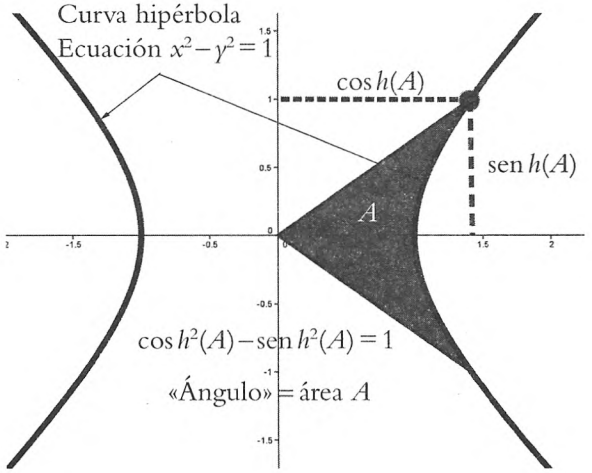
Relacionadas con la funciones trigonométricas, hacia el año 1760 Vincenzo Riccati (1707-1775) descubrió las *funciones hiperbólicas*. Las ideó cuando calculaba el área bajo la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Posteriormente, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) les dio la formulación que se conoce hoy en día.

Mientras que para calcular el área bajo el círculo se emplean las funciones trigonométricas, llamadas funciones circulares, para calcular el área bajo la hipérbola, Riccati introdujo las funciones hiperbólicas. Éstas tienen la misma interpretación geométrica que las funciones circulares.

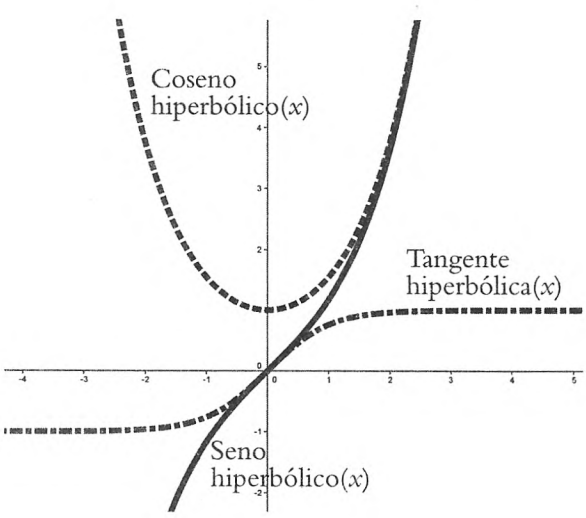


La analogía entre las funciones circulares y las hiperbólicas va más allá del método para calcular el área y las relaciones entre ellas. Las identidades entre las hiperbólicas son paralelas a las de las circulares. Cada teorema o proposición matemática en las funciones circulares o trigonométricas tiene su correspondiente en las funciones hiperbólicas.

La definición de estas funciones incluye el número e ($e=2{,}7182\ldots$) y son combinaciones de funciones exponenciales. Haciendo el paralelismo con las funciones trigonométricas, el valor del «ángulo hiperbólico» A es el área que aparece en la figura siguiente. Puede observarse la analogía con las funciones trigonométricas en la circunferencia de la figura anterior.



Las funciones hiperbólicas tienen la siguiente definición y representación:



$$\operatorname{sen} h(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2};$$

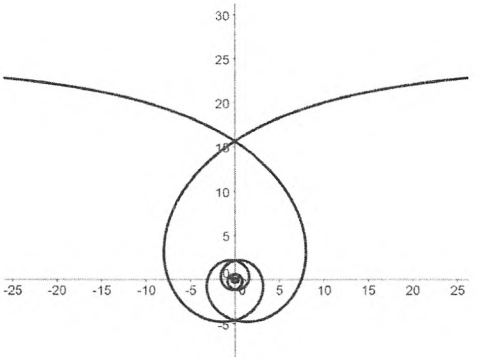
$$\cos h(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2};$$

$$\tan h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

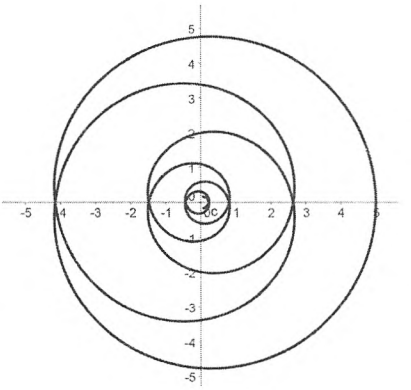
La importancia de las funciones hiperbólicas reside en el hecho de que aparecen en las soluciones de determinados problemas matemáticos. Su presencia y relación con situaciones de la vida diaria y de problemas científicos también es considerable, ya que se encuentran en la solución de algunos problemas de la teoría electromagnética, en la transferencia de calor, en la dinámica de fluidos, en la relatividad especial, en las espirales de Poinsot, en las catenarias, en mecánica, en las funciones logísticas...

La función coseno hiperbólico representa una curva catenaria, como se puede observar en la figura anterior de la representación de las funciones hiperbólicas. Se trata de una curva que se forma por acción de la gravedad al dejar colgando libremente una cuerda o cadena suspendida por dos puntos extremos.

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas también guardan relación con otras curvas especiales. Es el caso de las espirales de Poinsot, que se forman al representar gráficamente las relaciones del seno y del coseno hiperbólicos.

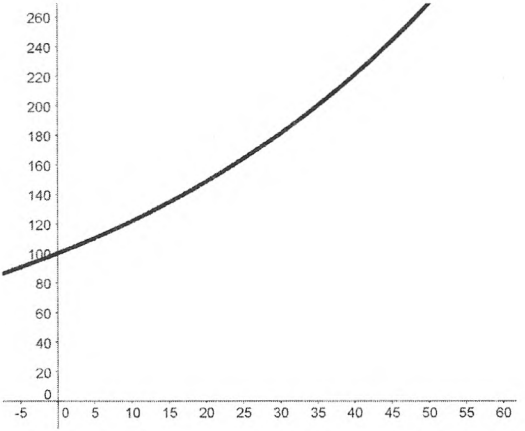


$$r = \frac{5}{\text{sen}h(\frac{\theta}{5})}.$$

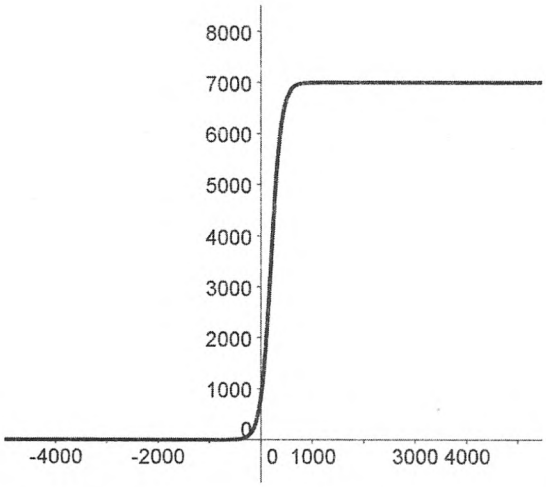


$$r = \frac{5}{\cos h(\frac{\theta}{5})}.$$

Otras curvas relacionadas con las funciones hiperbólicas son las *curvas logísticas*. Las estudió Pierre François Verhulst (1804-1849) sobre el año 1845 en relación al crecimiento de la población. Su aplicación a los procesos científicos, de investigación, de desarrollo social y de actuaciones del día a día es muy importante. Se trata de curvas que modelizan procesos que cambian con el tiempo, desde niveles bajos al inicio hasta acercarse a valores máximos pasado un tiempo. El cambio del nivel bajo al alto se produce de una manera rápida. Su gráfica se parece a una «S».



Curva del crecimiento exponencial de una población. Ecuación cartesiana: P(t) = *100(1 + 0,02)*^{t}, *donde* P(t) = *población en el momento* t. *Población inicial (tiempo 0) = 100; tasa de crecimiento = 0,02 (2%).*



Curva logística de una población. Ecuación cartesiana: $P(t)=\frac{7000}{1+e^{2-0,01t}}$ *para una población máxima de 7.000 individuos.*

Su expresión más simple es:

$$f(t)=\frac{1}{1+e^{-t}},$$

y de forma general se tiene:

$$f(t)=\frac{K}{1+a\cdot e^{-b\cdot t}},$$

donde K, a y b son parámetros constantes.

Esta función representa el comportamiento de ciertos sistemas naturales que crecen exponencialmente, y al cabo de un tiempo aparece algún elemento competidor entre algunos de sus miembros que hace disminuir el crecimiento hasta que acaba deteniéndose. Se aplican en economía, biología, medicina...

Es destacable la relación de las curvas logísticas con las redes neuronales artificiales para el estudio de las relaciones neuronales y el desarrollo de inteligencia artificial. También tiene aplicaciones en sociología, economía, ciencias políticas, psicología, en la descripción de procesos de aprendizaje, en márketing (para el estudio de la introducción de nuevos productos en el mercado)...

Veamos algunos ejemplos concretos. El crecimiento embrionario de un óvulo fecundado hace que las células comiencen a dividirse y a crecer 1, 2, 4, 8... veces,

doblando su número cada vez. Este crecimiento no puede ser ilimitado, ya que el útero no puede albergar más allá de un determinado tamaño. Por lo tanto, a partir de cierto momento el crecimiento disminuye hasta el nacimiento del feto.

Lo mismo ocurre en el caso del crecimiento de la población, cuyo aumento depende de la cantidad de personas existente y de los recursos disponibles. Si la población crece, los recursos disminuirán y, por tanto, aquélla dejará de aumentar hasta llegar a estabilizarse en función de los recursos.

Otras aplicaciones se sitúan en el campo de la medicina y, más concretamente, para evaluar el crecimiento de tumores. Se determina el tamaño del tumor, la tasa de crecimiento del mismo y se considera el efecto de la quimioterapia para eliminar las células cancerosas; de este modo se construye la ecuación de la curva que nos indicará la evolución del tumor en el paciente. Igualmente se aplican a la propagación de epidemias o enfermedades como la gripe estacional: se predicen porcentajes de personas infectadas con el fin de distribuir recursos para poder atender a los pacientes.

Curvas de Lissajous o de Bowditch

Este tipo de curvas fueron estudiadas por Nathaniel Bowditch (1773-1838) en 1815 y, de un modo más extenso, por Jules Antoine Lissajous (1822-1880) en 1857. Las curvas de Lissajous tienen aplicaciones en astronomía, física y medicina. Se construyen partiendo de dos oscilaciones armónicas y combinándolas de forma perpendicular. Es como poner en contacto dos ondas, dos curvas, con unas determinadas características. Las ondas son armónicas y, por lo tanto, tienen un movimiento que se repite en el tiempo (es periódico) y está definido por una función seno o coseno. Se pueden observar en aparatos como el osciloscopio.

Los patrones de las curvas de Lissajous se producen dentro de un marco límite rectangular. Las ecuaciones paramétricas de esta familia de curvas es:

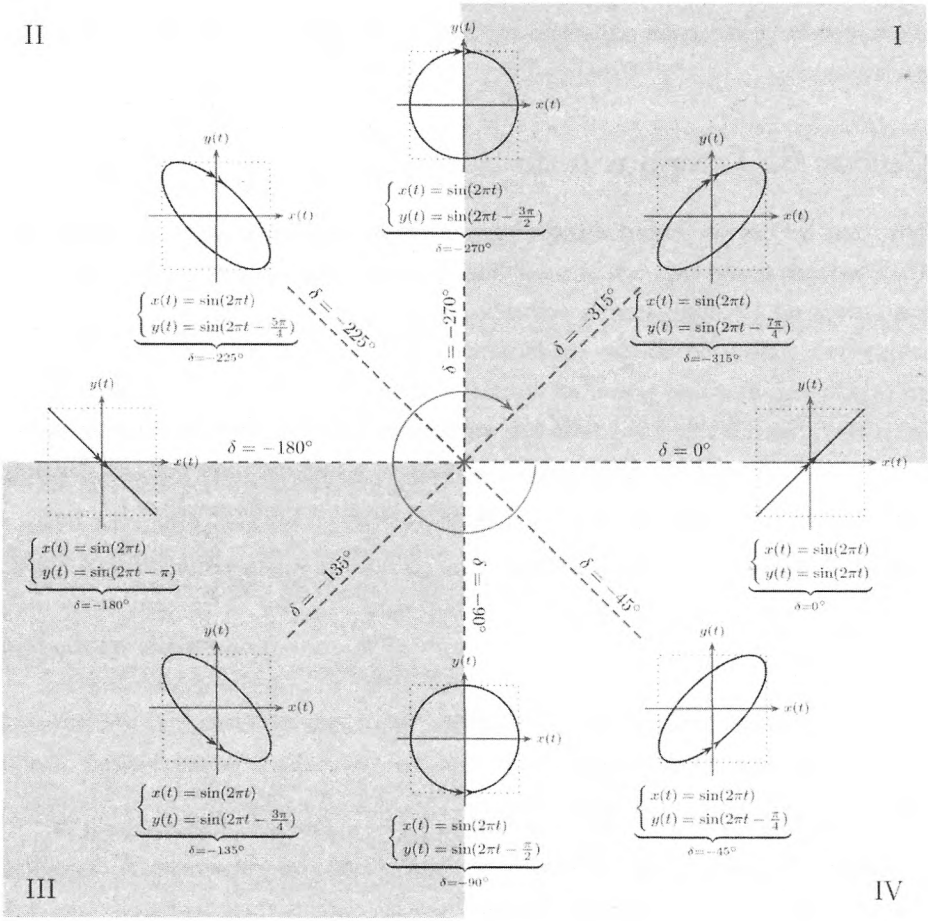
$$\begin{cases} x = A\,\mathrm{sen}(a \cdot t + \delta) \\ y = B\,\mathrm{sen}(b \cdot t) \end{cases}$$

En esas ecuaciones aparecen valores del movimiento típicos de las ondas, como son las amplitudes (A y B), las frecuencias (a y b) y el desfase entre las ondas (δ).

El tipo de curva es muy sensible a la relación entre las frecuencias de las ondas $\frac{a}{b}$ y al desfase δ. Según el valor del desfase δ y la relación entre las amplitudes A y

B, la curva obtenida varía entre una recta, una circunferencia y una elipse con diferente inclinación, como se indica en la tabla y en la imagen inferior.

a/*b*	*A* y *B*	Desfase (δ)	Figura
1	Cualquiera	Cualquiera	Elipse
1	$A=B$	$\delta=\frac{\pi}{2}rad$	Circunferencia
1	$A=B$	$\delta=0$	Recta
2	Cualquiera	$\delta=\frac{\pi}{2}rad$	Parábola

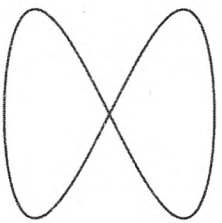


En el caso de que la relación $\frac{a}{b}$ sea un número racional, la curva es cerrada; si se trata de un número irracional, por ejemplo $\sqrt{2}$, la curva no se cierra y ocupa todo el espacio. Dicho espacio es el enmarcado por las amplitudes A y B. Éstas definen el rectángulo en el cual se «encierran» las curvas de Lissajous: si A y B son iguales, el rectángulo se convierte en un cuadrado; si son diferentes, las figuras se enmarcan en rectángulos. Tienen el mismo aspecto, pero «deformadas» por el cambio del cuadrado al rectángulo.

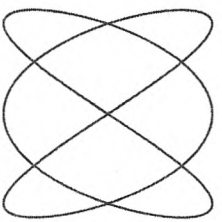
Si se dibujan las curvas

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(a \cdot t + \delta) \\ y = B\,\text{sen}(b \cdot t) \end{cases}$$

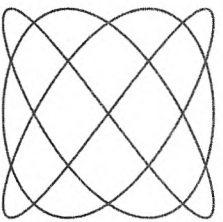
para valores diferentes de A, B y a, b con $\delta = \frac{\pi}{2}$ rad, el resultado que se obtiene es el siguiente:



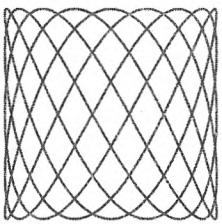
A=1, B=1
a=1, b=2



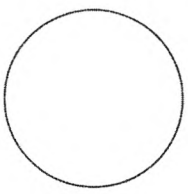
A=1, B=1
a=3, b=2



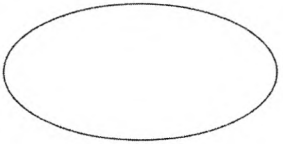
A=1, B=1
a=3, b=4



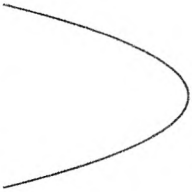
A=1, B=1
a=5, b=9



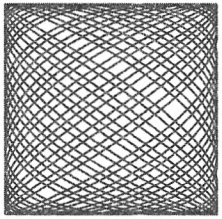
A=1, B=1
a=5, b=5



A=2, B=1
a=1, b=1

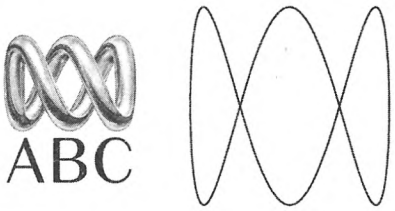


A=1, B=1
a=2, b=1



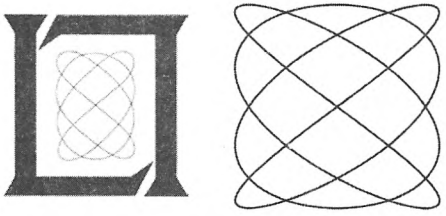
A=1, B=1
a=√2, b=1

Estas curvas son utilizadas en el diseño gráfico, y algunas empresas las han incorporado a su logotipo, como es el caso de la Australian Broadcasting Corporation (Corporación de Radiodifusión australiana):



A=1, B=1, a=1, b=3 y $\delta=\frac{\pi}{2}rad.$

También el Laboratorio Lincoln tiene una imagen con la curva de Lissajous:



A=1, B=1, a=4, b=3 y $\delta=0$.

Curvas sonoras

Considérense las funciones trigonométricas circulares vistas al principio del capítulo, pero con una pequeña limitación: las ondas se forman por la vibración de una cuerda que está fija por los dos extremos. En esta situación lo que se produce es la aproximación de un oscilador armónico, esto es un sistema de vibración que si se deja en libertad, vuelve a la posición de equilibrio, describiendo ondas o curvas sinusoidales amortiguadas (que van disminuyendo con el tiempo por el rozamiento). Un ejemplo gráfico de oscilador armónico es el de un muelle con una masa colgando; si se mueve la masa, ésta vuelve a la posición de equilibrio con un movimiento en forma de función trigonométrica circular. Al igual que antes, puede escribirse la ecuación de la curva como

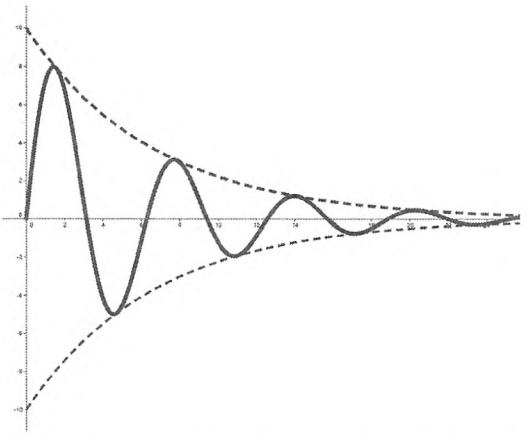
$$f(t)=A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi).$$

Se observa que, a diferencia del caso anterior, la ecuación relaciona la posición con la posición, no con el tiempo. La representación correspondiente es la función seno. En el caso de que la oscilación sea amortiguada por el rozamiento, el resultado será una función sinusoidal modelada por una exponencial de amortiguamiento. Es

decir, la función trigonométrica se irá haciendo cada vez más pequeña. En este caso la ecuación que rige el movimiento es:

$$f(x)=A\cdot e^{-kt}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi).$$

Es igual que la anterior, pero con un factor de amortiguamiento que matemáticamente se escribe como el número e elevado a un valor negativo. En la ecuación, k depende de las condiciones iniciales. Si se toman los valores de $A=10$, $k=0{,}125$, $\omega=1$ y $\varphi=0$, la gráfica que resulta es la que aparece en la figura siguiente:



Representación gráfica de un movimiento oscilatorio armónico amortiguado.

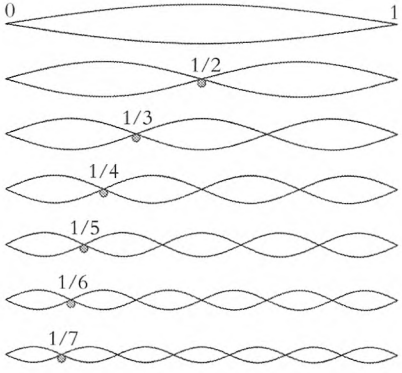
Con líneas discontinuas se ha marcado el valor de la exponencial $g(x)=10e^{-0{,}125x}$, que no es más que el límite de disminución por rozamiento de la oscilación. En definitiva, tenemos la gráfica de la función seno que disminuye de forma exponencial. Lo que representa la curva es la pérdida de energía que se produce por el rozamiento, y en el caso de una onda sonora el caso límite es el silencio.

Otra posibilidad es considerar un movimiento oscilatorio no como producto de dejar libre el sistema que realiza el movimiento, sino aplicándole una fuerza que varía con el tiempo de forma sinusoidal. El resultado será un movimiento con oscilaciones forzadas que creará una oscilación estacionaria, es decir, que no cambiará con el tiempo. Un ejemplo podría ser el columpio de un parque; en este caso, el movimiento oscilatorio se produce por el balanceo del niño que se está columpiando: si se separa de la posición inicial, el columpio oscilará hasta quedarse parado de nuevo en la posición inicial; es un movimiento oscilatorio amortiguado. En el caso que alguna persona ayude al niño empujándole y haciendo que el columpio no

pare de oscilar, tendremos un movimiento oscilatorio forzado que hace que el movimiento del columpio sea constante con el tiempo, es decir, estacionario. Sólo si el movimiento de empuje coincide con la oscilación del columpio se puede reforzar el movimiento e ir aumentado la amplitud con un pequeño impulso. Si el empuje no coincide, el movimiento variará de forma significativa.

Esta situación puede representar la *resonancia*, conjunto de fenómenos relacionados con movimientos periódicos en los cuales se produce el reforzamiento de las oscilaciones por otras oscilaciones. La resonancia puede observarse en el movimiento mecánico, en la música, en circuitos eléctricos, en el caso del magnetismo tiene aplicaciones en el ámbito de la medicina con las resonancias magnéticas como método de diagnóstico, sirve de explicación de movimientos nucleares de resonancia...

Todos estos fenómenos oscilatorios se observan claramente en las oscilaciones acústicas. En el caso del sonido tiene mucha importancia la resonancia de las ondas. Se produce la oscilación a diferentes frecuencias, de forma que se crean ondas estacionarias. Estas frecuencias de resonancia son múltiplos enteros o armónicos. En los instrumentos musicales se produce un movimiento oscilatorio debido a la vibración de una cuerda, una membrana, el aire... Un ejemplo para visualizar la situación es el que aparece en la figura siguiente. La cuerda tiene puntos fijos en cada extremo, llamados nodos. Cada armónico se divide en 2, 3, 4... partes. Cada vez la frecuencia de oscilación es más alta



Al dividir la cuerda en dos partes se tiene el doble de la frecuencia y, por lo tanto, una octava de la primera nota. Si se divide en tres partes, tenemos una quinta; con cuatro partes, una cuarta, y así sucesivamente. Se puede decir que cada sonido está formado por la combinación de muchas oscilaciones simples. En música, las

características, las formas de reforzar algunas sensaciones del sonido, se estudian con la armonía musical.

En Occidente, la escala de notas que se utiliza es la escala cromática, que tiene como base las octavas y las frecuencias de la serie armónica, siendo múltiplos enteros de la frecuencia fundamental; están relacionadas entre sí por relaciones de números enteros y pequeñas proporciones de todo el número.

Nuestros oídos tienden a agrupar las frecuencias relativas a los armónicos. Si se oye un sonido que se compone de unos pocos tonos simultáneos, y si los intervalos entre los tonos forman parte de una serie armónica, nuestro cerebro tiende a agrupar esa entrada en una sensación de toda la serie, aunque el tono fundamental ni siquiera esté sonando. Este fenómeno se utiliza en la grabación de música, en especial con tonos bajos, que no pueden ser reproducidos en altavoces pequeños. De este modo, introduciendo parte de los sonidos de los armónicos correspondientes se suplen las limitaciones de reproducción de los equipos musicales.

Volviendo a la resonancia, este fenómeno se produce, en general, cuando un cuerpo puede vibrar y es sometido a una fuerza a intervalos constantes. Estos intervalos coinciden con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo, y su efecto es que aumenta la amplitud de oscilación con una fuerza relativamente pequeña. En estas circunstancias el cuerpo vibra, aumentando de forma progresiva la amplitud del movimiento tras cada una de las actuaciones sucesivas de la fuerza. Este efecto puede ser destructivo en algunos materiales rígidos, como el vaso que se rompe cuando una soprano canta y alcanza y sostiene la frecuencia de resonancia del mismo. Como anécdota, se puede decir que a los soldados se les hace romper la marcha cuando pasan por un puente, ya que la frecuencia de los pasos de todos juntos puede coincidir con la frecuencia del puente. Simplemente es una anécdota, pues en los puentes actuales no ocurriría nada ya que se diseñan para que su frecuencia propia no coincida con otras frecuencias, puesto que podrían afectar su estructura. El viejo puente de Tacoma Narrows era un puente colgante de 1.600 m de longitud, el tercero más grande del mundo en su época (1937) y estaba situado en el estado de Washington. El puente se colapsó debido a la resonancia producida por la oscilación compleja del viento que pasaba entre las vigas. En 1950 se inauguró el nuevo puente.

Cuando se sintoniza una emisora de radio se está haciendo funcionar el circuito interno del aparato a una frecuencia natural que entra en resonancia con la frecuencia de emisión de la emisora deseada; esta última se amplifica, pero dejando el sistema estable.

Los edificios erigidos en zonas con probabilidad de seísmos se construyen considerando las frecuencias de movimiento del suelo. Esto hace que sean más estables a las pequeñas oscilaciones. Las *ondas sísmicas* son oscilaciones debidas a las fuerzas que se generan en el interior de la Tierra y que se propagan desde allí hasta la superficie.

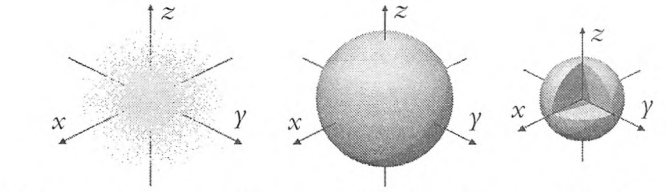
Las ondas internas sísmicas están divididas en dos grupos: primarias (P) y secundarias (S). Las ondas P se generan por la compresión y dilatación del suelo en la dirección de la propagación. En las ondas S el desplazamiento es transversal a la dirección de propagación; su velocidad es menor que la de las ondas primarias, por lo que aparecen en el terreno algo después que las primeras. Estas ondas son las que generan las oscilaciones durante el movimiento sísmico y las que producen la mayor parte de los daños.

Las curvas se hacen difusas. Zonas de movimiento

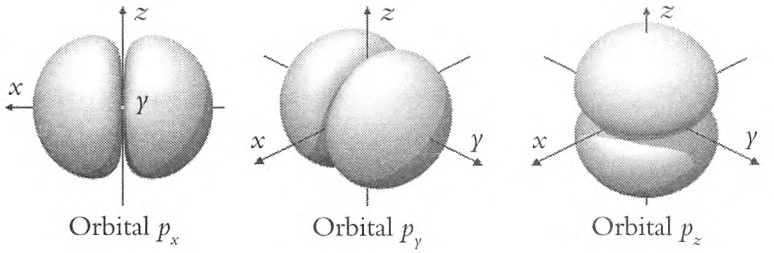
Hasta ahora se han presentado las curvas en función de si describían algún movimiento o si se generaban por el movimiento. Hay alguna situación en la cual el movimiento que se produce no sigue una trayectoria como una línea curva, sino que se produce en una zona concreta, con una determinada probabilidad en una determinada zona del espacio. Un ejemplo conocido son los orbitales o trayectorias de los electrones dentro del núcleo atómico.

El concepto de átomo es básico en la química de la naturaleza; su composición fundamental es la de estar formado por electrones, neutrones y protones. La estructura atómica es la forma que tiene el átomo: en el núcleo se encuentran los protones y los neutrones, mientras que alrededor del mismo hay una nube de electrones. Según se trate del átomo, de un elemento o de otro, las trayectorias de los electrones tienen formas diferentes.

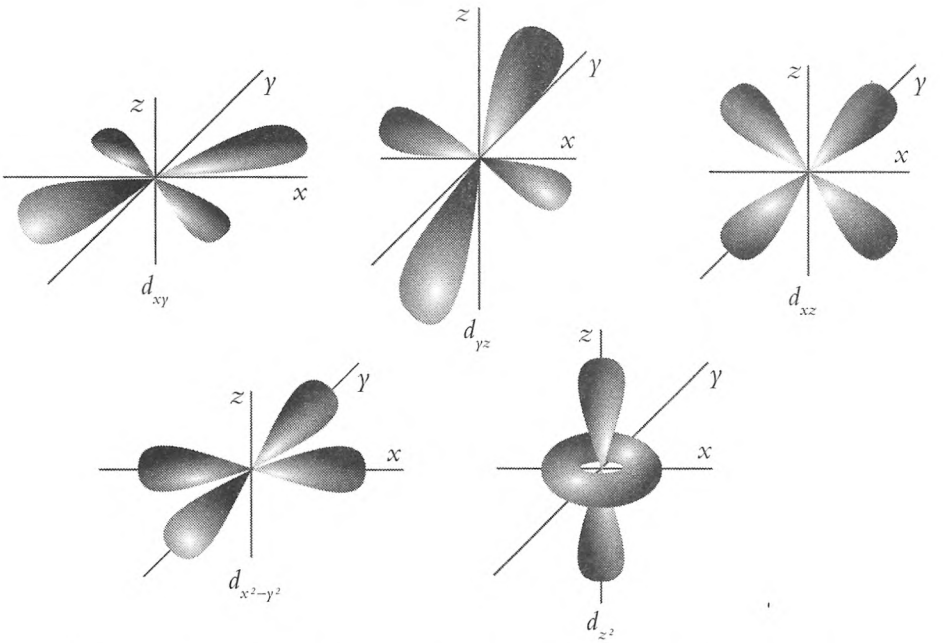
La zona del espacio por la cual puede moverse un electrón con cierta probabilidad se llama orbital. Cada tipo de orbital tiene asociados cuatro números cuánticos. El primero define su tamaño (n), y el segundo, su forma geométrica (l): cuando $l=0$, se trata del orbital s (sharp); si $l=1$, es el orbital p (principal); si $l=2$, es el orbital d (diffuse), y si $l=3$, es el orbital f (fundamental). El tercer número cuántico es el del momento magnético (ml), que determina la orientación espacial del orbital, y el cuarto se llama spin. Las formas 3D que determinan estas «zonas de movimiento» son las de las figuras siguientes:



Orbitales s *(*l*=0) de forma esférica.*



Orbitales p *(*l*=1) de dos lóbulos.*

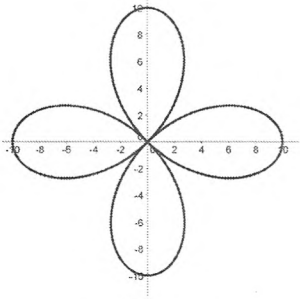


Orbitales d *(*l*=2) de cuatro lóbulos. Son cinco tipos:* d_{xy} d_{yz} d_{xz} *(en los planos* xy, yz, xz*);* $d_{x^2-y^2}$ *(hipérbola en plano* xy*), y* d_{z^2} *en el eje* z.

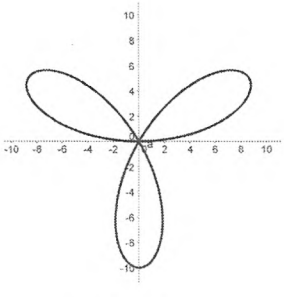
Observadas matemáticamente, estas figuras 3D recuerdan las diferentes curvas de la familia de *curvas rhodoneas* o rosas. Estas curvas fueron estudiadas por Luigi Guido Grandi entre 1723 y 1728. La *curvas rosa* o *rhodonea* es una curva sinusoide cuya ecuación en coordenadas polares se escribe:

$$r = a \cdot \cos(k \cdot \theta) \qquad \text{o} \qquad r = a \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \theta).$$

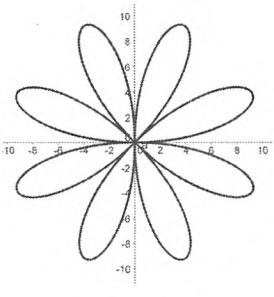
Si k es un entero, la curva tiene $2k$ pétalos si k es par, y k pétalos si es impar. En ambos casos, la curva es cerrada. Si $k = 1$, la rosa es una circunferencia.



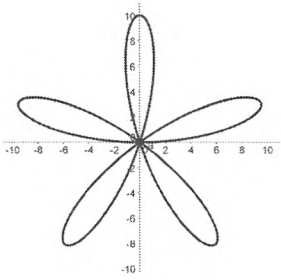
k = 2
r = 10 cos (2 θ)



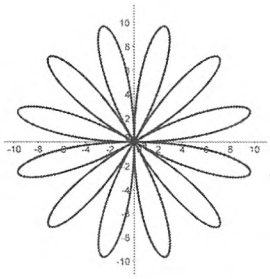
k = 3
r = 10 sen (3 θ)



k = 4
r = 10 sen (4 θ)



k = 5
r = 10 sen (5θ)

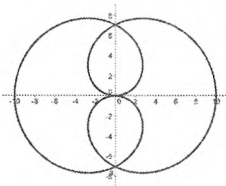


k = 6
r = 10 sen (6θ)

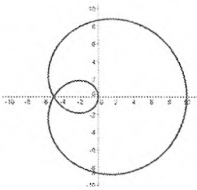
Cuando k es par, se completa el dibujo de toda de la rosa variando el ángulo θ entre 0 y 2π. Si k es impar, se completa el dibujo de toda de la rosa variando el ángulo θ entre 0 y π.

Si k es racional y se escribe en forma de fracción, la curva también es cerrada, con una longitud finita. Con $k = \frac{n}{d}$, la forma de las curvas depende de los valores de n y d. Puede preverse el número y la forma de los pétalos según sus valores. Se

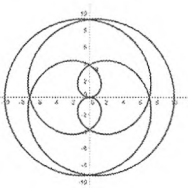
completará todo el dibujo de toda de la rosa variando el ángulo θ entre 0 y $\pi \cdot d \cdot p$, donde $p = 1$ si $n \cdot d$ es impar, y $p = 2$ si $n \cdot d$ es par. Ofrecemos algunos ejemplos:



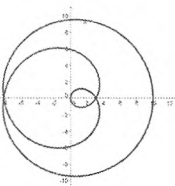
k = *1/2*



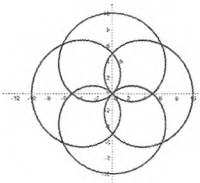
k = *1/3*



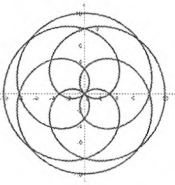
k = *1/4*



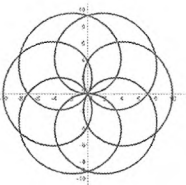
k = *1/5*



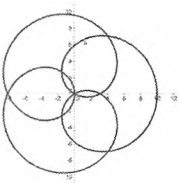
k = *2/3*



k = *2/5*

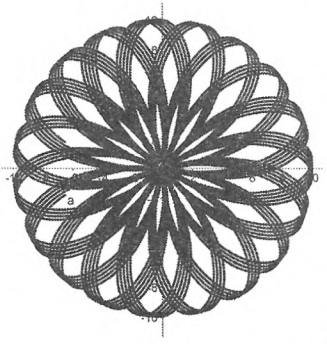


k = *3/4*

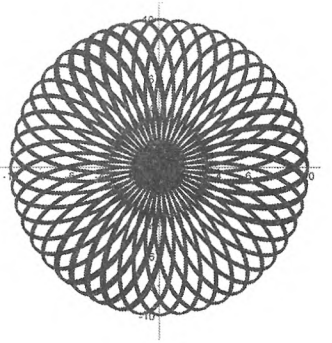


k = *3/5*

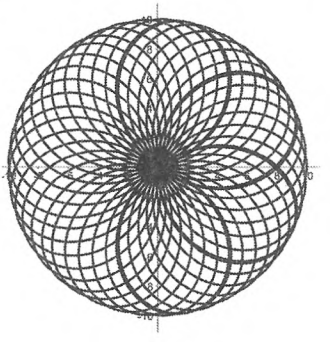
Si el número k es irracional (por ejemplo, $\sqrt{2}$ o π), la rosa ocupa todo el espacio, creando una figura densa, con un número infinito de pétalos:



k = *e*



k = π



k = $\sqrt{2}$

Capítulo 5

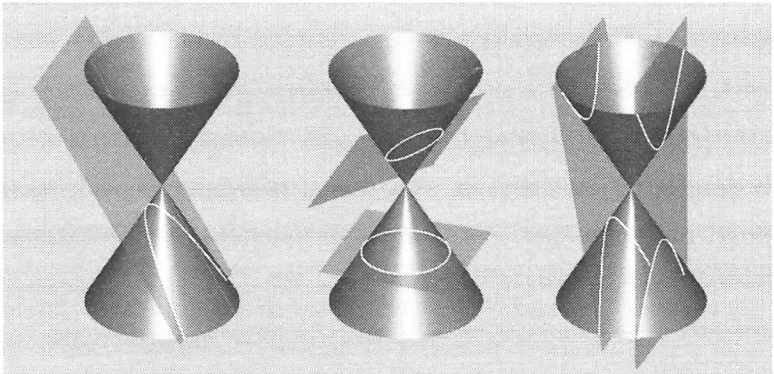
Curvas en la naturaleza, el arte y el diseño

Secciones cónicas

La importancia fundamental de las curvas llamadas cónicas reside en el funcionamiento del aparato visual humano, cuya capacidad de percepción depende principalmente del ojo y de los rayos de luz que llegan al mismo; el campo de visión a su alcance forma un cono, en el que se interpone una lente biconvexa que es el cristalino. Toda imagen de la realidad óptica, toda perspectiva, toda proyección, se presenta bajo la forma de una sección cónica. Por tanto, no es exagerado calificar nuestro mundo como un «mundo de secciones cónicas».

El arte ha evolucionado, a partir del desarrollo de la perspectiva en el Renacimiento, teniendo en cuenta estos conceptos. Las curvas cónicas se denominan de este modo porque, matemáticamente, pueden ser obtenidas como secciones («cortes») realizadas con un plano en un cuerpo denominado «cono de dos hojas».

Existen tres maneras distintas de cortar un cono de dos hojas; cada una de éstas generará una curva cónica diferente.



Parábola: sección paralela a la generatriz del cono.

Círculo y elipse: secciones que cortan la generatriz del cono.

Hipérbolas: sección paralela al eje del cono.

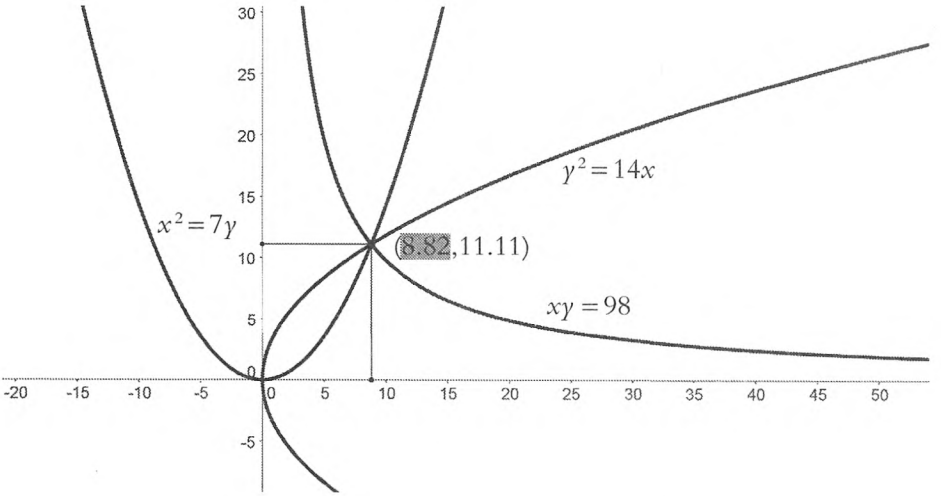
En la primera figura se muestra la sección del cono obtenida mediante un plano paralelo a su generatriz; se observa que la sección es una parábola. En la segunda figura se practican dos cortes o secciones que cortan el eje del cono y que producen una circunferencia si el corte es perpendicular al eje, y una elipse si es oblicuo. Finalmente, en la tercera figura el corte o sección se practica mediante un plano paralelo al eje del cono. La curva que se obtiene consta de dos partes o ramas, una en cada lado del cono; se trata de una hipérbola.

Menecmo (ca. 380-ca. 320 a.C.) fue un matemático griego de la provincia romana de Tracia (situada hoy entre Bulgaria, Grecia y Turquía). Fue el primero que trabajó las secciones cónicas al intentar resolver uno de los tres famosos problemas de la Antigüedad clásica, los llamados problemas délicos. Parece ser que fue profesor de Alejandro Magno, y de su relación hay una anécdota interesante: Alejandro le preguntó por un modo fácil de entender la geometría y Menecmo le contestó: «Oh rey, para viajar de un lugar a otro hay caminos para el rey y caminos para el pueblo, pero en geometría hay un solo camino para todos».

El primer problema délico fue planteado en el año 370 a.C. El oráculo preguntaba a los habitantes de Delos qué longitud debía tener el lado de un nuevo altar de forma cúbica que tuviera un volumen doble del que existía entonces, de 7 m de arista. El filósofo y matemático Platón les aconsejó a los delianos que olvidaran las interpretaciones mágicas del oráculo y se concentraran en resolver dicho problema matemáticamente. Menecmo, uno de los alumnos más brillantes del profesor Eudoxo de la Academia platónica, fue el que resolvió este problema. Para ello tuvo que elaborar una primera versión de las curvas que se producen en las secciones cónicas. En particular, la parábola y la hipérbola. Trabajó con un cono particular (recto, o sea con ángulo de 90° en el vértice), que era cortado por un plano perpendicular a su generatriz. Realizó una serie de cálculos y construcciones en esta sección, que era una curva parabólica. Luego repitió este trabajo sobre secciones semejantes en otros dos tipos de conos no rectos (agudos y obtusos).

En la búsqueda de la forma de estas curvas, Menecmo empleó seguramente artilugios mecánicos, herramientas matemáticas como la proporcionalidad y algunos primitivos métodos algebraicos y de representación. Por ello se piensa hoy en día que las obras de Menecmo y los ocho libros de las Cónicas de Apolonio de Perga constituyeron una forma primitiva de álgebra y sistemas de coordenadas que, traducidas del griego al árabe por matemáticos medievales como el bagdadí Thabit ibn Qurra (siglo IX d.C.) y recopilados por la Biblioteca Vaticana en 1536, fueron las bases históricas de los grandes hallazgos de Descartes y Fermat.

Con estos métodos, Menecmo detectó que la resolución del problema délico de la duplicación del cubo requería poder trazar tres tipos de curvas: las tres clases de cónicas obtenidas con el mismo método, o sea, seccionando con un plano perpendicular a la generatriz los tres tipos de cono, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso. Los tres tipos de curvas que Menecmo tuvo que dibujar fueron dos parábolas y una hipérbola.



Las tres cónicas de Menecmo como solución al problema délico de la duplicación del cubo. El lado de un cubo de volumen doble de otro de 7 m debe medir 8,82 m ($2 \cdot 7^3 = 8{,}82^3$).

El punto de corte de las tres curvas se puede hallar, con los métodos algebraicos modernos, resolviendo el sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 = 7y \\ y^2 = 2 \cdot 7 \cdot x \\ xy = 2 \cdot 7^2 \end{cases}$$

que resulta: $x^3 = 2 \cdot 7^3$.

Menecmo obtuvo el valor de x gráficamente, mediante el punto de intersección de las tres curvas dibujadas, resultando $x = 8{,}82$.

Si este problema délico se planteara hoy en día, con las herramientas algebraicas de que disponemos, se reduciría a resolver la ecuación:

$$L^3 = 2 \cdot l^3.$$

Con nuestro modo actual de escribir los cálculos matemáticos, la solución es:

$$L = \sqrt[3]{2} \cdot l.$$

Para $l = 7$ m, mediante una calculadora científica, resultaría:

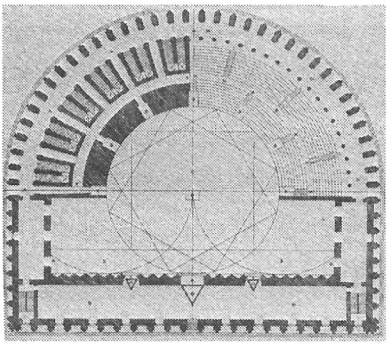
$$L = \sqrt[3]{2} \cdot 7 = 8{,}819447349.$$

Se puede deducir que, en el problema de la duplicación del altar de Delos, la aproximación obtenida por Menecmo fue bastante buena: $L = 8{,}82$. Durante un siglo y medio las curvas de Menecmo se nombraron con la descripción de su forma de trazado: sección perpendicular a una generatriz de un cono acutángulo, rectángulo u obtusángulo eran los nombres que recibían las curvas llamadas actualmente elipse, parábola e hipérbola.

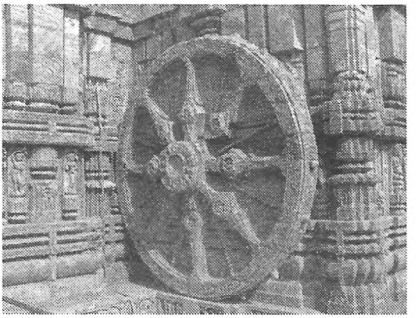
El primer libro de Cónicas fue enviado por Apolonio (ca. 262-ca. 190 a.C.) a Eudemo de Pérgamo, ciudad que se hallaba a unos 25 km del mar Egeo, donde hoy se encuentra la población turca de Bergama. Pérgamo era un estado independiente desde el año 263 a.C. Eran tiempos difíciles, de acuerdos políticos con la poderosa Roma y de batallas con los estados vecinos. Apolonio trabajaba en Alejandría, la ciudad con la mayor biblioteca del mundo antiguo y el centro de investigación más avanzado. En la dedicatoria del primer libro comenta su vida en Alejandría y que había visitado Pérgamo. Esto ilustra el modo de vida de los matemáticos de la época: viajaban, haciéndose visitas mutuas y estimulándose unos a otros con nuevas preguntas e ideas. En otras dedicatorias de los volúmenes 2 y 3 a su amigo Eudemo de Pérgamo, habla de nuevas reuniones matemáticas en Éfeso. El trabajo de Apolonio fue «esponsorizado» por el rey Átalo I de Pérgamo, a quien dedicó los cincos volúmenes siguientes de las Cónicas; en ellas, Apolonio demostró que pueden obtenerse los tres tipos de secciones a partir de un cono único, variando la inclinación del plano que corta el cono. Esto representó un paso importante en el proceso de unificación del estudio de las cuatro curvas porque evitaba que el cono tuviera que ser recto (con ángulo en el vértice de 90°). Apolonio también empleó por primera vez el cono de dos hojas y así pudo trazar las dos ramas de la hipérbola. Siguiendo una sugerencia de Arquímedes, dio los nombres de elipse, parábola e hipérbola a estas secciones cónicas. Aunque los conceptos en matemáticas siempre han sido más importantes que los términos empleados, en este caso el cambio de nomenclatura tuvo una repercusión extraordinaria: los términos usados por Apolonio procedían del antiguo lenguaje pitagórico para la solución de las ecuaciones de segundo grado: «elipse» significaba *deficiencia*; «hipérbola», *exceso* (una hipérbole, es una exageración), y «parábola», *equiparación*.

Circunferencias

La circunferencia es la curva definida como el conjunto de todos los puntos que se hallan a la misma distancia (el radio) de otro punto llamado centro. Era la curva de los dioses, la más perfecta de las curvas. En el mundo antiguo, filósofos extraordinarios, como Aristóteles, le atribuían la forma de las cosas más sagradas, como las órbitas de los astros, la forma de la Tierra y el Universo.

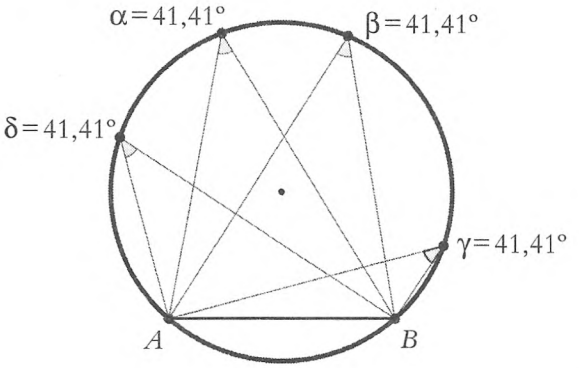


Teatro griego. La circunferencia era la línea básica del diseño y de la construcción de teatros desde la Antigüedad.



Rueda de un templo indio (siglo x). La rueda fue un invento sensacional de los pueblos orientales hacia el 3.500 a.C., y se basa en las propiedades del círculo.

Esta curva es obtenida como sección cónica mediante un plano perpendicular al eje del cono. La excentricidad de la circunferencia es 0. Puede considerarse como un caso límite de la elipse cuando la distancia focal es 0 y los ejes *a* y *b* tienen la misma longitud. Es la única curva cuya recta tangente en cualquier punto forma un ángulo recto con el radio correspondiente.



La circunferencia es la única curva en la se puede ver *una cuerda (como el segmento* AB*)* bajo el mismo ángulo *(en este caso, 41,41°) desde cualquier punto de la misma.*

Hace 4.500 años el escriba Ahmés, autor del papiro egipcio de Rhind, dio para la longitud de la circunferencia un valor de

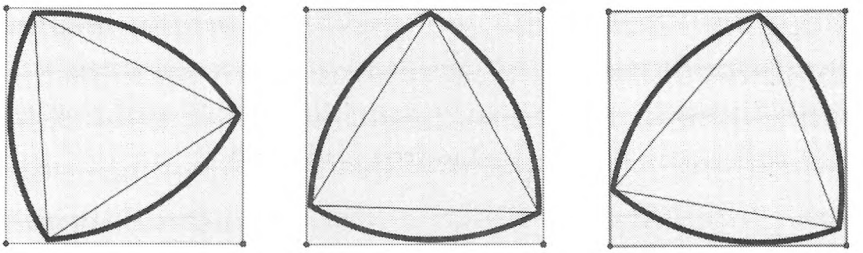
$$\frac{256}{81} = 3{,}16 \text{ veces su diámetro.}$$

Los griegos Tales, Anaxágoras, Euclides y Arquímedes continuaron el estudio del círculo a partir de la geometría egipcia e intentaron resolver la cuestión de la inscripción de distintos polígonos regulares en una circunferencia y el problema llamado de la «cuadratura del círculo», es decir, la construcción geométrica de un cuadrado que tuviera la misma área que un círculo dado. Pero fue Eudoxo, hacia el año 350 a.C., el que desarrolló el método de «exhaución» o «de paso al límite» y obtuvo la fórmula para calcular el área del círculo y la longitud de la circunferencia:

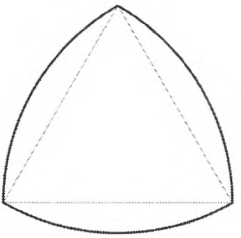
$$\text{Área} = \pi \cdot \text{radio}^2.$$
$$\text{Longitud} = 2\pi \cdot \text{radio}.$$

Curvas de anchura constante

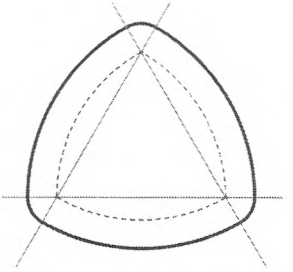
Si se ha de mover un objeto muy pesado de un lugar a otro, tal vez no resulte práctico usar ruedas, ya que pueden alabearse o partirse. Parece mejor solución emplear una plataforma plana apoyada sobre diversos rodillos cilíndricos: al avanzar, los rodillos que quedan atrás se recogen y se colocan delante. De este modo, la carga abanzará sin sacudidas. Esto es debido a que el cilindro tiene una sección que es un círculo y esta curva es cerrada y de anchura constante. Los rodillos elípticos no podrían emplearse, ya que la plataforma iría dando tumbos. Como el círculo tiene la misma anchura en todas direcciones, puede girar entre dos líneas paralelas sin cambiar la distancia entre ellas. Parece que ésta sea una propiedad exclusiva del círculo, pero no es así: existe una infinidad de curvas cerradas de anchura constante que no son la circunferencia. La más sencilla es el triángulo de Reuleaux, llamado así por su inventor, el matemático e ingeniero alemán Franz Reuleaux (1829-1905). Se construye a partir de un triángulo equilátero (el que tiene tres lados y tres ángulos iguales) trazando desde cada vértice un arco de circunferencia que empiece y acabe en los otros dos vértices. Fabricando ruedas con esta sección de anchura constante, la plataforma se movería tan perfectamente como con ruedas cilíndricas. A partir del concepto del triángulo de Reuleaux se han construido perforadoras que realizan agujeros cuadrados, como la diseñada por el ingeniero norteamericano Watts.



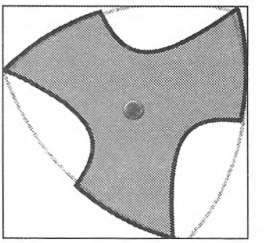
Se observa que en un cuadrado fijo la rueda de Reuleaux puede girar perfectamente.



Rueda triángulo de Reuleaux.



Curva de anchura constante con esquinas redondeadas.



Sección de perforadora de Watts para agujeros cuadrados.

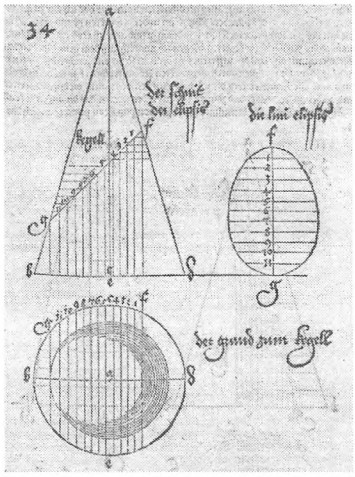
Elipses

Toda circunferencia vista en perspectiva (o sea, en una dirección que no sea perpendicular al plano en el que se halla) es vista como una elipse. En la elipse, la suma de las distancias desde cualquier punto a cada foco es una cantidad constante que equivale a la longitud del eje mayor $2a$. El parámetro definitorio de la forma más o menos circular de una elipse se llama excentricidad (e) y su valor es:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1.$$

Los números a y b son la mitad de la longitud del eje mayor y del eje menor de la elipse, mientras que c es la mitad de la distancia entre focos. La excentricidad de cualquier circunferencia es siempre 0 dado que $c = 0$. La de cualquier elipse es menor que 1 dado que a es siempre mayor que c.

El pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) daba a sus elipses una forma ovoide, ya que pensaba que los cortes por un plano oblicuo a un cono debían producir menor curvatura en la parte alta de la sección. Este error hizo reír a Kepler al contemplarlas en el libro de Durero, *Underweysung*, publicado en 1525.

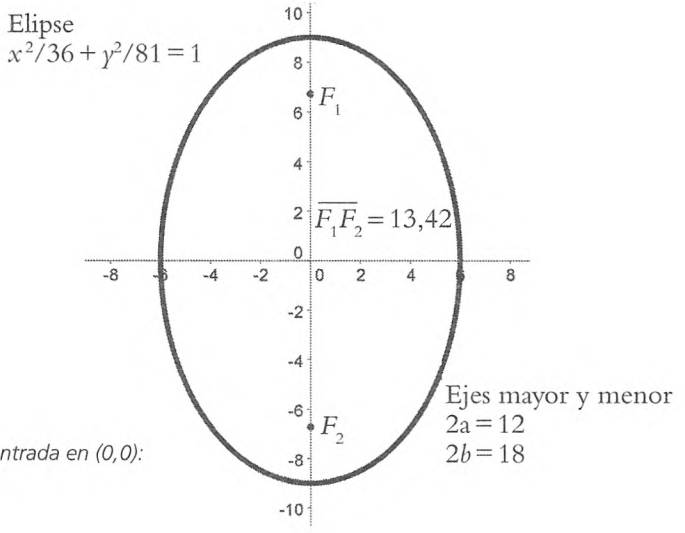


Método empleado con regla y compás por el pintor alemán Alberto Durero para dibujar elipses. Para ello se basó en las Cónicas de Apolonio.

Los focos de la elipse de la figura siguiente se indican como: $F_1\,(0,c)$ y $F_2\,(0,-c)$. En toda elipse se cumple una relación entre a, b y c: $a^2 = b^2 + c^2$. El valor $2c$ se llama distancia focal. Por tanto, en esta elipse,

$$9^2 = 6^2 + c^2; \quad c^2 = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45; \quad c = \sqrt{45} = 6{,}71,$$

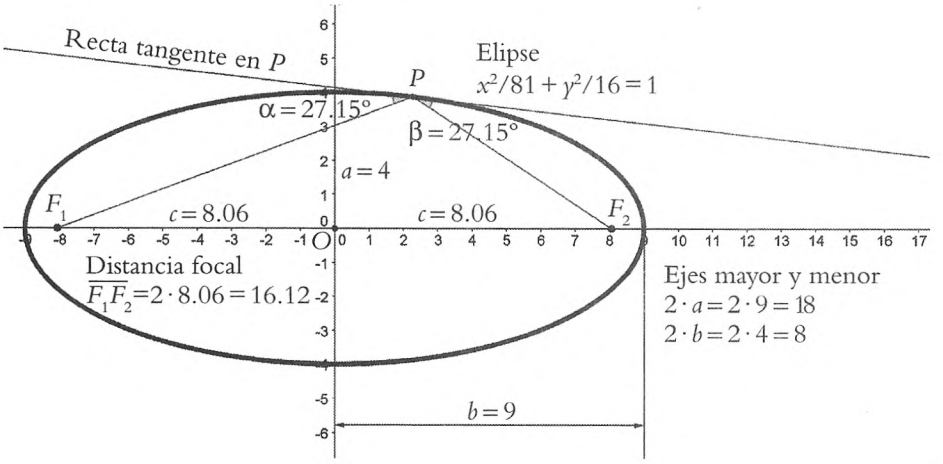
y la distancia focal es: $\overline{F_1 F_2} = 2c = 13{,}42$.



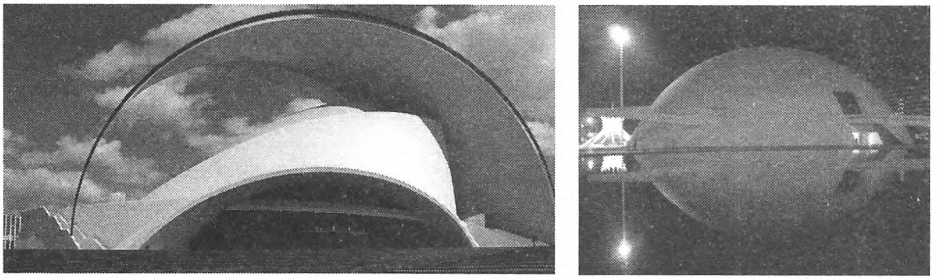
Una elipse centrada en (0,0):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se cuenta que Lewis Carroll (1832-1898), pastor de almas, matemático y escritor británico, conocido por su obra *Alicia en el País de las Maravillas*, construyó una mesa de billar de forma circular. Si en lugar de circular hubiera sido elíptica, cuando una bola pasara por un foco, sin que llevara efecto alguno, rebotaría siempre hacia el otro foco, y esto se repetiría hasta que la bola se parase. Una bola lanzada en una mesa de billar elíptica rebota en el borde de la curva como si hubiera chocado con una pared perfecta que estuviera en el lugar de la recta tangente a la curva en ese punto. Debido a esta propiedad, una bola lanzada desde un foco F_1, «rebota» en la recta tangente dejando ángulos iguales α y β a ambos lados (como cualquier reflexión) y se dirige luego hacia el otro foco F_2, tal como se indica en la figura.



Esta propiedad también se aplica a la luz. Apolonio fue el primero en demostrar que colocando una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco.



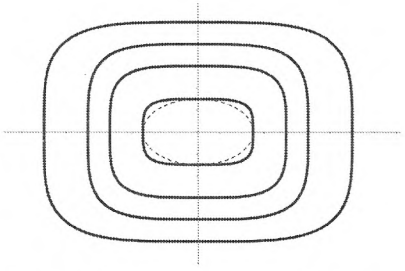
La elipse aparece en construcciones de arquitectura contemporánea, como el Auditorio de Calatrava en Tenerife (islas Canarias; izquierda), o en edificios públicos como el de Niemeyer, en Brasilia.

Superelipses

Existen unas curvas que se encuentran entre la elipse y el rectángulo; se conocen como «superelipses». Se crearon en 1945 para subsanar un problema surgido en el proceso de urbanización de una plaza de Estocolmo: en ella se cruzaban dos grandes avenidas y su forma era la de un enorme rectángulo. Al planificarla, los arquitectos suecos no pudieron emplear la elipse para la forma de la plaza, dado que sus extremos eran demasiado agudos y dificultaban el tráfico rodado a su alrededor. Para solucionar el problema fue consultado el escritor e inventor danés Piet Hein (1905-1996), quien dio una solución matemática ingeniosa. Una elipse tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

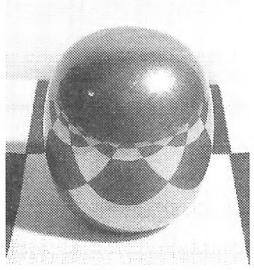
¿qué clase de curva se obtendría al aumentar los exponentes a 2, 3, 4,....? Pues resultaba una elipse mucho más redondeada, más parecida a un rectángulo. Cuando el exponente se aumenta de modo indefinido (tiende a ∞), la superelipse llega a convertirse en un rectángulo de lados a y b.



Las ecuaciones de las cuatro superelipses son:

$$\frac{x^4}{5^4}+\frac{y^4}{3^4}=1;\quad \frac{x^4}{8^4}+\frac{y^4}{6^4}=1;\quad \frac{x^4}{10^4}+\frac{y^4}{8^4}=1;\quad \frac{x^4}{14^4}+\frac{y^4}{10^4}=1.$$

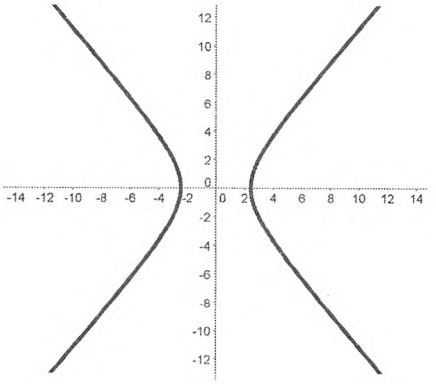
La elipse inicial (a trazos) es: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$



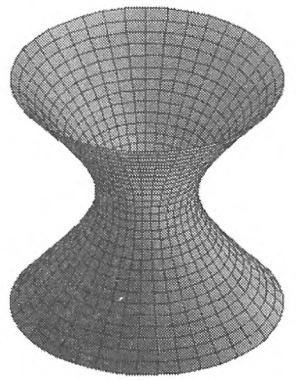
Como en la anécdota del «huevo de Colón», Piet Hein descubrió que un cuerpo sólido con forma de «superelipsoide» se aguanta verticalmente en equilibrio desde cualquier posición inicial.

Hipérbolas

La hipérbola es una curva cónica con centro que tiene dos ramas separadas. Su excentricidad es mayor que 1. Las trayectorias de algunos cuerpos celestes atraídos por un centro de atracción gravitatoria pueden ser hiperbólicas, aunque se encuentran entre las trayectorias más raras.



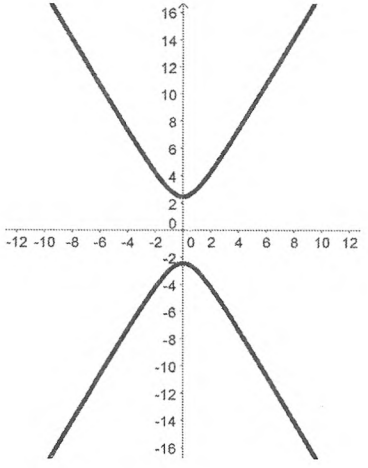
Hipérbola que al girar alrededor del eje Y produce el cuerpo 3D hiperboloide de una hoja.



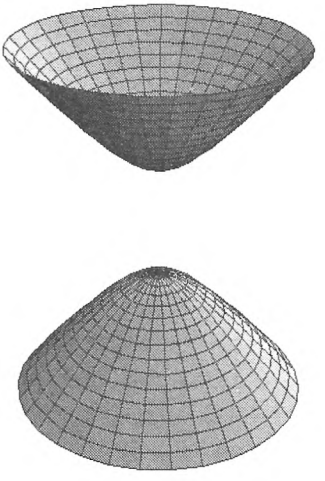
Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

El gran matemático griego Euclides escribió sobre la hipérbola pero sólo consideró una de las dos ramas, aunque el primero que la estudió fue Menecmo, como ya hemos visto.



Las dos ramas de una hipérbola que al girar alrededor del eje Y produce un cuerpo 3D llamado hiperboloide de dos hojas.



Hiperboloide de dos hojas:

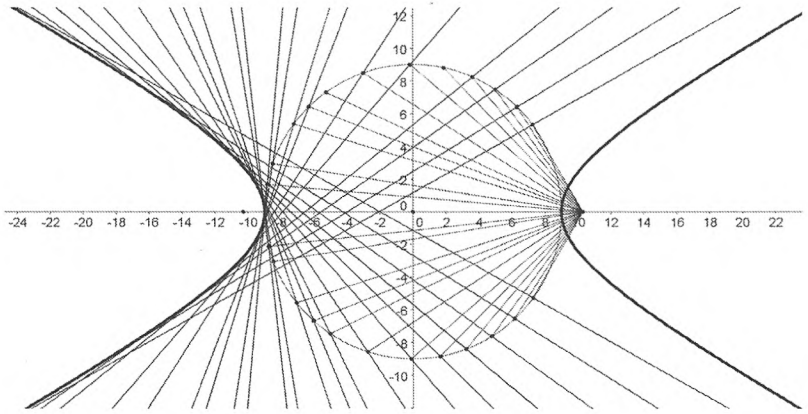
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

La recta que pasa por los focos de la hipérbola corta a la misma en los puntos llamados vértices. La distancia entre los dos vértices de la hipérbola siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

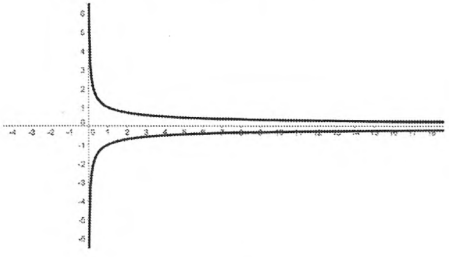
es el eje mayor de la misma, que mide $2 \cdot a$. El centro de la hipérbola es el punto medio de ese segmento; en este caso, es el origen de coordenadas (0,0).

Se traza un conjunto de rectas desde un foco que corten la circunferencia de radio a y centro en (0,0) en una serie de puntos. En el punto de corte de cada recta se dibuja otra recta perpendicular a ella. Se obtienen muchas rectas que determinan una curva a la que se llama envolvente de la familia de rectas. Dicha curva forma una de las ramas de la hipérbola, como puede observarse en la figura:

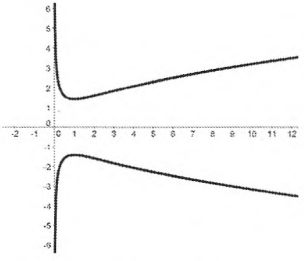


Hipérbolas cúbicas

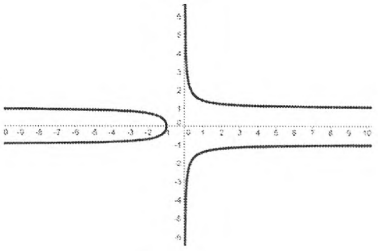
Existe una curiosa familia de curvas llamadas hipérbolas cúbicas, que tienen como ecuación general $x \cdot y^2 = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado igual o menor que 3. Fueron estudiadas por Isaac Newton en 1701, quien les dio el nombre de «semitridentes» debido a su forma.



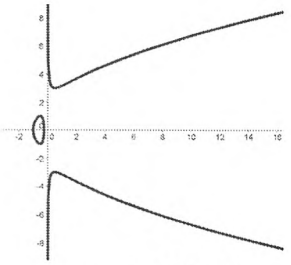
$x \cdot y^2 = 1$.



$x \cdot y^2 = 1 + x^2$.



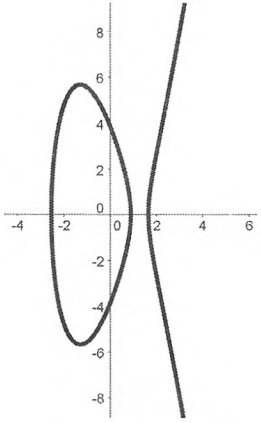
$x \cdot y^2 = 1 + x$.



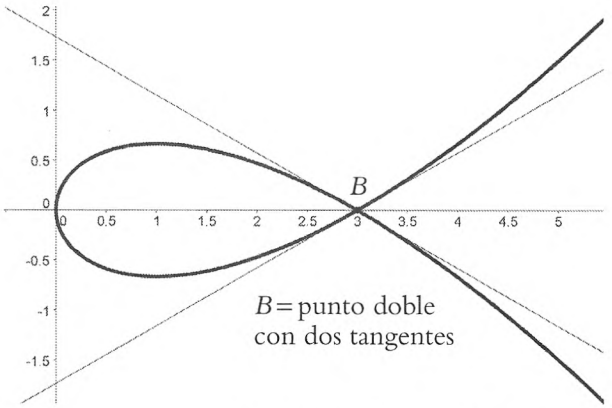
$x \cdot y^2 = (x+1)(2x+1)$.

Las curvas $x \cdot y^2 = 1$ y $x \cdot y^2 = 1 + x^2$ son cúbicas, o sea, de grado 3. Todas tienen un punto singular, una asíntota vertical en el punto (0,0); allí la curva «se dispara hacia el infinito». En la primera, la curva se va reduciendo hacia cero cuando los valores de x se hacen muy grandes. En la segunda, en cambio, la curva se abre paulatinamente y la función aumenta más y más hacia valores infinitos positivos y negativos.

Las curvas $x \cdot y^2 = 1 + x$ y $x \cdot y^2 = (x+1)(2x+1)$ tienen igualmente un punto singular asintótico en (0,0). La primera tiene un cero en un valor negativo de x ($x = -1$) y dos asíntotas horizontales (x salta de $+\infty$ a $-\infty$) en $y = +1$ e $y = -1$. La segunda tiene dos ceros en el óvalo. Existen muchas otras curvas cúbicas, pero hay dos que son muy especiales: la cúbica elíptica y la cúbica de Tschirnhausen, representadas a continuación:



Curva cúbica elíptica: $y^2 = 4x^3 - 20x + 15$.



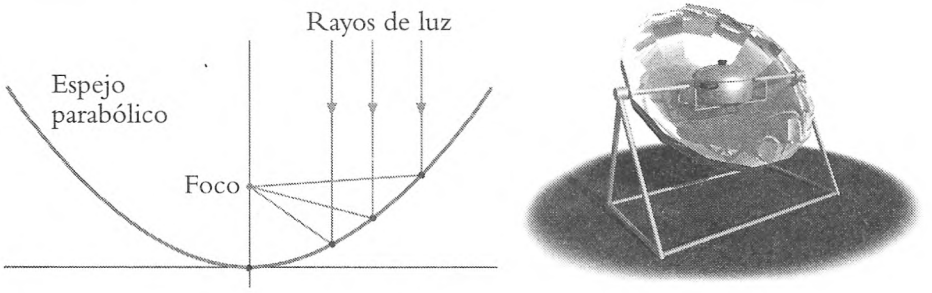
Curva cúbica de Tschirnhausen: $9y^2 = x(x-3)^2$.

La cúbica elíptica tiene tres ceros reales, o sea, que corta tres veces el eje X, dos con el óvalo y una con la rama.

El matemático y médico alemán Ehrenfried Tschirnhausen (1651-1708), que inventó la fórmula de la porcelana europea, en sus trabajos matemáticos propuso la cúbica que lleva su nombre. Esta curva tiene un cero en el punto (0,0) y otro, que es doble, en el punto B (3,0); es doble porque corta dos veces en (3,0) al eje X, un corte por cada rama. Además, el punto (3,0) es especial porque tiene dos tangentes distintas a la curva según la rama que se considere.

Parábolas

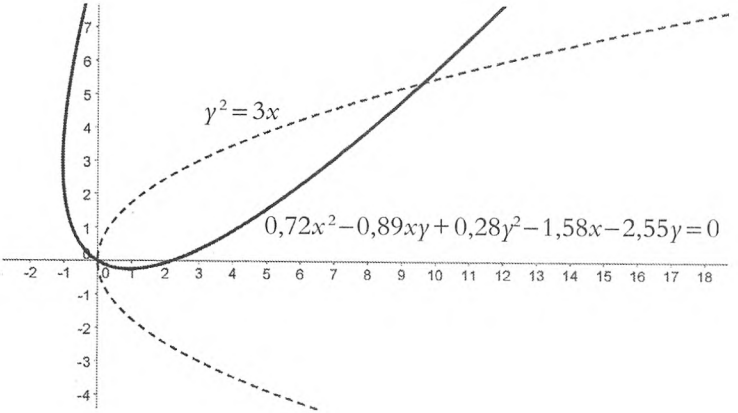
La parábola tiene unas propiedades de reflexión muy interesantes: si un espejo parabólico recibe luz de una fuente lejana, de modo que los rayos incidentes sean paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada se concentra en el foco.



En la figura de la izquierda se muestra cómo los rayos que llegan paralelos al eje del espejo se focalizan en un mismo punto. Esta propiedad se emplea en muchos ámbitos de la vida cotidiana, como en los hornos solares (derecha).

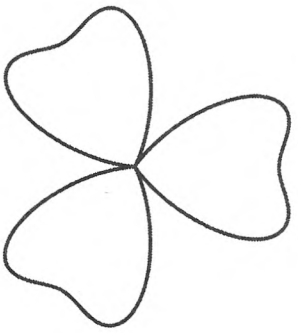
La leyenda dice que Arquímedes (ca. 287 a.C.-ca. 212 a.C.) reaccionó ante el asedio de los romanos a la ciudad de Siracusa sirviéndose de la propiedad de la reflexión parabólica. Para ello construyó un sistema de espejos metálicos colocados en forma de parábola, que concentraban los rayos solares sobre la flota romana; de este modo consiguió incendiar sus naves. Esta propiedad de la parábola tiene hoy día multitud de utilidades: en los radares, las antenas de televisión, los faros de los automóviles, los hornos solares, entre otras.

Cuando una curva parabólica que pasa por el origen (0,0) tiene el eje de simetría horizontal, su ecuación es del tipo de la parábola punteada de la figura $y^2 = 3x$. Cuando tiene el eje de simetría oblicuo, su ecuación resulta más complicada, como la parábola con el eje a 45° de la figura siguiente, que tiene la ecuación (en forma implícita): $0{,}72x^2 - 0{,}89xy + 0{,}28y^2 - 1{,}58x - 2{,}55y = 0$.

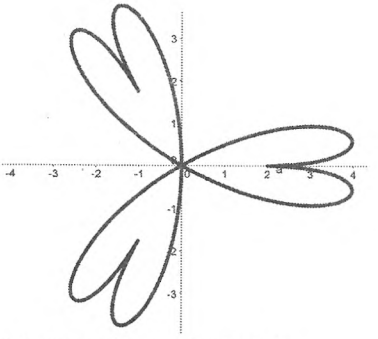


Curvas bonitas

En este apartado se recogen una serie de curvas que son utilizadas como motivos decorativos, o bien son formas de un sorprendente parecido con objetos existentes en la naturaleza. ¡Y se conocen sus ecuaciones!



Trébol de Habenicht. Ecuación en coordenadas polares:
$r = 1 + \cos 3\theta + \operatorname{sen}^2 3\theta$.

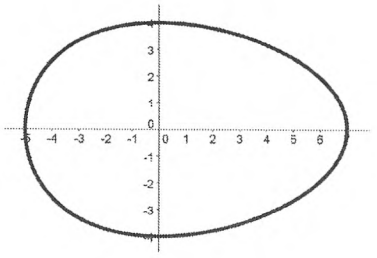


Trébol de Brocard (curva algebraica). Ecuación implícita en cartesianas:

$$x^2 + y^2 - \frac{4x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2} + 4 - \left(x^2 + y^2 - \frac{3x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2} + 2 \right)^2 = 0.$$

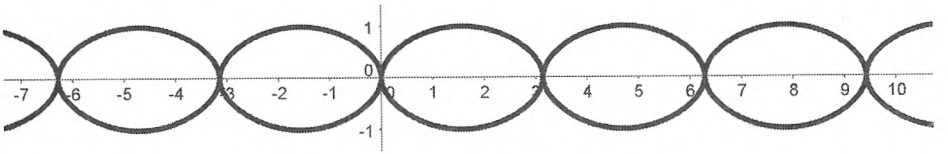
Ecuación en polares:

$$r = \frac{|\operatorname{sen} 3\theta| \cdot ((\cos 3\theta + 1)^{1/3} - (1 - \cos 3\theta)^{1/3})}{(1 - \cos 3\theta)^{1/6} \cdot (\cos 3\theta + 1)^{1/6}} + 2 \cdot \cos 3\theta.$$

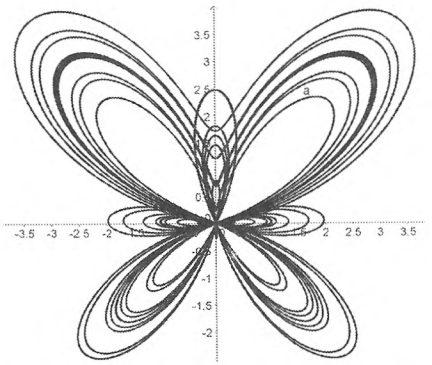


Huevo de Hügelschäffer. Ecuación en coordenadas cartesianas:

$$f(x) = \pm 4 \sqrt{\frac{36 - (x-1)^2}{35 + 2x}}.$$

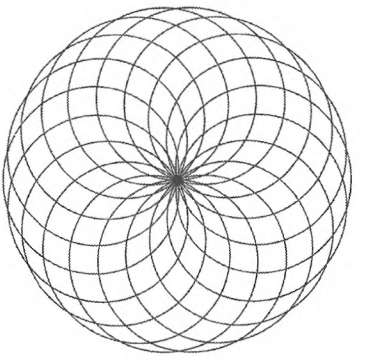


Cadenilla de huevos. Ecuación en coordenadas cartesianas: $f(x) = \pm\sqrt{|\,sen(x)\,|}$.



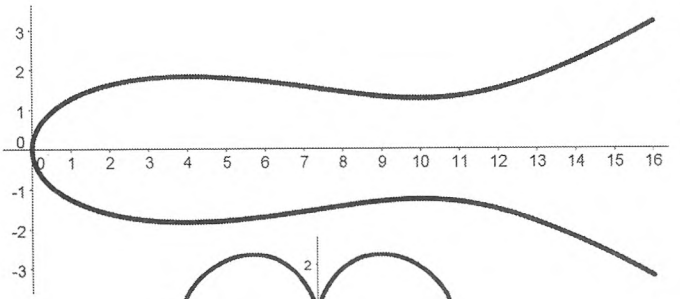
Mariposa de T. Fay. Ecuación en coordenadas polares:

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right).$$



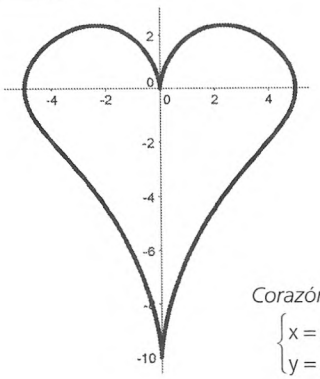
Curva de Moritz. Ecuación en coordenadas polares:

$$r = \cos\frac{9\theta}{10}.$$



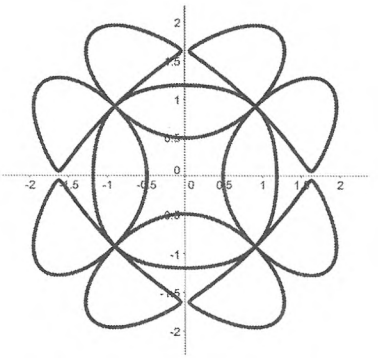
Curva del pescado. Ecuación en cartesianas:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2x^3 - 42x^2 + 240x}{125}}.$$



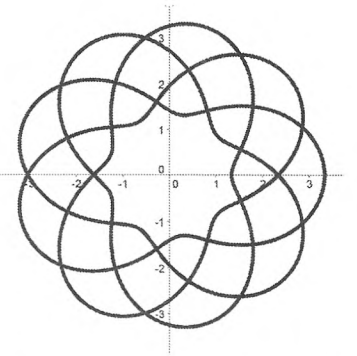
Corazón de Rafael Laporte:

$$\begin{cases} x = 5sen^3(t) \\ y = 5\cos(t) - 5\cos^4(t) \end{cases}$$



Curva simétrica de la rosace de cuatro ramas. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{3cos2t \cdot cos\, t + 0{,}82} \\ y = \pm\sqrt{3cos2t \cdot sen\, t + 0{,}82} \end{cases}$$

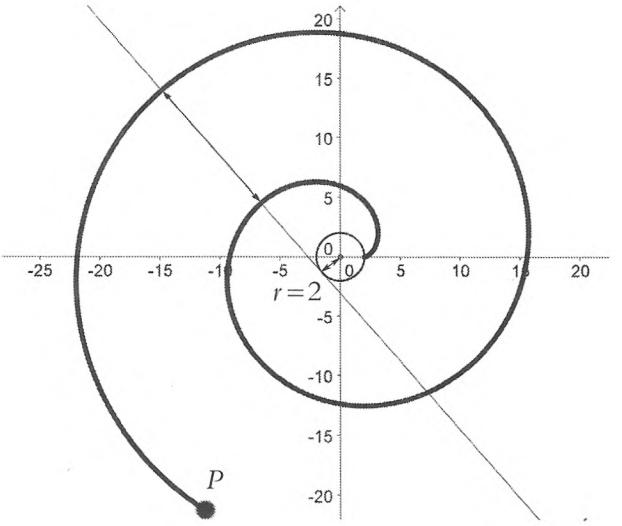


Curva ornamental. Ecuación en polares:

$$r = cos\frac{9\theta}{4} + \frac{7}{3}.$$

Involuta de círculo

Es la curva espiral obtenida al marcar con un lápiz sobre un papel la trayectoria del extremo de un hilo tensado que estaba enrollado en una canilla circular que se encuentra fijada en un punto del papel. En la curva dibujada a escala, el punto fijo del centro de la canilla es (0,0), la canilla tiene un radio de 2 cm y la distancia entre las diferentes ondas de la involuta de círculo es fija y mide $4\pi \cong 12{,}57$cm.



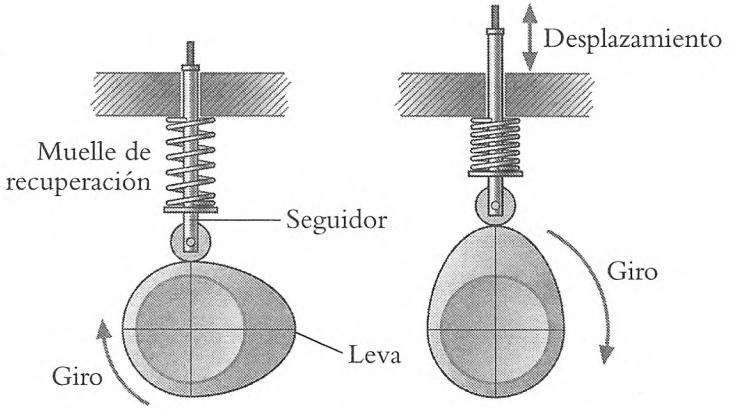
Ecuaciones paramétricas de la involuta de círculo:

$$\begin{cases} x = 2(cos(t) + t \cdot sen(t)) \\ y = 2(sen(t) - t \cdot cos(t)) \end{cases}$$

Ecuación polar:

$$\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4} - acos\left(\frac{2}{r}\right).$$

Cuando se han dado varias vueltas (t ya es elevado), la involuta tiende a confundirse «asintóticamente» con la espiral de Arquímedes, y por ello suele usarse en tecnología como el perfil más idóneo para las levas de un motor. La propiedad geométrica que explica el uso de la curva como perfil para diseño de engranajes es que si se piensa al revés de como ha sido definida la curva y se hace girar la involuta de círculo alrededor de su centro, las tangentes a la curva en una dirección dada se desplazan con un movimiento de traslación en los dos sentidos gracias a un muelle de recuperación, tal como se observa en la ilustración:

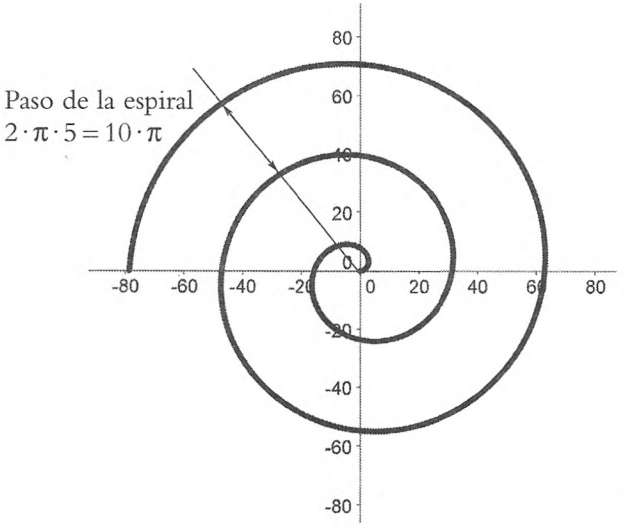


Mecanismo de leva formado con dos arcos de involuta de círculo.

Espiral de Arquímedes

La espiral de Arquímedes fue estudiada por el matemático griego en el año 225 a.C. en su tratado *Sobre las espirales*, donde la empleó para resolver dos de los tres antiguos problemas délicos: la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Esta espiral es la curva de la trayectoria de un punto que se desplaza uniformemente por una recta de un plano mientras dicha recta gira uniformemente alrededor de uno de sus puntos; es la curva del surco de los viejos discos de música de vinilo. El punto (0,0) es el centro de rotación, y es un caso límite de la involuta de círculo con el radio $r=0$ para el ángulo de inicio $\theta=0$. Se trata de una curva de tipo trascendente. La de la figura siguiente tiene una ecuación en coordenadas polares de $r=5\theta$ y un paso de $10\pi\cong 31{,}42$. Su ecuación en coordenadas paramétricas es:

$$\begin{cases} x = 5 \cdot t \cdot \cos(t) \\ y = 5 \cdot t \cdot \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$



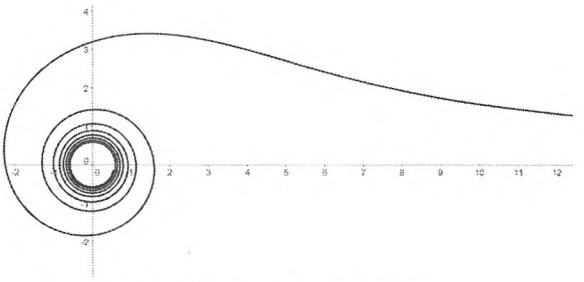
Esta espiral tiene unas propiedades muy especiales: por ejemplo, el área de la espiral en su primera vuelta es igual a la tercera parte del área del círculo que la envuelve. El hecho de que la espiral sea una forma sencilla de construir explica que haya aparecido como motivo ornamental desde épocas muy remotas. Así, en un torno de alfarero, basta con ir desplazando el pincel en una dirección determinada, desde el centro hacia el borde, a velocidad constante, mientras el torno gira. Se han hallado espirales en los túmulos mortuorios de la Edad del Bronce, en vasijas griegas y etruscas y en la cerámica popular como motivo decorativo de platos e inscripciones. La cultura celta desarrolló adornos y medallones en los que se representaba, mediante tres espirales que entran y salen en el círculo los dos sentidos de giro, la dualidad de las fuerzas que están en permanente interacción en la naturaleza y el equilibrio expresado con el número tres.

Otras espirales

La palabra espiral se refiere a una curva plana que se traza con el movimiento de un punto que se enrolla sobre un polo fijo con movimientos de avance y retroceso continuos. Las espirales son siempre curvas de tipo trascendente.

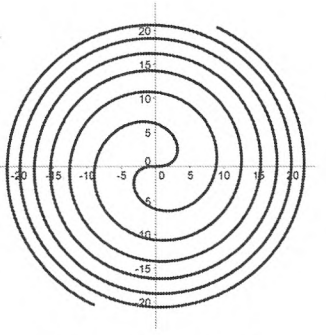
Existen innumerables manifestaciones naturales de las espirales, tanto de carácter orgánico como artístico o mecánico. Por ello estas curvas no podían dejar de llamar la atención de los matemáticos y ser objeto de su investigación. Sin embargo, como su propia forma sugiere, son curvas que «dan el esquinazo». No se trata

de curvas geométricas estáticas, como la circunferencia o la parábola, sino que para construir las curvas espirales son necesarios ciertos recursos mecánicos, es decir, algún objeto que crezca o que se mueva. Según su definición «matemática», se trata de curvas planas que comienzan en un punto y cuya curvatura va disminuyendo progresivamente.

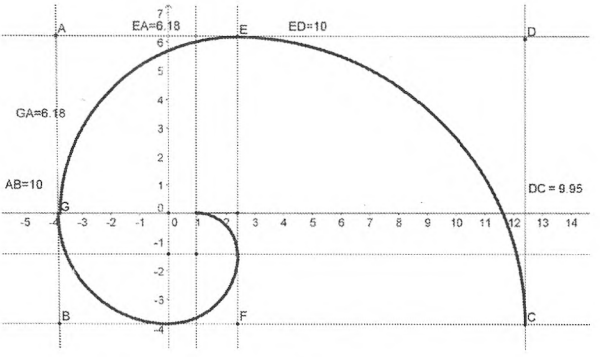


Espiral lituus o «báculo de obispo» (Cotes y MacLaurin, 1722). Ecuación polar:

$$r = \sqrt{\frac{16}{\theta}}.$$



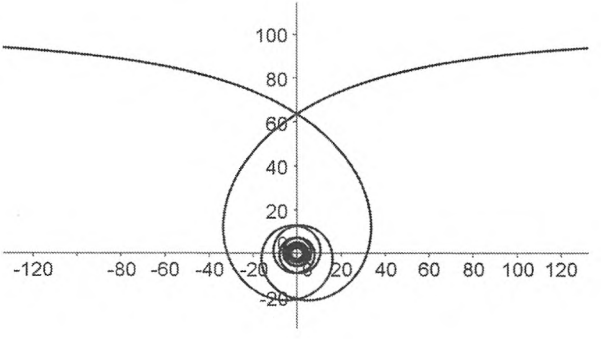
Espiral de Fermat (1636). Ecuación: $r = \pm 5\sqrt{\theta}$. *Curva con simetría central con respecto al polo (0,0). Su curva inversa es el lituus.*



Espiral de Durero (1525), basada en el número de oro:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618.$$

Son varios arcos de circunferencia tangentes.

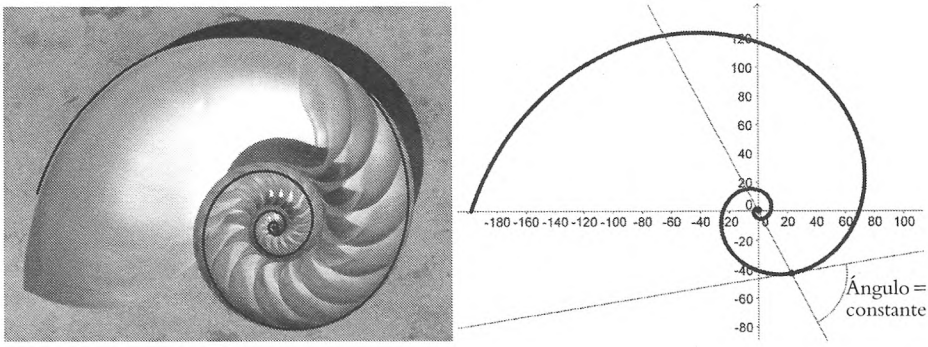


Espiral hiperbólica o de Varignon (1704). Ecuación polar:

$$r = \frac{100}{\theta}.$$

Espiral logarítmica

Esta curva fue estudiada por Descartes y Torricelli en 1638, y después por Jakob Bernoulli (1654-1705). Se la conoce también como espiral equiangular y espiral de Bernoulli, quien la llamó *spira mirabilis*. Aparece de modo repetido en la naturaleza en las formas de diversos animales y plantas.



A la izquierda, nautilus, molusco cuya concha adopta la forma de una espiral logarítmica, representada a la derecha, y cuya ecuación polar es $r = -3 \cdot e^{\frac{\theta}{3}}$.

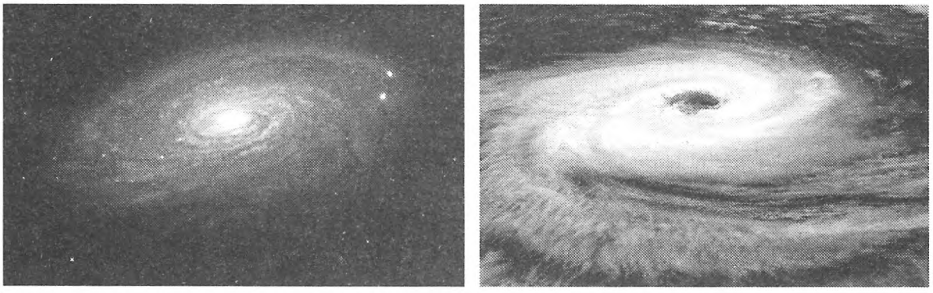
En general, la ecuación de cualquier espiral logarítmica es $r = a \cdot e^{\frac{\theta}{k}}$. La que se ha representado en la figura anterior tiene los valores $a = 3$ y $k = -3$. Puede definirse como la curva cuyo ángulo tangente-radio es constante, y ese ángulo es aquel cuya tangente es la constante k. Y también el desarrollo plano de una hélice de un cono de revolución.

La espiral logarítmica presenta una «estabilidad» excepcional con respecto a ella misma en las transformaciones geométricas clásicas. Esta propiedad característica implica que al rotar, ampliar, reducir, invertir o al dibujar su evoluta, su podaria, su cáustica, siempre vuelve a resultar otra espiral logarítmica.

Esta curiosa propiedad impactó mucho a Bernoulli y le inspiró el grabado que hizo poner en su sepultura del cementerio de Basilea, su querida *spira mirabilis* con la inscripción *Eadem mutata resurgo* («Aunque me transformen, siempre renazco»).

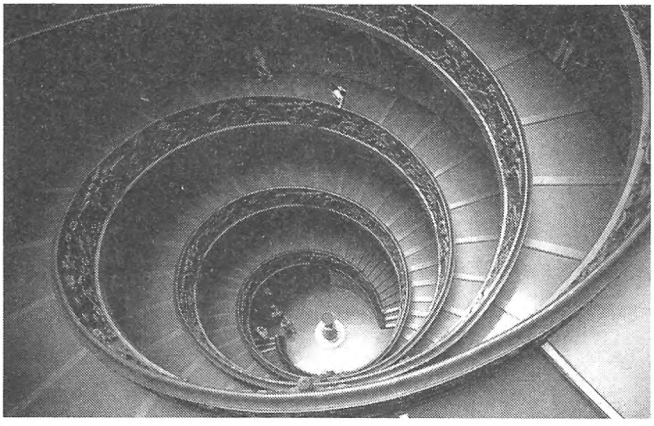
En el problema llamado «curva de persecución», cuatro animales que corren a velocidad constante parten de los cuatro vértices de un cuadrado. Cada uno pretende alcanzar al animal situado a su derecha. Las curvas seguidas por los cuatro animales son espirales logarítmicas que se encuentran en el centro del cuadrado.

Los cambios de órbita de una nave espacial se efectúan siguiendo una órbita de transferencia en forma de espiral logarítmica que une dos órbitas circulares de distinto radio. Para que la nave siga esa trayectoria solamente es necesario un motor que proporcione una aceleración relativamente reducida a lo largo del viaje y que vaya disminuyendo a medida que la nave se aleje del centro de fuerzas. Las curvas espirales también aparecen en las formas de las galaxias y de los huracanes, tal como se aprecia en estas fotografías:



Fotografía de la galaxia espiral Messier 88 (izquierda) y del huracán Katrina visto desde la Estación Espacial Internacional (fuente NASA).

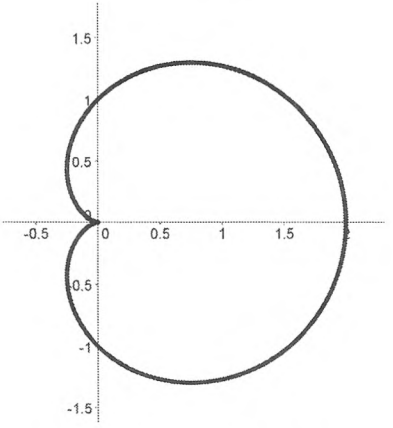
Es muy importante la aplicación de la espiral logarítmica en la arquitectura clásica y en la contemporánea. En la escultura y forja modernas, por ejemplo, se encuentran muchas espirales.

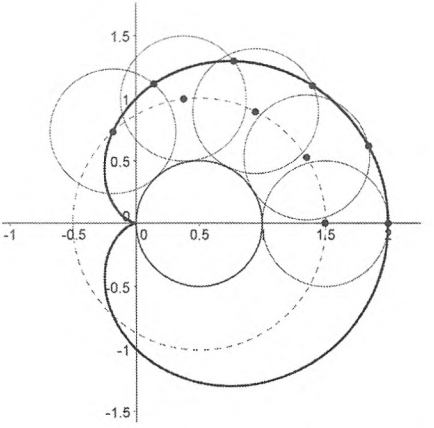


Escalera en doble espiral. Museos Vaticanos (Bramante, siglo XVI).

Cardioide

El nombre de cardioide procede de la forma de corazón de esta curva, que pertenece a la familia de curvas llamadas «caracol o *limaçon* de Pascal» en honor de su descubridor, Étienne Pascal (1588-1651), padre de Blaise Pascal (uno de los primeros que trató el cálculo de probabilidades en 1654 y diseñador de la primera calculadora mecánica). E. Pascal la divulgó en la nutrida correspondencia que mantenía con otros matemáticos europeos y en las tertulias matemáticas del convento del padre Marin Mersenne en París, las cuales tuvieron gran influencia en el desarrollo científico de aquella época.



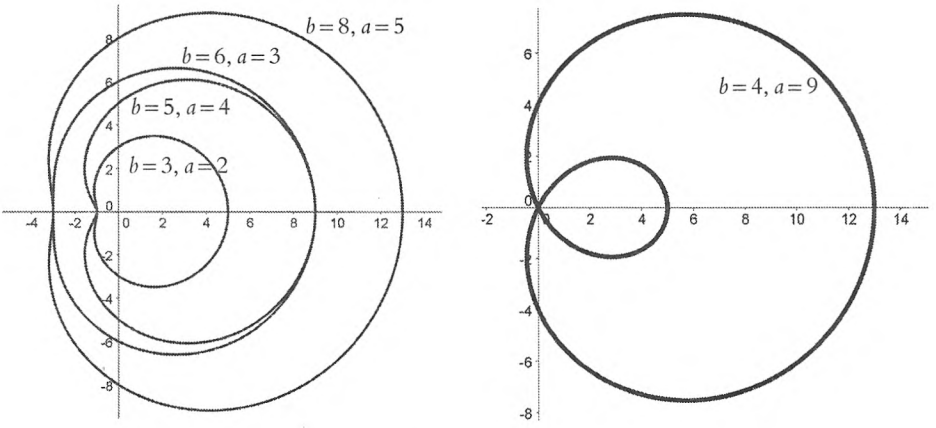


La ecuación cartesiana de la cardiode representada es $(x^2+y^2-x)^2=(x^2+y^2)$; su ecuación polar, $r=1+\cos\theta$, y sus ecuaciones paramétricas:

$$x=(1+\cos(t))\cdot\cos(t)$$
$$y=(1+\cos(t))\cdot\operatorname{sen}(t).$$

Esta cardioide tiene un tipo de punto «especial» en (0,0), llamado matemáticamente, «punto de retroceso». Una cardioide como $r=2a(1+\cos\theta)$ se genera haciendo rodar, sin que se deslice, una circunferencia de radio a alrededor de otra igual (fija) con centro en el punto $(a, 0)$. En la cardioide considerada es $a=0.5$; por tanto, la circunferencia fija tiene el centro en (0.5, 0) y radio 0.5.

La posición del punto de la circunferencia móvil de radio 0.5 que rueda, sin deslizarse, alrededor de la fija, va generando todos los puntos de la cardioide. Se deduce, por tanto, que la cardioide es un caso particular de la curva epicicloide descrita en el capítulo 3.



Dos tipos de limaçons *para diferentes valores de* b *y* a.
Los de la parte derecha se obtienen cuando b<a, *y los de la izquierda, cuando* b>a.

La ecuación general polar de un *limaçon* es $r=b+a\cos\theta$, y su ecuación cartesiana, $(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2)$.

Esta curva ya había sido estudiada por Durero en 1525, que la había bautizado inicialmente como «arácnida». También aparece en situaciones lúdicas, como la siguiente: Una muchacha, cuya cintura es una circunferencia perfecta, está jugando con su hula-hop, cuyo diámetro es el doble que su cintura. Se hace una marca en el hula-hop con un rotulador. Si se pregunta qué tipo de curva es la trayectoria del punto marcado mientras la muchacha hace girar el hula-hop a su alrededor, la respuesta podría sorprender a más de uno: ¡es una cardioide!

Catenaria

La catenaria, o «curva de la cadena», es la forma geométrica que adopta un hilo homogéneo e inextensible (no se estira con su peso) suspendido de dos puntos y sometido únicamente a su propio peso. Galileo no acertó cuando consideró que la solución a este problema tenía la forma de una parábola. Hacia el año 1690, Leibniz, Huygens y Johann Bernoulli establecieron una correcta formulación para esta curva. En la ecuación de la curva catenaria hay una función bastante especial llamada coseno hiperbólico y está relacionada con las funciones exponenciales:

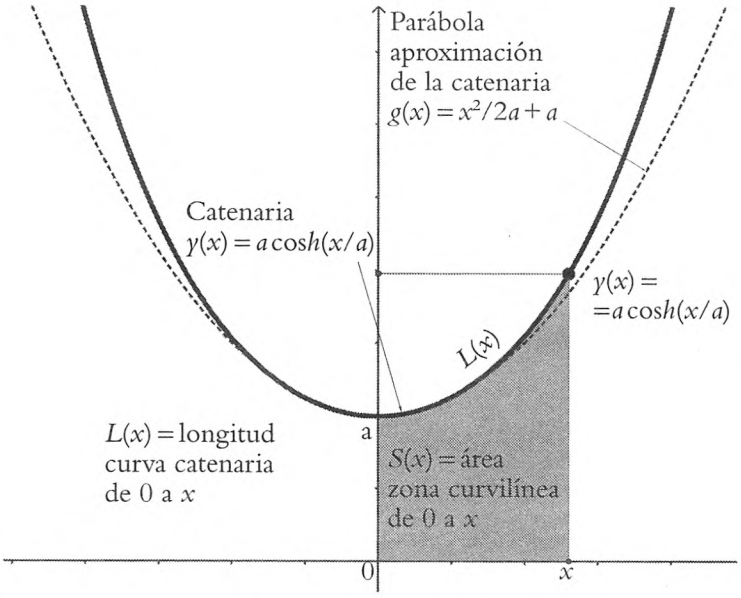
$$\cos h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

La función correspondiente al seno trigonométrico es el seno hiperbólico que se define:

$$\operatorname{sen} h(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

A diferencia del seno y del coseno trigonométricos de un ángulo x, que están relacionados por la expresión $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, el seno y el coseno hiperbólicos están relacionados por la expresión: $\cos h^2(x) - \operatorname{sen} h^2(x) = 1$.

En el capítulo 4 se ha explicado ampliamente el comportamiento de las funciones y curvas trigonométricas e hiperbólicas.



Catenaria: $y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. *Parábola de grado 2 aproximada:* $y = \frac{1}{2a}x^2 + a$.

La ecuación de la catenaria en coordenadas paramétricas es:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \ln(t) \\ y &= \frac{a}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) \end{aligned}\right\} \text{con } t > 0.$$

Se puede deducir que el logaritmo neperiano que aparece en la ecuación procede de la función inversa de la función exponencial de base el número e. Debe recor-

darse que $y=e^t$; $y=\ln(t)$ son funciones inversas. La longitud del arco de la catenaria $L(x)$ medido a partir de su punto más bajo ($x=0$, $y=a$) hasta el punto (x,y) es:

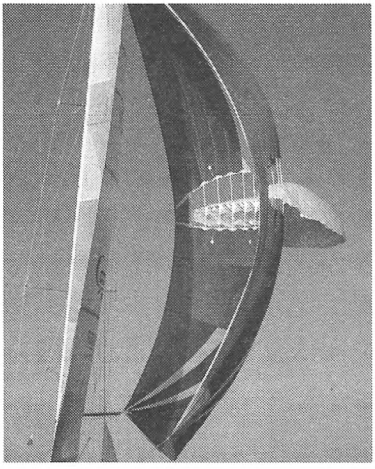
$$L(x)=a\cdot \operatorname{sen} h\left(\frac{x}{a}\right).$$

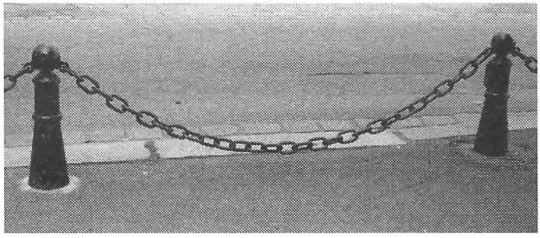
La relación de la longitud del arco $L(x)$ con su ordenada extrema $y(x)$, es:

$$y^2(x)-L^2(x)=a^2.$$

El área del rectángulo mixtilíneo (con un lado curvo) entre la curva, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la vertical al punto de la curva considerado tiene por valor:

$$S=a\cdot L(x).$$



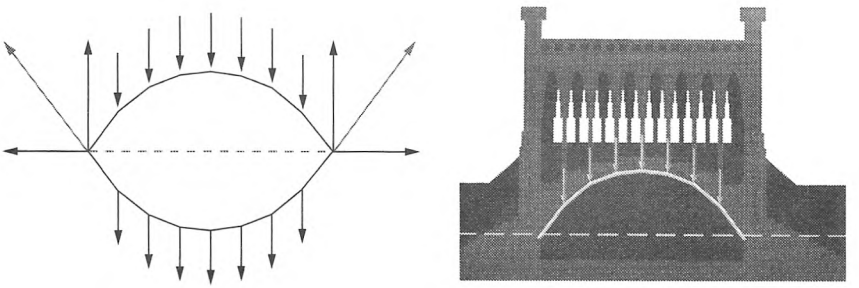


La sección transversal de las velas de un velero infladas por el viento también es una catenaria, porque la fuerza horizontal que el viento ejerce sobre la vela es análoga a la acción de la fuerza de la gravedad sobre una cadena, como se observa en las fotografías. Esta curva fue denominada «velaria» por Jakob Bernoulli.

Si se hace rodar una parábola a lo largo de una recta, el foco de la parábola sigue una catenaria. Cerca del vértice, la parábola y la catenaria son prácticamente coincidentes, como puede observarse en la figura de la página anterior, aunque la parábola presentará una flecha mayor que la catenaria.

La catenaria tiene la propiedad de ser el lugar geométrico de los puntos en los que las tensiones horizontales de un cable se compensan; de este modo, el cable no tiene tensiones laterales y no se desplaza hacia los lados. Las tensiones que sufre se reparten entre una fuerza vertical (la de atracción terrestre) y una tensión tangente al cable en cada punto, que lo mantiene estirado.

Dado un elemento estructural lineal de arquitectura sometido sólo a cargas verticales, la forma catenaria es precisamente la curva que adopta el eje baricéntrico (el eje de simetría de la sección del elemento) para minimizar las tensiones en el material constituyente de dicho elemento estructural; esta propiedad se aprovecha para el diseño de arcos. Un arco en forma de catenaria invertida es precisamente la forma curva que minimiza los esfuerzos de compresión sobre dicho arco. Ésta es la razón de que, en arquitectura, una curva catenaria invertida sea un trazado útil para un arco. Esta forma fue aplicada por los arquitectos modernistas y, básicamente, por Antoni Gaudí.



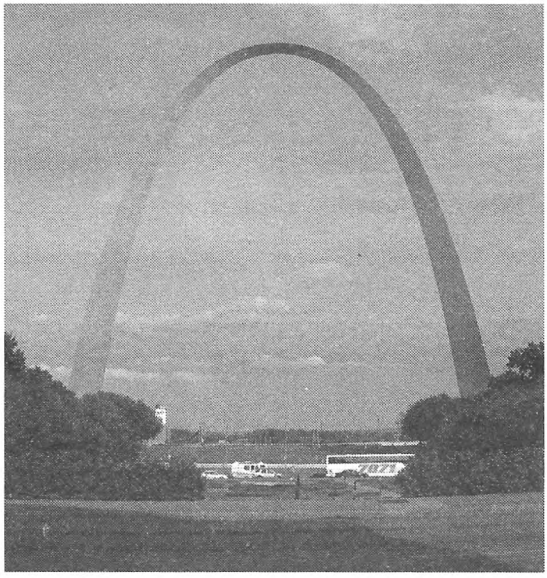
Diseño matemático de un modelo de catenaria y modelo de catenaria 2D para el diseño de la Casa Vicens.

En un arco que adquiera la forma de una catenaria, la tensión que éste soporta en cada punto se reparte entre una componente vertical, que será la que tenga que sustentar el propio arco, y otra de presión, que se transmite por el arco hacia los cimientos sin que se creen esfuerzos horizontales, salvo en los extremos del mismo al llegar a los cimientos. Esta propiedad es distintiva y única de este tipo de arcos: consigue que no necesiten apoyos a ambos lados de los mismos para sustentarse y evitar la tendencia a abrirse. En las capillas románicas eran necesarios gruesos muros a los lados de puertas y ventanas para mantener los arcos de medio punto sin que se agrietaran. Tampoco los arquitectos medievales consiguieron diseñar una forma perfecta para transmitir los esfuerzos laterales, a pesar de que los arcos ojivales del gótico se aproximan más a la forma de la catenaria, pues aún necesitaban apoyar los laterales en fuertes arbotantes exteriores que absorbían y trasladaban las tensiones horizontales hacia los cimientos.

Para una misma longitud entre los puntos suspendidos, la parábola es menos puntiaguda que la catenaria (produce una flecha mayor). Si en un puente en carga la curva que éste adopta es una parábola, la flecha (el punto más bajo del puente, en

su centro) es ligeramente menor que en una catenaria. En un puente suspendido real se puede considerar que la masa del cable es despreciable con respecto a la del puente y, por lo tanto, se considera que el cable adopta una forma parabólica.

En las catenarias ferroviarias, el hilo superior y el de contacto tienen masas del mismo orden; por tanto, se podría considerar que se aplica el razonamiento anterior. Pero, en realidad, hay muy pocos hilos de suspensión, y el superior tiene más bien la forma de líneas discontinuas.



El arco catenario «Gateway Arch» en Sant Louis (Missouri).

Curvas del diseño asistido por ordenador (CAD)

Las curvas que se trazan con el diseño asistido por ordenador (CAD) son de varios tipos. Según su complejidad matemática pueden conseguir un mayor realismo de los objetos dibujados. Estos objetos 2D o 3D pueden luego ser impresos sobre papel o bien formar parte de una animación que puede presentarse como un filme digital que simula una «realidad virtual».

Las curvas más elementales empleadas en el CAD son las llamadas curvas de Bézier, en honor de su inventor, el ingeniero Pierre Bézier. Para dibujar una curva determinada por cuatro puntos se emplea una curva cúbica de Bézier. Si esos cuatro puntos son $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(4,3)$ y $D(6,0)$, entonces la curva (una función polinó-

mica de tercer grado) escrita en forma resumida (en la forma denominada «vectorial») para valores de u entre 0 y 1 será:

$$\text{BEZIER_3}(u) = (1-u)^3 A + 3u(1-u)^2 B + 3u^2(1-u)C + u^3 D.$$

En una ecuación más desarrollada, para los cuatro puntos dados la curva queda así:

$$[x(u), y(u)] = (1-u)^3[0,0] + 3u(1-u)^2[1,3] + 3u^2(1-u)[4,3] + u^3[6,0]$$

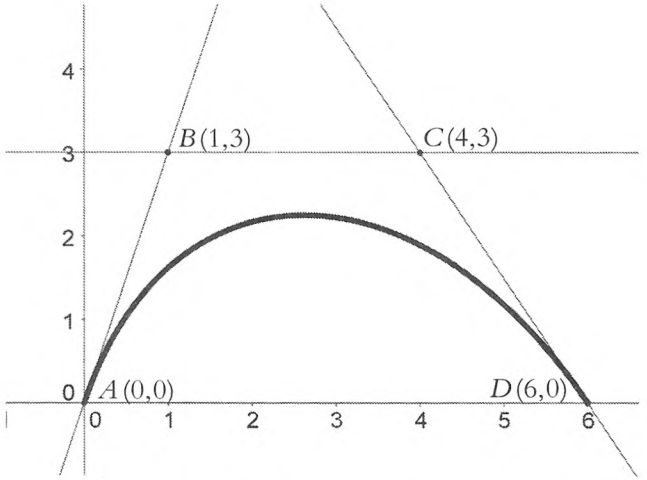
Separando las coordenadas x e y quedarían dos expresiones:

$$\begin{cases} x = (1-u)^3 \cdot 0 + 3u(1-u)^2 \cdot 1 + 3u^2(1-u) \cdot 4 + u^3 \cdot 6 \\ y = (1-u)^3 \cdot 0 + 3u(1-u)^2 \cdot 3 + 3u^2(1-u) \cdot 3 + u^3 \cdot 0 \end{cases}$$

Tras efectuar las operaciones indicadas, estas dos ecuaciones generan la de la curva cúbica de Bézier en coordenadas paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3u^3 + 6u^2 + 3u \\ y = -9u^2 + 9u \end{cases}$$

Las cosas funcionan de este modo: la curva empieza en el punto A y se dirige hacia B; luego llega a D viniendo de la dirección del punto C, como se observa en la figura. Los puntos A y D son puntos de paso de la curva que se quiere dibujar; B y C se llaman puntos de control. Estos puntos se utilizan de modo que las tangentes a la curva dibujada en A y en D sean las rectas determinadas por AB y por CD.



Curva cúbica de Bézier para los puntos A *(0,0),* B *(1,3),* C *(4,3) y* D *(6,0) con los puntos de paso* A *y* D*, y los puntos de control* B *y* C.

Normalmente, la curva no pasará ni por B ni por C: estos puntos sólo proporcionan información direccional, o sea, direcciones de rectas tangentes en los puntos A y D de la curva que se quiere dibujar. La distancia entre B y C indica «qué longitud» debe tener la curva cuando ésta «se mueve» en dirección a C antes de dirigirse hacia D en la misma dirección que la de la recta tangente en D a la curva.

Para mejorar el realismo y la «suavidad» del objeto dibujado se emplean curvas de Bézier de mayor grado. Para dibujar una curva determinada por cinco puntos, por ejemplo, $A(1,1)$, $B(3,0)$, $C(4,5)$, $D(2,3)$ y $E(1,1)$, se emplea una curva cuártica de Bézier, o sea, una curva polinómica de cuarto grado que puede escribirse de modo resumido, para valores de u entre 0 y 1:

$$\text{BEZIER_4}(u)=(1-u)^4A+4u(1-u)^3B+6u^2(1-u)^2C+4(1-u)u^3D+u^4\text{E}.$$

En una forma vectorial más desarrollada y para los cinco puntos dados, la curva tiene esta ecuación:

$$[x(u),y(u)]=(1-u)^4[1,1]+4u(1-u)^3[3,0]+6u^2(1-u)^2[4,5]+4u^3(1-u)[2,3]+u^4[1,1].$$

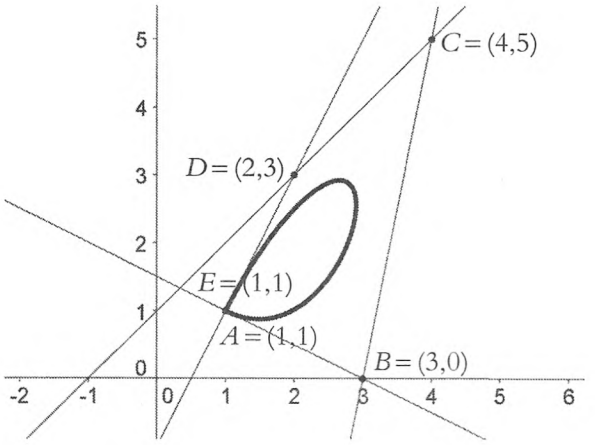
La curva empieza en el punto A y se dirige hacia B; luego, C y D marcan la forma de la curva que se dirige a E viniendo de la dirección DE, como puede intuirse en la imagen siguiente. Separando las coordenadas x e y quedarían dos expresiones:

$$\begin{cases} x=(1-u)^4\cdot 1+4u(1-u)^3\cdot 3+6u^2(1-u)^2\cdot 4+4(1-u)u^3\cdot 2+u^4\cdot 1 \\ y=(1-u)^4\cdot 1+4u(1-u)^3\cdot 0+6u^2(1-u)^2\cdot 5+4(1-u)u^3\cdot 3+u^4\cdot 1 \end{cases}$$

Estas dos expresiones, tras efectuar las operaciones indicadas, generan la ecuación de la curva cuártica de Bézier en coordenadas paramétricas:

$$\begin{cases} x=6u^4-8u^3-6u^2+8u+1 \\ y=20u^4-52u^3+36u^2-4u+1 \end{cases}$$

Se observa en la figura que la curva de Bézier correspondiente que se dibuja siempre «yace» dentro del polígono formado por los puntos que la definen, que en el argot del diseño asistido por ordenador se suele denominar «cápsula convexa».



Curva cuártica de Bézier para los puntos A *(1, 1),* B *(3,0),* C *(4,5) y* D *(2,3) y* E *(1, 1), con los puntos de paso* A *y* E *y los puntos de control* B, C *y* D.

Existen otros modelos matemáticos para dibujar curvas con ordenador más sofisticados, como las curvas b-splines o las curvas y superficies NURBS. Las splines son curvas polinómicas por trozos con una gran continuidad en los puntos de paso de una a otra. El ejemplo más sencillo es el spline lineal por trozos: se trata simplemente de una línea poligonal en el plano 2D o en el espacio 3D. Otro ejemplo son los splines cúbicos formados por arcos de curva de grado 3.

Spline es un término inglés que significa «listón elástico», y hace referencia a los listones que se empleaban para crear curvas que describían superficies para diseñar cascos de barco y fuselajes de avión. Solicitados por fuerzas, estos listones elásticos o splines asumen una forma que minimiza su energía elástica. Esta propiedad es adaptada por los splines matemáticos de grado 3. La herramienta geométrica de los splines se desarrolló para solucionar las limitaciones de falta de control local que tenían las curvas de Bézier, su dificultad para imponer la continuidad y la imposición del grado de la curva según el número de puntos de control. Una función $f(u)$ puede aproximarse mediante un polinomio p de grado 2 interpolando $f(u)$ en cuatro abscisas: $u_0<u_1<u_2<u_3$. Un resultado obtenido en análisis numérico establece que la diferencia entre p y f en el intervalo $[u_0,u_3]$ puede expresarse como:

$$p(u)-f(u)=\frac{f^{(4)}(v)}{4!}(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3),$$

donde $v=v(u)$ está en $[u_0,u_3]$.

Normalmente el error disminuye cuando las diferencias entre las abscisas decrecen. Sin embargo, un interpolador de grado mayor de la función $f(u)$ no necesariamente produce una mejor aproximación de la misma. Por esa razón, en muchos programas de dibujo es habitual el uso de funciones polinómicas en trozos y de grado reducido, como las curvas cúbicas, que se usan a menudo debido a su bajo grado y a su flexibilidad.

Curva que sigue a un conjunto de puntos. Interpolación

Cuando se desea descubrir una función o curva sencilla que se adapte lo mejor posible a un determinado conjunto de puntos, es decir, que pase por todos esos puntos, el proceso matemático recibe el nombre de interpolación. La más sencilla es la interpolación polinómica mediante la cual se obtiene una curva del tipo polinómico que pasa por todos los puntos. El grado de la curva polinómica es menor o igual al número de puntos por los que debe pasar.

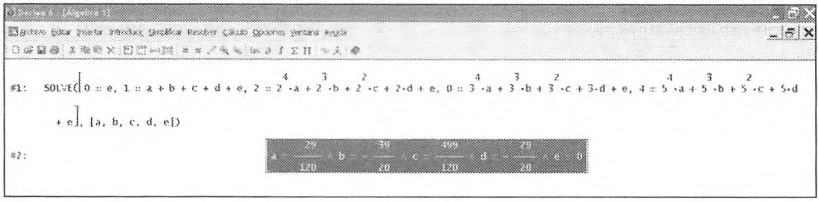
Para resolver esta cuestión existen multitud de métodos que han sido propuestos por matemáticos como Newton o Lagrange. El más sencillo es el método algebraico, que implica la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (de primer grado) en las que las incógnitas son los coeficientes de la ecuación de la curva polinómica. Por ejemplo, si se intenta deducir una curva que pase por los cinco puntos $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$, $D(3,0)$ y $E(5,4)$, la más sencilla que cumpla esta condición es una polinómica de cuarto grado, o sea, una curva cuártica. Su ecuación tiene como máximo cinco términos y tiene el aspecto siguiente:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

En la ecuación de la curva que se busca no se conocen los valores de los coeficientes (que son los números que multiplican las potencias de la variable x), a los que se han dado los nombres a, b, c, d, e, y que son las incógnitas que se tienen que calcular. La curva desconocida es $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, y debe pasar por los cinco puntos $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$, $D(3,0)$ y $E(5,4)$. Una curva pasa por un punto cuando, sustituyendo la x del punto (en el punto E es $x = 5$) en la ecuación de la curva, el resultado de las operaciones en la ecuación produce una y, que es la y del punto (la del punto E es $y = 4$). Se plantea una ecuación para cada punto, o sea que se tienen cinco ecuaciones como las expresadas a continuación, con cinco incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a0^4 + b0^3 + c0^2 + d0 + e \\ 1 &= a1^4 + b1^3 + c1^2 + d1 + e \\ 2 &= a2^4 + b2^3 + c2^2 + d2 + e \\ 0 &= a3^4 + b3^3 + c3^2 + d3 + e \\ 4 &= a5^4 + b5^3 + c5^2 + d5 + e \end{aligned}\right\}$$

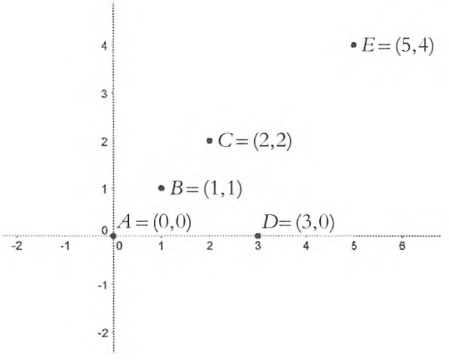
Estas ecuaciones se resuelven con el software de cálculo simbólico Derive:

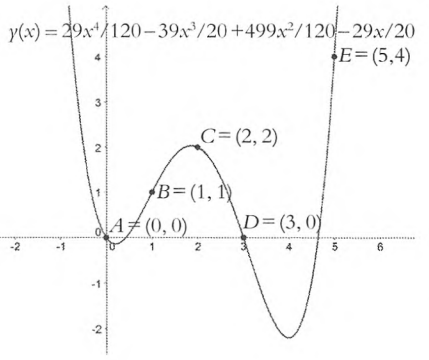


La solución es una curva de ecuación:

$$y = \frac{29}{120}x^4 - \frac{39}{20}x^3 + \frac{499}{120}x^2 - \frac{29}{20}x.$$

En las figuras que siguen se ven los puntos dados y la curva resultante que pasa por todos ellos:





Curvas en las tipografías del diseño gráfico

La tipografía pertenece, obviamente, a las bellas artes, donde incluso los detalles más pequeños y elementales son significativos, y puede influir en la percepción global

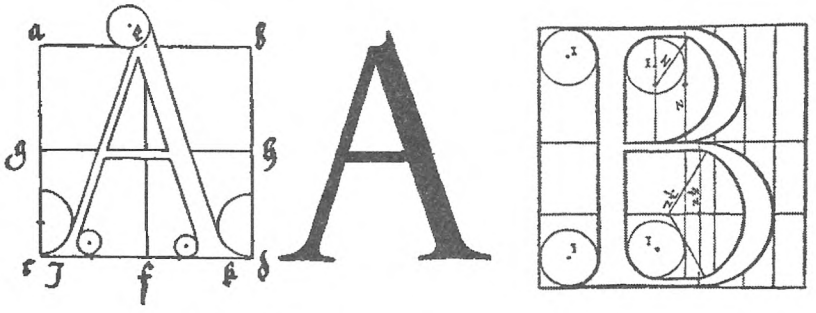
de la creación final, tanto si se trata de un anuncio como de cualquier texto, impresos con un determinado tipo de letra. De la observación de los dos tipos de letra adjuntos puede deducirse la importancia del uso de las curvas en el diseño de las tipografías.

Aa Bb Dd Kk Rr pP Vv Qq Zz 1 3 8 % ? !

Aa Bb Dd Kk Rr pP Vv Qq Zz 1 3 8 % ? !

Ejemplo de fuente serif (arriba) y una sans serif.

El uso de la actuales fuentes serif se remonta a los alfabetos dibujados mediante curvas por los artistas del Renacimiento, como Durero o el impresor Francesco Torniello da Novara (1490-1589), que definió geométricamente los caracteres de las inscripciones del alfabeto latino antiguo. Más tarde diseñó una rejilla de 18 × 18 puntos para cada carácter, que servían como coordenadas para usar sus fuentes geométricas en los tipos de imprenta.



Letra «A» mayúscula de Alberto Durero (1528)
y letra «B» mayúscula de Francesco Torniello (1517).

Aquí finaliza este corto paseo por la antesala de la casa de las curvas. En él se han podido repasar muchos aspectos de nuestra vida donde están presentes estas maravillosas y misteriosas criaturas. Si el lector continúa el camino por los pasillos de esta casa inmensa, le espera un mundo de maravillas, sorpresas y aventuras sin fin. Los autores tienen la satisfacción y la esperanza de haber transmitido el cariño que han sentido siempre por estas antiguas, complejas y peligrosas amigas.

Bibliografía

Álvarez Pérez, J.M., *Curvas en la historia*, Madrid, Editorial Nivola, 2006.

Boltianski, V.G., *La envolvente*, Moscú, Editorial Mir, 1977.

Hogben, L., *Las matemáticas al alcance de todos*, Buenos Aires, Joaquín Gil editor, 1943.

Lockwood, E.H. *A Book of Curves*, Cambridge, Cambridge University Press, 1961.

Olalquiaga, P., Olalquiaga, A., *El libro de las curvas*, Madrid, Fundación Esteyco, 2005.

Pedoe, D., *La geometría en el arte*, Barcelona, Editorial Gustavo Pili, 1982.

Pérez Sanz, A., *Curvas en la naturaleza*, ciclo «Un paseo por la geometría», Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del País Vasco, 2003.

Puig Adam, P., *Curso de geometría métrica*, Madrid, Gómez Puig Ediciones, 1979.

Revue du Palais de la Découverte N° 45, *Courbes mathématiques*, París, 1995.

Vasiliev N.B., Gutenmájer V.L., *Rectas y curvas*, Moscú, Editorial Mir, 1980.

Índice analítico

abscisa 14-15, 48, 62, 71
amplitud 36, 88, 90, 101-102, 109
Apolonio de Perga 57, 81, 122, 124, 128, 129
Arquímedes de Siracusa 67, 124, 126, 134
asíntota 49, 56, 133
astroide 7, 93

Bernoulli, Jakob 20, 34, 45, 54, 141, 146
Bézier, Pierre 28-29, 148
braquistócrona 87, 88

cálculo
  infinitesimal 7, 67
  simbólico 8, 30, 62, 72, 153
caracol de Pascal 95, 143
cardioide 143-144
catenaria 72, 106, 144-148
ceros de una función 62
cicloide 87-95
circunferencia 12-26, 41, 67, 91-95, 125-126
concavidad 66-67
cónica 16, 121-125, 130
curva
  cadenilla de huevos 136
  catenaria 106, 144, 145, 147
  cuadrática 29
  de campana 38
  de Moritz 136
  de persecución 96-99, 141
  del corazón 136
  del pescado 136
  empírica 36, 38
  huevo de Hügelschäfer 135
  mariposa de T. Fay 136
  óvalo de Cassini 27
  periódica 32-33, 36
  piriforme 27
  tractriz 43-44, 50, 98-99
  trébol 135
curvas
  de anchura constante 126-127
  de Bézier 28, 148, 150, 151
  de la tipografía 153-154
  de Lissajous 31, 109-112
  explícitas 50
  implícitas 50
  logísticas 107, 108
  rhodoneas o rosas 118
  splines 151
curvatura 67, 86-87, 127, 140

deltoide 7, 92
derivada 20, 54, 59-61, 70, 72, 97
Derive 8, 30, 50, 62, 72, 153
Descartes, René 11, 122, 141
diferencial
directriz 42, 87
distribución
  binomial 35
  normal 35
dominio 63-65
Durero, Alberto 127-128, 140, 144, 154

ecuación
cartesiana 11, 12, 16, 41, 47, 53
explícita 16, 30
implícita 16, 25, 30, 134, 135
polar 137, 140, 141, 143
ecuaciones paramétricas 26-31, 87, 109, 137, 143
elipse 19, 42, 72, 124, 127-130
epicicloides 91-92, 95
epitrocoides 91, 94, 95
espiral
de Arquímedes 24, 25, 138-139
de Durero 140
de Fermat 140
de Varignon 140
lituus 140
logarítmica o de Bernoulli 72, 141-142
espirales de Poinsot 106
Euler, Leonhard 25, 50, 54, 88
extremos de una función 57, 61

Fermat, Pierre 11, 57, 61, 67, 122
foco 19, 42, 43, 127-134
función
continua 36
definida a tramos 56
diente de sierra 103
exponencial 53, 55, 145
irracional 65
logarítmica 53
funciones
algebraicas 53
hiperbólicas 104-107
polinómicas 51-53, 64, 152
trascendentes 53-56
trigonométricas 53, 102, 104-106, 112

Galilei, Galileo 81-82, 144
Gaudí, Antoni 147
Gauss, Carl Friedrich 25, 38-39
geodésica 84-87
geogebra 8, 50, 155
Grande, Guido 30-31

hipérbola 37, 43, 121-124, 130-134
hipocicloides 91, 93, 94
hipotrocoides 91, 94
Huygens, Christiaan 88, 90, 99, 144

integral 72, 75, 77, 89
interpolación 152-153
involuta de círculo 137-138

Kepler, Johannes 20, 127

Lagrange, Joseph-Louis 88, 152
Leibniz, Gottfried 57, 59, 61, 67, 144
lemniscata 24-25, 41, 44-45, 50, 51
límite 58-60, 72, 103, 113

Menecmo 122-124, 131
método de exhaución 67

Newton, Isaac 20, 57, 61, 67, 73-74, 132

ordenada 14, 15, 37, 45, 54, 146

parábola 17-18, 42-48, 134-135, 146

Pascal, Étienne 143
pendiente 11, 12, 15, 28, 54, 56-61
Pitágoras, teorema de 12, 13, 68, 69, 71
polinomio 47, 49, 53, 132, 151
problemas délicos 122-123, 138
punto
de inflexión 66-67
singular 92, 133

ramas de una curva 17, 44, 122, 124, 130-132, 137
Reuleaux, Pierre 126-127
Riemann, Bernhard 69, 75

superelipses 93, 130

tautócrona 88, 89
Torniello, Francesco 154
Tschirnhausen, Ehrenfried 133-134