Hasta que el álgebra os separe

La teoría de grupos y sus aplicaciones

Javier Fresán

El mundo es matemático

© 2011, Javier Fresán por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-7438-0
Depósito legal: NA-2694-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

¡Oh, qué montón de cosas le diría,
cuáles y cuántas, sin temer castigo
de fortuna, de amor, de tiempo y muerte!
Francisco de Aldana

Para Laura Casielles

Sumario

Prefacio 9

Capítulo 1. Los años de Bourbaki 11

Capítulo 2. Las estructuras elementales 25

Capítulo 3. Una historia de grupos 43

Capítulo 4. Matrimonios algebraicos 65
La tribu de los murngin 77

Capítulo 5. Bajo el signo de Diofanto 87
Algunos preliminares 88
Las ecuaciones lineales 91
Una breve digresión sobre la criptografía 93
La ecuación de Pell-Fermat 94
Las curvas elípticas 98

Capítulo 6. La música de las esferas 107

Anexo. Grupos abelianos finitos con dos generadores 127

Bibliografía 135

Índice analítico 137

Prefacio

Nueva York, 1941. Si es medianoche en el siglo, dos judíos extraordinarios sólo pueden seguir sus investigaciones al abrigo de la Estatua de la Libertad. André Weil, fundador del grupo Bourbaki, revolucionaría las matemáticas con su descubrimiento de la piedra de Rosetta que permite descifrar algunos de los misterios más profundos de la teoría de números. Mientras Weil navegaba por esos mares del pensamiento, Claude Lévi-Strauss ponía fin a la imagen del antropólogo como un explorador en busca de aventuras, gracias al método estructuralista. Ambos se conocieron en un exilio que los había dejado a solas con su inteligencia. En esa época, Lévi-Strauss escribía su tesis sobre las estructuras del parentesco: todo avanzaba según lo previsto, hasta que llegó la hora de analizar los matrimonios de la tribu de los nurngin, gobernados por unas normas tan complejas que invalidaban las técnicas de estudio conocidas.

Este libro cuenta cómo Weil resolvió el problema que quitaba el sueño a Lévi-Strauss mediante la teoría de grupos, una rama de las matemáticas nacida un siglo antes para entender las ecuaciones algebraicas. Un grupo es un conjunto dotado de una operación que a cada dos elementos asocia un tercero, de modo que se cumplan ciertas condiciones. Los números expresan cantidades; los grupos miden la simetría. Por ello no es de extrañar que su presencia sea ubicua no sólo en las matemáticas, sino también en la naturaleza. Si Henri Poincaré afirmaba en 1881 que «las matemáticas son sólo una historia de grupos», hoy podríamos dar un paso adelante para decir que incluso los cristales de cuarzo o los átomos de hidrógeno se rigen por un grupo. Como veremos, lo mismo ocurre con la armonía musical o con los sistemas de protección de datos que nos permiten realizar transacciones bancarias seguras.

Desde el principio tuve claro que la historia de la colaboración entre Weil y Lévi-Strauss sólo podía contarse en forma de diálogo. Pero eso planteaba una objeción evidente: al situar la trama en el Nueva York de los años cuarenta, tendría que prescindir de todo lo que sucedió más tarde. Fue entonces cuando recordé una bella tradición judía que la hija de Weil menciona en un reciente retrato de familia: la del compañero de estudio con el que los muertos siguen aprendiendo en el más allá. Claude Lévi-Strauss, fallecido en octubre de 2009, sería el compañero que André Weil había estado esperando desde su muerte once años antes. *Sic rebus stantibus*, es necesaria una advertencia: no quisiera que nadie se llevara al engaño de ver en la estructura dialógica una máscara de la ficción. Salvo contadas excepciones,

cuanto dicen los protagonistas está documentado en la abundante bibliografía que el lector encontrará al final del libro.

El origen de *Hasta que el álgebra os separe* es la conferencia que pronuncié en agosto de 2010 en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo, en el marco de esa «fascinante academia renacentista» que es el Aula de Verano Ortega y Gasset. No podría ceder la palabra a los protagonistas sin expresar mi gratitud a los organizadores del curso, ni a aquellas personas que me han prestado su tiempo mientras escribía: Giuseppe Ancona, Gustavo Ochoa, Guillermo Rey, Roberto Rubio y Lucas Sánchez Sampedro. Gracias a ellos, el libro se acerca un poco más a su objetivo: ofrecer al gran público una aproximación a la teoría de grupos, a través de las obras de André Weil y Claude Lévi-Strauss.

Capítulo 1

Los años de Bourbaki

Todo matemático digno de ese nombre ha conocido, puede que sólo en momentos excepcionales, esos estados de exaltación lúcida en que los pensamientos se encadenan de forma milagrosa y en que el inconsciente —sea cual sea el significado que se atribuya a esta palabra— también parece tomar parte.

A. Weil, *Memorias de aprendizaje*

Finales de octubre de 2009

WEIL: Llega once años tarde...

LÉVI-STRAUSS: ¡Qué alegría verlo, señor Weil! Bueno, ya me entiende: preferiría que fuera en otras circunstancias, pero me gusta que sea usted mi compañero de estudio. ¡Tengo muchísimas cosas que preguntarle!

WEIL: Yo también, así que no perdamos más el tiempo y empecemos por lo que de verdad me intriga: ¿cómo consiguió vivir cien años?

LÉVI-STRAUSS: Me lo enseñaron los indios; ¿no cree que sería una imprudencia revelarle su secreto? Es gracioso que volvamos a coincidir aquí: recuerdo que una vez nos dimos cuenta de que nuestros antepasados podrían haberse conocido y de que tanto su padre como el mío habían sido *dreyfusards*[1] durante su juventud. Yo vengo de una familia de judíos alsacianos que se mudaron a París en el momento de la anexión porque querían seguir siendo franceses. Lo mismo hicieron los suyos, ¿no?

WEIL: Sólo la rama paterna: los Weill, que perdieron la segunda ele por el camino. Quién sabe si la madre de Proust, que se llamaba Jeanne Weil, estaba emparentada con nosotros. La otra mitad de la familia venía de las estepas de Galitzia: eran los Reinherz, que en alemán significa «corazón puro». Durante toda mi niñez escuché contar historias sobre ellos. Sin embargo, no me enteré de que era judío hasta los diez años y, cuando lo supe, no le di ninguna importancia.

---

1 Partidarios de Alfred Dreyfus, el militar francés de origen judío injustamente condenado a finales de 1894 por un delito de alta traición.

LÉVI-STRAUSS: Su hermana, la filósofa Simone Weil, no adoptó la misma postura...

WEIL: Ya sabe, señor Lévi-Strauss, que ella era exagerada por naturaleza: siempre intentando lanzarse como paracaidista o escondiendo a Trotsky en casa. A los quince años tuvo una crisis porque consideraba su inteligencia mediocre; les ocurre a muchos chicos de esa edad, pero ella pensó en suicidarse. A pesar de todo, fue siempre una mujer alegre. De niños éramos inseparables: no se me olvidará nunca una tarde en la que me caí, y ella volvió corriendo a casa a por mi libro de álgebra para consolarme. Esos momentos de ternura ingenua los mantuvo el resto de su vida, pero siempre comprendió mejor las cosas que la mayoría de sus compañeros de viaje: fue, por ejemplo, una de las primeras en intentar abrir los ojos al mundo sobre la situación rusa. Cuando pensaba que ya no podría sorprenderme nada de lo que hiciera, su muerte me dejó hecho polvo: tardé meses en quitarme de la cabeza esa página de las memorias de Saint-Simon que está cortada en dos por un reguero de lágrimas.

LÉVI-STRAUSS: Durante la Primera Guerra Mundial, su padre sirvió en los hospitales militares del frente, y toda la familia se trasladaba con él en sus desplazamientos. ¿No afectó eso a su educación?

WEIL: Diría que no seguir el sistema convencional tuvo sólo efectos positivos. Siempre he pensado que basta con tener un buen profesor cada dos o tres años que te dé el impulso para seguir estudiando por tu cuenta. Einstein pedía a los maestros que no enseñaran nada de lo que uno no haya aprendido por sí mismo. Yo recuerdo a dos que me marcaron particularmente en mis primeros años: estoy seguro de que el señor Collin no sabía más matemáticas de las que le tocaba explicar, pero no he conocido a nadie que potenciara como él la imaginación y el rigor de los alumnos. Sacaba a alguien a la pizarra a hacer un problema, y la clase entera pasaba diez minutos reflexionando en silencio. Luego buscábamos juntos la solución: poco importaba que nuestras ideas no llevasen a ninguna parte, pero estaba prohibido no saberse de memoria las definiciones. Otro de mis maestros de la escuela había inventado una especie de notación algebraica para el análisis gramatical que hizo que, cuando mucho tiempo después leí a Chomsky, tuviera la alegre sensación de una reminiscencia.

LÉVI-STRAUSS: Con semejantes antecedentes, no es de extrañar que sus años de formación fueran, sobre todo, años de peregrinaje...

WEIL: Viajé todo lo que pude. A los diecinueve años me dieron la oportunidad de pasar un curso entero en Roma, donde se había congregado una brillante escue-

la de geometría algebraica: Francesco Severi explicaba la teoría de las superficies, y Enriques me invitó a su casa varias veces, en compañía de otros estudiantes. Fue en alguna de estas reuniones donde descubrí la memoria de Louis Mordell sobre los puntos racionales de las curvas elípticas, sin la que no habría podido completar mi tesis. Al año siguiente, uno de los matemáticos de los que me había hecho amigo allí, Vito Volterra, me recomendó para una beca de la Fundación Rockefeller, que se había propuesto «volver a alzar las cimas» tras los desastres de la guerra. Elegí visitar a Richard Courant en Gotinga el mismo año en que se descubrió la mecánica cuántica —¡aunque de eso me enteré más tarde!— y pasé también algunos meses en Berlín. Todavía me quedó tiempo para ir a echarle una mano a Mittag-Leffler, que se peleaba con un artículo sobre las series de polinomios. Era la época del deshielo en Estocolmo. Cada día empezábamos hablando de matemáticas en francés, pero enseguida mi anfitrión cambiaba de tema y se ponía a charlar en alemán; luego se cansaba y hacía un largo monólogo en sueco, que terminaba invariablemente con la frase «Ah, se me olvidaba que usted no sabe sueco. Ya seguiremos mañana». Como puede imaginarse, poco avanzó el manuscrito durante aquellas semanas, pero al final de mi estancia podía mantener sin problema una conversación en sueco.

LÉVI-STRAUSS: ¿Todo esto fue antes de la India?

WEIL: Sí, pero ya entonces era un apasionado del país. Creo que fue el prólogo a un diccionario inglés, en el que se hablaba sobre el indoeuropeo, lo que me llevó a interesarme por el sánscrito y a concebir, desde mi primera juventud, el sueño de leer en lengua original una literatura que combina los refinamientos más depurados de la lógica, la gramática y la metafísica con un misticismo lleno de sensualidad. Empecé a asistir a las clases de sánscrito de Sylvain Lévi en el Collège de France[2], y fue precisamente él quien me permitió pasar dos años en la India. Mi viaje se enmarcaba en un plan de renovación del cuerpo docente de la universidad musulmana de Aligarh, que, salvo un puñado de honrosas excepciones en historia y filosofía, era de una mediocridad absoluta. Si bien el mundo universitario nunca está exento de intrigas, las que presencié allí superaban con creces la imaginación del más retorcido autor de folletines. Tiene que pensar, señor Lévi-Strauss, que, siendo yo el más joven del departamento —tenía entonces veintitrés años—, me habían encomendado la tarea de realizar un informe sobre cada profesor, que podría acarrear, en

2 Fundado en 1530 por el rey Francisco I, el Collège de France es una institución única en el mundo. Cada año los titulares de sus cátedras científicas y humanísticas proponen cursos de alto nivel, de entrada libre, en los que presentan «la investigación mientras se hace».

André Weil, junto a su hija Sylvie, en 1956
(foto de Konrad Jacobs, cortesía de MFO Picture Collection).

última instancia, su despido. Todos merecían irse, pero al final opté por sugerir que sustituyeran sólo a uno de los ayudantes por un discípulo de Hardy, el único matemático en sentido estricto entre los más de cien candidatos al puesto. También me encargué de comprar una biblioteca para la universidad y de intentar poner en marcha una escuela matemática. Pero ¡qué difícil es cambiar lo establecido!, incluso cuando se cuenta con el apoyo de las nuevas generaciones.

André Weil, junto a su hermana Simone,
leyendo en el campo en el verano de 1922.

Para afrontar con energías renovadas cada obstáculo, exploraba el país en vacaciones. Pronto la guía de ferrocarriles se convirtió en mi libro de cabecera: viajaba siempre en tren, con poco más equipaje que la *Ilíada* y la *Bhagavad-Gītā*, dos lecturas que me han acompañado desde entonces y que me ayudaron a entender mejor el pensamiento de mi hermana. En una de estas expediciones conocí a Gandhi, que había lanzado su marcha de la sal poco después de que yo llegara a la India; en otra, al poeta Rabindranath Tagore y a quien luego sería presidente de la República. A fuerza de cruzarme en el camino con las gentes más variadas, observé algunas analogías muy curiosas. A menudo he escuchado hablar de los paralelismos entre el Talmud y el psicoanálisis. Yo me di cuenta de que los brahmanes del sur de la India representaban el mismo papel que los judíos en el paisaje intelectual europeo: también ellos habían dedicado su vida al comentario minucioso de los textos sagrados y, como en su caso, una de las razones por las que despertaban tanto odio era la relación desigual entre su número y su importancia.

LÉVI-STRAUSS: No puedo dejar de preguntárselo, señor Weil: entre tantos viajes y lecturas, ¿de dónde sacaba tiempo para investigar?

WEIL: No es usted el primero que me señala, de modo más o menos amable, que mis memorias parecen la crónica de un *dolce far niente*... Quizá por eso el editor creyó necesario advertir a los lectores de que encontrarían en ellas más vida que matemáticas. Es posible, pero esa época dorada terminó a los veintiséis años. Pregúntele al portero de mi apartamento de Chicago cómo fue mi ritmo de trabajo en las décadas siguientes. Después de verme escribir a máquina tarde tras tarde, hasta bien entrada la noche, un día no pudo evitar decirme: «Trabaja usted muchísimo, señor Weil. Si sigue así, se hará famoso». Si lo que quiere es una justificación, le diré que hay matemáticos que sólo se interesan de verdad por un problema cuando huelen la competencia de otros colegas que podrían encontrar la solución antes que ellos. Otros, sin embargo, nos sentimos más cómodos cuanta menos gente trabaja en nuestro campo. Eso permite grandes períodos de reflexión, en los que uno puede dejar de pensar en el problema —al menos conscientemente— para dedicarse a otros asuntos y volver a él más tarde con la mente fresca. Por seguir con los oráculos, parece ser que, nada más conocerme, Courant comentó con uno de sus alumnos que yo sería un matemático muy brillante, pero terriblemente *unproduktiv*. Hoy le habría contado esa historia china de Italo Calvino en la que el rey encarga a un pintor que dibuje un cangrejo. El artista responde que necesitará cinco años y una casa con doce sirvientes. Agotado el tiempo, aún no había empezado el dibujo. El rey le concedió otros cinco años, que corrían el riesgo de terminar del mismo modo. Pero en el último momento, el pintor tomó el pincel y en un instante, con un solo gesto, dibujó un cangrejo, el cangrejo más perfecto que jamás se hubiera visto.

LÉVI-STRAUSS: Ya que entre animales anda el juego, ¿también en matemáticas hay zorras y erizos? Ésas son las dos clases de pensadores y artistas que distingue Isaiah Berlin, interpretando libremente el fragmento del poeta griego Arquíloco «Muchas cosas sabe la zorra, pero el erizo sabe una sola y grande». Los erizos serían quienes poseen una visión sistemática y centralizada del mundo que da sentido a los sucesos individuales. Las zorras, sin embargo, creen que un hecho aislado puede ser coherente, pero que el todo es disperso y múltiple, inaprensible. Entre los primeros, Berlin incluye a Platón, Dante, Nietzsche o Proust; entre las segundas, a Aristóteles, Shakespeare, Montaigne y Joyce.

WEIL: Nosotros tenemos águilas y gorriones; ésas fueron las palabras que empleó Severi cuando le pedí su opinión sobre uno de los matemáticos más brillantes de la época. Las águilas crean conceptos que abren rutas de navegación entre las islas del archipiélago matemático; su estandarte es la metáfora y la analogía. Los gorriones, en cambio, encuentran la belleza en el ejemplo; podría decirse que son la caja de reso-

nancia de un sonido que no es suyo, pero gracias a ellos avanzan las teorías. Aunque no me corresponda a mí clasificarme, yo me siento un águila, tal vez por herencia: mi maestro Jacques Hadamard me transmitió el deseo de saber más que los no especialistas y menos que los especialistas, que a veces no logran resolver un problema porque necesitan técnicas de otras áreas que ignoran por completo. Igual que, en un paisaje de montaña, los rayos del sol se ocultan por valles lejanos de los que apenas podemos hacernos una idea, a la hora de escribir un texto hay que esforzarse para que, detrás del argumento obvio, el lector encuentre nuevas perspectivas.

LÉVI-STRAUSS: Bourbaki fue un fenómeno de águilas...

WEIL: ¡Ya sabía yo que, antes o después, hablaríamos de Bourbaki! Para ser exactos, fue un gorrión que se transformó en águila. Todo empezó por una inquietud pedagógica. Tras un curso en Marsella, tuve la suerte de que me destinaran como profesor a la Universidad de Estrasburgo. Digo que fue una suerte porque, a diferencia de otras ciudades de provincias, la capital de Alsacia gozaba de una vida intelectual muy activa y de una excelente biblioteca, que fue, por cierto, la que inspiró al historiador del arte Aby Warburg el diseño de la suya. Allí enseñaba ya mi amigo Henri Cartan, con el que había estudiado en la Escuela Normal Superior[3]; los dos dábamos un curso de cálculo diferencial e integral. La costumbre era seguir el *Cours d'analyse* de Goursat, pero a nosotros nos parecía un manual anticuado. Recuerdo que Cartan me sometía a unas sesiones de preguntas tan agotadoras que lo empecé a apodar el «alguacil inquisidor». A mí también me preocupaban algunas cuestiones, como con qué generalidad debía enseñarse la fórmula de Stokes. Un día a finales de 1934 tuve una idea; fui a ver a Cartan y le dije: «Mira, somos varios los amigos que enseñamos esta asignatura en las distintas universidades francesas. ¡Reunámonos y decidamos de una vez por todas cómo orientar el programa!».

LÉVI-STRAUSS: Había nacido Bourbaki...

WEIL: Sí, pero ninguno podíamos siquiera imaginarlo. Los otros amigos eran Jean Delsarte, que enseñaba en Nancy; Claude Chevalley, el único francés que se interesaba por la teoría de números además de mí; Jean Dieudonné, que con el tiempo se convertiría en secretario del grupo, y algunos más que enseguida se desvincularon. Hay quien nos llama «los padres fundadores». La primera reunión tuvo

3 La *Escuela Normal Superior* de París es un prestigioso centro de educación superior, destinado a formar profesores e investigadores en todas las disciplinas científicas y humanísticas. De ella han salido doce premios Nobel y once medallas Fields. Para acceder a la Escuela Normal, los estudiantes deben cursar dos años en las llamadas «clases preparatorias», al final de los cuales se presentan a un examen de admisión que comporta varias pruebas escritas y orales.

lugar en un café del barrio latino de París, en la esquina del bulevar Saint-Michel con la calle que sube al Panteón. Como le he explicado, nuestro objetivo era escribir un libro que pudiera servir de referencia durante los siguientes veinte o treinta años. Pronto decidimos que, en una obra colectiva como ésa, no sería adecuado desplegar una ristra de nombres propios en la portada. Y fue entonces cuando nos acordamos de una broma de la que algunos de nosotros habíamos sido testigos en la Escuela Normal: haciéndose pasar por un profesor extranjero, con una barba postiza y un acento inverosímil, uno de los estudiantes había pronunciado una disparatada conferencia ante los alumnos del primer curso que terminaba con un teorema de Bourbaki. Había tomado prestado el nombre de un oscuro general napoleónico que, a pesar de sus prometedores comienzos en la guerra de Crimea, sufrió una humillante derrota frente a los prusianos que lo empujaría a un intento de suicidio. ¡Bourbaki era nuestro hombre! Sólo faltaba inventarle una biografía: decidimos llamarlo Nicolás y atribuirle orígenes poldevos. Era otra broma de unos normalistas que un día lanzaron una campaña de apoyo a la nación ficticia de Poldevia, tan pobre que ni siquiera su primer ministro tenía dinero para vestirse. Con la connivencia de Élie Cartan, el padre de nuestro compañero, publicamos una nota firmada por Nicolás Bourbaki en las actas de la Academia de Ciencias. Mucho tiempo después se presentó un descendiente del general asegurando que él había reconstruido todo el árbol genealógico y que... ¡no había matemáticos en la familia!

LÉVI-STRAUSS: ¿Cómo se transformó ese discreto inicio en el afán enciclopedista de unificar todas las matemáticas?

WEIL: A medida que trabajábamos en el proyecto, nos dimos cuenta de que, para sentar las bases del cálculo diferencial e integral de forma rigurosa, había que volver a examinar desde el principio los conceptos más elementales de las matemáticas. Los antiguos tratadistas se habían contentado con presentar, en unos pocos capítulos, lo imprescindible para emprender con éxito el estudio de sus obras; pero eso ya no era posible si queríamos estar a la altura de los extraordinarios avances de nuestro tiempo. Tiene que pensar, señor Lévi-Strauss, que las matemáticas se ajustan relativamente bien a la tesis de Thomas Kuhn sobre la estructura de las revoluciones científicas. Entre finales del siglo diecinueve y el primer tercio del veinte había cambiado el paradigma; en esa época nacen la teoría de conjuntos de Cantor, la topología general de Hausdorff, la topología algebraica de Poincaré y Lefschetz, los espacios de Hilbert y el álgebra moderna, que podríamos asociar a los nombres de Noether, Artin y Van der Waerden. Todos los períodos de apertura se parecen: empiezan con el análisis de muchos ejemplos, que se consideran de manera aislada

hasta que alguien los va clasificando, como los primeros naturalistas, en función de las analogías más visibles. Sólo un estudio reposado permite sacar a la luz las propiedades escondidas, algunas de las cuales pueden permanecen ocultas durante mucho tiempo. El objetivo de Bourbaki acabó siendo poner sobre la mesa estos constituyentes últimos de las matemáticas.

LÉVI-STRAUSS: Para entrar en lo que Kuhn llamaría la «ciencia normalizada».

WEIL: Lo más difícil fue encontrar un método de trabajo. Al principio nos veíamos regularmente en los cafés parisinos, pero pronto esas reuniones se quedaron cortas, y decidimos pasar juntos dos semanas de las vacaciones de verano en algún sitio agradable: sacar las matemáticas al aire libre. El primer congreso tuvo lugar en julio de 1935 en Besse, un pueblecito de la región de Auvernia donde la Universidad de Clermont tenía unas instalaciones. El siguiente se habría celebrado en El Escorial de no ser porque, mientras lo organizábamos, estalló la guerra civil española. Al final tuvimos que reunirnos en la casa de la familia Chevalley en Chançay, aunque siguió llamándose el «congreso del Escorial». Antes de cada reunión, encargábamos a los miembros que redactasen informes sobre los distintos temas que integrarían el tratado. Una vez allí, los leíamos juntos y trazábamos un plan de lo que se explicaría en cada volumen y de cómo lo relacionaríamos con lo que ya se había publicado o con lo que escribiríamos en el futuro. La fase de redacción empezaba luego: como habíamos establecido la norma de que la decisión de dar por terminado un texto sólo podría tomarse por unanimidad, a veces un sinfín de versiones de cada manuscrito se sucedían durante más de cinco años; nunca estábamos del todo satisfechos. Todavía hoy no acabo de creerme que en 1939 hubiéramos terminado un fascículo de unas cuarenta páginas con los resultados principales de la teoría *naif* de conjuntos, y que encontrásemos un editor dispuesto a publicarlo.

LÉVI-STRAUSS: ¿Llamar *naif* a la teoría era otra de sus bromas?

WEIL: En absoluto. Si hubiera que resumir en una frase el principio con el que Bourbaki abordó su empresa de unificar las matemáticas, ésta sería «poner el método axiomático al servicio de la ideología de las estructuras». Sobre esto último tendremos ocasión de hablar más adelante, señor Lévi-Strauss. En lo que se refiere al método, decidimos basar todo en la teoría de conjuntos, que, pese a las paradojas que la habían acechado a comienzos de siglo, gozaba de una excelente salud en el momento en que tuvimos que recurrir a ella. Por tanto, el primer paso para formalizar las matemáticas consistía en describir de forma exhaustiva los símbolos y la sintaxis de la teoría de conjuntos. Cualquiera de los trabajos de Hércules habría sido más fácil; ahí estaba el ejemplo de Russell y Whitehead, que invirtieron diez años

de sus vidas, a razón de doce horas diarias, en la escritura de los *Principia Mathematica*. Ahora bien, si se introducían un número considerable de abreviaturas y de nuevas reglas sintácticas, era posible obtener un lenguaje mucho más práctico, que, sin ser formal en sentido estricto, estuviera lo suficientemente cerca de los lenguajes formales como para garantizar el rigor perfecto. Ésa es la ingenuidad de la teoría, una especie de versión estenográfica del lenguaje ideal en el que ningún cabo queda suelto. Pronto abandonamos la matemática formalizada, pero fuimos dejando marcas por el camino para volver a ella cuando fuera necesario. Es así como hay que entender nuestra obsesión por la nomenclatura, el estilo austero, sin concesiones a la retórica; o un orden lineal que prohíbe toda referencia a otro texto, aunque eso conduzca a construir los números reales más allá de la página tres mil...

LÉVI-STRAUSS: ¿No contradicen las notas históricas con las que Bourbaki tenía por costumbre cerrar cada libro esa voluntad de «hacer del pasado tabla rasa»?

WEIL: Son cosas distintas, señor Lévi-Strauss. Fíjese en que nada es producto del azar en el título de nuestro tratado: *Elementos de matemática*. Hay, por un lado, un uso consciente de la forma singular de un nombre que es más común en plural: decimos «matemática» y no «matemáticas», porque creemos que sólo hay una. Por otro lado, cómo no ver en la primera palabra del título una alusión a los *Elementos* de Euclides. También nosotros queríamos crear una obra que permaneciera vigente durante dos mil años, y sólo si era autocontenida podríamos llegar a conseguirlo. Imagínese que los hombres del futuro encuentran alguno de nuestros artículos de investigación: habrá en él tantas referencias a otros textos, la mayoría probablemente perdidos, que, por muy interesante que sea lo que dice, terminarán considerándolo inútil. «Hacer tabla rasa» no significa negar que haya habido matemáticas antes de nosotros, igual que hubo geometría antes de Euclides. Todo lo contrario: nuestro tratado, igual que el suyo, es una suma de lo que se sabía cuando lo escribimos. Lo que ocurre es que, muchas veces, al organizar viejos materiales, se descubren otros nuevos.

Tengo que confesar que la idea de añadir esas notas históricas al final de cada volumen fue mía; déjeme contarle por qué. Al entrar en la Escuela Normal, me encontré con que la biblioteca de ciencias tenía unos horarios ridículos. Harto de mis quejas, el director me concedió un puesto de ayudante del bibliotecario, que me daba acceso día y noche a cambio de una mínima presencia obligatoria. Fue allí donde leí la obra de Bernhard Riemann, gracias al alemán que había aprendido para entender lo que decían mis padres cuando no querían que ni mi hermana ni yo lo hiciéramos. Esta lectura terminó de convencerme de una idea que ya me había sugerido mi trato con los griegos: en la historia de la humanidad los únicos que

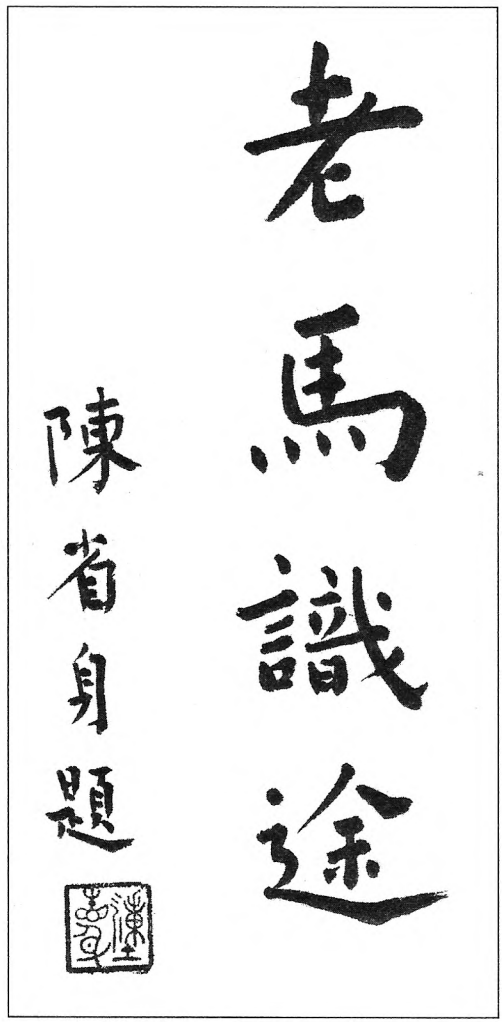
cuentan son los genios, y la única forma de llegar a conocerlos es el contacto directo con su obra. Desde entonces, siempre he defendido una historia de las matemáticas centrada en la lectura de los clásicos, y no en el aprendizaje memorístico de fechas que no importan a nadie.

LÉVI-STRAUSS: Al acercarse a la obra de los grandes matemáticos del pasado, ¿no les molestaba que no fueran tan rigurosos como ustedes?

WEIL: Ése era, en efecto, el gran peligro al que nos enfrentábamos; supongo que no siempre supimos guardar las distancias. Yo tuve el privilegio de aprender historia de Max Dehn, una de las dos personas que en mi vida me han hecho pensar en Sócrates. Este maestro extraordinario, que consideraba que las matemáticas eran sólo uno de los muchos espejos en los que se refleja la verdad —aunque tal vez de forma más nítida que en otros— organizaba un seminario en la Universidad de Fráncfurt con el objetivo nada pretencioso de leer los grandes textos desde la óptica del autor, sin pedir a los matemáticas del pasado lo que sólo el formalismo actual podía ofrecer. Ése es el programa que yo seguí después en mi libro sobre la historia de la teoría de números: mostrar a los matemáticos en el taller para que los lectores pudiesen ver cómo pensaban desde los babilonios de tiempos de Hammurabi que grabaron una lista de ternas pitagóricas en la tablilla Plimpton hasta el Legendre del *Essai sur la théorie des nombres*...

LÉVI-STRAUSS: ¿Ése es el libro que se abre con un caligrama chino?

WEIL: ¡El mismo! Le pedí a mi colega el matemático Shiing-Shen Chern que copiara con su bellísima caligrafía el proverbio chino «El viejo caballo conoce el camino»; por eso en la página siguiente aparece la foto del bajorrelieve de la tumba del emperador Taizong, que representa un caballo. Pensé que resumía bien mi decisión de centrarme en la historia de las matemáticas cuando la investigación activa se me fue haciendo cada vez más difícil a causa de la edad. No puede imaginarse, señor Lévi-Strauss, a cuántos matemáticos he visto deprimidos en sus últimos años porque sus mentes ya no tenían la rapidez de los viejos tiempos; yo no quería que eso me pasara, así que me reconvertí en historiador. Hablo de mi vejez. El mito que asocia juventud y matemáticas tiene sólo una parte de verdad: es cierto que ha habido matemáticos que, pese a morir muy jóvenes, siempre serán recordados por sus descubrimientos, pero poner fecha al fin de la creatividad es arbitrario. Hardy menciona los treinta y cinco años en su *Apología de un matemático*: ¿no será porque ésa fue la edad en la que él creyó que ya nunca podría demostrar nuevos teoremas? Sin ir más lejos, yo mismo hice lo mejor de mi obra pasados los treinta y cinco.



Proverbio chino «El viejo caballo conoce el camino».

LÉVI-STRAUSS: Sin embargo, la edad de «jubilación» de los miembros de Bourbaki estaba perfectamente establecida.

WEIL: ¡Y era yo quien me encargaba de que se respetase! No sé en qué momento decidimos que nadie podría superar los cincuenta años. Una de las claves del triunfo de Bourbaki fue precisamente ese relevo generacional: los mejores estudiantes de cada promoción participaban en nuestras reuniones como «cobayas», y muchos terminaban incorporándose al grupo. Había una diferencia importantísima:

mientras nosotros nos habíamos educado en las matemáticas antiguas, ellos habían sido los primeros en aprender el nuevo punto de vista; eran nuestros alumnos. Creo que las matemáticas francesas de la segunda mitad del siglo veinte no habrían tenido tanto éxito sin esa constelación de estudiantes que trabajaban en los mismos temas de los libros en fase de redacción.

LÉVI-STRAUSS: Lo que quizá no esperaban es que el propio Bourbaki moriría a los cincuenta años...

WEIL: En realidad no es tan sorprendente, señor Lévi-Strauss. La visión que nosotros defendíamos se adapta mucho mejor a las disciplinas bien asentadas, a las que el tiempo ha puesto a prueba, que a aquellas que todavía se están desarrollando. Aunque puede darse una definición formal de estructura, lo mejor para que me entienda es que le presente una metáfora arquitectónica; de hecho, uno de los textos más conocidos de Bourbaki se titula «La arquitectura de las matemáticas». La estructura es la forma en la que se articulan los distintos componentes de un edificio, por medio de elementos de unión que garantizan su estabilidad. Se trata de algo abstracto: la función del arbotante, por ejemplo, no depende del material con el que esté construida la bóveda. En matemáticas se usan las estructuras para estudiar simultáneamente todos los objetos que tienen las mismas propiedades: no cuenta su naturaleza, sino las relaciones entre ellos. Dos objetos de apariencias muy distintas pueden ser encarnaciones del mismo arquetipo: cuando nos hemos liberado de todos los accidentes superfluos, lo que queda es la estructura, algo inerte que ya no podemos transformar. En Bourbaki decidimos basar todas las estructuras en la teoría de conjuntos, pero puede que haya llegado el momento de replantearse la cuestión. Puede que sea hora, incluso, de pensar si sigue habiendo unas únicas matemáticas.

Capítulo 2

Las estructuras elementales

Como las matemáticas o la música, la etnografía es una de las raras vocaciones auténticas. Se puede descubrir dentro de uno mismo, sin que nadie te la haya enseñado.
C. Lévi-Strauss, *Tristes trópicos*

WEIL: Tengo que confesarle, señor Lévi-Strauss, que lo que más me sorprende es que alguien tan inteligente como usted estudiara filosofía.

LÉVI-STRAUSS: Pecados de juventud, me temo; aunque la abandoné muy pronto para entregarme a la etnología. Es usted el que se ha vuelto filósofo con los años. ¿O tengo que recordarle su artículo *De la metafísica a las matemáticas*?

WEIL: Yo lo llamaría «historia de las ideas». Si hubiera leído el texto, sabría que los matemáticos del dieciocho llamaban «metafísica» a una serie de analogías difusas, que no podían formular con precisión, pero que los orientaban en sus investigaciones. No creo que eso diga mucho a favor de la filosofía.

LÉVI-STRAUSS: Llámelo como quiera, señor Weil. En cualquier caso, lo que me llevó a la filosofía fue una forma de apertura a la variedad del mundo que me había acompañado desde niño. Si hay algo que distinga a las familias judías —los dos lo sabemos— es su veneración por la cultura, una preocupación intensa por la vida intelectual que permanece incluso cuando se han abandonado todas las creencias. Al adagio «comerciantes o rabinos» habría que añadir que un hombre de negocios no quiere que sus hijos lo sucedan al frente de la empresa: no está bien que pasen dos generaciones sin alguien consagrado al estudio entre los seres más cercanos. A la hora de elegir una carrera, tenía demasiados intereses: repartía mi tiempo entre la pintura, la música y las antigüedades. Pero mi padre era pintor, y yo había vivido muy de cerca sus dificultades económicas. Tampoco tenía talento suficiente para la música, aunque me habría gustado ser director de orquesta. Pensé que estudiar filosofía no me obligaría tanto a separarme de mis aficiones como lo habrían hecho otras disciplinas.

WEIL: Olvida la política...

LÉVI-STRAUSS: ¡Desde luego! En esa época yo era muy militante; lo que realmente me gustaba era la política. Cómo me río al recordar que durante mucho tiempo soñé con convertirme en ¡el nuevo filósofo del socialismo! Todo había empezado durante unas vacaciones en las que conocí a Arthur Wauters, que después sería embajador de Bélgica en la URSS. Fue él quien me hizo leer a Marx y quien me puso en contacto con los dirigentes del Partido Obrero Belga, que me enseñaron todas las cooperativas y las casas del pueblo. De vuelta a París, fui poco a poco haciéndome un hueco en la SFIO, la Sección Francesa de la Internacional Obrera: primero en pequeños comités, luego como representante de los jóvenes universitarios socialistas. Hasta llegué a ser candidato por la Sección Francesa de la Internacional Obrera en unas elecciones, pero mi campaña terminó con un accidente pocas horas después de comenzar: íbamos en un Citroën cinco caballos, aún no me había sacado el carné de conducir, y era la primera vez que cogía el volante de un coche. No daba yo muy buen ejemplo...

WEIL: Dé gracias por el accidente, quizá lo hubiesen elegido. Lo que no entiendo es que alguien tan comprometido durante su juventud no firmara más tarde el «manifiesto de los 121» contra la guerra de Argelia.

LÉVI-STRAUSS: A los veinte años, yo mismo habría ido de puerta en puerta recogiendo esas firmas. Recuerdo que, cuando estalló la guerra, andaba inmerso en la escritura de *Tristes trópicos*. Primero firmé una carta, que se publicó en *L'Express* en noviembre de 1955, en la que pedíamos que se creara un comité de acción para la paz en Argelia. Unos años más tarde me pidieron que apoyara lo que luego se llamaría el «manifiesto de los 121», aunque para nombres ya tenían a Sartre y a Simone de Beauvoir, entre otros muchos. Lo que ocurre es que la fama que se buscaba para el manifiesto era, en mi caso, fruto de una serie de trabajos etnológicos, y no hay ritmos más distintos que los de la ciencia y la política. Al analizar los datos de una población indígena, me sentía en la obligación de no escribir una sola palabra que no considerase correcta, o al menos bien fundada. Esta veracidad por encima de todo estaba reñida con los juicios políticos a flor de piel de aquellos años, de modo que creí que la mejor forma de resolver una contradicción que me empezaba a atormentar un poco sería retirarme de la opinión pública.Y usted, ¿qué hizo contra la guerra?

WEIL: ¡Parece mentira que me lo pregunte, señor Lévi-Strauss! ¿No sabe usted la historia? En 1939 yo era oficial de reserva y había decidido desertar si me movilizaban. Ese verano lo pasé con mi mujer Eveline en Finlandia: nos instalamos a orillas de un lago junto a la frontera rusa, y durante el día trabajábamos los dos a bordo de una

barca: yo en un informe para Bourbaki; Eveline, en sus prácticas de taquigrafía. No le extrañará que los hosteleros creyesen que era un espía y que se abriera un dossier a mi nombre en la comisaría de Helsinki. De eso no me enteré hasta que los rusos lanzaron las primeras bombas sobre la capital. Me detuvieron y en el registro encontraron unas sospechosas invitaciones a la boda de la hija de Bourbaki; da vértigo pensar que podrían haberme matado. Según el relato que me haría el matemático Rolf Nevanlinna veinte años después, las cosas ocurrieron de este modo: en una cena a la que él asistía como coronel de reserva, el jefe de la policía se acercó para anunciarle: «Señor, mañana fusilamos a un espía que dice que lo conoce». Al saber que se trataba de mí, Nevanlinna les habría pedido que se limitaran a expulsarme del país.

En la frontera pasé a manos de las autoridades suecas, que luego me repatriarían a Francia para que cumpliese mi condena por deserción en la cárcel de Ruan. Nada hay más favorable para la ciencia abstracta que una estancia en prisión: en la primera carta que escribí a mi familia, sabiendo que la leería todo el mundo, di a entender que me suicidaría si no me proporcionaban los medios de trabajo necesarios. Desde entonces tuve una celda individual, y nunca me faltaron papel y pluma. Creo que a Cartan le daba envidia: una vez me escribió «no todos tenemos la suerte de poder trabajar, como tú, sin que nadie nos moleste». En el verano de 1940 me suspendieron la pena a cambio de la incorporación inmediata a la compañía de Cherbourg, cuya única misión era acercarse todos los días a la estación para cargar obuses. Ya ve que soy, más bien, el soldado que huye. No nos engañemos: nunca he creído en el imperativo categórico. No puede haber una conducta universal, porque cada uno se rige por su *dharma*: igual que el de Gaugin estaba en la pintura, yo encontré el mío en las matemáticas.

LÉVI-STRAUSS: Y yo que pensaba que los matemáticos siempre eran los primeros en apuntarse a una revolución…

WEIL: Lo que es cierto es que, sea cual sea el régimen, el trabajo de los matemáticos es demasiado impenetrable para los profanos como para poder ser criticado desde el exterior: si permanecen unidos, son invulnerables. Entre mis compañeros de Bourbaki, varios tuvieron una participación política muy destacada. Por ejemplo Henri Cartan, que se propuso la ambiciosa tarea de conseguir el perdón entre los franceses y los alemanes después de la Segunda Guerra Mundial; ésa era su obsesión. Ya en 1946 organizaba encuentros conciliadores en Oberwolfach, un pueblecito de la Selva Negra. Sin él no existiría hoy una Sociedad Matemática Europea, de eso puede estar seguro. En cuanto a mi amigo Laurent Schwartz, otro de los miembros de Bourbaki, ¿qué decir aparte de que nunca he conocido a un negociador más

hábil? Lograba mantener su independencia crítica con el poder y, al mismo tiempo, ser tratado con los mayores honores por presidentes de gobiernos de todos los colores. Sus memorias se titulan *Un matemático frente al siglo*. Es una imagen muy modesta: él era el siglo. Fue un personaje clave en la oposición contra la guerra de Vietnam, como lo había sido antes durante el «caso Audin»[1]. Mi hermana, que recibía con los brazos abiertos a cualquiera que se pareciese en algo a un judío comunista disidente, habría estado muy orgullosa de él.

LÉVI-STRAUSS: ¡Cómo ha pasado el tiempo! Durante la guerra de Vietnam, yo ya estaba completamente alejado de la política. Mejor así: no creo que mi tesis de que sin reglas no hay sociedades hubiera sido muy popular entre quienes salían a las calles para gritar «Prohibido prohibir».

WEIL: Tiene razón, nos hemos ido demasiado lejos. No es necesario cuando se tiene la eternidad entera por delante... Tal vez me quiera explicar por qué cambió a Platón por los salvajes.

LÉVI-STRAUSS: La salida natural de los estudios de filosofía era preparar las oposiciones a profesor de instituto. Tras cinco años en la Sorbona, no era con lo que soñaba: estaba harto de la aplicación mecánica de un método que sólo consistía en enfrentar palabras con sonidos similares, como forma y fondo, o esencia y existencia. Daba igual el tema del que se hablara, no había referentes, todo era pura combinatoria. Lo sabíamos muy bien un grupillo de rebeldes que nos entrenábamos aplicando el método a discusiones como la superioridad de los tranvías frente a los autobuses. Sin embargo, las oposiciones representaban un desafío: había que hacer muchas lecturas en muy poco tiempo; era una especie de carrera de obstáculos a través de las distintas doctrinas. Todavía no me explico cómo saqué la plaza, en la misma convocatoria que su hermana, por cierto. Ella quedó séptima, y yo, tercero, lo cual es todavía más inexplicable.

Pasé mi primer año de profesor en un instituto en Mont-de-Marsan, la capital de las Landas. Tengo que reconocer que fui muy feliz: recién casado, preparaba las clases sobre la marcha, y todo era nuevo, estimulante; pero, al año siguiente, me horrorizó la idea de repetir el mismo curso durante el resto de mi vida. Por fortuna o por desgracia —no estoy seguro— mi inteligencia es neolítica: después de desbrozar un campo y cultivarlo, lo que me apetece es prenderle fuego y buscar

1 Maurice Audin realizaba su doctorado en matemáticas en la Universidad de Argel cuando fue secuestrado, torturado y asesinado por las autoridades francesas en respuesta a su militancia anticolonialista. Mientras estaba desaparecido se organizó en París una lectura de tesis *in absentia*.

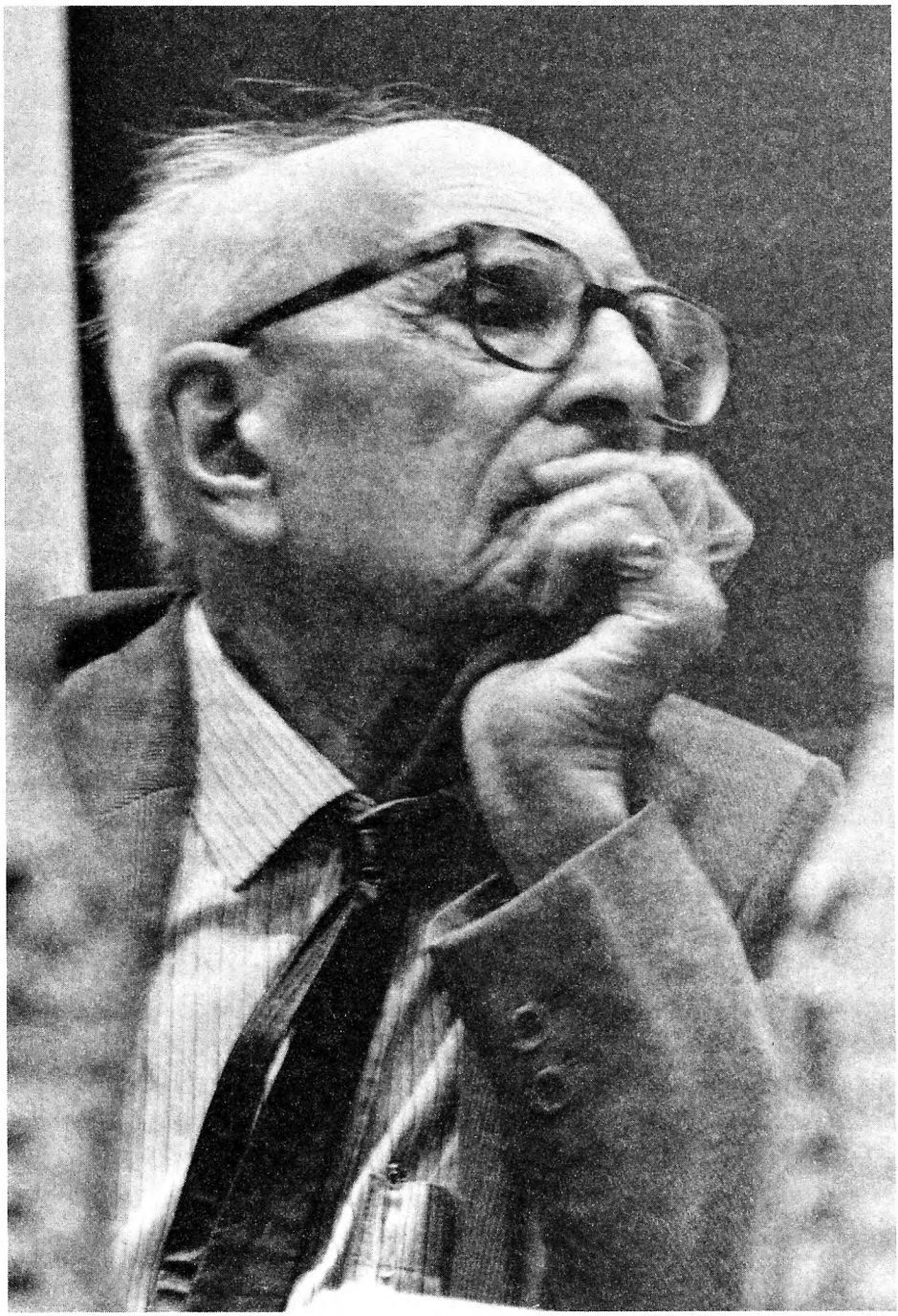
otros nuevos; me cuesta mucho fijar dos veces la mirada sobre el mismo objeto. Es el terror de la repetición. A esto se añadía la certeza de que mi destino estaba ya completamente determinado: después del matrimonio, vendrían los hijos, y poco a poco la familia entera se iría trasladando a un barrio residencial a las afueras de París. ¡No! Fue justo entonces cuando recibí la llamada salvadora: un domingo del otoño de 1934, a las nueve de la mañana, lo recuerdo como si fuera ayer. Era el director de la Escuela Normal Superior, Célestin Bouglé, para proponerme un puesto de profesor de Sociología en la Universidad de São Paolo. Necesitaban la respuesta antes de las doce.

WEIL: Pero usted no era normalista.

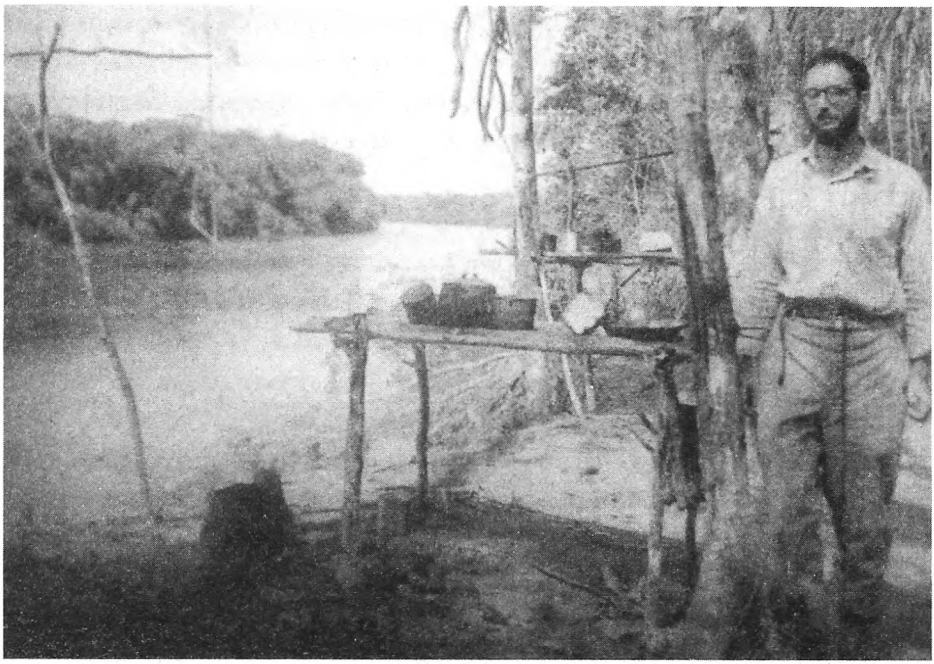
LÉVI-STRAUSS: A mí también me sorprendió que me llamara. Yo me había encargado de informar a varios amigos de mi disposición para ir a enseñar al extranjero, algo que entonces no estaba tan de moda como ahora. A los profesores no les gustaba demasiado viajar, supongo que no había mucha gente en condiciones de afrontar el encargo. Poco importaba que no fuese uno de los suyos. De hecho, señor Weil, yo había querido en un principio entrar en la Escuela Normal, pero no me sentía a la altura de mis compañeros de las clases preparatorias, a los que veía como auténticos monstruos de aprobar exámenes. Como se me daba mal el griego, pensé que podría evitarlo eligiendo una asignatura de ciencias. Resultaron ser las matemáticas, y el remedio no hizo más que empeorar las cosas. Pasado un año, decidí dejarlo y matricularme en la universidad. Mi profesor pensaba que yo no estaba destinado a la filosofía, sino a algo que caminase junto a ella. No estaba del todo equivocado. En su opinión era el derecho, pero ¡resultó ser la etnografía!

WEIL: Que en esa época reclutaba filósofos...

LÉVI-STRAUSS: Eso es. La etnología no tenía casi representación en las universidades francesas, así que por fuerza los pocos que se dedicaban a ella habían recibido otra formación. Muchos eran autodidactas como yo. Bien es cierto que se podían encontrar antecedentes: Rabelais y Montaigne, por ejemplo, recurren a una etnografía en ciernes para analizar las creencias e instituciones de su época. Pero hay que esperar todavía hasta finales del dieciocho para que se funde la Sociedad de Observadores del Hombre, que congregaba a naturalistas siempre dispuestos a emprender largos viajes para recoger mitos y costumbres de otros pueblos como si fueran especies animales y vegetales. Faltaba un método, la «observación participante», que no introdujo la escuela británica hasta principios del siglo veinte. Lo que despertó mi curiosidad fue la lectura de un viejo libro del antropólogo Robert H. Lowie, que había vivido entre varias tribus indias de Norteamérica y que años después me



Claude Lévi-Strauss.



Dos escenas de Lévi-Strauss durante sus expediciones por el Brasil.

ayudaría a exiliarme a Nueva York. Hasta entonces mi gusto por la aventura había sido más bien discreto: me gustaba ir de acampada, hacía algo de alpinismo, incluso trataba de convertir la ciudad en escenario de pequeñas aventuras junto a un grupo de amigos. Elegíamos un punto de París y una dirección, y caminábamos siempre en línea recta, sin desviarnos. Nuestro empeño nos llevaba a vivir episodios de lo más curiosos, pero no dejaban de ser anécdotas sin importancia. Con la lectura de *La sociedad primitiva,* el libro de Lowie, sentí de pronto la necesidad de salir a conocer el ancho mundo. Si me hubiesen propuesto enviarme a Nueva Caledonia, también habría aceptado sin pestañear.

WEIL: Nadie lo diría al leer el comienzo de *Tristes trópicos*: «Odio los viajes y a los exploradores». ¡Menos mal que le gustaba la aventura, señor Lévi-Strauss!

LÉVI-STRAUSS: Hay algo que tiene que tener en cuenta siempre que hablemos sobre *Tristes trópicos*, señor Weil. Y es que me resistí durante años a escribirlo: piense que mi última expedición por el Brasil fue en 1939 y que no empecé a trabajar en el libro hasta 1954. A la vuelta del viaje, en el poco tiempo que tenía para reincorporarme a la vida en Francia antes de la movilización para la guerra, había empezado a escribir una novela con el mismo título, pero la dejé a las cincuenta páginas, al darme cuenta de que era una mala imitación de Conrad. No tengo ni la imaginación ni la paciencia necesarias para inventar el perfil de un personaje con todas sus luces y sus sombras. Yo quería ser científico, no escritor. Quince años después viví una época de crisis, en la que me sentía un poco aislado tanto de la vida universitaria como socialmente. No encontraba mi lugar. Me acordé de aquellos capítulos y quise retomarlos a modo de desahogo, aunque luego lo único que sobrevivió fue la puesta de sol del final de «Hojas de ruta». Escribía lo que se me pasaba por la cabeza tal y como se me pasaba por la cabeza. Fueron unos novillos fabulosos que duraron cuatro meses.

WEIL: Quizá por eso Gallimard rechazó el libro...

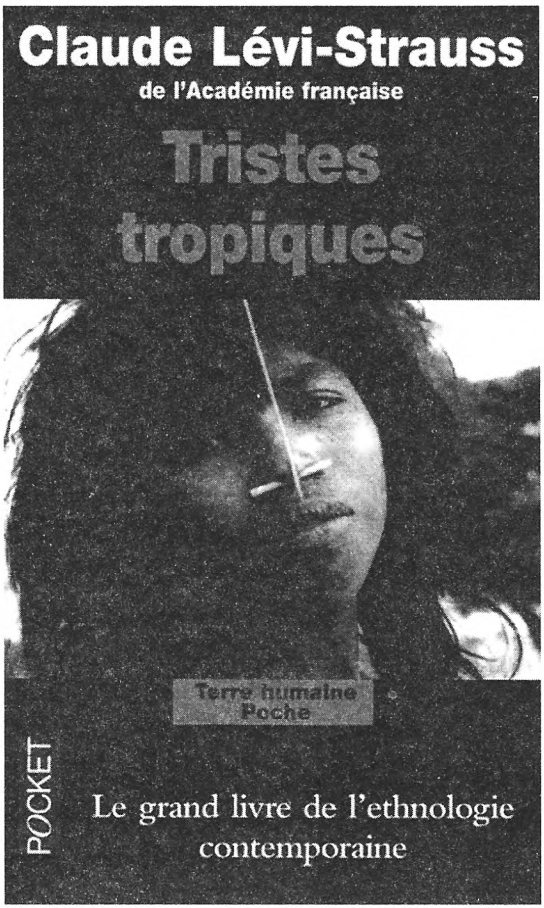
LÉVI-STRAUSS: Lo que en realidad rechazaron fue un proyecto que les envié antes de escribirlo. Les parecía que mi pensamiento no era lo bastante maduro. Creo que se arrepintieron enseguida, cuando al poco de publicarse *Tristes trópicos* en la editorial Plon, la Academia Goncourt emitió un comunicado lamentando que no fuese una novela, porque ¡se habría llevado el premio! De todas formas, lo que intentaba explicar es que me permití allí libertades que ni siquiera se me habrían ocurrido al abordar mis investigaciones. Eso confiere al libro una verdad distinta. Y una de esas licencias fue poder decir, sin sentimiento de culpa alguno, que odiaba los viajes y a los exploradores. Había en la escena cultural de la posguerra una ten-

dencia muy generalizada —supongo que se ha mantenido con los años— a valorar más los elementos exóticos de la etnología que sus conclusiones, cuando para mí emplear semanas de ruta, envuelto en peligros y fatigas, en descubrir un nuevo mito o en modificar ligeramente las reglas de matrimonio conocidas era, con creces, la parte más desagradable de mi profesión.

Los trópicos no sólo eran tristes por el efecto devastador del hombre occidental, sino también porque vivir junto a los indios no bastaba para entender su cultura. Uno podía estar despierto de sol a sol, tratando de pasar desapercibido y de mostrar una indiscreción casi humillante mientras tomaba notas, pero de nada servía si los indios le habían declarado una guerra silenciosa, como me ocurrió en Campos Novos. Es un alivio pensar que el mejor trabajador de campo que haya existido nunca, Malinowski, un hombre de una sensibilidad extraordinaria, anotaba pensamientos similares a los míos en los diarios que se publicaron tras su muerte. Eso no lo supe hasta varios años después. Sobre el terreno, me consolaba pensando que estaba recogiendo experiencias humanas desconocidas hasta la fecha y que pronto desaparecerían para siempre. Como patrimonio de la humanidad su valor era irreemplazable, pero ¿valía la pena todo el esfuerzo?

WEIL: ¿Acaso no es esa constancia un signo del arte? Flaubert llegó a escribir *La educación sentimental* veintitrés veces. Siendo uno de sus primeros textos de juventud, lo reescribe aún antes de su muerte. Buscaba la página perfecta, en la que todas las vidas se reconociesen. Estoy seguro de que las diferencias entre algunas versiones son casi imperceptibles. Al hablar de arte, por supuesto incluyo también las matemáticas. Cuántas horas perdidas en la demostración de un lema que es sólo el primer paso en un camino incierto, que tal vez no conduzca a ningún sitio. Y, sin embargo, un solo momento de exaltación lúcida hace que el esfuerzo entero cobre sentido. Es aquí donde tengo que citar a Carl Friedrich Gauss, el príncipe de los matemáticos, que en carta al italiano Guglielmo Libri escribe «*procreare jucumdum sed parturire molestum*», es decir, «engendrar es placentero, pero parir es penoso».

LÉVI-STRAUSS: Para mí la imagen misma de la búsqueda científica, con todas las dificultades que opone, con todas las alegrías que ofrece, sigue siendo una excursión a una meseta del Languedoc durante mi juventud, en la que me lancé a la persecución de la línea de contacto entre dos capas geológicas. No eran los movimientos incoherentes que un montañero ajeno a mis intenciones habría imaginado al observarme. Cuando se sabe interpretar, la lectura de un paisaje puede ser tan provechosa como la mejor literatura.



Portada de la edición de bolsillo de Tristes trópicos.

WEIL: A veces pienso en el proceso de creación como en una larga cabalgada a través del viento y de la noche, *«durch Nacht und Wind»*, más rápida a medida que se acerca el objetivo, igual que aquella con la que Schubert puso música al poema «El rey de los elfos». Pero no hay que olvidar que, en ocasiones, sólo el niño ve al rey de los elfos, y la marcha del caballo se aminora hasta casi desaparecer aunque no hayamos salido aún del bosque.

LÉVI-STRAUSS: ¿Quiere decir que incluso a un genio como usted se le resisten de vez en cuando los problemas?

WEIL: Le voy a contar algo, señor Lévi-Strauss. En mi tesis doctoral había desarrollado una idea de Henri Poincaré que generalizaba un resultado de Louis

Mordell. Consistía en estudiar las soluciones racionales de ecuaciones de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$, que los matemáticos llamamos *curvas elípticas*. Partiendo de dos soluciones, Poincaré había encontrado el modo de obtener una tercera, pero eso se lo explicaré en otro momento; no quiero que nos perdamos en los detalles. Lo que importa es que Mordell había demostrado que este procedimiento permitía recuperar todas las soluciones empezando con un número finito. Yo extendí su resultado a curvas más generales, en las que el polinomio que interviene puede ser de cualquier grado. No fue fácil, porque ninguna de las técnicas de la geometría algebraica moderna existía entonces. Me apresuré a contárselo a Hadamard y, satisfecho con el trabajo, cometí la imprudencia de decirle que confiaba en que mis métodos me permitirían asimismo demostrar una conjetura que Mordell enunciaba en su artículo.

La reacción de Hadarmard fue la que cualquiera que lo hubiese conocido habría esperado de él. Se acercó y me dijo: «Señor Weil, muchos de nosotros lo tenemos en alta estima. A la hora de presentar su tesis, no puede quedarse a medio camino, es algo que se debe a usted mismo. Lo que me cuenta indica que no ha madurado suficientemente sus ideas». Igual que los de Gallimard. Siguiendo su consejo —por llamarlo de algún modo—, centré toda mi atención en la conjetura de Mordell. Dio igual, porque nada salía como yo esperaba, así que lo acabé dejando. *La aritmética de las curvas algebraicas* —así había titulado mi tesis— se publicó en 1928. ¿Sabe cuántos años hicieron falta aún para resolver el problema? ¡Más de cincuenta! Y para hacerlo fueron cruciales técnicas que no se introdujeron hasta principios de los setenta...

LÉVI-STRAUSS: Le confieso que no lo he entendido todo, señor Weil; espero que me lo explique con calma otro día. En cualquier caso, en la anécdota se reconoce a Hadamard en estado puro. Seguro que se acuerda de lo que me contestó a mí cuando le pedí ayuda para *Las estructuras elementales del parentesco*: «Las matemáticas sólo conocen cuatro operaciones. No tengo constancia de que el matrimonio sea una de ellas». Menos mal que lo encontré a usted...

WEIL: Menos mal, sí. Vaya a saber, si no, a quién me habrían asignado como compañero de estudios. Volviendo a *Tristes trópicos*, no se le puede negar su talento a la hora de elegir los títulos.

LÉVI-STRAUSS: No sé si mis traductores estarán de acuerdo. Son títulos que sólo funcionan en las lenguas románicas. Cada vez que traducían mis libros al inglés había que romper alguno de los juegos de palabras: *Tristes trópicos* se llama *A World on the Wane*, algo así como *Un mundo en extinción*. Lo que se ha extinguido es esa mú-

sica que tanto me sedujo cuando planeé escribir la novela que iba a titularse así. También la flor desaparece al traducir *El pensamiento salvaje*: un título como *The Savage Mind* pierde una polisemia que para mí era fundamental, porque lo que en ese libro sostenía es que la ciencia de lo concreto, ese pensamiento sin domesticar de los salvajes, organiza el mundo a partir de especies vegetales. Cada título tiene una historia, aunque ninguna me resulta tan graciosa como la de *La mirada distante*, una recopilación de artículos que publiqué en 1983. Me había encontrado con la frase de Jean-Baptiste Massillon, un predicador francés del diecisiete, «El mundo visto desde cerca no se sostiene contra él mismo, pero, al alejarse, impone». Me dije que era un epígrafe fantástico para un libro de etnología, cuyo título sólo podría ser *La mirada distante*. Sin embargo, gracias a uno de mis colegas, experto en literatura religiosa, supe que la cita significa exactamente lo contrario de lo que yo quería hacerle decir al texto. En la lengua de la época, «imponer» significaba engañar, confundir a los sentidos. Tuve que renunciar a la fórmula, pero me quedé con el título, que sigue siendo uno de los que más me gustan.

WEIL: Sin la experiencia del Brasil ninguno de esos títulos existiría.

LÉVI-STRAUSS: ¡Ninguno! Recuerdo que Célestin Bouglé me había dicho que los arrabales de São Paolo estaban llenos de indios a los que podría ir a observar en mi tiempo libre; una especie de etnología de fin de semana. Cuando se lo conté al embajador en París, casi le entra un ataque de risa: según él, los últimos indios del Brasil habían sido exterminados hacía varios lustros. No tuvo problema en explicarme cómo los colonos portugueses los ataban a sus cañones antes de disparar. Fue una decepción, porque en los momentos previos a mi partida aún imaginaba los países del Trópico como la antítesis perfecta del mundo civilizado: tan fuerte era mi convicción que no creía ni siquiera que pudieran existir especies comunes a ambos rincones del planeta. Lo cierto es que los dos se equivocaban: en São Paolo no quedaban poblaciones indígenas, pero podían encontrarse a unos días de ruta. Eso no me impidió llevar a cabo pequeños trabajos de etnografía urbana, que era especialmente rica en una ciudad donde, en espacio de unos cientos de metros, el estilo colonial ibérico convivía con paisajes más propios del Chicago de las puertas de la modernidad. Por ejemplo, sorprendí a mis estudiantes encargándoles que reconstruyeran la historia de la calle en que vivían. Mi primer contacto con los indios no se produjo hasta las vacaciones de verano: en los cuatro meses en los que los demás profesores volvían a Francia, mi mujer y yo montamos la primera expedición.

WEIL: En busca de los indios kaingang, que no eran tan salvajes como ustedes habrían querido...

LÉVI-STRAUSS: Fue sólo el bautizo. Los kaingang habían tenido ya algunos contactos con un gobierno que intentaba mostrarles las maravillas de la civilización: les habían regalado camas para que durmieran, y ellos las quemaron en un enorme fuego. De algún modo, mis diferentes expediciones significaban una evolución hacia lo desconocido, una salida de mi tiempo para entrar en otro tiempo: los kaingang, los caduveo, los bororo, los nambikwara, los mundé, los tupi-kawahib, cada pueblo era más primitivo que el anterior. Los bororo se expresaban de forma muy viva a través del arte de la pluma, y su organización social era de una sutileza extraordinaria, pero también ellos habían sido tocados por la civilización. En cambio, vivir durante unas semanas con los indios nambikwara fue una experiencia que me desbordó por completo: lo anotaba todo en el caos de unos cuadernos impregnados del fortísimo olor a la creosota con la que los protegía de los insectos. Una nueva idea me venía cuando sólo había tenido tiempo de esbozar la anterior. Trataba en vano de retener hasta el mínimo detalle de la lengua, la música o las técnicas de pesca; incluso me permitieron asistir a un parto. Creo que nunca como entonces respondía mejor a la imagen que de mí se había hecho un colega durante el viaje en barco que nos llevó hasta el Brasil: «un hombre con los ojos sin duda abiertos, pero con todo su ser cerrado, como si tuviera miedo de perder lo que acababa de grabar». Sin embargo, no me interesaban tanto los datos como comprender lo que podía ser una sociedad humana reducida a su mínima expresión. Con los nambikwara, la pregunta que Rousseau se planteaba en *El origen de la desigualdad entre los hombres* o en *El contrato social* podía estudiarse desde un punto de vista experimental: ¿qué es una sociedad mínima?

WEIL: Me va a permitir una analogía que puede resultar arriesgada. Es lo mismo que nosotros quisimos hacer en Bourbaki. Las tres primeras décadas del siglo veinte habían conocido extraordinarios avances en la teoría de conjuntos, la topología o el álgebra, pero no se había agotado la riqueza de los objetos a los que cada una de estas disciplinas atendía. Los teoremas, por ejemplo, no se enunciaban en la mayor generalidad posible, así que nos lanzamos a la tarea ciclópea de encontrar las estructuras mínimas que los hacían válidos.

LÉVI-STRAUSS: A mí entonces lo que me faltaba era el método. Tiene que pensar que mi trayectoria fue completamente atípica: por norma general, los estudiantes reciben cientos de horas de clase antes de su primer contacto con el terreno; conocen la literatura científica, pero no tienen el oficio del trabajo de campo. Cuando yo empecé a comprender algo de los aspectos teóricos, llevaba ya cinco años de pantanos y de aguerridos indios a mis espaldas. De repente todo encajaba.

Fueron meses febriles, en los que no hacía otra cosa que leer, desde muy pronto hasta la hora en que cerraban la New York Public Library.

WEIL: Nueva York era una fiesta...

LÉVI-STRAUSS: Los años que pasé allí se cuentan sin duda entre los más felices de mi vida. Sabíamos que Europa entera se desmoronaba, pero la vitalidad del exilio neoyorquino conseguía que nos olvidáramos de ese dolor. A veces «el placer es máscara de la memoria».Vivía en un apartamento diminuto en la calle Once, en el que no había más que una cama, dos mesas y dos sillas. Eso y mis baúles del Brasil, a los que se fueron añadiendo tótems de los indios de la Columbia Británica y otras obras de arte que compraba en los anticuarios de la Tercera Avenida. Cuando venía algún antropólogo a trabajar conmigo, le cedía la cama y recuperaba mis viejas costumbres de explorador, durmiendo por el suelo en un saco de dormir. Unos pisos más arriba vivía Claude Shannon, el padre de la teoría de la información, aunque eso no lo descubrí hasta años después. Una vecina belga me había dicho que era un hombre que intentaba construir un cerebro artificial, pero no le hice ningún caso; quién sabe qué dirían sobre mí. ¿Se da cuenta de lo poco que tenían que ver estas pobres condiciones materiales con las que luego disfrutaría en mi apartamento de París? Pero tampoco la explosión babélica de la ciudad se parecía a nada conocido.

No fue fácil escapar a Nueva York: con las leyes antisemitas del gobierno de Vichy había perdido mi lugar en Francia. Intenté en primer lugar volver al Brasil, pero en el preciso instante en que el embajador iba a sellarme el pasaporte, uno de sus ceñudos consejeros irrumpió en la sala para comunicarle que ese poder le había sido retirado; parecía una película de espías. Por suerte, la Fundación Rockefeller pudo invitarme a dar clase en la New York School for Social Research dentro de su programa de rescate de pensadores europeos. Partí a bordo del Capitaine-Paul-Lemarle una mañana de febrero de 1941. Trescientas cincuenta personas nos hacinábamos en un pequeño vapor con sólo dos camarotes. Pero no quisiera seguir por esa vía: quejarme tras el horror del Holocausto me parece vil, sé que usted me entiende. Además, en ese barco ocurrieron cosas muy interesantes: había, por ejemplo, un extraño hombre de negocios tunecino que llevaba un Degas en la maleta. También estaba Victor Serge, el anarquista, que había escrito dos años antes *Si es medianoche en el siglo*...

WEIL: Me pregunto por qué utilizan el condicional. También lo hará luego Primo Levi en *Si esto es un hombre*. ¿Es acaso el tiempo que mejor encaja con la incredulidad ante la barbarie?

LÉVI-STRAUSS: Tal vez, nunca lo había visto así. Victor Serge y yo, en cualquier caso, no tuvimos demasiada relación. El gran descubrimiento de aquella travesía fue André Breton, que viajaba con su hija y su mujer. No se me olvidará nunca el momento en el que le oí dar su nombre al bajar del barco en un puerto de Marruecos. Yo admiraba mucho a los surrealistas: obras como *El campesino de París* o el propio *Manifiesto* estaban entre mis lecturas de cabecera. Había intentado incluso la escritura automática. Pronto nos hicimos amigos y cuando, ¡tres meses después!, al fin pude instalarme en Nueva York, mantuvimos el contacto. Gracias a los surrealistas empecé a ver con otros ojos toda una serie de objetos que hasta entonces me parecían indignos del arte.

WEIL: Ahora que habla de escritura mecánica, me apetece contarle que durante un tiempo —pero sería más adelante—, los miembros de Bourbaki coqueteamos con el Oulipo, el «Taller de Literatura Potencial» que habían fundado François Le Lionnais y Raymond Queneau hacia 1960. Era un grupo de escritores y de matemáticos que buscaban formas y estructuras nuevas para la literatura. Imaginaban las palabras como puntos, las frases, como líneas, y los párrafos, igual que planos. A partir de ahí se preguntaban: ¿de qué nos servirá saber que, dada una frase y una palabra que no aparezca en ella, se puede formar siempre otra frase que la contenga sin compartir ninguna palabra con aquella de partida? Componían sus poemas con el diccionario en la mano: empezando por un texto conocido, sustituían cada palabra por la entrada siguiente. Por ejemplo, la «llama de amor» se convertía en «llamada dea amoragar». Salían a la luz las aliteraciones recónditas de la lengua. Queneau aún pudo ir más lejos: escribió diez sonetos cuyos versos podían intercambiarse al antojo del lector. Y eso daba exactamente *¡Cien billones de poemas!*

LÉVI-STRAUSS: Hemos hablado varias veces de «estructura», pero por aquel entonces yo aún no era estructuralista. O, si lo era, aún no me había enterado. Sí que recuerdo un momento de lucidez a finales de 1939, aunque no estoy seguro de que no sea en verdad una elaboración a posteriori: la memoria se parece a una caja llena de viejas fotos. Como soldado, había tenido que encargarme de la censura de los telegramas, pero era tal el tedio que me producía ese trabajo, que pedí que me asignaran otra tarea; la que fuese. No sé cómo terminaron soltándome, junto a tres o cuatro compañeros, al borde de la Línea Maginot, en la que pasamos todo el invierno a la espera de una posible llegada de los ingleses que nunca se produjo. En uno de mis paseos —era lo único que hacíamos—, me quedé mirando un diente de león. Que fuera un diente de león y no una rosa me hace pensar que la historia no es completamente inventada. El caso es que estaba embobado ante

un humilde diente de león, y de pronto me di cuenta de que todo cuanto podía decirse sobre él era por comparación u oposición con elementos exteriores. Si nos olvidábamos del resto, sólo cabía pensar que el diente de león era. Había un conjunto de relaciones que formaban una estructura en lo real, sin la que probablemente nada existiría.

WEIL: La estructura que Jakobson había encontrado en la lingüística...

LÉVI-STRAUSS: Conocer a Roman Jakobson fue un viaje sin retorno, una de esas experiencias de las que nadie sale indemne. Llegamos a la vez a Nueva York y nos encontramos en la *École libre des hautes études*, la universidad francesa en el exilio. Si mi partida la precipitaron las leyes del gobierno de Vichy, en el caso de Jakobson fue la Revolución de Octubre. No le gustaba hablar de eso —alguien ha escrito que había en él «una nobleza de la ciencia que no debían perturbar las contingencias biográficas»—, pero sé que el devenir político lo empujó a acelerar su formación para estar intelectualmente armado. Tan pronto como pudo, partió a Checoslovaquia como intérprete de la Cruz Roja y allí fundó el Círculo de Praga en compañía del príncipe ruso Nikolai Trubetskoy. Juntos sentaron las bases de la fonología moderna, cuyo gran logro fue transformar lo que es continuo por naturaleza —cada hablante pronuncia de distinta manera los sonidos— en unidades discretas de fonemas reconocibles, que forman un conjunto cerrado. ¡Imagínese si se pudiera hacer lo mismo con la semántica!

Durante varios cursos, Jakobson asistía a mis clases; yo, a las suyas, y después seguíamos charlando largas horas en alguno de los cafés de los alrededores. Tenía esa pasión griega por la conversación en el banquete. Era un hombre que prefería el diálogo al monólogo, incluso en lo científico, lo que dio lugar a muchas colaboraciones. Nosotros dos, por ejemplo, escribimos juntos un comentario del poema *Los gatos* en el que Baudelaire enfrenta la imagen del «amante fervoroso» al «sabio austero», a los que sólo une su amor por los gatos. Creo que es la única vez que una revista de antropología ha publicado un análisis de un poema francés del diecinueve. Pero más que diálogo, yo diría contagio. Jakobson tenía el don de apasionar a sus interlocutores, a los que trataba siempre de tú a tú, con cualquier cosa que les explicara. No importaba que el tema de aquel día fuera el arte de los formalistas rusos o las relaciones entre el código genético y el código lingüístico. Con él uno siempre se sentía, como dijo alguna vez Isaiah Berlin, en una curva ascendente: más sensible, más interesante de lo que en realidad era. Me pregunto dónde andará Jakobson. ¡Habría que incorporarlo al grupo!

WEIL: Es posible que nos peleásemos por ver quién sabe más lenguas.

LÉVI-STRAUSS: Lo tendría usted difícil, señor Weil, él dominaba seis o siete. Yo creo que se divertirían juntos. De hecho fue Jakobson quien me animó a escribir *Las estructuras elementales del parentesco* al terminar un curso que yo había dedicado al tema en el invierno de 1942. Fue entonces cuando me propuse hacer con la etnología lo mismo que él y sus colaboradores habían hecho con la lingüística. Pero me parece que, para poder seguir hablando, va a tener usted que recordarme de qué trata esa teoría de grupos que tan bien conoce.

Capítulo 3

Una historia de grupos

Las matemáticas son sólo
una historia de grupos.
H. Poincaré

WEIL: Tome asiento, señor Lévi-Strauss.

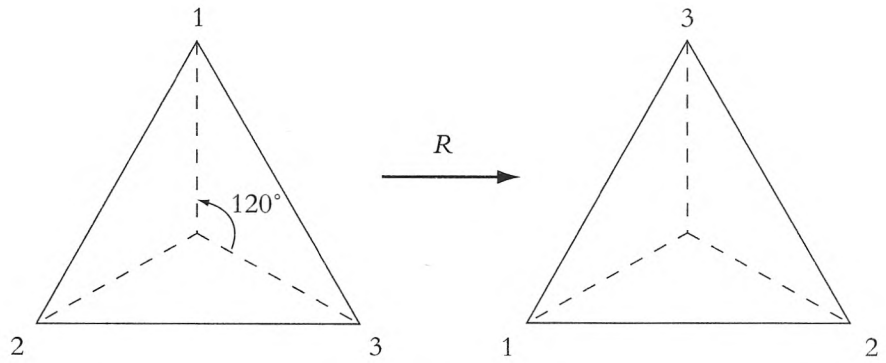
LÉVI-STRAUSS: ¿Me va a explicar qué es un grupo?

WEIL: Lo intentaré. Quisiera empezar por un ejemplo muy sencillo, en el que, sin embargo, veremos cómo van apareciendo gran parte de las construcciones básicas de la teoría de grupos. Le voy a pedir que imagine un triángulo equilátero; supongo que recuerda que es el que tiene los tres lados iguales. Me interesan los movimientos que no cambian la posición de la figura, de modo que, si alguien viese los triángulos antes y después de efectuar una de estas transformaciones, sería incapaz de distinguirlos; por ese motivo se dice que lo *dejan invariante.*

LÉVI-STRAUSS: Perdone que le interrumpa, señor Weil; hay algo que no entiendo: si la figura no cambia al aplicar esas transformaciones, ¿cómo se puede saber si lo hemos hecho o no? ¡Los triángulos no tienen memoria!

WEIL: Buena pregunta; es lo que iba a explicarle justo ahora. El truco consiste en numerar los vértices. Aunque el triángulo siga siendo el mismo, las operaciones cambiarán la posición de cada número y así dejarán «huellas» para que nosotros las interpretemos; es una convención. El primer movimiento que vamos a considerar es un giro de 120° en el sentido contrario a las agujas del reloj con respecto al centro del triángulo.

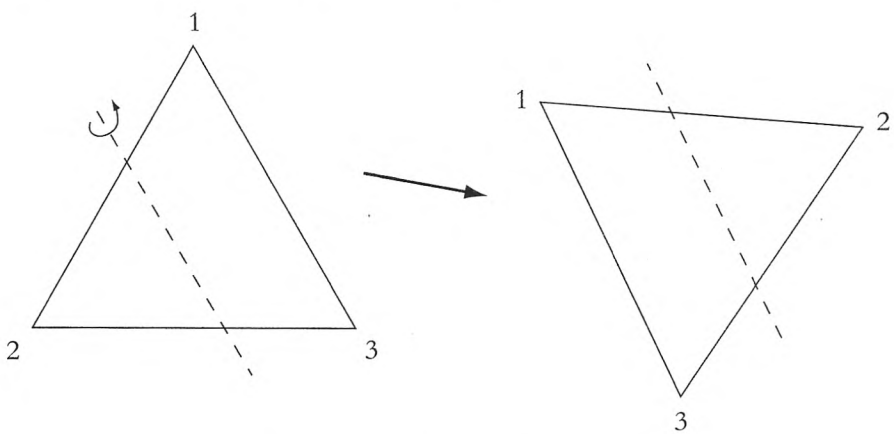
Voy a llamar R a esta operación. Como dice, la diferencia entre haber aplicado R o no es imperceptible, pero si decidiera, por ejemplo, ordenar los vértices del triángulo empezando por el de arriba y siguiendo en sentido antihorario, entonces podría decir que R transforma el primer vértice en el tercero, el segundo, en el primero, y el tercero, en el segundo. Lo más fácil es que hagamos un dibujo:



Resultado de aplicar el giro R.

¿Lo ve? El triángulo no cambia, pero 3-1-2 ha sustituido a la numeración 1-2-3.

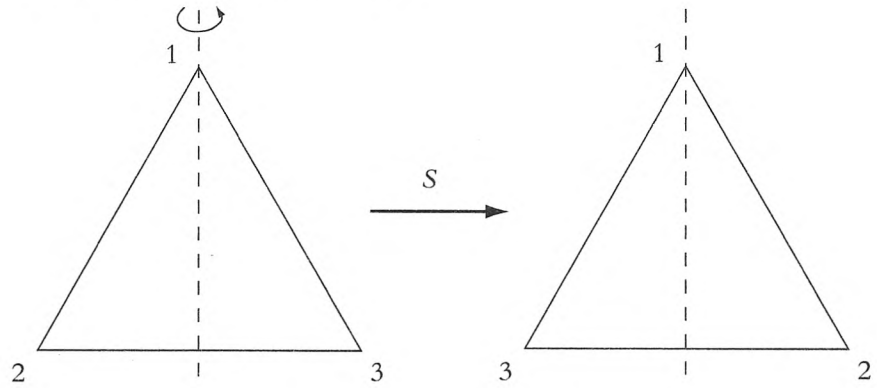
R no es la única operación que deja la figura invariante. Piense ahora en una simetría con respecto a alguno de los ejes que atraviesan el triángulo. Para que sea una de las transformaciones que buscamos hay que elegir bien el eje, pues hay simetrías que cambian la posición de la figura:



Simetría que no deja el triángulo invariante.

El triángulo sólo queda invariante cuando el eje de la simetría pasa por el centro y por uno de los vértices, pongamos por el primero. Voy a llamar *S* a este movimiento. Si antes teníamos *R* de rotación, ahora toca *S* de simetría. Con el mismo esquema que nos ha permitido entender el giro *R* podemos ver cómo varían los vértices al aplicar la operación *S*. El primero queda fijo porque está sobre el eje, y

S intercambia los otros dos: el segundo se transforma en el tercero, y viceversa. Así, el orden 1-2-3 se ha convertido en 1-3-2:

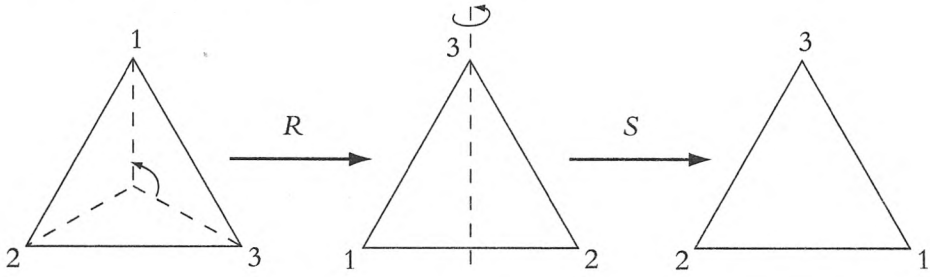


Resultado de aplicar la simetría S.

Ahora que disponemos de las operaciones *R* y *S*, ¿qué haría usted con ellas?

LÉVI-STRAUSS: Vaya pregunta... No lo sé... ¿Aplicar primero una y después la otra?

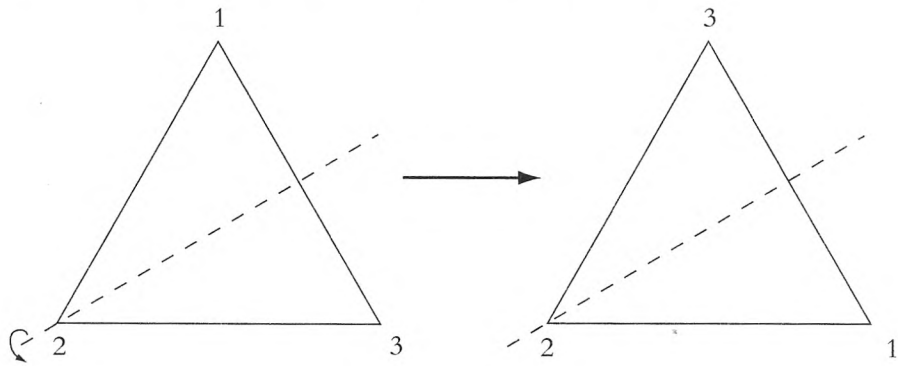
WEIL: ¡En efecto! La propiedad fundamental de estas operaciones es que, dadas dos, podemos obtener una tercera *componiéndolas*. Voy a escribir *SR* para referirme al resultado de aplicar primero la rotación *R* y luego la simetría *S*. Para los que leemos de izquierda a derecha, sería más lógico utilizar *RS*, porque es *R* el movimiento que se hace en primer lugar. Pero la notación *SR* tiene sus ventajas. Usted créame y calculemos la composición:



Composición de las operaciones R *y* S.

El dibujo muestra que el movimiento *SR* fija el segundo vértice e intercambia los otros dos. El orden 1-2-3 se envía, por tanto, a 3-2-1. Observe que este mismo

resultado también podríamos haberlo obtenido por medio de la simetría cuyo eje pasa por el segundo vértice. Las dos operaciones en realidad coinciden:

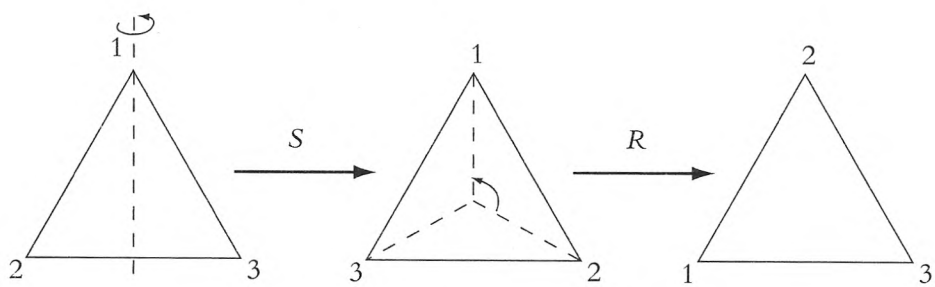


La composición SR *es una simetría.*

Calculemos ahora *RS*, es decir, el resultado de aplicar primero *S* y después *R*. Como de costumbre, basta ver qué ocurre con los vértices.

LÉVI-STRAUSS: ¡Un momento! El orden de los factores no altera el producto.

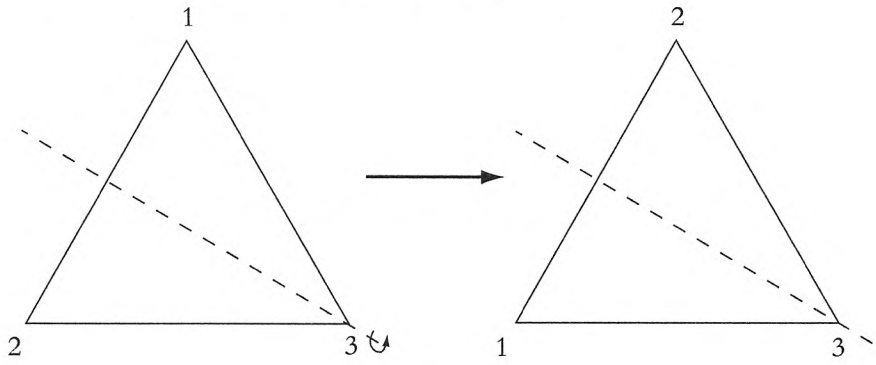
WEIL: ¡Ah, la infancia, paraíso de certezas! Qué difícil es cambiar lo que nos han enseñado de pequeños. «El orden de los factores no altera el producto» se refería sólo a la multiplicación de números: tres veces siete es lo mismo que siete veces tres. Pero no hay ninguna razón por la que otras operaciones, como la composición de los movimientos que dejan invariante una figura, deban cumplir su principio, señor Lévi-Strauss. De hecho, aquí tiene un ejemplo de que no es el caso. Si aplico primero *S* y luego *R*, esto es lo que obtengo:



Composición de las operaciones S *y* R.

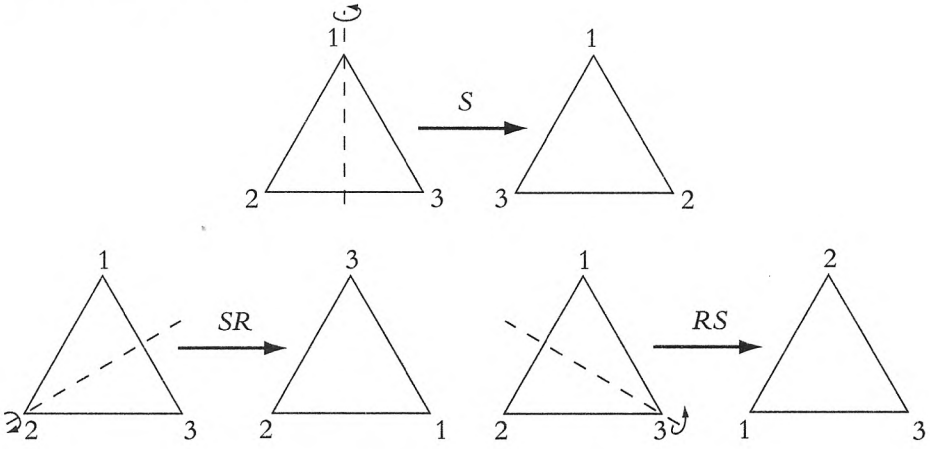
La configuración final es 2-1-3, así que los resultados de los movimientos *SR* y *RS* son distintos.

LÉVI-STRAUSS: Pero *RS* también es una simetría...



RS *es una simetría.*

WEIL: Sí, su eje pasa por el tercer vértice. Hace un rato le explicaba que, para que una simetría dejase invariante el triángulo, su eje debía contener al centro y a uno de los vértices, ¿recuerda? Pues bien, a partir de *R* y *S* las hemos recuperado todas. Si el eje atraviesa el segundo vértice, entonces la simetría es *SR*, y si contiene al tercero, obtenemos *RS*. Al añadir la propia *S*, que era la simetría con respecto al primer vértice, la lista se completa: *S*, *SR* y *RS* son todas las simetrías que dejan el triángulo invariante.

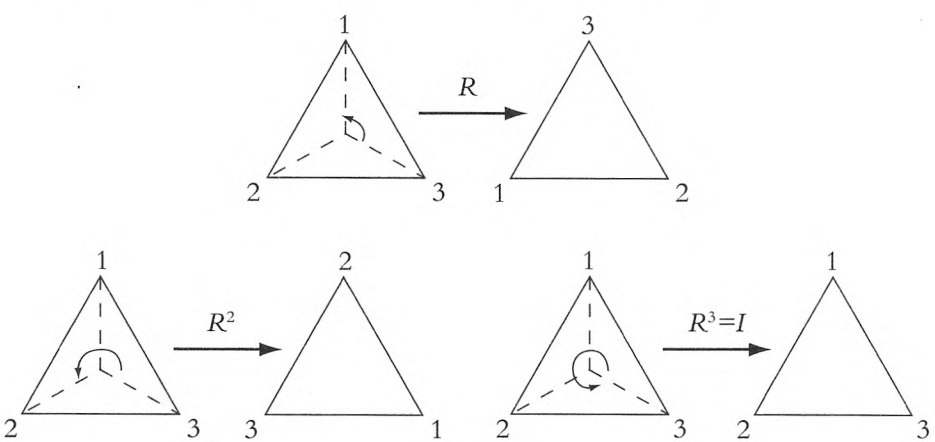


Las simetrías que dejan el triángulo invariante.

LÉVI-STRAUSS: Oiga, señor Weil, para poder componer dos transformaciones, ¿es necesario que sean distintas?

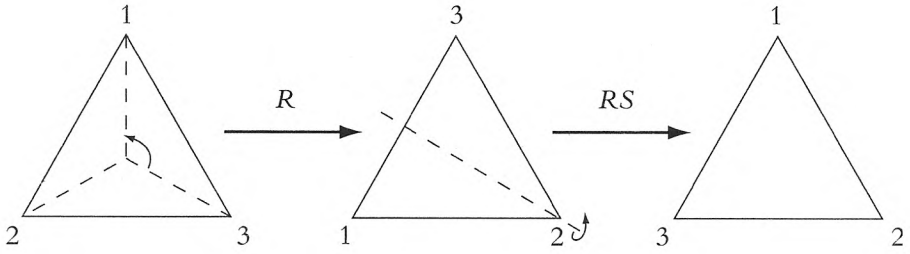
WEIL: En absoluto. Nada nos impide aplicar sucesivamente la misma operación. Como girar la figura dos veces 120° equivale a girarla 240°, el movimiento RR es de nuevo una rotación que deja el triángulo invariante. En vez de RR vamos a escribir R^2. Ahora podríamos aplicar R de nuevo, pero, si giramos la figura otros 120°, volvemos a la configuración inicial, de modo que R^3 no tiene ningún efecto sobre el triángulo. Aún no habíamos tenido en cuenta la transformación que consiste en no hacer nada, es decir, aquella que mantiene el orden 1-2-3. Voy a llamarla I, de identidad. Fíjese en que el resultado de componer la identidad con cualquier otro movimiento es el movimiento en cuestión.

Lo que hemos demostrado es que $R^3 = I$, porque girar tres veces la figura da el mismo resultado que no tocarla. Se dice que R tiene *orden* tres. En general, el orden de una transformación es el número de veces que hay que aplicarla para obtener la identidad. Por ejemplo, S es un elemento de orden dos, porque al repetir dos veces la simetría se recupera el triángulo del comienzo. Ya hemos visto que las simetrías del triángulo son S, RS y SR. ¿Cuáles son las rotaciones que dejan invariante la figura? Observe que un giro únicamente cumple esta propiedad si el ángulo es múltiplo de 120°. Por tanto, todas las rotaciones son R, R^2 y $R^3 = I$.



Las rotaciones que dejan el triángulo invariante.

Ya hemos descrito todas las simetrías (S, RS y SR) y todas las rotaciones (I, R, R^2). Un teorema afirma que cualquier otro movimiento que deje el triángulo invariante se obtiene componiendo simetrías y rotaciones. Sabemos cómo se operan R y S, pero todavía no hemos obtenido el resultado de aplicar primero el giro R y luego la simetría RS:

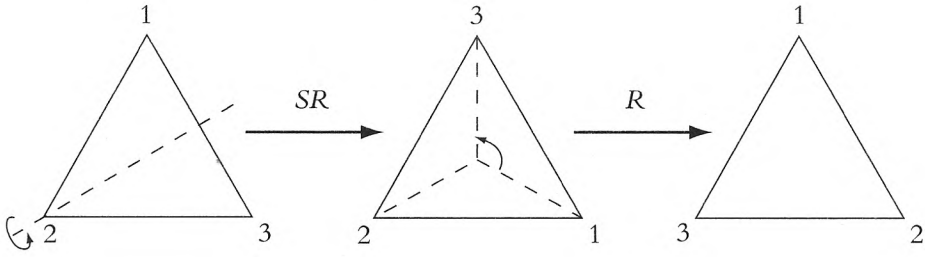


La transformación (RS)R.

Como verá, la composición de ambas operaciones transforma el orden 1-2-3 en 1-3-2. Eso es exactamente lo que hacía la simetría S, así que $(RS)R = S$.

LÉVI-STRAUSS: ¿Qué significa el paréntesis?

WEIL: Es un modo de indicar cómo se componen las operaciones. Dese cuenta de que la escritura RSR, en la que las tres operaciones aparecen de corrido, es a priori ambigua: ¿quiere decir que aplico primero la operación R y luego la operación RS, como acabamos de hacer, o que empiezo por SR y sigo con R? En el primer caso escribimos $(RS)R$, y en el segundo, $R(SR)$. El resultado podría ser distinto. Piense, por ejemplo, en la resta de números naturales. No es lo mismo $7-(5-3)=7-2=5$ que $(7-5)-3=2-3=-1$; en este caso es crucial saber dónde se colocan los paréntesis. Sin embargo, nosotros tenemos la suerte de que las operaciones $(RS)R$ y $R(SR)$ coinciden:



Las operaciones R(SR) *y* (RS)R *coinciden.*

LÉVI-STRAUSS: ¡Me pierdo con tanta información!

WEIL: No me extraña. Le propongo que ordenemos nuestros datos en una «tabla de multiplicación» como las del colegio, en la que cada casilla indique el resultado de componer las operaciones de la fila y la columna correspondientes, empezando por la que marca la columna (como señala la flecha):

↙	I	R	R^2	S	RS	SR
I	I	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	I	RS		S
R^2	R^2	I	R		S	
S	S	SR		I		R
RS	RS	S		R		R^2
SR	SR		S			I

Por ahora, sólo he utilizado lo que ya sabíamos: que la composición con la identidad no altera las transformaciones, que $RSR=S$ y que $R^3=S^2=I$. Esto nos permite, por ejemplo, calcular $SRSR$. Como podemos colocar a nuestro antojo los paréntesis, se tiene que $SRSR=S(RSR)$. Según el cálculo anterior, $RSR=S$, luego $SRSR=SS=S^2$, que es la identidad porque la simetría S tiene orden dos. Por tanto, $SRSR=I$. Pero la tabla aún no está completa. Una de las composiciones que nos faltan es SRS. Para deducir su valor, recordemos una vez más que $RSR=S$. Las dos operaciones seguirán coincidiendo si las compongo a ambos lados con R^2, es decir: $R^2RSR=R^2S$. Ahora bien, sabemos que $R^2R=R^3=I$, luego la expresión se simplifica en $SR=R^2S$. ¡Ésta era otra de las composiciones que no sabíamos calcular! Todavía podemos multiplicar por S a ambos lados, esta vez por la derecha. Así obtendremos $SRS=R^2S^2$, pero como $S^2=\mathrm{I}$, concluimos que $SRS=R^2$. Incorporemos a la tabla estos nuevos cálculos:

↙	I	R	R^2	S	RS	SR
I	I	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	I	RS	$\boldsymbol{SR}$	S
R^2	R^2	I	R	$\boldsymbol{SR}$	S	
S	S	SR		I	$\boldsymbol{R^2}$	R
RS	RS	S		R		R^2
SR	SR		S	$\boldsymbol{R^2}$		I

Aún no hemos terminado. Faltan las composiciones R^2SR, SR^2, RSR^2, $RSRS$ y SR^2S, que se deducen de las anteriores usando los mismos trucos, ¡inténtelo! Por ejemplo, R^2SR coincide con $R(RSR)$. Pero sabemos que $RSR=S$, luego $R^2SR=RS$. Del mismo modo:

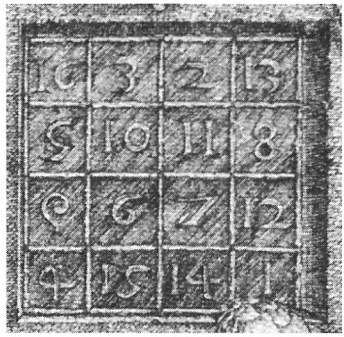
$$SR^2=(SR)R=(R^2S)R=R(RSR)=RS,$$

porque hemos demostrado antes que $SR=R^2S$. Le dejo que calcule las demás, señor Lévi-Strauss; yo he hecho lo más difícil y así sabrá si ha comprendido o no el método. En cualquier caso, lo importante es que esta tabla contiene toda la información sobre el conjunto de transformaciones que dejan el triángulo invariante: cuáles son, cómo se componen entre sí, qué orden tienen (es decir, cuántas veces es preciso aplicarlas sucesivamente hasta obtener la identidad). Cualquiera de estas propiedades puede leerse en la tabla.

↙	I	R	R^2	S	RS	SR
I	I	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	I	RS	SR	S
R^2	R^2	I	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	I	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	I	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	I

Tabla de las transformaciones del triángulo.

LÉVI-STRAUSS: Quizá diga una tontería, señor Weil, pero, mientras completaba usted la tabla, me he acordado de la *Melancolía I* de Durero, esa imagen tan hermosa de las *Estampas maestras* en la que una figura alada se abisma en reflexiones geométricas. Como sabe, en el grabado aparece un cuadrado mágico en el que todas las filas y columnas —también las diagonales y otras configuraciones más complejas— suman 34. ¿Tiene algo que ver este cuadrado mágico con sus tablas de multiplicar?



WEIL: Casi nada, me temo. La diferencia más importante entre los dos es que, en la tabla de multiplicar de un grupo, todas las filas y columnas contienen los mismos elementos, mientras que en un cuadrado mágico nunca se repiten. En la primera fila del cuadrado de Durero aparecen los números 16, 3, 2 y 13; en la segunda, 9, 10, 11 y 8: la gracia está en que son distintos. A lo que se parece nuestra tabla es a un *cuadrado latino*. Puede que nunca haya oído hablar de ellos, señor Lévi-Strauss; no son tan populares como los cuadrados mágicos. Un cuadrado latino es una disposición de símbolos que aparecen exactamente una vez en cada columna y en cada fila. Por ejemplo:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Una de las cosas que le explicaré más adelante es que la tabla de multiplicar de un grupo con un número finito de elementos es siempre un cuadrado latino.

LÉVI-STRAUSS: Está bien, volvamos a los grupos.

WEIL: He querido presentar en detalle el ejemplo de las transformaciones del triángulo para que podamos ahora extraer juntos la estructura subyacente. Si a alguien no tengo que explicarle a qué me refiero con «estructura subyacente» es a usted, señor Lévi-Strauss. Se trata de prescindir de todo lo anecdótico para quedarnos sólo con lo que esta situación pueda tener de generalizable. Sin ir más lejos, vamos a empezar deshaciéndonos del triángulo. Recuerde que el objeto de estudio no era la figura en sí, sino una serie de operaciones que se realizaban sobre ella, que hemos llamado R, S... Nosotros vamos a sustituirlas por una colección cualquiera de elementos (finita o infinita), que representaremos con la letra G. En el caso de las transformaciones del triángulo, la riqueza del ejemplo provenía de la posibilidad de componer dos movimientos para obtener un tercero con las mismas propiedades. Pediremos lo mismo: para cada par de elementos de G debe existir un modo de obtener otro que siga perteneciendo a G. Antes designamos esta composición yuxtaponiendo los dos términos. Ahora podemos introducir un nuevo símbolo, por ejemplo $*$, para indicar cómo dos elementos de G definen un tercero. Así, $a * b$ será el resultado de «multiplicar» a y b de acuerdo con la operación del grupo.

Podríamos parar aquí, pero esta estructura no es lo bastante restrictiva para garantizar que los objetos que la poseen sean interesantes. Si le doy, por ejemplo, un conjunto formado por sólo tres letras, pongamos $G = \{x, y, z\}$, hay 19.683 formas distin-

tas de definir una operación que, a cada dos elementos, asocie un tercero. ¡Demasiadas! Es necesario que $*$ cumpla algunas propiedades. A la hora de imponerlas, nos inspiraremos otra vez en las transformaciones del triángulo. Recuerde que teníamos allí la identidad I, que no alteraba ninguna de las demás operaciones cuando se componía con ellas. Del mismo modo, nos interesa disponer de un *elemento neutro* e tal que las igualdades $a*e=e*a=a$ sean ciertas para cualquier elemento a de G. En el caso del conjunto $\{x, y, z\}$, esto reduce a 81 el número de operaciones posibles; ya ve la diferencia. También la libertad en la disposición de los paréntesis ha sido imprescindible a la hora de efectuar los cálculos. Por eso exigiremos que, siempre que se operen tres elementos, $(a*b)*c$ coincida con $a*(b*c)$. Se dice que la operación es *asociativa*.

No sería descabellado decretar que un grupo es un conjunto con una operación asociativa que posee un elemento neutro. De hecho, esa estructura existe y se llama *monoide*; fue Bourbaki quien introdujo el término. Ésta podría haber sido la definición de grupo, pero las transformaciones del triángulo tienen otra característica que nos interesa generalizar: son reversibles, en el sentido de que, una vez aplicada una, existe siempre otra que devuelve el triángulo a la posición original. Se dice que es la operación *inversa*. Pongamos que se aplica el giro R. Si a continuación hacemos actuar R^2, se obtiene $R^2R=R^3=\mathrm{I}$, de modo que R^2 es la transformación inversa de R. En otras ocasiones, un movimiento puede ser su propio inverso. Es lo que ocurre, por ejemplo, con las simetrías S, RS y SR. Volviendo a nuestro grupo abstracto, la existencia de un inverso se traduce simbólicamente por el hecho de que, dado un elemento a de G, exista siempre otro elemento b tal que $a*b$ y $b*a$ coincidan con el elemento neutro. A menudo se escribe a^{-1} en lugar de b. Eso es un grupo. Después veremos que sólo hay un modo de definir una ley de grupo en el conjunto $\{x, y, z\}$.

Definición. Un *grupo* es un conjunto G dotado de una composición $*$ que asocia a cada par de elementos a y b en G otro elemento $a*b$ en G, de modo que se verifiquen las siguientes propiedades:

a) La composición $*$ es *asociativa*, es decir, la igualdad $(a*b)*c=a*(b*c)$ es cierta para cualquier elección de a, b y c en G.

b) Existe un *elemento neutro* e en G tal que las igualdades $a*e=e*a=a$ se cumplan para cualquier elección de a en G.

c) Dado cualquier a en G, se puede encontrar un elemento b en G que satisfaga las relaciones $a*b=b*a=e$.

La primera operación de grupo que uno puede imaginar es la suma de los números naturales 0, 1, 2, 3... Está claro que la operación es asociativa y que el cero es el elemento neutro, pero para tener un grupo se necesita también que cada número posea un inverso. Para ello añadimos los números negativos: -1 es el inverso de 1 porque $1+(-1)=(-1)+1=0$; del mismo modo, -2 es el inverso de 2, y así sucesivamente. Se obtiene así el grupo de los números enteros, que se representa con la letra $\mathbb{Z}$ y que tiene infinitos elementos. Sin embargo, si en lugar de considerar la suma tomáramos como operación la resta, no tendríamos un grupo, pues hemos visto que no es una operación asociativa.

LÉVI-STRAUSS: Volviendo a la definición de grupo, si le doy dos elementos cualesquiera a y b, ¿tampoco es cierto que $a*b$ y que $b*a$ coinciden?

WEIL: No siempre. Por eso al formular las propiedades b) y c) tengo que escribir la composición en ambos sentidos; no me bastaría con imponer que $a*e$ fuese igual a e, porque a priori no hay razón para que $e*a$ coincida con $a*e$. Sin embargo, si impusiéramos que dos elementos cualesquiera del grupo verificaran la condición $a*b=b*a$, dejaríamos fuera ejemplos muy interesantes. Ya ha visto que intercambiar el orden de R y S alteraba el resultado, así que las transformaciones del triángulo no formarían un grupo con esta definición. Por supuesto, que $a*b$ y $b*a$ en general no coincidan no impide que puedan existir elementos a y b tales que $a*b=b*a$. Se dice entonces que a y b *conmutan*. ¡Tendría que recordar que muchas de las reglas matrimoniales de sus tribus se traducen en la conmutatividad de dos elementos! Hay incluso grupos en los que todos los elementos conmutan entre sí. Son los grupos *conmutativos* o *abelianos*.

LÉVI-STRAUSS: Conmutativos lo entiendo, pero ¿por qué abelianos?

WEIL: Es un homenaje al matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), que se apoyó en la incipiente teoría de grupos para demostrar que casi ninguna ecuación de quinto grado podía resolverse por métodos elementales. Fue Camille Jordan quien bautizó así los grupos conmutativos en su *Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas* de 1870. Jordan tuvo la brillante idea de convertir en adjetivo lo que podría haber continuado siendo un nombre. Es también una característica de la nomenclatura que introdujo Bourbaki: nosotros no hablábamos de geometría de Riemann, de extensión de Galois o de anillo de Artin, sino de geometría *riemanniana*, de extensión *galoisiana* y de anillo *artiniano*. Al desaparecer la referencia explícita al nombre del creador, el concepto permitía desplegar nuevas intuiciones.

LÉVI-STRAUSS: ¡Évariste Galois! ¿Pero no fue él quien inventó los grupos? Alguien me contó la historia de la noche antes del duelo...

WEIL: ¡Cómo les gusta esa historia! A veces he tenido que escuchar que, como iba a morir al día siguiente, Galois recibió del cielo la inspiración necesaria para desarrollar toda su teoría en el curso de una noche. En efecto, fue Galois quien utilizó por primera vez la palabra «grupo», en una serie de artículos que deben contarse entre las páginas más bellas de la historia de la humanidad; es difícil saber hasta dónde llega su influencia. Pero los grupos que estudiaba Galois tenían un aspecto distinto de los que yo le he presentado. Él se interesaba por los *grupos de permutaciones*. Si le doy un conjunto formado por n elementos, pongamos los números naturales de 1 a n, una permutación es una nueva forma de ordenarlos. Pues bien, en el conjunto de permutaciones se puede definir una operación de grupo. Supongamos que se eligen las permutaciones

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

del conjunto de cinco elementos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ésta es una forma de indicar que, tras la permutación σ_1, el conjunto se convierte en $\{2, 5, 3, 1, 4\}$, y, al aplicar σ_2, en $\{3, 4, 5, 1, 2\}$. Como ve, debajo de cada número de la configuración inicial se coloca el que lo sustituye tras la permutación. Para dotar a estas operaciones de una estructura de grupo es necesario definir un modo de componerlas. Voy a explicarle cómo hacerlo: para decidir cuánto vale $\sigma_1 * \sigma_2$, me fijo primero en qué número aparece bajo el elemento 1 en σ_2; es el 3. Miro luego a qué número hace corresponder el 3 la permutación σ_1; al 3. Así que impongo que en la composición $\sigma_1 * \sigma_2$, el 1 se envíe al 3. Veamos ahora qué ocurre con el 2: σ_2 lo manda al 4, y σ_1 hace corresponder al 4 el 1, luego en la composición $\sigma_1 * \sigma_2$, el número 2 se enviará al 1. Si continuamos este procedimiento, al final tendremos que

$$\sigma_1 * \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

y este modo de componer permutaciones verifica todas las propiedades de la definición de grupo. Se obtiene así el *grupo simétrico* S_n, donde n es el número de elementos del conjunto que se permuta.

LÉVI-STRAUSS: ¿Dónde aparecen estos grupos?

WEIL: ¡Por todas partes! De hecho, hay un teorema que afirma que cualquier grupo finito puede verse en el interior de un grupo simétrico; basta elegir bien n.

Nosotros mismos hemos trabajado con un grupo simétrico, aunque entonces usted no lo supiera. ¿Recuerda cómo distinguíamos las transformaciones del triángulo? Numeramos los vértices y vimos cómo variaban al aplicar los movimientos. Pero entonces una transformación del triángulo no es más que un modo de permutar los números 1, 2 y 3. Para asociar a cada movimiento una permutación, me fijo en qué lugar ocupan los vértices después de haberlo aplicado. Por ejemplo, tras el giro R, el primer vértice ocupa la posición en la que antes estaba el segundo, luego la permutación asociada enviará 1 a 2. Del mismo modo, los vértices 2 y 3 se encuentran ahora donde antes estaban 3 y 1 respectivamente, así que la permutación hará corresponder 3 a 2, y 1 a 3. Por tanto, el giro R contiene la misma información que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Repitiendo el proceso para cada una de las transformaciones, se obtiene la siguiente tabla de correspondencias:

$$I \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad R \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad R^2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad SR \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad RS \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fíjese además en que si compongo las permutaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{y} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

que, según acabamos de ver, representan a los elementos R y S respectivamente, obtengo como resultado la permutación

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

que es la asociada a RS. ¡La correspondencia es perfecta! Desde el punto de vista de la estructura, el grupo de transformaciones que dejan el triángulo invariante es

idéntico al grupo simétrico S_3. Se dice que son *isomorfos*. En general, dos grupos G y H son isomorfos si existe una función f que envía cada elemento de G a un elemento de H, de modo que se satisfagan tres propiedades: 1) elementos distintos tienen imágenes distintas; 2) todos los elementos de H son imagen de algún elemento de G a través de f, y 3) f respeta la operación de grupo, es decir: dados g_1 y g_2 en G, el resultado de operar primero g_1 y g_2 en G y luego calcular la imagen del producto coincide con el de calcular primero las imágenes $f(g_1)$ y $f(g_2)$, y luego operarlas según la ley de grupo de H.[1]

LÉVI-STRAUSS: Muy bien, ¿por dónde seguimos?

WEIL: Ahora que hemos extraído los axiomas que definen la estructura de grupo, podemos manipularlos para demostrar teoremas que serán ciertos en cualquier situación que satisfaga las condiciones. En particular, ¡para nuestro grupo de transformaciones del triángulo! Voy a ponerle algunos ejemplos sencillos. Empecemos por el elemento neutro. El punto b) en la definición de grupo afirma que existe un elemento e con la propiedad de que $a*e=e*a=a$ para cualquier elección de a, pero no dice nada sobre cuántos elementos del grupo comparten esta propiedad. A priori podría haber más de uno. Sin embargo, el punto c) de la definición da por sentado que el elemento neutro es único, ya que, si no lo fuera, tendríamos que especificar con cuál de los distintos elementos neutros queremos que coincida la composición de un término y su inverso. Para ser completamente rigurosos, nada más anunciar el axioma b) deberíamos haber demostrado que el elemento neutro es único. Hagámoslo ahora. Para ello, supongamos que existen dos elementos neutros e_1 y e_2. Nuestro objetivo es demostrar que $e_1=e_2$. Consideremos el producto e_1*e_2. Por un lado, e_1 es un elemento neutro, así que no altera ningún otro elemento con el que se opere por la izquierda. Por tanto, $e_1*e_2=e_2$. Por otro lado, también e_2 es un elemento neutro, luego multiplicar un elemento por e_2 a la derecha no lo modifica. Así, $e_1*e_2=e_1$. Hemos demostrado que e_1*e_2 es, al mismo tiempo, e_1 y e_2, luego ¡e_1 y e_2 tienen que ser iguales!

Unicidad del elemento neutro. En un grupo sólo existe un elemento con la propiedad $a*e=e*a=a$ sea cual sea a en G.

LÉVI-STRAUSS: ¿También los inversos son únicos?

1 El concepto de isomorfismo de grupos se discute en detalle al comienzo del anexo.

WEIL: ¡También! Igual que antes, suponga que existieran dos elementos b_1 y b_2 tales que $a*b_1=b_1*a=e$ y $a*b_2=b_2*a=e$. En particular, tenemos que $a*b_1=a*b_2$ porque ambos términos coinciden a su vez con e. La igualdad seguirá siendo válida si la multiplicamos a ambos lados por el elemento b_1, es decir, tenemos que $b_1*a*b_1=b_1*a*b_2$. Recuerde que, a la hora de hacer el producto de tres elementos, puedo colocar los paréntesis donde mejor me venga. Así,

$$b_1*a*b_1=(b_1*a)*b_1=e*b_1=b_1$$

porque $b_1*a=e$, y e es el elemento neutro. Del mismo modo,

$$b_1*a*b_2=(b_1*a)*b_2=e*b_2=b_2.$$

Como ambas expresiones son iguales, tenemos que $b_1=b_2$. Gracias a esta propiedad puedo referirme al elemento b como *el* inverso de a y escribir $b=a^{-1}$.

Está muy bien que me haya hecho esta pregunta, señor Lévi-Strauss, porque, al contestársela, he utilizado una proposición que nos será muy útil en el futuro. Fíjese en que, partiendo de la igualdad $a*b_1=a*b_2$, hemos deducido que $b_1=b_2$. Se trata de una característica general de los grupos: si el resultado de multiplicar dos elementos por un tercer elemento común, en el mismo orden, coincide, entonces es que los elementos de partida eran iguales:

Propiedad de eliminación. Si en un grupo G es cierta alguna de las igualdades $a*b=a*c$ o $b*a=c*a$, entonces $b=c$.

LÉVI-STRAUSS: ¿Cómo se demuestra algo así?

WEIL: Es muy sencillo, basta con copiar lo que hemos hecho. Supongamos que tenemos la igualdad $a*b=a*c$. El axioma c) de la teoría de grupos asegura la existencia de un elemento inverso de a, que además es único. Llamémoslo a^{-1}. La igualdad sigue siendo válida si multiplico por la izquierda los dos términos de la ecuación por a^{-1}. Por tanto: $a^{-1}*a*b=a^{-1}*a*$c. Llegado este punto, puedo utilizar la asociatividad para agrupar a con su inverso. Como sé que $a^{-1}*a$ es igual a e, el elemento neutro, deduzco por un lado que $a^{-1}*a*b=(a^{-1}*a)*b=e*b=b$ y, por otro, que $a^{-1}*a*c=(a^{-1}*a)*c=e*c=c$, así que no queda otra alternativa que $b=c$. Si en vez de la igualdad $a*b=a*c$, nos dieran $b*a=c*a$, bastaría con repetir el razonamiento multiplicando por la derecha en lugar de por la izquierda.

LÉVI-STRAUSS: ¿Y para qué sirve esta propiedad?

WEIL: Pues, por ejemplo, para demostrar que la tabla de multiplicación de un grupo finito es un cuadrado latino. Le recuerdo que eso quería decir que en cada fila y en cada columna de la tabla aparecen todos los elementos del grupo. Vamos a llamarlos $a_1, a_2 \ldots a_n$. Voy a hacerle la demostración para la segunda columna de la tabla; el método es exactamente el mismo para cualquier otra columna. ¿Qué elementos aparecen en la segunda columna? Son los que se obtienen multiplicando a_2 por la izquierda con todos los elementos del grupo, es decir: $a_2 * a_1$, $a_2 * a_2$, $a_2 * a_3 \ldots$ así hasta $a_2 * a_n$. Imagínese que dos de los términos de esta lista fueran iguales, o dicho de otro modo, que existieran dos índices j y k tales que $a_2 * a_j = a_2 * a_k$. Como a_2 aparece a ambos lados de la fórmula, podría aplicar la propiedad de eliminación para concluir que $a_j = a_k$. ¡No hay dos elementos iguales en esa columna! Pero si el grupo está formado por n elementos y en una columna tienen que aparecer n elementos sin derecho a repetirse, ¡por fuerza estarán todos los del grupo! ¿Se da cuenta?

LÉVI-STRAUSS: Y lo mismo sirve para las filas de la tabla cambiando el sentido de la multiplicación…

WEIL: Me sorprenden sus progresos, señor Lévi-Strauss. Creo que ya está preparado para que le presente nuevos grupos. ¿Recuerda que le dije hace un rato que sólo era posible definir una operación de grupo en un conjunto de tres elementos? Ahora voy a explicarle por qué, pero antes de estudiar el caso de los tres elementos, habría que saber qué ocurre cuando el grupo tiene orden uno y dos. ¿Le he dicho lo qué era el *orden* de un grupo? Creo que no. Cuando un grupo es finito, se llama orden a su número de elementos.

LÉVI-STRAUSS: ¿No habíamos llamado orden a otra cosa?

WEIL: Sí y no. Al estudiar el ejemplo de las transformaciones del triángulo, le dije que R era de orden tres porque girar tres veces 120° la figura equivalía a no hacer nada. En general, un elemento era de orden n si el resultado de operarlo n veces con sí mismo era la identidad. Quizá le parezca que esta definición no tiene nada que ver con la anterior, pero voy a mostrarle cómo están relacionadas.

Si le doy un elemento cualquiera en un grupo, digamos a, puedo formar el conjunto de las potencias de a, es decir, $<a> = \{a, a^2, a^3 \ldots\}$, donde, como de costumbre, a^2 es una abreviatura de la notación $a * a$, a^3 significa $a * a * a$, etcétera. Supongamos que a tiene orden n según mi primera definición, es decir, que a^n es el elemento neutro del grupo. Entonces la lista de potencias se detiene en $a^n = e$ y vuelve luego a comenzar, pues $a^{n+1} = a^n * a = e * a = a$, $a^{n+2} = a^2$, y así sucesivamente; como el pobre

Sísifo. En realidad, el conjunto sólo tiene n elementos: $<a> = \{a, a^2, \ldots, a^n = e\}$. Por tanto, el orden de un elemento es el orden del conjunto que contiene sus potencias. Si quiere, mi nueva definición es más general que la primera.

En cualquier caso, no es esto lo que más me interesaba contarle. Le propongo que nos ejercitemos en el manejo de los grupos viendo qué aspecto tienen los de orden más bajo. Entre las propiedades de la definición de grupo hemos incluido la existencia del elemento neutro, así que un grupo no puede ser vacío; siempre contiene, al menos, el elemento neutro. Cuando el orden es uno, no puede haber otros, luego $G=\{e\}$. Veamos ahora qué ocurre con los grupos de dos elementos. Tendrán que ser de la forma $G=\{e, a\}$, donde e es el elemento neutro y a es otro elemento distinto de e. Por definición, tenemos que $a * e = e * a = a$, y también se sabe que $e * e = e$, luego para determinar completamente el grupo sólo necesitamos conocer el valor de $a^2 = a * a$. Como este elemento tiene que pertenecer de nuevo al grupo, hay sólo dos opciones: o bien $a^2 = e$, o bien $a^2 = a$. Pero enseguida podemos descartar esta última, porque aplicando la propiedad de eliminación a la igualdad $a^2 = a$, se obtendría $a = e$, y hemos dicho que a y e eran distintos. Por tanto, no hay más que un grupo de orden dos:

↙	e	a
e	e	a
a	a	e

El grupo de orden 2.

LÉVI-STRAUSS: Hay algo que no entiendo: ¿qué quiere decir que sólo hay un grupo de orden dos? Podría sustituir el elemento a por cualquier cosa.

WEIL: Pero la tabla de multiplicación seguiría siendo igual. No importa qué aspecto tengan los elementos, sino cómo se relacionan entre sí. Otra vez el diente de león. Como objetos sensibles, las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$ nada tienen que ver con los movimientos que dejan el triángulo invariante, pero hemos visto que ambos se pueden emparejar de modo que la operación de grupo se respete. Desde el punto de vista de la estructura, los dos grupos son indistinguibles, isomorfos. Es como si fueran realizaciones distintas de una misma idea platónica: la de grupo de orden seis con las relaciones que la tabla indica. ¿Me sigue?

LÉVI-STRAUSS: Entonces, ¿sólo hay una idea platónica de grupo de orden tres?

WEIL: Una única.

LÉVI-STRAUSS: Déjeme intentarlo. Un grupo de orden tres está formado por e y por otros dos elementos a y b, todos ellos distintos entre sí: $G=\{e, a, b\}$. Las relaciones que sabemos son $e*e=e$, $e*a=a*e=a$ y $e*b=b*e=b$. Empezamos calculando a^2. Como es un elemento del grupo, no hay más que tres posibilidades: $a^2=e$, $a^2=a$ y $a^2=b$, pero de nuevo podemos descartar $a^2=a$ porque entonces a sería igual al elemento neutro por la propiedad de eliminación. Me quedan dos opciones: $a^2=e$ y $a^2=b$. ¡Pero eso quiere decir que hay dos modelos de grupo de orden tres!

WEIL: No, todavía tiene que refinar un poco su razonamiento. Supongamos que fuera $a^2=e$. Entonces la tabla del grupo empezaría de este modo:

↙	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	
b	b		

Antes hemos demostrado que la tabla de multiplicación de un grupo es un cuadrado latino, así que cada fila y cada columna deben contener todos los elementos. En la segunda fila encontramos a y e, luego la tercera casilla sólo puede ser una b. Pero entonces en la tercera columna habría dos b repetidas. Esta tabla no se puede completar de modo que en cada fila y en cada columna aparezcan todos los elementos, luego no es la tabla de un grupo y, por tanto, la posibilidad $a^2=e$ está excluida.

LÉVI-STRAUSS: Así que por fuerza tiene que ser $a^2=b$. ¡Muy ingenioso! Entonces podemos escribir el grupo como $G=\{e, a, a^2\}$. ¿Ya está?

WEIL: Le falta aún decir cómo se operan a y a^2, es decir, cuál es el valor de a^3. Pero esto muy sencillo porque, siendo a^3 un elemento del grupo, sólo puede coincidir con e, a o a^2. Sin embargo, si fuera igual a alguno de los dos últimos elementos, entonces, aplicando una o dos veces la propiedad de eliminación, podríamos concluir que a es el elemento neutro. Como no es el caso, sólo queda $a^3=e$. Todos los grupos de orden tres son isomorfos:

↙	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

Este grupo ya nos había aparecido al estudiar las transformaciones del triángulo. Si observa con atención la tabla de multiplicar que hicimos entonces, se dará cuenta de que el primer cuadrante coincide exactamente con el grupo de orden tres. A veces dentro de un grupo hay otros grupos más pequeños, formados sólo por una parte de los elementos. Los llamaremos *subgrupos*.

↙	I	R	R^2	S	RS	SR
I	I	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	I	RS	SR	S
R^2	R^2	I	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	I	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	I	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	I

Un subgrupo de orden tres.

Estos grupos formados por potencias de un mismo elemento —no se lo dije antes— se llaman *cíclicos*, y se dice que ese elemento es un *generador* del grupo. Para un grupo cualquiera G, una familia de generadores es un conjunto finito de elementos del grupo a partir de los cuales se pueden obtener todos los demás. Por ejemplo, el giro R y la simetría S generan el grupo de transformaciones del triángulo. Una buena manera de imaginarse un grupo cíclico es pensar en los relojes, que se ponen a cero cada doce horas. Transcurrido medio día, las agujas recuperarán la posición actual, de modo que, sólo mirándolas, es imposible decidir si ha pasado o no el tiempo. Si unas elecciones terminan a las nueve de la noche y el escrutinio dura cuatro horas, a nadie se le ocurre sumar $21+4=25$ para decidir que los resultados se conocerán a las 25 horas. Lo que se hace es sumar cuatro horas para llegar hasta 24 y luego empezar de nuevo con la hora restante, para concluir que a la una de la mañana se sabrá quién ha ganado. Igual que hay relojes de doce y de veinticuatro horas, podría construir un «reloj» de un número cualquiera de horas, digamos n. El conjunto de base será el de los números naturales menores que n, que vamos a escribir entre corchetes, para indicar que, en realidad, cada uno de ellos representa muchas horas simultáneamente: [0], [1], [2]...[$n-1$]. Quisiera decretar que la operación entre dos elementos del conjunto es la suma tal y como usted la conoce, sin los corchetes, pero dese cuenta de que esto plantearía un problema. Imagínese, por ejemplo, que n vale 5. Entonces el conjunto anterior se convierte en [0], [1], [2], [3], [4]. Si hago la suma

de los elementos 3 y 4, obtengo $3+4=7$, que no pertenece al conjunto. Hay que refinar la construcción y, para ello, el truco consiste en poner el contador a cero cada vez que se llega a 5. En el caso de 3 y 4, $3+2=5$, así que cambio de día, y aún me quedan otras dos unidades que añadir. Diré entonces que $[3]+[4]=[2]$. Hay otras sumas que no es necesario retocar: por ejemplo, $1+2=3$, que es menor que 5, luego sé directamente que $[1]+[2]=[3]$. Sin embargo, $[2]+[3]=[0]$ y $[2]+[4]=[1]$, porque tengo que restar 5 una vez al resultado. Se obtiene así la tabla:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

Dado cualquier número *n*, se puede demostrar que esta suma modificada define una operación de grupo en el conjunto $\{[0], [1], [2]\ldots[n-1]\}$. Es el *grupo cíclico de orden n*, o *grupo de los enteros módulo n*, que se representa con el símbolo Z/n.

LÉVI-STRAUSS: Ya basta, señor Weil. ¡Es hora de hablar de matrimonios!

Capítulo 4

Matrimonios algebraicos

Lo más difícil para el matemático que se enfrenta
a un problema de matemática aplicada consiste
a menudo en comprender de qué se trata y en traducir
a su propio lenguaje los datos de la pregunta.
A. Weil, comentarios a sus obras completas

LÉVI-STRAUSS: Ahora que me ha enseñado usted las bases de la teoría de grupos, veamos cómo aplicarla al estudio de las estructuras del parentesco. ¿Le parece?

WEIL: Vamos a empezar con un modelo muy sencillo, del que iremos extrayendo poco a poco los principios necesarios para resolver situaciones más generales. Supongamos que en la tribu que se quiere estudiar existen cuatro clanes distintos, que podrían corresponder, por ejemplo, al culto a diferentes tótems o al control de ciertos territorios. Como la estructura de los matrimonios no depende de los nombres de los clanes, los designaremos con cuatro letras cualesquiera, pongamos A, B, C y D.

LÉVI-STRAUSS: Le gustará saber que una de las primeras cosas que me dejaron claras los indios nambikwara cuando me instalé en su campamento fue que estaba prohibido el uso de los nombres propios. Por eso tuve que introducir símbolos en el censo de la tribu, primer paso para identificar las relaciones de parentesco. Yo también usaba letras para representar los clanes, y números, para distinguir a cada uno de sus miembros. El resultado fue un artículo lleno de cambios de temperatura, en el que convivían la frialdad de referirse a alguien como A_7 con comentarios del estilo «mujer exuberante, siempre de buen humor» o «tipo vanidoso, satisfecho de sí mismo, poco inteligente».

WEIL: Los nambikwara... ¡ahí tiene una sociedad bien preparada para las matemáticas! A veces la mayor dificultad de un problema radica en elegir bien la notación, en traducirlo a un lenguaje con el que nos sintamos cómodos. En este caso, una vez que se han distinguido los cuatro clanes de la tribu, el paso siguiente es estudiar los matrimonios permitidos, que llamaremos M_1, M_2, M_3... con tantos

subíndices como hagan falta. Observe que para describirlos es suficiente con especificar los clanes a los que pertenecen el hombre y la mujer. Por ejemplo, M_1 podría ser la unión de un hombre A con una mujer B.

LÉVI-STRAUSS: Es hora de imponer algunas restricciones sobre los tipos de matrimonio. En primer lugar, todos los individuos de la tribu, sean hombres o mujeres, deben tener derecho a casarse. Eso significa que, dado un hombre o una mujer de un clan cualquiera, tiene que existir al menos una regla M_i a la que pueda ajustarse. Hasta aquí todo es razonable. La siguiente hipótesis pretende reducir un problema que sería inabarcable en su totalidad, y tiene que ver, como usted sabe, con el título de mi tesis: *Las estructuras elementales del parentesco*. Llamo «elemental» a una tribu en la que cada uno de sus miembros tiene un único tipo de matrimonio asignado, y el proceso de elección del cónyuge es, en este sentido, automático. En el extremo opuesto habría que situar a sociedades como la nuestra, que podríamos denominar «complejas», en las que en cada matrimonio intervienen un sinfín de factores (psicológicos, sociales, económicos...).

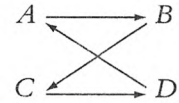
Lo cierto es que no hay ni sociedades estrictamente elementales, pues todas ellas permiten una cierta libertad dentro del clan fijado por la regla de matrimonio, ni estrictamente complejas, porque siempre hay límites, como la prohibición del incesto. Pero la distinción funciona bastante bien a nivel teórico. Tras el estudio de las estructuras elementales, mi idea era abordar las sociedades complejas empezando por las tribus crow y omaha de Norteamérica, que pueden llegar a dividirse en decenas de clanes, y cuyas normas sólo establecen con quién no puede casarse una persona. Ésa habría sido la continuación natural de mi tesis, pero *Tristes trópicos* se cruzó en el camino, y ya nunca encontré la fuerza para enfrentarme a un problema extremadamente difícil desde el punto de vista matemático, en el que sin duda habría sido necesario recurrir a los ordenadores. A medida que aumenta el número de clanes, la combinatoria de los matrimonios se asemeja cada vez más a la del ajedrez, donde el número de partidas posibles, aun siendo finito, es tan elevado que, en la práctica, es como si fuera infinito. Si para diseccionar las estructuras elementales tuve que consultar unos siete mil artículos y, a pesar de todo, me hizo falta recurrir a usted, quién sabe qué habría necesitado para empezar a entender algo de modelos más complejos...

WEIL: No se preocupe, señor Lévi-Strauss: nosotros nos limitaremos a estudiar las sociedades elementales. Dejemos a los jóvenes el resto del trabajo. Si le parece, antes de continuar, recordemos por última vez que las estructuras elementales son aquellas que satisfacen la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1: Todos los miembros de la tribu pueden casarse, y a cada uno de ellos le corresponde un único tipo de matrimonio.

Dese cuenta de que en una sociedad de este tipo el número de matrimonios posibles coincide exactamente con el de clanes en los que la tribu se divide. Por tanto, en nuestro ejemplo tendremos que describir M_1, M_2, M_3 y M_4. En efecto, como todos los hombres tienen que poder casarse, deben existir al menos cuatro reglas, una por cada clan. Supongamos que existiera una quinta. Esa regla haría intervenir a un hombre de un cierto clan. Como sólo hay cuatro, por fuerza será uno de los que ya han aparecido, pero entonces... ¡la elección no sería única! Hemos demostrado así que tiene que haber tantos tipos de matrimonios como clanes, ni más ni menos. Ahora bien, no valen cuatro reglas arbitrarias: M_1, M_2, M_3 y M_4 no sólo deben tener en cuenta a todos los hombres, sino también a todas las mujeres. Un ejemplo en el que esta condición se cumple es el siguiente:

(M_1) hombre A con mujer B
(M_2) hombre B con mujer C
(M_3) hombre C con mujer D
(M_4) hombre D con mujer A



LÉVI-STRAUSS: Es lo que los etnólogos llamamos un «intercambio generalizado», pues ninguna pareja de clanes intercambia a sus mujeres: los hombres de A, por ejemplo, se casan con mujeres de B, pero las mujeres de A se unen con el clan D. Una vez descritos los tipos de matrimonio, habría que explicar cómo se transmiten a la descendencia. Haremos de nuevo una hipótesis simplificadora:

Hipótesis 2: El tipo de matrimonio de cada individuo depende únicamente de su sexo y del tipo de matrimonio de sus padres.

WEIL: Eso significa que existen dos funciones f y g que hacen corresponder a cada uno de los tipos de matrimonio M_i las reglas $f(M_i)$ y $g(M_i)$ que rigen los matrimonios de los hijos y de las hijas nacidos de esas parejas. Por tanto, el conoci-

miento de las estructuras de parentesco de una tribu se reduce al de los tipos de matrimonio M_i y de las funciones f y g. Volviendo al ejemplo anterior, supongamos que los hijos de una madre del clan A, B, C o D pertenecen, respectivamente, al clan B, C, D y A. Veamos cómo se pueden calcular las funciones f y g. El tipo de matrimonio M_1 es entre un hombre A y una mujer B, y el clan de la descendencia está determinado por la madre, luego los hijos de un matrimonio M_1 son del clan C. Como un hombre C se casa según el modelo M_3, tendremos que $f(M_1) = M_3$, mientras que $g(M_1) = M_2$, ya que las mujeres del clan C obedecen a la segunda regla. Si repetimos el razonamiento para los matrimonios restantes, obtendremos la siguiente tabla:

Padres	M_1	M_2	M_3	M_4
Hijo $f(M_i)$	M_3	M_4	M_1	M_2
Hija $g(M_i)$	M_2	M_3	M_4	M_1

Observe que el efecto de las funciones f y g consiste en permutar los tipos de matrimonio, de manera que todos vuelven a aparecer una única vez entre la descendencia de los dos sexos. De no ser así, alguno de ellos habría desaparecido en la generación siguiente, y se violaría la primera hipótesis. ¿Se acuerda de lo que le expliqué sobre el *grupo simétrico* S_n la última vez que hablamos, señor Lévi-Strauss? Pues bien, las funciones f y g son dos permutaciones de los elementos M_1, M_2, M_3 y M_4. Componiéndolas repetidas veces ¡podemos alcanzar cualquier rincón del árbol genealógico! Da igual lo enrevesada que sea su pregunta sobre qué tipos de matrimonio están permitidos y cuáles no; con un poco de paciencia, siempre podemos reducirla a un cálculo algebraico.

LÉVI-STRAUSS: Veamos si es cierto, señor Weil. Pruebe a averiguar si en nuestra tribu las mujeres son siempre del mismo clan que su abuela paterna.

WEIL: ¡Pensaba que me iba a poner a prueba con algo más difícil! Observe que en una tribu elemental los clanes de dos miembros del mismo sexo coinciden si y sólo si sus tipos de matrimonio son iguales. Supongamos que los abuelos se han casado según el matrimonio M_i. Entonces sus hijos varones deberán seguir la regla $f(M_i)$, y las mujeres nacidas de esta última unión se casarán de acuerdo con $g(f(M_i))$. El tipo de matrimonio de la nieta es, por tanto, el resultado de aplicar primero f y luego g. Llegado este punto, su pregunta se traduce a la siguiente: ¿coincide $g(f(M_i))$ con M_i? O, dicho de otro modo: ¿es la composición de f y g la identidad? Basta un

sencillo cálculo para ver que no es así: como $f(M_1)$ vale M_3 y $g(M_3)$ es igual a M_4, tenemos que $g(f(M_1))=M_4$ y no M_1, como queríamos. Por tanto, si la abuela es del clan *B*, entonces la nieta pertenece al grupo *A*. Lo que sí es cierto es que el abuelo paterno y la nieta son del mismo clan, ¡demuéstrelo!

LÉVI-STRAUSS: ¡Impresionante, señor Weil! Éstas eran precisamente las técnicas de cálculo que yo necesitaba en los años cuarenta para estudiar la prohibición del incesto, un problema del que ya se había ocupado el sociólogo Émile Durkheim. Él fue uno de los primeros en señalar que la prohibición del incesto es sólo la cara negativa de un fenómeno más amplio, de carácter prácticamente universal, que es el de la *exogamia*. Desde el momento en el que algo se me prohíbe en el círculo de la familia más cercana, estoy obligado a salir del clan para colmar esa carencia. Las razones son prácticas, no morales. Muchos informadores nos han explicado que, si se casaran con su hermana, entonces no tendrían cuñado. ¿Con quién irían a cazar? ¿Con quién saldrían a divertirse? Mi punto de vista era, de algún modo, diferente del de Durkheim. Lo que a mí me interesaba de verdad era entender el paso de la naturaleza, regida por leyes universales, a la cultura, en la que las reglas varían de una sociedad a otra. De pronto se me ocurrió que la prohibición del incesto podría representar un estado intermedio, una especie de eslabón perdido. Es evidente que el contenido de la norma no es universal: hay sociedades extremadamente rigurosas al respecto, que castigan con pena de muerte relaciones que a nosotros nunca se nos ocurriría calificar de incestuosas. Para ellas, yo mismo sería fruto de una de estas uniones ilegítimas, pues mis padres eran primos de quinto grado. Otras sociedades, por el contrario, son tan liberales que permiten que un hombre se case con su hermana pequeña, aunque nunca con la mayor. Lo que es invariable es que hay una regla, que uno no puede casarse con quien le dé la gana. Mi hipótesis es que la prohibición del incesto articula el paso de la naturaleza a la cultura porque, siendo una regla variable de una sociedad a otra, se asemeja al mismo tiempo a las leyes universales.

WEIL: Si recuerdo bien, aunque el matrimonio entre primos es siempre un caso límite, las tribus que estudiábamos permitían que *un hombre se casara con la hija del hermano de su madre*. Veamos cómo se traduce esta posibilidad en términos de las permutaciones *f* y *g*. En lugar de empezar directamente por el hombre en cuestión, vamos a remontarnos dos generaciones para considerar una pareja que se casó según uno de los modelos M_i. Una hija de este matrimonio deberá regirse, entonces, por la regla $g(M_i)$, y un hijo, por $f(M_i)$. Éstos son la madre y el hermano a los que se refiere el enunciado. El tipo de matrimonio del hombre será, por tanto, $f(g(M_i))$, y el de la hija del hermano de la madre, $g(f(M_i))$. Para que ambos puedan casarse, los

tipos de matrimonios tienen que coincidir: $f(g(M_i)) = g(f(M_i))$. O, dicho de otro modo: sea cual sea el tipo de matrimonio inicial, el resultado de aplicar primero la función g y luego la función f debe ser el mismo que el de aplicar primero f y luego g. Como le expliqué en nuestra última conversación, decimos entonces que los elementos f y g *conmutan*. Eso significa que el subgrupo de S_n que generan (es decir, el conjunto de elementos que se obtienen componiendo sucesivas veces f y g) es *abeliano*. Los grupos abelianos con dos generadores son muy fáciles de estudiar. Enseguida voy a explicarle por qué, pero para eso me hará falta introducir un concepto nuevo.

La vez pasada le presenté un puñado de ejemplos de la estructura de grupo: estudiamos en detalle el grupo simétrico S_3, que aparece o bien como el grupo de transformaciones que dejan invariante un triángulo equilátero, o bien como las permutaciones de un conjunto formado por tres elementos. Hablamos también de los grupos cíclicos $\mathbb{Z}/n$, cuyos elementos son los números naturales menores que n con la misma suma «modificada» que llevaríamos a cabo en un reloj formado por n horas. Una pregunta que usted podría haberme hecho entonces es cómo construir nuevos grupos a partir de los ejemplos conocidos. Ahora voy a describirle uno de los procedimientos posibles. Supongamos que tenemos dos grupos G y H. Como sus respectivas operaciones no tienen por qué coincidir, voy a llamar $*$ a la primera, y $\bullet$, a la segunda. El conjunto subyacente a nuestro nuevo grupo, que representaremos $G \times H$, será el formado por los pares (g, h), donde g es un elemento de G, y h pertenece a H:

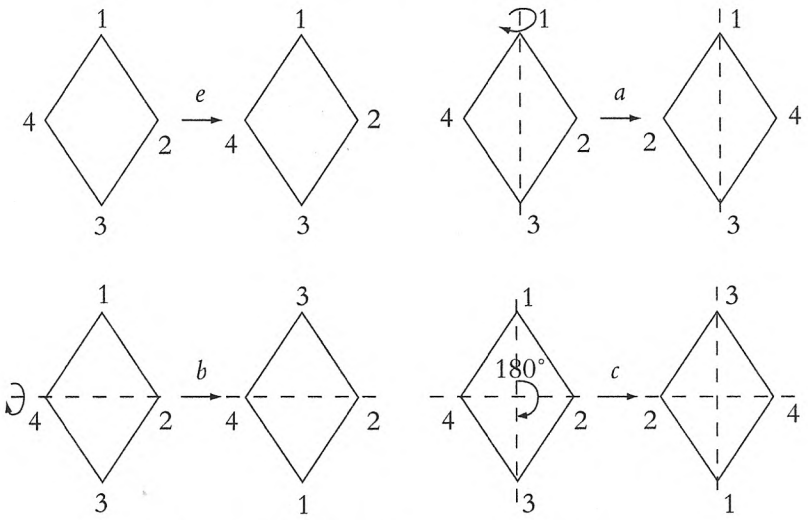
$$G \times H = \{(g,h) : g \in G,\ h \in H\}.$$

Falta definir una operación de grupo. Para ello aplicamos las leyes de G y H coordenada a coordenada. El resultado de operar (g_1, h_1) con (g_2, h_2) será, por tanto, $(g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$. Es fácil comprobar que esta operación satisface los tres axiomas de la definición de grupo; se lo dejo como ejercicio, señor Lévi-Strauss. Hemos obtenido así un nuevo grupo, que llamaremos *producto directo* de G y H.

Calculemos, por ejemplo, el producto directo del grupo cíclico de orden dos por sí mismo. Como sabe, los elementos de $\mathbb{Z}/2$ son [0] y [1], que se operan según las reglas [0]+[0]=[0], [0]+[1]=[1], [1]+[0]=[1] y [1]+[1]=[0]. Así, el producto directo $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ está formado por ([0], [0]), ([0], [1]), ([1], [0]) y ([1], [1]). El primero de estos pares es el elemento neutro; llamémoslo e. Si denoto los demás $a = ([0], [1])$, $b = ([1], [0])$ y $c = ([1], [1])$, entonces la tabla del grupo adoptará la forma

↙	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Éste es el *grupo de Klein*, llamado así en honor del matemático alemán Felix Klein (1849-1925), que lo introdujo en sus *Conferencias sobre el icosaedro y la solución de la ecuación de quinto grado,* en 1884, para estudiar las transformaciones del plano que dejan invariante un rombo. Fíjese en que sólo hay cuatro elementos, mientras que el grupo del triángulo tenía seis. Es lógico porque, en cierto sentido, los grupos miden la simetría y ¡un rombo es menos simétrico que un triángulo!



Grupo de transformaciones que dejan el rombo invariante.

Todos los elementos del grupo de Klein tienen orden dos; por eso en la diagonal de la tabla de multiplicación sólo aparece el elemento neutro. De hecho, se puede demostrar que los únicos grupos de orden cuatro son el grupo cíclico $\mathbb{Z}/4$ y el grupo de Klein, y el criterio para distinguirlos es precisamente la existencia o no de elementos de orden cuatro.

LÉVI-STRAUSS: Entiendo, señor Weil, pero me da la sensación de que nos estamos desviando del tema: ¿qué tiene que ver todo esto con los matrimonios?

WEIL: ¡Qué impaciente! Antes le dije que, en una sociedad que satisface nuestras dos hipótesis, el conocimiento de la estructura del parentesco se reduce al de los tipos de matrimonio M_i y al de las funciones f y g. Introduzcamos ahora una tercera hipótesis, que tiene que ver con los límites de la prohibición del incesto y que parece verificarse en algunas de las tribus de las que usted se ocupa en *Las estructuras elementales del parentesco*:

> **Hipótesis 3**: Está permitido el matrimonio entre cualquier hombre y la hija del hermano de su madre.

Como le he explicado, esta condición equivale a la conmutatividad de f y g, luego para estudiar todos los posibles modelos de sociedades que verifican las tres hipótesis, tendremos, de algún modo, que clasificar los subgrupos abelianos del grupo simétrico generados por dos elementos. Veamos qué aspecto tienen:

Llamemos H al grupo generado por f y g. Lo primero que podría ocurrir es que uno de los dos elementos se obtuviera operando el otro consigo mismo un cierto número de veces. En ese caso, incluirlo entre los generadores de H sería redundante, pues ya puede obtenerse a partir del otro elemento, y en realidad tendríamos un subgrupo generado por un único elemento, es decir, un grupo cíclico. Vamos a suponer que no es así, es decir, que f y g son independientes. Por definición, los elementos de H son todas las concatenaciones posibles de f y g, por ejemplo: $f*g*g*f*g$. En principio, el orden en el que aparecen los elementos es arbitrario, pero como hemos supuesto que f y g conmutan, podemos servirnos de la asociatividad y de la igualdad $f*g=g*f$ para ir reagrupando los términos dos a dos hasta que todas las f y todas las g queden juntas. Por ejemplo:

$$f*g*g*f*g=f*g*(g*f)*g=f*g*(f*g)*g=f*(g*f)*g*g=f*(f*g)*g*g=f^2*g^3.$$

Como este procedimiento es válido para cualquier elemento de H, hemos demostrado así que todos ellos se pueden escribir de la forma f^n*g^m, donde n y m son ciertos números naturales (que podrían valer cero). La convención usual es que tanto f^0 como g^0 son el elemento neutro, de modo que cuando un índice se anula recuperamos las potencias del otro término. La idea es que, en lugar de f^n*g^m, podríamos haber escrito (f^n,g^m) sin hacer ningún cambio sustancial en la estructura de H. Esto se parece mucho al producto de dos grupos cíclicos, pero los términos

$f^n * g^m$ podrían repetirse, incluso si elegimos n y m menores que los órdenes de f y g respectivamente. Hace falta todavía un poco de trabajo para demostrar que H es un producto de dos grupos cíclicos[1]:

> **Proposición 1.** Un grupo abeliano finito generado por dos elementos es cíclico o producto directo de dos grupos cíclicos.

De hecho, este resultado es un caso particular del *teorema de estructura de los grupos abelianos finitamente generados*, que afirma que cualquier grupo abeliano finitamente generado es isomorfo a un producto directo de la forma

$$\mathbb{Z}\times....\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_1\times...\times\mathbb{Z}/n_k,$$

donde $\mathbb{Z}$ es el grupo de los números enteros y $\mathbb{Z}/n_1, \ldots, \mathbb{Z}/n_k$ son grupos cíclicos. El número de copias de $\mathbb{Z}$ que aparecen en el producto se llama *rango* del grupo y es distinto de cero si y sólo si el grupo es infinito.

LÉVI-STRAUSS: Antes de que continúe, veamos qué ocurre en el ejemplo. Con la notación que me explicó la última vez, las permutaciones f y g se escriben

$$f=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } g=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Componiéndolas en los dos órdenes posibles

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

vemos que conmutan, luego en nuestra estructura de intercambio generalizado cualquier hombre puede casarse con la hija del hermano de su madre.

WEIL: Como el subgrupo de S_4 generado por f y g es abeliano, por fuerza será un grupo cíclico o el producto directo de dos grupos cíclicos. En este caso, el cálculo

1 El lector interesado encontrará una demostración completa en el anexo. Para entenderla bien, conviene haber leído la primera parte del capítulo siguiente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

muestra que la permutación f se obtiene componiendo g consigo misma ($f=g^2$), luego estamos en la primera de las dos situaciones posibles. ¿Acaso será siempre así? La respuesta es no: construyamos un ejemplo en el que el subgrupo generado por f y g sea el producto directo de dos grupos cíclicos. Supongamos que los tipos de matrimonios posibles fueran:

(M_1) hombre A con mujer D
(M_2) hombre B con mujer C
(M_3) hombre C con mujer B
(M_4) hombre D con mujer A

$A \rightleftarrows D$
$B \rightleftarrows C$

En este caso los clanes A y D intercambian a las mujeres, y lo mismo ocurre con B y C, luego nos encontramos ante un «intercambio restringido». Imaginemos además que los hijos de una madre del clan A, B, C o D fueran del clan B, A, D y C respectivamente. Podemos calcular como antes las funciones f y g:

Padres	M_1	M_2	M_3	M_4
Hijo $f(M_i)$	M_3	M_4	M_1	M_2
Hija $g(M_i)$	M_2	M_1	M_4	M_3

Observe que f es la misma permutación que en el ejemplo precedente, pero que g ha cambiado. Aun así, ambas siguen conmutando, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La diferencia con respecto a la situación anterior es que ahora, tanto f como g son elementos de orden dos (¡haga el cálculo!), luego ninguno de ellos puede ser el resultado de aplicar el otro sucesivas veces. El subgrupo generado por f y g será, por tanto, el producto de dos grupos cíclicos. De hecho, ¡es el grupo de Klein!

LÉVI-STRAUSS: Otra de las cuestiones por las que los etnólogos nos interesamos al estudiar los matrimonios de una tribu consiste en saber si pueden encontrarse en

ella subpoblaciones que no mantienen lazos de parentesco entre sí. Se dice entonces que la sociedad es *reductible*. Déjeme que se lo muestre con un ejemplo. Supongamos que una tribu elemental formada por cuatro clanes presenta el intercambio restringido

(M_1) hombre A con mujer B
(M_2) hombre B con mujer A
(M_3) hombre C con mujer D
(M_4) hombre D con mujer C

$A \rightleftarrows B$
$C \rightleftarrows D$

y que los hijos pertenecen al mismo clan que su madre. El cálculo de las funciones f y g se realiza igual que siempre, pero no está de más recordarlo. En un matrimonio M_1, la mujer es del clan B, luego también lo son sus hijos. Un hombre B se casa de acuerdo con la regla M_2, así que $f(M_1) = M_2$, mientras que $g(M_1) = M_1$, pues las mujeres B deben atenerse a la primera regla. Siguiendo la misma estrategia para los otros matrimonios, se obtiene la tabla

Padres	M_1	M_2	M_3	M_4
Hijo $f(M_i)$	M_2	M_1	M_4	M_3
Hija $g(M_i)$	M_1	M_2	M_3	M_4

que pone de manifiesto que los clanes A y B nunca se cruzan con C y D. Por tanto, la sociedad es *reductible*. En caso contrario, diremos que es *irreductible*.

WEIL: Dese cuenta, señor Lévi-Strauss, de que basta con prestar atención a las sociedades irreductibles, porque cada tribu se descompone en subpoblaciones irreductibles. Esto es sólo un ejemplo de un principio general que se aplica a muchísimas ramas de las matemáticas: si cualquier objeto está formado por objetos simples y podemos controlar la descomposición, entonces es suficiente con estudiar estos últimos para comprenderlos todos. Traduzcamos, por tanto, la irreductibilidad al lenguaje de la teoría de grupos. Una sociedad es irreductible si y sólo si dos tipos de matrimonio cualesquiera están conectados entre sí por las permutaciones f y g, es decir, si se puede obtener uno a partir del otro aplicando estas operaciones. ¡No olvide que f y g permiten reconstruir todo el árbol genealógico! Está claro que esta propiedad no se verifica en la tribu de su ejemplo, porque aplicando f y g a M_1 sólo se pueden obtener los matrimonios M_1 y M_2. Sin embargo, nuestras dos primeras sociedades sí que eran irreductibles. Recordemos cómo era la tabla con la que empezamos:

Padres	M_1	M_2	M_3	M_4
Hijo $f(M_i)$	M_3	M_4	M_1	M_2
Hija $g(M_i)$	M_2	M_3	M_4	M_1

Voy a demostrarle que, a partir del matrimonio M_1, podemos obtener todos los demás. En efecto, aplicando f y g obtenemos, respectivamente, M_3 y M_2, ¡ningún misterio! Por otra parte, si hago actuar primero f y luego g, llego a M_4, en vista de las igualdades $g(f(M_1)) = g(M_3) = M_4$. Sólo nos falta ver cómo obtener M_i; una de las posibilidades es aplicando dos veces f, ya que $f^2(M_1) = f(M_3) = M_1$. ¡Ya están todos! Por tanto, la sociedad es irreductible.

LÉVI-STRAUSS: Un momento, ¿no tendría que demostrar que lo mismo es cierto si, en lugar de M_1, empezamos por M_2, M_3 y M_4?

WEIL: En realidad, no es necesario; déjeme explicarle por qué. Sabemos que, a partir de M_1 se pueden obtener todos los tipos de matrimonio. Imagine que quiere hacer lo mismo con alguno de los otros M_i. Llamemos h al elemento del subgrupo generado por f y g que le ha permitido ir de M_1 a M_i, es decir, que cumple la condición $h(M_1) = M_i$. Como estamos trabajando con un grupo, h posee un inverso h^{-1} que viaja en sentido contrario: aplicando h^{-1} a los dos lados de la igualdad tendremos $h^{-1}(h(M_1)) = h^{-1}(M_i)$. Ahora bien, h^{-1} compuesto con h es la identidad, ¡recuerde la definición del elemento inverso! Así, $M_1 = h^{-1}(M_i)$. Esto significa que, partiendo de M_i, podemos llegar a M_1. Como M_1 estaba conectado con los demás tipos de matrimonio, también lo estará cualquiera de los M_i. Los subgrupos de S_n que verifican esta propiedad se llaman *transitivos*. Así las cosas:

> Una tribu formada por n clanes es irreductible si y sólo si el subgrupo de S_n generado por las permutaciones f y g es transitivo.

Combinando este resultado con la proposición 1, nos damos cuenta de que, para estudiar las sociedades irreductibles que verifican nuestras tres hipótesis, es preciso saber a) qué subgrupos cíclicos de S_n son transitivos, y b) qué productos directos de dos subgrupos cíclicos de S_n son transitivos. Una observación general muy sencilla es que un subgrupo H de S_n sólo puede ser transitivo si tiene, al menos, n elementos. En efecto, supongamos que hubiese menos, digamos $m < n$, y llamemos $h_1, h_2 \ldots h_m$

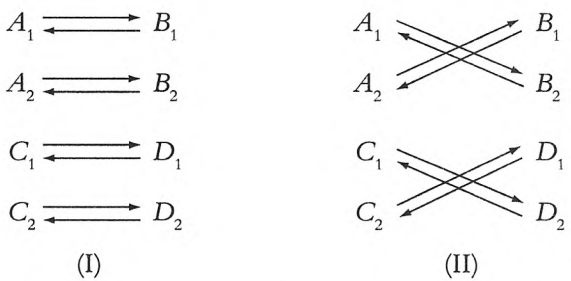
a los elementos de H. Entonces los matrimonios conectados con M_1 serán $h_1(M_1)$, $h_2(M_2)\ldots\ h_m(M_1)$. En el mejor de los casos, todos ellos serán distintos, pero nunca podrán ser todos, porque hay m, y m es menor que n. Echando mano de algunas propiedades más del grupo simétrico, no es demasiado difícil ver cuáles son los subgrupos cíclicos transitivos de S_n, pero dejémoslo: ¡si no, nunca terminaremos con los matrimonios!

La tribu de los murngin

LÉVI-STRAUSS: Aunque su explicación conceptual es mucho más satisfactoria que las que propusieron los primeros antropólogos, en todos los ejemplos que hemos considerado hasta ahora, ellos ya habían conseguido resolver el problema por enumeración explícita de todas las combinaciones posibles. Cuando la teoría de grupos resulta realmente imprescindible es cuando crece el número de clanes o las reglas de matrimonio alternan elementos exogámicos con otros endogámicos. Lo comprendí apenas empecé a estudiar la tribu de los murngin, unos aborígenes que viven en la punta norte de Australia, en la Tierra de Arnhem. Poco antes de que empezara mi tesis doctoral, uno de los mayores expertos en los aborígenes australianos, el padre Elkin, había escrito que no valía la pena emprender un análisis puramente formal de los sistemas de parentesco aborígenes porque no aportaría ningún conocimiento real de las costumbres de la tribu. Sin embargo, comprender bien la estructura de los murngin resultaba crucial, pues se trata de uno de los pocos sistemas de intercambio restringido que distinguen a los *primos cruzados*: permiten el matrimonio con la hija del hermano de la madre, pero lo prohíben con la hija de la hermana del padre. Como ninguno de los sistemas conocidos hasta el momento permitía explicar esta dicotomía, algunos autores habían optado por la solución más fácil: considerarlo un sistema sin patrón. Pero, ¿cómo podría una regla tan precisa como la dicotomía entre los primos cruzados, que es consecuencia lógica de una determinada configuración inicial, aparecer en un sistema que no se rige por ninguna norma?

La tribu de los murngin se divide en dos secciones, los yiritcha y los dua, cada una de ellas formada por cuatro clanes, que reciben los nombres de ngarit, bulain, kaijark, bangardi, buralang, balang, karmarung y warmut. Poco importan sus nombres: vamos a representarlos con los símbolos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 y D_2. Hasta aquí todo parece normal, pero enseguida se presenta una anomalía que caracteriza todos los sistemas de la región: los hombres no están siempre obligados a buscar a su mujer en la sección opuesta. De hecho, hay dos fórmulas alternativas (I) y (II), la

primera dentro de la misma mitad; la segunda, en la otra. Son las que aparecen representadas en la figura:



Lo que no puede variar en los murngin es la forma en la que la madre determina la clase de sus hijos. En este caso obedece a la siguiente regla:

Madre	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D_1	D_2
Hijos	C_2	C_1	D_2	D_1	A_1	A_2	B_1	B_2

WEIL: Para que esta sociedad satisfaga nuestras hipótesis es necesario suponer que el hecho de que un individuo se rija por la fórmula (I) o por la (II) depende únicamente de su sexo y del tipo de matrimonio (I) o (II) de sus padres. Por cada clan hay dos tipos de matrimonio, luego tenemos dieciséis reglas distintas. En lugar de numerarlas $M_1, M_2 \ldots M_{16}$, voy a describirle un sistema de notación más ingenioso, que facilitará los cálculos. En primer lugar, asignaremos a cada una de las clases de la tribu una terna (a, b, c) formada por ceros y unos, donde

a vale 0 si la clase es A o B, y 1 si la clase es C o D
b vale 0 si la clase es A o C, y 1 si la clase es B o D
c vale 0 si el número de la subclase es 1, y 1 si es 2.

Por ejemplo, un individuo de la clase A_1 será representado por la terna (0, 0, 0), mientras que a otro de la clase B_2 le corresponderá el elemento (0, 1, 1). Recíprocamente, si nos dan una terna de ceros y unos, por ejemplo (1, 0, 0), es posible reconstruir de manera única el clan con el que se identifica. En efecto, como la primera coordenada es 1, la clase será C o D. Puesto que la segunda coordenada es 0, sabemos también que la clase es A o C, luego la única posibilidad compatible con las dos condiciones es que el individuo pertenezca al clan C. Como la última coordenada es 0, se trata de un miembro de la clase C_1.

LÉVI-STRAUSS: Ahora hay que representar los matrimonios...

WEIL: En efecto. Si a cada clan le hemos asignado una terna (a, b, c), añadiremos todavía una cuarta coordenada para especificar la fórmula del matrimonio. Así, cada uno de los M_i será sustituido por cuatro números (a, b, c, d), que sólo pueden tomar los valores cero y uno. Los tres primeros (a, b, c) indican el clan del hombre que se casa, y el cuarto vale 0 o 1 en función de que el matrimonio se realice según la fórmula (I) o (II). Por ejemplo, en el matrimonio $(1, 0, 0, 1)$, un hombre de clase $(1, 0, 0)$, es decir, C_1, se casa según la fórmula (II); por tanto, se casa con una mujer de tipo D_2, es decir $(1, 1, 1)$. Esto determina también el tipo de los hijos, que serán en este caso de la clase B_2, o sea $(0, 1, 1)$. En resumen:

Tipo de matrimonio	$(1, 0, 0, 1)$
Clan del padre	$(1, 0, 0)$
Clan de la madre	$(1, 1, 1)$
Clan de los hijos	$(0, 1, 1)$.

La razón más importante para introducir este simbolismo de ceros y unos es que, gracias a él, podemos expresar las relaciones de parentesco sumando en el grupo cíclico $\mathbb{Z}/2$. Para ser estrictamente rigurosos, tendríamos que escribir todos los ceros y unos entre corchetes, pero prefiero no complicar más la notación. Gracias a este formalismo, la situación del ejemplo precedente se generaliza a través de los dos lemas que voy a enunciarle a continuación:

Lema 1. En un matrimonio de tipo (a, b, c, d), la mujer pertenece al clan $(a, b+1, c+d)$.

En efecto, los hombres que se casan según la regla (a, b, c, d) son del clan (a, b, c). La primera observación es que, sea cual sea la fórmula del matrimonio, los individuos de los clanes A y B se casan entre sí, y lo mismo ocurre con C y D. Como a vale 0 si la clase es A o B, y 1 si la clase es C o D, la primera coordenada asociada a la mujer coincidirá con la del hombre. Veamos qué ocurre con la segunda; para ello volvamos a señalar que, con independencia de la fórmula del matrimonio, los hombres de las clases A y C se casan, respectivamente, con las mujeres de B y D. Por tanto, si $b=0$, la segunda coordenada de la mujer será 1. Del mismo modo, los hombres de los clanes B y D contraen matrimonio con mujeres A y C, luego si $b=1$, entonces la

segunda coordenada de la mujer será 0. En los dos casos b se transforma en $b+1$, pues $0+1=1$ y $1+1=0$ en $\mathbb{Z}/2$. Ya sólo queda estudiar cómo varía la tercera coordenada, que representa la subclase. Ésta es la única parte que depende de las fórmulas (I) y (II). Si estamos en el primer caso, es decir, si $d=0$, entonces todos los hombres se casan con mujeres de su misma subclase, luego la tercera coordenada no varía. Sin embargo, de acuerdo con la fórmula (II), es decir, cuando $d=1$, las subclases se intercambian. Pero esto no es más que el efecto de sumar d a la última coordenada. ¡Lema demostrado! Un razonamiento análogo permite determinar la clase a la que pertenecen los hijos en función de la de la madre; pruebe a hacerlo:

Lema 2. Los hijos de una mujer de clase (x, y, z) pertenecen al clan $(x+1, y, x+z+1)$.

Ahora que sabemos cómo determina el clan de la mujer cada uno de los matrimonios y cómo ella lo transmite a sus hijos, podemos combinar ambos resultados para describir el clan de la descendencia en función del tipo de matrimonio de los padres. Supongamos que partimos de un matrimonio (a, b, c, d). Por el primer lema, la mujer será de clase $(a, b+1, c+d)$. Si sustituimos ahora en el enunciado del segundo lema $x=a$, $y=b+1$, $z=c+d$, llegamos a la conclusión de que los hijos serán de clase $(a+1, b+1, a+c+d+1)$. En definitiva:

Lema 3. Los hijos de un matrimonio de tipo (a, b, c, d) pertenecen al clan $(a+1, b+1, a+c+d+1)$.

LÉVI-STRAUSS: Por tanto, la única información que falta para determinar las funciones f y g es cómo heredan los hijos la preferencia por el modelo (I) o (II). El trabajo de campo indica que sólo se pueden producir estas cuatro situaciones:

(1) Los hijos mantienen la fórmula de los padres.
(2) Los hijos invierten la fórmula de los padres.
(3) Los hijos varones mantienen la fórmula y las hijas la invierten.
(4) Los hijos varones invierten la fórmula y las hijas la conservan.

WEIL: Cada uno de estos casos lo simbolizaremos con dos índices (p, q), donde p toma el valor 0 si los hijos varones siguen la fórmula de matrimonio de los padres, y el valor 1 en caso contrario, y lo mismo ocurre con q para las hijas. De este modo, las cuatro posibilidades que usted ha mencionado se convierten en $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Dese cuenta, señor Lévi-Strauss, que si un matrimonio se regía por la fórmula asociada a la coordenada d, entonces los hijos varones obedecerán la regla $d+p$, y las mujeres, $d+q$. Con estos datos ya podemos escribir la función f. Empezando por un matrimonio (a, b, c, d), sabemos por el lema 3 que los hijos pertenecen al clan $(a+1, b+1, a+c+d+1)$ y, por las consideraciones que acabamos de hacer, que su fórmula de matrimonio es $d+p$. Por tanto:

$$f(a, b, c, d) = (a+1, b+1, a+c+d+1, d+p).$$

Para calcular g, todavía hay que dar un paso más. Aunque sabemos que las hijas de un matrimonio (a, b, c, d) son de clase $(a+1, b+1, a+c+d+1)$, las tres primeras coordenadas del matrimonio que debemos asignarles no representan su clan, sino el del hombre con el que se casarán. Por tanto, hay que ver a qué clase pertenecen los hombres que se unen con las mujeres de clase $(a+1, b+1, a+c+d+1)$ según la fórmula $d+q$. En realidad, necesitamos un resultado complementario al lema 1. Voy a recordarle lo que dice, cambiando las letras para que no nos confundamos:

> **Lema 1.** En un matrimonio de tipo (x, y, z, t), la mujer pertenece a la clase $(x, y+1, z+t)$.

Nosotros sabemos que $t = d+q$ y que $(x, y+1, z+t) = (a+1, b+1, a+c+d+1)$, pues éste es el clan al que pertenece la mujer. Igualando coordenada a coordenada, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$x = a+1, \qquad y+1 = b+1, \qquad z+d+q = a+c+d+1,$$

en las que he sustituido t por su valor $d+q$. Con la primera no hay que hacer nada, ya conocemos el valor de x. Espero que no haya olvidado la propiedad de eliminación que le expliqué la vez pasada, señor Lévi-Strauss. Si la aplicamos a las dos últimas ecuaciones, tendremos

$$y = b, \qquad z+q = a+c+1.$$

Esto resuelve el valor de y. Para calcular el de z, observemos que en el grupo cíclico $\mathbb{Z}/2$, el resultado de sumar un elemento consigo mismo es siempre cero, pues $0+0=1+1=0$. Así, si sumo q a los dos lados de la igualdad tendré $z=a+c+q+1$. En resumen, si una mujer de clase $(a+1, b+1, a+c+d+1)$ se casa según la fórmula $d+q$, entonces su tipo de matrimonio completo es

$$g(a, b, c, d) = (a+1, b, a+c+q+1, d+q).$$

LÉVI-STRAUSS: Ya me acuerdo de por qué le pedí ayuda, señor Weil...

WEIL: Tengo que reconocer, señor Lévi-Strauss, que a mí también me costó un tiempo dar con el formalismo... Lo importante es que, una vez que hemos calculado las funciones f y g, responder a su pregunta de cómo deben transmitirse las fórmulas (I) y (II) a los hijos para que, en la siguiente generación, un hombre siga pudiendo casarse con la hija del hermano de su madre es automático. Hemos quedado en que esta propiedad es equivalente a la conmutatividad de las permutaciones f y g. Hagamos el cálculo. Por una parte:

$$\begin{aligned} g(f(a, b, c, d)) &= g(a+1, b+1, a+c+d+1, d+p) \\ &= ((a+1)+1, b+1, (a+1)+(a+c+d+1)+q+1, (d+p)+q) \\ &= (a, b+1, c+d+q+1, d+p+q), \end{aligned}$$

ya que podemos simplificar los elementos que aparecen sumados dos veces en cada una de las coordenadas. Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(g(a, b, c, d)) &= f(a+1, b, a+c+q+1, d+q) \\ &= ((a+1)+1, b+1, (a+1)+(a+c+q+1)+(d+q)+1, (d+q)+p) \\ &= (a, b+1, c+d+1, d+p+q), \end{aligned}$$

una vez efectuadas las mismas simplificaciones. Así, la condición que debe verificarse es la siguiente:

$$(a, b+1, c+d+q+1, d+p+q) = (a, b+1, c+d+1, d+p+q).$$

Como la primera, la segunda y la cuarta coordenadas coinciden, sólo tenemos que preocuparnos por la tercera. Gracias a la propiedad de eliminación, la igualdad $c+d+q+1=c+d+1$ equivale a $q=0$. Recuerde que esto significa que la fórmula

de matrimonio de las hijas debe coincidir con la de los padres, luego la propiedad buscada sólo se cumple en las sociedades en las que la fórmula del matrimonio se transmite según los modelos (1) o (4), es decir: o bien los hijos de ambos sexos la mantienen, o bien los hijos varones la invierten, mientras que las mujeres la conservan. Vamos a estudiar estos dos casos.

La primera de las sociedades es claramente reductible: al coincidir siempre la fórmula (I) o (II) de los hijos con la de sus padres, el tipo de matrimonio se mantiene a través del árbol genealógico. Así, la tribu se descompone en dos subpoblaciones: los que se casan según la fórmula (I) y quienes lo hacen de acuerdo con la (II). Como se ve en la tabla, los elementos f y g son ambos de orden cuatro, pero sus cuadrados coinciden:

f	$(a+1, b+1, a+c+d+1, d)$	$(a+1, b, a+c+1, d)$	g
f^2	$(a, b, c+1, d)$	$(a, b, c+1, d)$	g^2
f^3	$(a+1, b+1, a+c+d, d)$	$(a+1, b, a+c, d)$	g^3
f^4	(a, b, c, d)	(a, b, c, d)	g^4

LÉVI-STRAUSS: Eso significa que en esta tribu un hombre se puede casar con la hija de la hermana de su padre.

WEIL: La igualdad $f^2=g^2$ también implica que el grupo generado por f y g no tiene dieciséis elementos, como cabría esperar, sino sólo ocho: $e, f, f^2, f^3, g, fg, f^2g$ y f^3g; por tanto, la sociedad es reductible. De hecho, este grupo es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4$.

LÉVI-STRAUSS: Estudiemos el caso que falta. En él, los hijos varones invierten la fórmula de matrimonio de los padres, y las hijas la preservan, luego $p=1$ y $q=0$. Por tanto, las funciones f y g valen:

$$f(a, b, c, d)=(a+1, b+1, a+c+d+1, d+1), \qquad g(a, b, c, d)=(a+1, b, a+c+1, d);$$

g es la misma que antes, ya sabemos que tiene orden cuatro. Calculemos el orden de f. Para ello hay que aplicarla repetidamente hasta llegar a la identidad. Pero, si no me equivoco, en este caso basta con hacerlo dos veces, pues

$$\begin{aligned} f^2(a, b, c, d) &= f(a+1, b+1, a+c+d+1, d+1) \\ &= ((a+1)+1, (b+1)+1, (a+1)+(a+c+d+1)+(d+1)+1, (d+1)+1) \\ &= (a, b, c, d), \end{aligned}$$

con las simplificaciones que me ha enseñado. Vemos además que f y g son independientes, luego el subgrupo que generan es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4$. Esto basta para demostrar que esta tribu tampoco es irreductible, pues no hay elementos suficientes en el grupo $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4$, que tiene orden ocho, para transformar los dieciséis tipos de matrimonio entre sí.

WEIL: ¡Enhorabuena, señor Lévi-Strauss! ¡Lo ha entendido todo! En este caso también se puede comprobar que la sociedad es reductible mediante un método más directo; voy a explicarle cómo para que aprenda una nueva técnica. Partamos de un matrimonio de tipo (a, b, c, d). Según nuestros cálculos, los hijos varones se casan por $(a+1, b+1, a+c+d+1, d+1)$. La observación crucial es que, si hago la diferencia entre la segunda y la cuarta coordenada, obtengo:

$$(b+1)-(d+1)=b-d,$$

¡la misma con la que había empezado! Los matemáticos decimos que esta cantidad es *invariante* por la acción de f. Lo sigue siendo, con más razón, cuando aplico g, porque en ese caso la segunda y la cuarta coordenadas no cambian. Por tanto, la composición sucesiva de f y g sólo nos permitirá llegar a los matrimonios en los que $b-d$ tenga el mismo valor de partida. Por ejemplo, comenzando con (1, 1, 1, 0) nunca podremos obtener (1, 0, 1, 0), pues en el primer caso la diferencia entre la segunda y la cuarta coordenada es 1, mientras que en el segundo vale 0. Eso significa que los individuos de clase D_2 que se casan según la regla (I) pertenecen a una subpoblación distinta que los de clase C_2 que obedecen la misma fórmula. Con un poco más de trabajo, estas dos subpoblaciones se pueden determinar explícitamente:

Sexo	Clase	Fórmula
Hombre	*A* o *C*	(I)
Hombre	*B* o *D*	(II)
Mujer	*A* o *C*	(II)
Mujer	*B* o *D*	(I)

Primera subpoblación.

Sexo	Clase	Fórmula
Hombre	*A* o *C*	(II)
Hombre	*B* o *D*	(I)
Mujer	*A* o *C*	(I)
Mujer	*B* o *D*	(II)

Segunda subpoblación.

LÉVI-STRAUSS: Cualquiera diría que los murngin conocen la teoría de grupos...

WEIL: Cuando pienso que un sistema que, a primera vista, amenazaba con ser de una complejidad indescifrable se transforma en algo tan sencillo como un grupo abeliano después de introducir la notación conveniente, cruza por mi cabeza la palabra milagro. No me atrevería a decir que la tribu ha adoptado el principio de que cualquier hombre pueda casarse con la hija del hermano de su madre para tener contentos a los matemáticos —eso sería ir demasiado lejos—, pero tengo que reconocer que todavía hoy sigo sintiendo una ternura especial por los murngin. Con ejemplos como éste, es difícil no acordarse del soneto en el que Miguel Ángel explica cómo el bloque de mármol ya contiene la obra esculpida, de modo que el trabajo del artista se reduce a quitar lo que sobra:

«Non ha l'ottimo artista alcun concetto
c'un marmo solo in sé non circonscriva
col suo superchio, e solo a quello arriva
la man che ubbidisce all'intelletto».[2]

También el matemático es un gran escultor de una materia extremadamente dura y resistente. Tan sometido está a sus imperfecciones que eso confiere a la obra una especie de objetividad.

2 Nada concibe el escultor perfecto / que un mármol solo en sí no circunscriba / con su exceso; mas sólo lo reaviva / la mano que obedece al intelecto. (Trad. Joaquín Arce, Cuadernos del Instituto Italiano de Cultura, n.° 5, Madrid, 1964).

Capítulo 5

Bajo el signo de Diofanto

Fourier opinaba que el fin principal de las matemáticas era la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber sabido que el único fin de la ciencia es el honor del espíritu humano y que, a este propósito, una cuestión de números vale lo mismo que una pregunta sobre el sistema del mundo.
C.G.J. Jacobi, carta a Legendre

LÉVI-STRAUSS: ¿Se acuerda de que en una de nuestras conversaciones me prometió que me explicaría con más detalle aquel problema de su tesis doctoral?

WEIL: ¡Cómo iba a olvidarlo! Pero esta vez, si le parece, cambiaremos de método. He escrito unas notas bastante detalladas para que las lea y luego pueda preguntarme lo que no entienda. ¡Adelante!

*****

Casi todo son conjeturas en la vida del matemático Diofanto de Alejandría. Sólo sabemos con certeza la edad a la que murió, gracias a un epitafio en forma de adivinanza recogido en la *Antología Palatina*. Dice así: «Caminante, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su infancia ocupó la sexta parte; después, durante la doceava parte su barba se cubrió de vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad a la que falleció su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad». En efecto, si llamamos x al número de años que vivió Diofanto, el epitafio se traduce a la ecuación de primer grado

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

y, tras unas pocas manipulaciones elementales, podemos concluir que Diofanto vivió 84 años. Esta ecuación es mucho más sencilla que las que le valieron al sabio alejandrino un lugar en la historia de las matemáticas. En los libros que componen la *Aritmética*, Diofanto inició el estudio de las raíces enteras de las ecuaciones polinomiales, que hoy llamamos *diofánticas* en su honor. A esta clase pertenece, por ejemplo, $x^n+y^n=z^n$. Cuando el exponente vale 2, existen infinitas soluciones positivas, pero si n es mayor o igual que 3, entonces no hay ninguna. El primero en darse cuenta fue el francés Pierre de Fermat, precisamente mientras estudiaba la *Aritmética* de Diofanto. En sus páginas escribió que conocía una demostración maravillosa, pero que no había suficiente espacio en los márgenes para desarrollarla. Tres siglos y medio fueron necesarios para dar con la primera prueba del que comenzó a llamarse «el último teorema de Fermat», y en ella intervenían técnicas muchísimo más complejas que las que el matemático francés pudo tener al alcance de la mano. A pesar de su apariencia inocente, las ecuaciones diofánticas se encuentran entre los problemas más duros de las matemáticas. Por eso aquí nos limitaremos a los casos más sencillos: las ecuaciones lineales, la ecuación de Pell-Fermat y las curvas elípticas.

Algunos preliminares

Necesitaremos algunos preliminares para abordar el estudio de las ecuaciones diofánticas. Como a lo largo de estas notas irán apareciendo distintas clases de números, no está de más que digamos algo sobre ellos. Tenemos, por un lado, los números *naturales*, que son los que sirven para contar: 0, 1, 2, 3... Dados dos números naturales, podemos calcular su suma, pero esta operación no forma un grupo porque, para que existiese un elemento inverso, tendríamos que tener en cuenta también los negativos. Al añadirlos, se obtienen el grupo abeliano de los números *enteros*: 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3... En realidad, esta estructura es un poco más rica, porque disponemos de dos operaciones en lugar de una: no sólo podemos sumar, sino también multiplicar. Sin embargo, la multiplicación de los enteros no nulos sufre el mismo problema: no define una estructura de grupo, porque para que —pongamos— el elemento 2 tuviera un inverso, tendríamos que considerar también el número 1/2. Este problema se resuelve considerando todas las fracciones a/b, donde a y b son dos números enteros (b distinto de cero), que forman el conjunto de los números *racionales*. Podemos asociar a cada uno de ellos una expresión decimal periódica: por ejemplo, 1/3 es 0,3333... y 2/11 es 0,181818... Ahora bien, si sólo permitimos expresiones periódicas, ecuaciones tan sencillas como $x^2=2$ no tienen solución,

pues el desarrollo decimal de la raíz cuadrada de 2 no es periódico; es lo que se llama un número *irracional*. Para obtener aún más soluciones, podemos considerar todas las expresiones decimales, aunque en ellas no se pueda encontrar ningún patrón que se repite. Y ésos son los números *reales*.

Pero volvamos a los *naturales* que, según Kronecker, son obra de Dios. Dados dos números naturales m y n, se dice que *m divide a n*, o que *n es divisible por m*, o todavía que *m es un divisor de n*, si el resultado de dividir n entre m es otro número natural. Por ejemplo, 2 divide a 10 porque 10 entre 2 es 5, que es un número natural; pero 2 no divide a 15, ya que 15 entre 2 es 7,5; el resultado no es «exacto». Así, cuando n es divisible por m, existe otro número natural k tal que n es el producto de m y k: $n = m \cdot k$. Observemos que los divisores de un número son siempre menores o iguales que él, y que cualquier número es divisible por 1 y por sí mismo. Algunas veces éstos son todos los divisores: decimos en ese caso que el número es *primo*. Así, 5 es primo porque ni 2, ni 3, ni 4 lo dividen, pero 6 no lo es, ya que es divisible por 2 y por 3. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... y se puede demostrar que la lista no termina nunca.

La importancia de los números primos radica en que son los ladrillos fundamentales de la aritmética: todos los demás números se obtienen a partir de ellos. En efecto, si n no es un número primo, entonces existe un número natural estrictamente comprendido entre 1 y n que lo divide. Esto da lugar a una descomposición $n = a \cdot b$. Por ejemplo, si el número de partida fuese 30, entonces tendríamos $30 = 2 \cdot 15$. Hemos obtenido así dos números a y b a los que podemos aplicar de nuevo el proceso. Si los dos son primos, ya hemos terminado; pero, si alguno de ellos no lo fuera, volveríamos a escribirlo como producto de dos factores. En el ejemplo, 2 es primo, pero 15 se puede descomponer como 3 por 5, de modo que $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Como ahora todos los factores son primos, el juego ha terminado. En general, en cada paso encontraremos un factor primo o una descomposición en dos números menores, lo cual garantiza que el algoritmo se detendrá antes o después.

Teorema fundamental de la aritmética. Todo número natural se descompone como producto de primos.

Pese a la sencillez del argumento con el que hemos demostrado el teorema fundamental de la aritmética, el problema de descomponer un número en factores primos puede ser irresoluble en la práctica. Por ejemplo, si n fuese el producto de dos

números primos p y q de unas cuatrocientas cifras cada uno, hasta los ordenadores más potentes tardarían la edad del universo en factorizarlo. Como veremos más adelante, éste es uno de los principios en los que reposa el *sistema criptográfico de clave pública* RSA, que garantiza la seguridad de todas nuestras transacciones informáticas.

Introduzcamos ahora un nuevo concepto: dados dos números naturales m y n, llamaremos *máximo común divisor* al mayor número natural que divide al mismo tiempo a m y a n. Para abreviar, escribiremos $\mathrm{mcd}(m,n)$. Cuando se dispone de las factorizaciones de m y n, el cálculo del máximo común divisor es muy sencillo: se trata de tomar los números primos que aparecen en ambas descomposiciones, elevados al mínimo exponente. Supongamos que se quiera calcular el máximo común divisor de $50 = 2 \cdot 5^2$ y de $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Los números primos comunes son 2 y 5, que aparecen con exponentes 3 y 1 en el primer caso, y 1 y 2, en el segundo. Así, el máximo común divisor será $2^1 \cdot 5^1 = 10$. Sin embargo, ya hemos dicho que factorizar un número es, en la práctica, un problema irresoluble, por lo que este método fallará cuando m y n sean números muy grandes. Por suerte, disponemos de otro procedimiento para calcular el máximo común divisor que se conoce con el nombre de *algoritmo de Euclides*. Consiste en lo siguiente: supongamos que m es mayor que n. Como primer paso, dividimos m por n. Pueden ocurrir dos cosas: si el resto es cero, entonces n divide a m, luego n es el máximo común divisor. Si no, volvemos a repetir el proceso sustituyendo m por n, y n, por el resto r de la división, pues se puede demostrar que el máximo común de m y n coincide con el de n y r[1]. Continuemos con nuestro ejemplo: el resto de dividir 120 entre 50 es 20, luego aplicamos el algoritmo a 50 y a 20. El resto de dividir 50 entre 20 es 10, así que empezamos de nuevo con 20 y 10. Pero esta vez la división es exacta, lo cual muestra que el máximo común divisor es 10. De hecho, este algoritmo nos da más información: si nos fijamos en la última división cuyo resto no sea cero, podemos escribir $10 = 50 - 2 \cdot 20$. Como, dando un paso atrás, sabemos que $20 = 120 - 2 \cdot 50$, si sustituimos el valor de 20 en la primera igualdad, obtendremos una relación con coeficientes enteros entre 120, 50 y 10:

$$10 = 50 - 2 \cdot (120 - 2 \cdot 50) = 5 \cdot 50 - 2 \cdot 120.$$

---

1 ¡Demostrémoslo! Sea $d = \mathrm{mcd}(m,n)$ y supongamos que la división m entre n tiene cociente t y resto r, es decir: $m = nt + r$. Observemos, en primer lugar, que d divide a r. En efecto, por definición existen enteros p y q tales que $m = dp$ y $n = dq$. Sustituyendo, se tiene que $r = m - nt = dp - dqt = d(p - qt)$, luego d divide a r. Para concluir que $\mathrm{mcd}(n,r) = d$, basta con demostrar que no puede existir un divisor común mayor que d. Esto se deduce de nuevo de la fórmula $m = nt + r$, pues, si lo hubiera, entonces dividiría también a m y sería, por tanto, un divisor común de m y n mayor que d, lo cual contradice el hecho de que d es el máximo.

En general, gracias al algoritmo de Euclides no sólo puede calcularse el máximo común divisor de forma efectiva, sino que además se tiene que:

Proposición. Sean m y n dos números naturales. Llamemos d a su máximo común divisor. Entonces existen dos números enteros u y v tales que $d = mu + nv$.

Un caso particularme interesante se produce cuando m y n no tienen divisores comunes. Entonces su máximo común divisor es 1 y decimos que son *coprimos* o *primos entre sí*. De acuerdo con la proposición que acabamos de enunciar, existen dos números enteros u y v tales que $mu + nv = 1$. Esta relación recibe el nombre de *identidad de Bézout*.

Otra propiedad fundamental es la siguiente: si un número a divide a un producto bc, y sabemos que a y b son primos entre sí, entonces necesariamente a divide a c. En efecto, de no ser el caso, algún factor primo de a aparecería también en b, y los números no serían coprimos. Por otra parte, si d es el máximo común divisor de a y b, entonces existen dos números enteros p y q tales que $a = dp$, $b = dq$. Esto ocurre siempre que tenemos un divisor común, pero el hecho de que d sea el máximo nos permite afirmar que p y q son primos entre sí, pues, si no lo fueran, a y b tendrían un divisor común mayor que d.

Las ecuaciones lineales

Ya estamos en condiciones de resolver las ecuaciones diofánticas de la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son tres números enteros cualesquiera. Resolver esta ecuación significa encontrar todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la relación $ax + by = c$. Veamos cómo hacerlo: llamemos d al máximo común divisor de a y b. Por definición, d divide a los números a y b, luego también divide a toda la expresión $ax + by$. Ahora bien, como la ecuación que nos ocupa establece que $ax + by = c$, el número d tiene que dividir a c. Por tanto, si d no divide a c, entonces no existen soluciones. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con $50x + 120y = 7$. Según nuestros cálculos, el máximo común divisor de 50 y 120 es 10, que no divide a 7. De ahora en adelante supondremos que d divide a c.

Entonces podemos escribir $a = dp$, $b = dq$ y $c = dr$, con p y q primos entre sí. Estudiaremos primero el caso en el que $c = 0$, es decir, la ecuación *homogénea* $ax + by = 0$.

Dividiendo por d el primer término, vemos que basta con resolver la ecuación $px+qy=0$, o lo que es lo mismo, $px=-qy$. Para hacerlo razonamos del siguiente modo: como px es igual a $-qy$, el número p divide a qy. Ahora bien, p y q son primos entre sí, luego la única posibilidad es que p divida a y, es decir, que exista un número entero λ tal que $y=\lambda p$. De forma análoga, se demuestra que q divide a x, así que existirá otro entero μ tal que $x=\mu q$. Al sustituir los valores de x e y en la ecuación, se tiene que $\mu pq=-\lambda pq$, o sea, $\mu=-\lambda$, ya que el producto pq es distinto de cero. Por tanto, las soluciones a la ecuación $ax+by=0$ son el par $(q,-p)$ y todos sus múltiplos $(\lambda q,-\lambda p)$.

Supongamos ahora que c es distinto de cero. Si se conocen dos soluciones (x_0, y_0) y (x_1, y_1) de la ecuación $ax+by=c$, entonces:

$$a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)=(ax_0+by_0)-(ax_1+by_1)=c-c=0,$$

de donde se deduce que (x_0-x_1, y_0-y_1) es una solución de la ecuación homogénea $ax+by=0$. Como todas las soluciones a esta ecuación son de la forma $(\lambda q, -\lambda p)$, existirá un número entero λ tal que $x_0-x_1=\lambda q$ e $y_0-y_1=-\lambda$p, o lo que es lo mismo: $x_1=x_0-\lambda q$ e $y_1=y_0+\lambda p$. Dicho de otro modo: existen infinitas soluciones, pero todas ellas se deducen a partir de una solución particular (x_0, y_0). De hecho, recordando que p y q son el resultado de dividir a y b entre el máximo común divisor, hemos demostrado que todas las soluciones son:

$$\begin{cases} x = x_0 - \lambda \dfrac{b}{mcd(a,b)} \\ y = y_0 + \lambda \dfrac{a}{mcd(a,b)} \end{cases},$$

donde (x_0, y_0) es una solución particular, y λ es cualquier número entero. Por tanto, sólo nos falta describir un método para encontrar (x_0, y_0). Pero eso es fácil cuando sabemos que p y q son primos entre sí, pues, gracias a la identidad de Bézout, existen dos enteros u y v tales que $pu+qv=1$. Multiplicando u y v por r, obtenemos dos números $x_0=ur$ e $y_0=vr$ tales que $ax_0+by_0=c$.

Veamos un ejemplo: supongamos que se quiere resolver la ecuación diofántica $50x+120y=20$. Ya hemos dicho que el máximo común divisor de 50 y 120 es 10. Como 10 divide a 20, la ecuación tiene solución. En este caso, la forma simplifica-

da no es otra que $5x+12y=2$. Calculemos los números que hemos llamado u y v. Como $1=5-2\cdot 2$ y $2=12-2\cdot 5$, se tiene que

$$1=5-2\cdot(12-2\cdot 5)=5\cdot 5-2\cdot 12,$$

es decir: $u=5$ y $v=-2$. Multiplicando por 2 obtenemos la solución particular $(10,-4)$, a partir de la cual se pueden calcular todas:

$$\begin{cases} x=10-12\lambda \\ y=-4+5\lambda \end{cases}.$$

Una breve digresión sobre la criptografía

Veamos cómo intervienen las ecuaciones diofánticas lineales en el *sistema criptográfico de clave pública*. Recordemos que, dado un número natural n, el grupo de los enteros módulo n estaba formado por los elementos $[0]$, $[1]$, $[2]\ldots$ $[n-1]$, y que la «suma del reloj» se realizaba del siguiente modo: primero se sumaban los elementos como si fueran dos números normales, pero a continuación se restaba n al resultado las veces que hicieran falta para obtener un número comprendido entre 0 y $n-1$. De hecho, lo mismo podemos hacer con la multiplicación. Por ejemplo, si $n=7$, para calcular el producto $4\cdot 5$, lo hacemos primero como si se tratase de dos números enteros. Así obtendríamos 20, pero aún hay que restar 7 tantas veces como sea necesario: si lo hacemos una vez, tenemos 13, y si volvemos a restar, llegamos a 6, que es menor que 7. Establecemos, por tanto, que el producto de 4 y 5 es 6 módulo 7. Dicho esto, vayamos con la criptografía.

Supongamos que Bob quiere enviar un mensaje secreto a Alice. Como cualquier tipo de información se puede codificar numéricamente, basta con resolver el problema de cómo mandar un número m de forma segura. Bob conoce la *clave pública* de Alice, que está al alcance de todos, y Alice dispone de una *clave privada*, que sólo ella conoce. Hay que distinguir tres fases: la generación de las claves, el cifrado del mensaje y la descodificación.

Veamos primero cómo se generan las claves. Se eligen dos números primos p y q. En principio, basta con que el producto de p y q, que llamaremos n, sea mayor que el número m que quiere transmitirse; pero el método sólo será seguro cuando p y q sean lo bastante grandes para que ningún ordenador pueda factorizar n en un tiempo razonable. Digamos, por tanto, que se eligen p y q, dos números primos

de entre trescientas y cuatrocientas cifras cada uno. Ahora introducimos la cantidad $r=(p-1)(q-1)$ y elegimos un número e menor que r y coprimo con él. El par (n, e) forma la clave pública. Para calcular la clave privada hay que resolver la ecuación diofántica $ex+ry=1$. Si llamamos d a la primera coordenada de una solución, entonces la clave privada es el par (n, d).

Una vez que se dispone de ambas claves, el sistema criptográfico funciona del siguiente modo: Bob codifica el mensaje elevando el número m a la potencia e, reduce el resultado módulo n y envía esta cantidad $c=m^e$ (módulo n) a Alice. Para descifrar el mensaje, Alice eleva c a la potencia d establecida por la clave privada y reduce módulo n. Esta sencilla operación basta para recuperar la información porque se puede demostrar que c^d módulo n es siempre igual a m.

La ecuación de Pell-Fermat

Una vez que hemos resuelto completamente el caso de las ecuaciones diofánticas lineales, pasemos a estudiar las de segundo grado. Nos centraremos en la ecuación $x^2-dy^2=1$, donde d es un número entero positivo.

Se trata de un problema con una larga historia que aparece en la literatura bajo el nombre de ecuación de Pell-Fermat, aunque John Pell nunca trabajó en él. Fue Euler quien le atribuyó erróneamente un método de resolución que había encontrado el matemático inglés William Brouncker en respuesta a un desafío de Fermat. Supondremos primero que d es igual a 1, es decir, que se intentan calcular las soluciones enteras de la ecuación $x^2-y^2=1$. Como una resta de cuadrados siempre se puede escribir en forma de producto gracias a la fórmula

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$

hay que resolver la ecuación $(x+y)(x-y)=1$. La única forma de que el producto de dos números enteros valga 1 es que los dos factores sean iguales a 1 o a -1. Examinemos los dos casos independientemente. En el primero se tiene:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases},$$

y, sumando las dos ecuaciones, vemos que $2x=2$, luego $x=1$ e $y=0$. Del mismo modo, las soluciones del sistema $x+y=x-y=-1$ son $x=-1$ e $y=0$. Por tanto, la

ecuación $x^2-y^2=1$ tiene sólo dos soluciones enteras: $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Este mismo estudio permite excluir el caso en el que d es un *cuadrado perfecto*, digamos $d=e^2$, porque entonces $x^2-dy^2=x^2-e^2y^2=x^2-(ey)^2$, y el cambio de variable $z=ey$ nos devuelve a la misma ecuación $x^2-z^2=1$, cuyas soluciones ya conocemos. De ahora en adelante vamos a suponer que d es un número entero mayor o igual que 2, que no es un cuadrado perfecto.

Una parte esencial del análisis de las ecuaciones de primer grado consistió en ver cómo, a partir de dos soluciones de $ax+by=c$, se obtenía un par de enteros (x, y) tales que $ax+by=0$. En este caso veremos que, si se dispone de dos soluciones de la ecuación de Pell-Fermat, podemos obtener una tercera. La idea básica es factorizar la expresión x^2-dy^2 como

$$x^2-dy^2=(x+y\sqrt{d})(x-y\sqrt{d}).$$

Estos factores ya no son números enteros (en ellos aparece la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto), luego no podemos concluir que ambos valen 1 o -1. Sin embargo, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son soluciones de la ecuación, entonces:

$$\begin{cases}(x_1+y_1\sqrt{d})(x_1-y_1\sqrt{d})=1\\(x_2+y_2\sqrt{d})(x_2-y_2\sqrt{d})=1\end{cases}.$$

Multiplicando las dos ecuaciones, tendremos:

$$(x_1+y_1\sqrt{d})(x_1-y_1\sqrt{d})(x_2+y_2\sqrt{d})(x_2-y_2\sqrt{d})=1. \quad (*)$$

Vamos a comenzar reagrupando los dos términos con el signo positivo en medio:

$$(x_1+y_1\sqrt{d})(x_2+y_2\sqrt{d})=x_1x_2+x_1y_2\sqrt{d}+x_2y_1\sqrt{d}+y_1y_2(\sqrt{d})^2.$$

La primera observación crucial es que el producto de los dos factores vuelve a tener la misma estructura, ya que $(\sqrt{d})^2$ coincide con d por definición. De hecho, si introducimos la notación $x_3=x_1x_2+dy_1y_2$ e $y_3=x_1y_2+x_2y_1$, se tiene la igualdad:

$$(x_1+y_1\sqrt{d})(x_2+y_2\sqrt{d})=x_3+y_3\sqrt{d}.$$

Como también es cierto que

$$(x_1 - y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}) = x_1x_2 - x_1y_2\sqrt{d} - x_2y_1\sqrt{d} + y_1y_2(\sqrt{d})^2 = x_3 - y_3\sqrt{d},$$

podemos reescribir la ecuación (*) bajo la forma:

$$(x_3 + y_3\sqrt{d})(x_3 - y_3\sqrt{d}) = 1.$$

Esta igualdad muestra que (x_3, y_3) es de nuevo una solución de la ecuación de Pell-Fermat. Por tanto, a partir de dos soluciones, hemos obtenido una tercera. Además, como en las fórmulas que definen x_3 e y_3 sólo intervienen sumas y productos, si las soluciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2) eran enteras, también lo será la que acabamos de construir.

Designemos mediante • la operación que, a dos soluciones, asocia la tercera. Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado:

Proposición. La operación $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (x_3, y_3)$ define una estructura de grupo abeliano en el conjunto de soluciones enteras de la ecuación de Pell-Fermat.

El hecho de que la operación sea conmutativa es evidente a partir de la definición, ya que los valores de x_3 e y_3 no cambian si intercambiamos el orden de (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Por tanto, basta con comprobar que se verifican los tres axiomas de la definición de grupo. El primero de ellos, la asociatividad, es, en este caso, una simple consecuencia de la asociatividad del producto de los números reales. En cuanto al elemento neutro, observemos que (1, 0) es siempre una solución de $x^2 - dy^2 = 1$.

Veamos qué ocurre cuando la operamos con otra solución cualquiera (x_2, y_2). Según nuestras fórmulas, $x_3 = 1 \cdot x_2 + d \cdot 0 \cdot y_2 = x_2$ e $y_3 = 1 \cdot y_2 + x_2 \cdot 0 = y_2$, luego $(1,0) \bullet (x_2, y_2) = (x_2, y_2)$ y hemos encontrado el elemento neutro. Sólo falta verificar que cada solución posee un inverso, es decir, que dado (x_1, y_1), podemos encontrar otra solución (x_2, y_2) tal que $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (1, 0)$. Lo más fácil es probar con $(x_1, -y_1)$, que vuelve a ser una solución, ya que los cuadrados de un número y de su opuesto coinciden. Además:

$$(x_1, y_1) \bullet (x_1, -y_1) = (x_1^2 - dy_1^2, -x_1 y_1 + x_1 y_1) = (1,0),$$

ya que el par (x_1, y_1) es una solución de $x^2 - dy^2 = 1$. Esto concluye la demostración de que las soluciones enteras de la ecuación de Pell-Fermat forman un grupo abeliano. La pregunta surge ahora de forma natural: ¿qué clase de grupo?

Entre todas las soluciones positivas de la ecuación de Pell-Fermat, llamaremos *solución fundamental* a aquel par (x, y) que minimiza el valor de $x^2 + y^2$. Por ejemplo, si $d = 2$, la solución fundamental es (3, 2). Por un lado, $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 2 \cdot 4 = 1$, luego se trata de una solución. Falta ver que es la «más pequeña»: para ello observamos que ninguna de las coordenadas de una solución positiva puede ser 1, ya que si $x = 1$, entonces $y = 0$, que no es positivo, y si $y = 1$, entonces $x^2 = 3$, que no tiene soluciones enteras. Así, la única forma de obtener una solución más pequeña que (3, 2) sería considerando el par (2, 2). Pero $2^2 - 2 \cdot 2^2 = -4$, luego no se trata de una solución. Esto demuestra que (3, 2) es la solución fundamental. Operándola consigo misma, obtenemos infinitas soluciones de la ecuación de Pell-Fermat. Por ejemplo, (3, 2)•(3, 2) = (17, 12) y (3, 2)•(3, 2)•(3, 2) = (99, 70) son nuevas soluciones de la ecuación; de hecho, hay un número infinito. Lo que no es tan fácil es ver que así obtenemos todas las soluciones positivas:

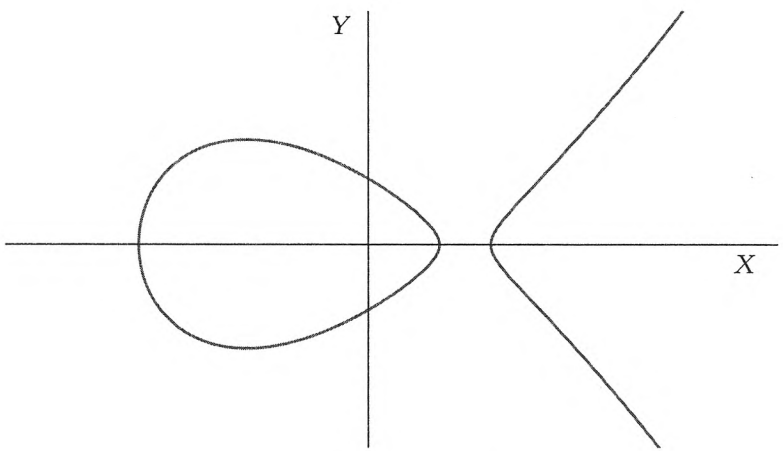
Teorema de las unidades de Dirichlet. Todas las soluciones enteras positivas de la ecuación de Pell-Fermat se obtienen a partir de la solución fundamental.

Este teorema nos lleva a considerar el grupo cíclico generado por la solución fundamental, que es isomorfo al grupo de los enteros. A él pertenecen todas las soluciones (x, y) con ambas coordenadas positivas, pero también el elemento neutro (1, 0) y todos los inversos $(x, -y)$. Supongamos que (x, y) es una de ellas. Como $(-x)^2 = x^2$, el par $(-x, y)$ también resuelve la ecuación de Pell-Fermat. Pero ahora $-x$ es positivo, luego esta solución es una de las que ya tiene en cuenta el grupo cíclico generado por la solución fundamental. Así las cosas, basta con añadir un signo, lo cual corresponde matemáticamente a hacer el producto directo con los enteros módulo 2.

En resumen: el conjunto de soluciones enteras de la ecuación de Pell-Fermat es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$.

Las curvas elípticas

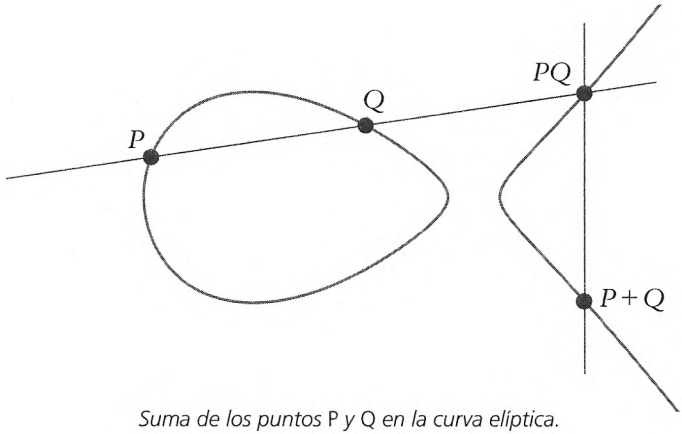
Pasemos ahora al tercer grado, y veamos cómo definir una estructura de grupo en el conjunto de soluciones de la ecuación $y^2 = x^3 + ax + b$, donde a y b son dos números racionales cualesquiera. En este caso, nuestra construcción será puramente geométrica. Comenzamos representando en el plano los pares de números reales (x, y) que verifican la relación $y^2 = x^3 + ax + b$. Dando valores a una de las dos variables y resolviendo la ecuación correspondiente, obtenemos una serie de puntos que podemos unir con trazos continuos. El resultado es una curva en el plano que los matemáticos llamamos *elíptica*. Veamos un ejemplo: si $a = -2$ y $b = 1$, entonces la ecuación es de la forma $y^2 = x^3 - 2x + 1$. Si sustituimos x por 0, el término de la derecha vale 1, luego hay que resolver la ecuación $y^2 = 1$, que tiene dos soluciones: $y = 1$ e $y = -1$. Eso nos da dos puntos de la curva: (0,1) y (0,–1). Si, por el contrario, x fuese 1, tendríamos $y^2 = 0$, es decir: $y = 0$. Podemos, por tanto, añadir el punto (1,0) a la lista. Continuando con $x = -1$, el término de la derecha valdrá $(-1)^3 - 2(-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$, lo cual conduce a la ecuación $y^2 = 2$, cuyas soluciones son $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$. Así, los puntos $(-1, \sqrt{2})$ y $(-1, -\sqrt{2})$ también pertenecen a la curva. No se trata, en este caso, de soluciones enteras de la ecuación, pero no importa, porque para dibujar la curva tenemos que tener en cuenta todas las soluciones reales.



La curva elíptica $y^2 = x^3 - 2x + 1$.

Ahora que hemos dibujado la curva, tomemos dos puntos P y Q distintos sobre ella y tracemos la recta que los une. Vamos a suponer que P y Q no son simétricos

con respecto al eje de las abscisas, para que la recta que pasa por ellos no sea vertical. Afirmamos que esta recta corta a la curva en un tercer punto que llamaremos PQ. Pues bien, diremos que el resultado de operar los puntos P y Q de la *curva elíptica* es el punto simétrico de PQ respecto al eje de las abscisas, que representaremos $P+Q$:



Suma de los puntos P *y* Q *en la curva elíptica.*

Para que esta operación esté bien definida, aún tenemos que justificar muchas cosas. La primera de ellas es que la recta que pasa por $P=(x_1, y_1)$ y $Q=(x_2, y_2)$ corta a la curva en un tercer punto. Como hemos supuesto que esta recta no es vertical, su ecuación será de la forma $y=mx+n$, con m y n dos números reales. Si sustituimos esta expresión en la fórmula de nuestra curva elíptica, se obtiene:

$$(mx+n)^2 = x^3 + ax + b,$$

que, después de algunas manipulaciones elementales, se transforma en:

$$x^3 - Ax^2 + Bx + C = 0, \qquad (\star\star)$$

donde $A=m^2$, $B=a-2mn$ y $C=b-n^2$. Se trata, por tanto, de calcular las raíces de un polinomio de tercer grado con coeficientes reales. Ya conocemos dos de ellas: son las abscisas x_1 y x_2 de los puntos P y Q, pues ambos pertenecen simultáneamente a la curva y a la recta. Podemos concluir gracias al siguiente resultado:

Lema. Si un polinomio de grado tres con coeficientes reales tiene dos raíces reales, también lo es la tercera.

En efecto, demostrémoslo. El modo más sencillo es el siguiente. Sea

$$P(x) = x^3 + Rx^2 + Sx + T$$

un polinomio de tercer grado con coeficientes reales. Llamemos x_1, x_2, x_3 a sus raíces. Entonces $P(x)$ se descompone como

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Desarrollando este producto y comparándolo con la primera expresión de $P(x)$, podemos identificar los coeficientes con expresiones que dependen de las raíces:

$$P(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Por ejemplo, se tiene que $-R = x_1 + x_2 + x_3$, o dicho de otro modo: la tercera raíz se obtiene restando a $-R$ las otras dos. Por hipótesis, tanto el coeficiente R como las raíces x_1 y x_2 son números reales, luego también lo será x_3.

En virtud del lema que acabamos de demostrar, existe un número real x_3 que satisface la ecuación (★★). Sustituyendo su valor en la igualdad $y = mx + n$, obtendremos la coordenada y_3 del punto PQ. Ya sólo queda tomar el punto simétrico, lo cual equivale a considerar la ordenada opuesta. Así, el resultado de operar (x_1, y_1) y (x_2, y_2) será el punto $(x_3, -y_3)$.

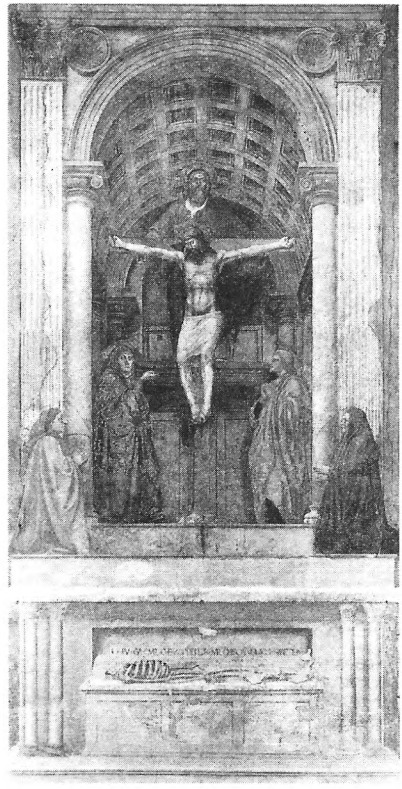
Volvamos a nuestro ejemplo: como hemos visto, los puntos $P = (0, 1)$ y $Q = (1, 0)$ pertenecen a la curva elíptica de ecuación $y^2 = x^3 - 2x + 1$. Calculemos $P + Q$. Para ello hay que determinar primero la recta que pasa por P y Q. Un sencillo cálculo muestra que su fórmula no es otra que $y = -x + 1$. Esto conduce a la ecuación:

$$(-x+1)^2 = x^3 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^3 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0,$$

cuyas soluciones son $x = 0$ (contada dos veces) y $x = 1$. Como $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, el punto que buscamos es $x_3 = 0$. Sustituyendo en la fórmula $y = -x + 1$, se obtiene $y = 1$, de modo que el resultado de operar P y Q es el punto $P + Q = (0, -1)$. Observemos que, en este caso, el resultado de operar dos soluciones enteras de la ecuación vuelve a ser una solución entera. Esto es cierto en general, siempre que los coeficientes de la ecuación sean enteros, y la demostración es esencialmente la misma que nos ha permitido probar que, si un polinomio de grado tres con coeficientes reales tiene dos raíces reales, entonces la tercera también lo es.

Hemos resuelto así la primera de nuestras dificultades: mostrar que si una recta pasa por dos puntos no simétricos de la curva elíptica, entonces la corta también en un tercero. Pero, ¿qué ocurriría si los puntos P y Q fueran simétricos? Tendrían

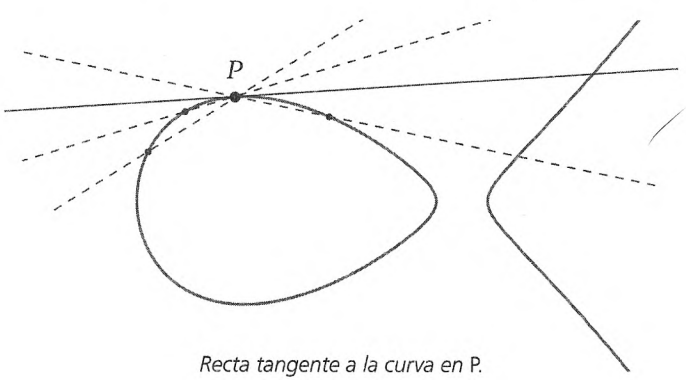
entonces coordenadas $P=(x_1, y_1)$ y $Q=(x_1, -y_1)$, y la línea que los une sería la recta vertical dada por $x=x_1$. Ahora bien, al sustituir $x=x_1$ en la ecuación de la curva elíptica, obtenemos $y^2=x_1^3+ax_1+b$, es decir, la variable x ha desaparecido, y lo único que queda es y^2 igual a un número real. Esta ecuación sólo tiene dos soluciones, que son precisamente y_1 e $-y_1$, luego la recta que pasa por P y Q no corta a la curva elíptica en ningún otro punto. ¡No existe PQ! ¿Cómo podríamos solucionar este problema? La idea se remonta a los pintores renacentistas que inventaron la perspectiva. Para dar mayor sensación de realismo, en sus cuadros las paralelas no lo son en realidad, sino que se cruzan en un punto situado fuera del lienzo: el punto de fuga. Nosotros vamos a inspirarnos en los pintores para decir que esa recta vertical corta a la curva elíptica en un tercer punto O situado en el infinito, que representará el papel de punto de fuga.



La Trinità, *fresco de Masaccio (1401-1428), el primer pintor renacentista que introdujo la perspectiva matemática en sus obras, logrando así sensación de profundidad.*

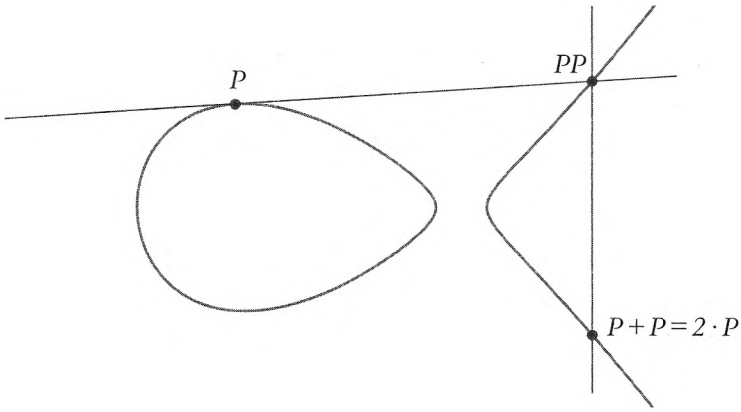
De hecho, es posible dar un sentido matemático al punto O introduciendo una tercera variable z de modo que la ecuación de la curva elíptica se convierta en $y^2z=x^3+axz^2+bz^3$. Observemos que ahora todos los términos de la igualdad tienen grado tres. Esto es muy importante porque implica, de algún modo, que es imposible distinguir la terna (x, y, z) de cualquiera de sus múltiplos no nulos $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, ya que si sustituimos estos valores en la ecuación, se puede simplificar el factor λ^3 a ambos lados. Se obtienen así unas coordenadas que se llaman *homogéneas*, y que se representan $(x: y: z)$ para indicar que dos puntos que parecen distintos a simple vista, como (1: 2: 3) y (2: 4: 6), en realidad coinciden, ya que uno es múltiplo de otro. Entre otras cosas, esto nos permite suponer que la coordenada z sólo toma los valores 0 y 1. Volviendo a la ecuación, vemos que si sustituimos z por 1, entonces $y^2=x^3+ax+b$, de modo que recuperamos los puntos de la curva elíptica que estábamos considerando hasta ahora. Sin embargo, si z vale 0, entonces $x^3=0$, luego x también vale 0. Como las tres coordenadas no pueden anularse simultáneamente, y tiene que ser, por fuerza, distinto de 0. Pero todos los puntos $(0: y: 0)$ son iguales, porque son múltiplos unos de otros, luego podemos suponer que $y=1$. Obtenemos así un nuevo punto (0: 1: 0) que no estaba en la curva $y^2=x^3+ax+b$, ¡es nuestro punto O!

Recapitulemos: primero demostramos que cualquier recta no vertical que pasa por dos puntos de la curva elíptica la corta también en un tercero. Ahora, gracias al punto en el infinito, sabemos que lo mismo es cierto cuando la recta es vertical. Podemos definir, por tanto, una operación entre P y Q siempre que sean dos puntos distintos. Pero ¿y si fueran los mismos? ¿Es posible dar un sentido a $P+P$? Para ver cómo hacerlo, supongamos que partimos de dos puntos diferentes P y Q y que vamos acercando Q a P poco a poco. Entonces las rectas que unen P y Q también se irán moviendo. De algún modo, el límite de estas rectas es la recta tangente a la curva, que en los alrededores de P no la corta en ningún otro punto.



Recta tangente a la curva en P.

Pues bien, en lugar de considerar la recta que une P y Q, cuando los dos puntos sean iguales consideraremos la recta tangente a la curva en P. El mismo razonamiento muestra que esta recta corta a la curva en otro punto PP. Tomando el simétrico con respecto al eje de abscisas, obtendremos nuestra suma $P+P=2P$.

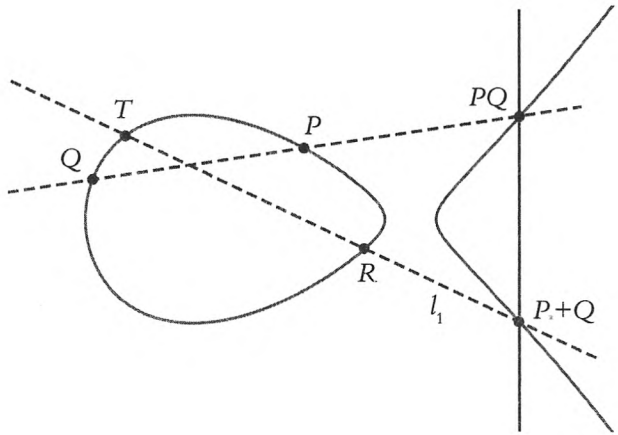


Sólo nos queda una pequeña sutileza: hemos añadido el punto O a nuestra curva, luego tendremos también que definir cuál es el resultado de sumar O con otro punto de la curva. Cuando trabajamos con coordenadas homógeneas, O tiene exactamente el mismo estatus que el resto de puntos de la curva, luego se puede trazar la recta que pasa por O y P y aplicar el procedimiento anterior. Pero, al hacerlo, siempre se obtiene $O+P=P$, de manera que O será el elemento neutro para la operación sobre la curva elíptica.

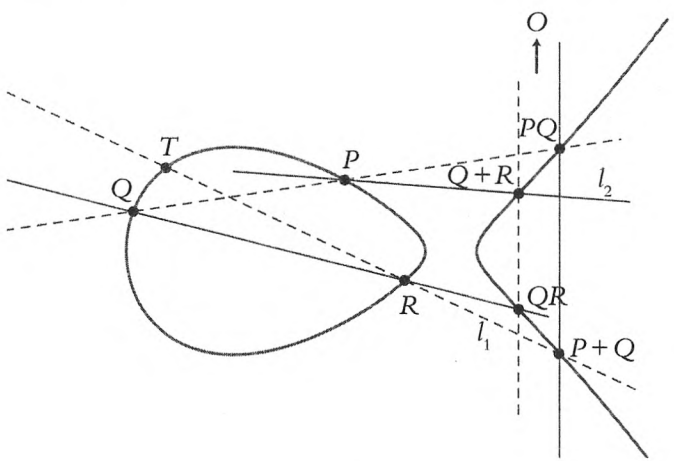
Así las cosas, hemos definido una operación que, a cada par de puntos de la curva, distintos o no, asocia un tercer punto; demostremos que define un grupo. Siendo O el elemento neutro, es muy fácil calcular el inverso de un punto P: será el punto simétrico con respecto al eje de las abscisas, digamos P', pues la recta que pasa por P y por P' es vertical, luego corta a la curva en el punto O y tenemos que $P+P'=O$. Sólo falta demostrar que la operación es asociativa para concluir que, en efecto, esta operación induce una estructura de grupo en el conjunto de soluciones de la ecuación $y^2=x^3+ax+b$.

Sean P, Q y R tres puntos de la curva. Queremos ver que $(P+Q)+R=P+(Q+R)$. Para ello basta con demostrar que la recta l1 que une $P+Q$ y R corta a la curva en el mismo punto que la recta l2 que une P y $Q+R$, pues luego sólo hay que encontrar los simétricos. Tracemos primero la recta que une P con Q y busquemos el tercer punto de intersección con la curva, que hemos llamado PQ. Gracias a estas

dos rectas auxiliares, se obtiene el punto $P+Q$. Se trata ahora de unir $P+Q$ con R y ver dónde corta esta recta l_1 a la curva. Llamaremos T al punto de intersección.



Calculemos ahora $P+(Q+R)$ sobre la misma imagen. La recta que une Q y R corta a la curva en un tercer punto QR, cuyo simétrico nos da el valor de $Q+R$. Se trata de demostrar que la recta l_2 que une $Q+R$ con P corta a la curva en el punto T:



Llamemos C_1 a la unión de las tres rectas dibujadas con trazo discontinuo. Teniendo en cuenta que el «punto de fuga» O pertenece a la recta que une QR y $Q+R$, se observa que C_1 corta a la curva elíptica en los siguientes nueve puntos:

$$C_1 \cap C = \{O, P, Q, R, PQ, QR, P+Q, Q+R, T\},$$

de los cuales los ocho primeros pertenecen también a la unión de las rectas dibujadas con trazo continuo, que llamaremos C_2.

Ahora podemos utilizar un resultado clásico sobre la intersección de cúbicas en el plano. Antes de enunciarlo, recordemos que una cúbica es el conjunto de soluciones de una ecuación de grado tres en las variables x e y. Por ejemplo, una curva elíptica $y^2=x^3+ax+b$ es una cúbica, pero también lo es la unión de tres rectas, pues su ecuación se obtiene multiplicando las ecuaciones de cada una de ellas, que son de grado uno. Para distinguir estas dos situaciones tan distintas, se dice que la curva elíptica es irreducible, mientras que la unión de tres rectas es un caso «degenerado». Entonces:

Proposición. Sean C una cúbica irreducible, y C_1 y C_2, dos cúbicas cualesquiera. Supongamos que C y C_1 se intersecan en nueve puntos, de los cuales ocho pertenecen a la intersección de C y C_2. Entonces también pertenece el noveno.

Aplicando el resultado a la curva elíptica, a C_1 y a C_2, vemos que el punto T pertenece a C_2. Ahora bien, el único punto que nos faltaba por considerar en el cálculo de $C_2 \cap C$ era el punto de intersección de la recta que une **P** y $Q+R$ con la curva, luego no puede ser otro que T, como queríamos demostrar. Así concluye la prueba de la asociatividad y, por tanto, del hecho de que la operación que hemos definido induce una estructura de grupo. Observemos además que se trata de un grupo abeliano, ya que la construcción geométrica de la suma $P+Q$ se basa en la recta que une P y Q, y esta recta es independiente del orden en que consideremos los puntos.

Por tanto, los puntos racionales de la curva elíptica, que denotaremos $E(Q)$, tienen una estructura de grupo. En 1922, el matemático Louis Mordell demostró el siguiente resultado, que respondía a una pregunta de Poincaré:

Teorema de Mordell. El grupo abeliano $E(Q)$ está generado por un número finito de elementos.

Es decir, existe una cantidad finita de soluciones racionales de la ecuación $y^2=x^3+ax+b$ a partir de las cuales se pueden recuperar todas las demás aplicando

sucesivamente la operación de grupo. Como hemos visto, un grupo abeliano finitamente generado es siempre de la forma

$$\mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/n_1 \times ... \times \mathbb{Z}/n_k .$$

El número de copias del grupo de los enteros que intervienen se llama *rango* de la curva elíptica y es extremadamente difícil de calcular. De hecho, uno de los problemas abiertos más importantes de la actualidad (¡un millón de dólares espera a quien sea capaz de resolverlo!), la *conjetura de Birch-Swinnerton-Dyer*, consiste en identificar el rango con otros invariantes de carácter analítico. Pero las curvas elípticas no sólo sirven para ganar un millón de dólares: fueron un ingrediente esencial en la demostración del último teorema de Fermat y, gracias a ellas, se puede mejorar la criptografía de clave pública.

*****

WEIL: Lo que yo hice en mi tesis fue demostrar que el mismo resultado de Mordell era cierto si se consideraban curvas cuyas ecuaciones eran de mayor grado. Sin embargo, el matemático inglés sospechaba que una propiedad mucho más fuerte era cierta: no sólo el grupo de soluciones sería finitamente generado, sino finito, de modo que no podría aparecer ninguna copia del grupo de los enteros en la descomposición. Ésa era la conjetura que Hadamard quería que demostrase, y que no se resolvió hasta 1983.

LÉVI-STRAUSS: Gracias, señor Weil: con sus explicaciones me ha abierto usted las puertas de todo un mundo nuevo. Pero déjeme que le pida un favor: ¡no volvamos a cambiar de método! Si somos compañeros de estudio es para poder charlar «sin temer castigo de fortuna, de amor, de tiempo y muerte»...

Capítulo 6

La música de las esferas

Por el álgebra, palacio de preciosos cristales
[...]
Por la música, misteriosa forma del tiempo.
Jorge Luis Borges, «Otro poema de los dones»

LÉVI-STRAUSS: En el primer tomo de mis *Mitológicas* escribí que la música es «el supremo misterio de las ciencias humanas». ¿Pretende usted explicarlo todo con la teoría de grupos?

WEIL: Déjeme que le cuente una historia, señor Lévi-Strauss. Hace muchos años fui con mi mujer a un concierto en el que, de pronto, uno de los asistentes murió de un infarto. La orquesta se detuvo hasta que llegaron los médicos, pero el concierto continuó un poco después. Seguía habiendo un gran revuelo entre el público de nuestro palco; la gente no paraba de cuchichear. Les pedí que se callaran de una vez, y el gesto les pareció de una crueldad absoluta. «Por Dios, ¿no ha visto usted lo que ha pasado? ¡Ese hombre ha muerto!». Se quitaban la palabra unos a otros, compitiendo por ver quién recriminaba con mayor dureza mi actitud. Y yo les contesté: «Hay modos de morir mucho peores que escuchando a Mozart». Es la forma en la que yo habría querido hacerlo: ¿se imagina usted el gozo de cesar mientras suena esa música que parece estar por encima de nosotros, pero que, durante unos instantes, se pone a nuestro alcance? Ni la teoría de grupos ni cualquier otra aproximación científica al arte explicarán nunca que a alguien le guste un compositor hasta llegar a esos extremos, pero sí algunas de las características formales que contribuyen a la belleza de la música.

LÉVI-STRAUSS: Las matemáticas son la más abstracta de las ciencias, igual que la música es la más abstracta de las artes.

WEIL: Ya sabe que la relación entre matemáticas y música es casi tan antigua como la filosofía. Si creemos la leyenda, Pitágoras pasaba junto a un fabricante de braseros cuando quedó cautivado por la armonía de los golpes de los martillos sobre el metal ardiente. Midiendo el tamaño de los distintos instrumentos, se dio cuenta de que los golpes de dos martillos sólo eran consonantes cuando la relación entre sus longitudes

se expresaba a través de números naturales pequeños. Si, por ejemplo, un martillo era el doble de largo que otro (2:1), el sonido resultante era una octava más alto, mientras que, si la razón entre las dos longitudes era de —pongamos— tres medios (3:2), entonces se obtenía un intervalo similar a lo que hoy llamamos *quinta*. En general, todos los sonidos que guardasen una relación de la forma $(n+1:n)$ eran agradables al oído. De vuelta a casa, Pitágoras habría continuado con sus experimentos hasta convencerse de que la belleza de la música era una cuestión de proporciones bien equilibradas.

LÉVI-STRAUSS: Y belleza es verdad. Es entonces cuando el filósofo se lanza a ese *tour de force* que consiste en pensar que «todo es número». Si a la demostración de que la música es número se añade la idea de un universo formado por esferas que danzan al son de la música divina, la consecuencia más evidente es que el equilibrio del cosmos descansa sobre unos pocos principios matemáticos.

WEIL: Ese paraíso ordenado lo habría destruido el descubrimiento de los números irracionales. Parece ser que Hipaso de Metaponte murió a manos de sus compañeros pitagóricos tras revelar que no todas las magnitudes podían escribirse como cociente de dos números naturales. Recuerdo que mi hermana Simone, en respuesta a una larguísima carta que le escribí desde la prisión de Ruan en marzo de 1940, y que debió de provocarle fuertes dolores de cabeza, me confesaba que esta historia le había parecido siempre una tontería[1]. En su opinión, las cosas habrían ocurrido exactamente al contrario: al descubrir que una entelequia como la raíz cuadrada permitía medir longitudes, Pitágoras habría gritado: «¡Todo es número!».

LÉVI-STRAUSS: Eso explicaría por qué las generaciones de los hombres no sólo no dejaron de creer en la «música de las esferas» con el descubrimiento de los números irracionales, sino que la convirtieron en uno de los motivos que atraviesan todo el pensamiento occidental. De no haber sido tan fuerte su influencia, Kepler no habría puesto tantos reparos a la hora de enunciar la ley que afirma que las órbitas de los planetas alrededor del Sol no son circulares, sino elípticas. ¿Cómo puede un Dios que *geometriza* elegir de entre dos opciones, para poner en movimiento los astros, la menos armónica?

WEIL: Lo más gracioso es que ni siquiera el propio Kepler, que fue quien de algún modo «calló a los cielos», aceptaba las consecuencias últimas de su obra. Tras publicar sus investigaciones en el *Astronomia nova* de 1609, el científico sigue elaborando la teoría de la música de las esferas, ligada esta vez a los sólidos platónicos. La dará a la im-

1 A la espera de una edición española de la correspondencia entre André y Simone Weil, el lector encontrará la carta de André en el primer volumen de sus *Obras completas* (págs. 224-255), y la respuesta de su hermana, en Simone Weil, *Œuvres*, París: Gallimard, 1999, págs. 568-575.

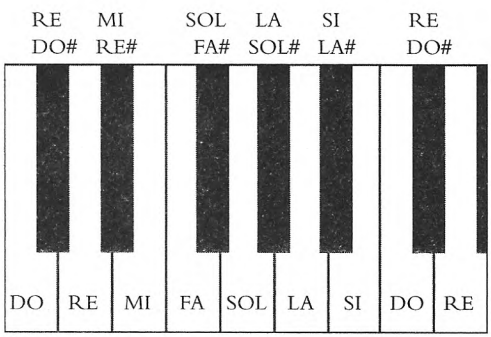
prenta diez años más tarde en su *Harmonices mundi*, un libro plagado de disparates esotéricos, que inspiraría a Paul Hindemith una de sus óperas tres siglos después. Sólo las difíciles condiciones en las que fue escrito podrían excusar a Kepler: en poco tiempo murieron su hermana y su único protector en la corte, fue excomulgado, y todo el pueblo de Leonberg desató una persecución brutal contra su madre, acusada de brujería.

LÉVI-STRAUSS: Entonces no sigamos su camino. Cualquier conversación seria sobre armonía debe empezar siempre con unas pinceladas de física. No se puede ignorar el hecho de que la música llega a nuestros oídos a través de una serie de ondas que se transmiten en el aire desde una fuente que vibra. La frecuencia de un proceso periódico, como usted sabe, es el número de veces que éste se repite por unidad de tiempo. Suele medirse en *hercios* (Hz), en homenaje al físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894). En el caso del sonido, cuanto mayor sea la frecuencia, más agudo será lo que se escucha. Partiendo de estas premisas, se acuerda llamar DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI a los sonidos de unas determinadas frecuencias. Por ejemplo, la nota musical LA corresponde a una onda de 440 Hz.

WEIL: ¡Sabe usted más física que yo! Sólo quisiera añadir que el hecho de que se trate de una convención simbólica queda perfectamente reflejado en la historia de la música. El LA de los órganos de Bach vibraba a 480 Hz, mientras que Handel, alrededor del año 1740, lo situaba a 422 Hz. Hubo una época en la que los intérpretes competían entre sí subiendo todo lo posible la frecuencia para que el sonido resultara más y más brillante. Los grandes perjudicados por esta auténtica inflación eran los lutier, sobrepasados por la cantidad de cuerdas rotas que tenían que reparar todos los días, y por supuesto los cantantes, con continuos problemas de voz. Si no recuerdo mal, fueron precisamente las quejas de estos últimos las que llevaron al gobierno francés a fijar por decreto una frecuencia estándar. Lo mismo hicieron los ingleses con otro valor, ¡faltaría más! No es hasta 1939 cuando se establecen los 440 Hz a los que estamos acostumbrados en la Segunda Conferencia Internacional para el Diapasón. Quién sabe a qué frecuencia sonaba la música que escuchábamos en nuestra juventud, señor Lévi-Strauss. Es cierto que antes se había intentado normalizar la nota LA en 439 Hz, pero... 439 es un número primo, y eso lo complicaba todo[2].

2 Según la explicación de un miembro de la *British Standards Institution*, «el tono de afinación que daba la BBC parte de un oscilador controlado por un cristal piezoeléctrico que vibra con una frecuencia de un millón de hercios. Esto se reduce a una frecuencia de mil hercios con divisores eléctricos, luego se multiplica por 11 y se divide por 25, de modo que se produce la frecuencia requerida de 440 Hz. Como 439 es un número primo [que no aparece en la descomposición de 1.000], una frecuencia de dicho valor no puede ser obtenida por medios similares».

LÉVI-STRAUSS: ¿Se da cuenta de que, hablemos de lo que hablemos, volvemos una y otra vez sobre la misma idea? No importa la frecuencia de una nota aislada, sino su relación con las demás. De hecho, si todas las frecuencias de las notas de una partitura se multiplican por un mismo número, el oído seguirá reconociendo la melodía, más grave o más aguda dependiendo de que el factor elegido sea menor o mayor que uno. Por eso es fundamental que entendamos cuál es la relación entre las frecuencias de las notas de la escala. Déjeme que le recuerde que, además de DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, hay otras cinco notas. Imagine que tenemos que afinar un piano. Como sabe, señor Weil, está compuesto por una serie de teclas blancas, que corresponden a las notas DO, RE, MI, FA, SOL, LA y SI, a las que ya me he referido; pero también por otras teclas más pequeñas, de color negro, que se sitúan entre las teclas blancas. Son las notas *alteradas*. Para describirlas, es necesario disponer de los sostenidos (#) o de los bemoles ( ). Añadir un sostenido a una de las siete notas «blancas» tiene el efecto de saltar a la tecla que se encuentra inmediatamente a la derecha. Así, los sostenidos nos permiten pasar de las teclas blancas a las teclas negras, salvo en dos excepciones: MI# y SI# no representan nuevas notas; son sólo otros nombres de las notas FA y DO, pues en ambos casos la tecla siguiente vuelve a ser blanca. Los bemoles tienen el efecto opuesto: al añadir un bemol a una nota «blanca», se salta una tecla a la izquierda. Por ejemplo, RE es lo mismo que DO#, y FA corresponde a MI, porque la tecla más cercana a FA por la izquierda vuelve a ser blanca. Dependiendo de la situación, será más cómodo usar los sostenidos o los bemoles.



Teclado de un piano.

Por tanto, afinar el piano consiste en identificar cada una de estas notas con una cierta frecuencia. Como en el caso de la nota LA, cada época propuso un modelo diferente. Por ejemplo, los pitagóricos construían la escala encadenando quintas.

Nosotros diremos que una nota es la quinta de otra si para llegar a ella hay que pasar por ocho teclas del piano. Así, SOL es la quinta de DO, pues entre ambas notas están las teclas DO-DO#-RE-RE#-MI-FA-FA#-SOL. Del mismo modo, la quinta de SOL es RE. El nombre de «quinta» lo justifica el hecho de que, partiendo de una tecla blanca, moverse ocho teclas a la derecha corresponde casi siempre a avanzar cinco blancas, es decir, a contar cinco notas sin alteraciones. Pero dese cuenta de que, si empezáramos por SI, obtendríamos FA#, que es una tecla negra; ésa es la excepción. En cualquier caso, repitiendo este proceso de encadenar quintas se recuperan las doce notas de la escala.

WEIL: Como le expliqué, señor Lévi-Strauss, en el sistema pitagórico una nota es la quinta de otra si la relación entre sus frecuencias es de tres medios, o lo que es lo mismo: 1,5. Supongamos, para simplificar los cálculos, que la nota DO correspondiese a una frecuencia de 1 Hz. Como SOL es la quinta de DO, su frecuencia sería de 1,5 Hz. Para calcular la frecuencia de RE, tendríamos que multiplicar de nuevo por 1,5, pero entonces obtendríamos 2,25 Hz, lo cual significaría que la nota RE es más aguda que SOL. En realidad hemos calculado bien la frecuencia, pero de otra octava. Ésa es la frecuencia del RE que aparece cuando seguimos contando hacia arriba SOL-LA-SI-DO-RE. Es necesario reducir la nota una octava, y ya dijimos que eso corresponde a dividir por dos la frecuencia: por tanto, la frecuencia de RE sería de 1,125 Hz. Usando la misma técnica, podríamos calcular las frecuencias de las notas:

$$DO \rightarrow SOL \rightarrow RE \rightarrow LA \rightarrow MI \rightarrow SI \rightarrow FA\#.$$

Ahora bien, del mismo modo que hemos «subido» una quinta, podríamos «bajarla» dividiendo por 1,5 Hz. Como entre FA y DO hay ocho teclas, FA es la quinta *descendente* de DO. Dividiendo por 1,5 Hz y multiplicando por 2 para restituir la octava, obtendríamos una frecuencia de 1,333... Hz. Continuando el proceso descendente, podemos calcular las frecuencias restantes:

$$SOL \leftarrow RE \leftarrow LA \leftarrow MI \leftarrow SI \leftarrow FA \leftarrow DO.$$

Y si quisiéramos adaptarlas a las actuales, bastaría con encontrar el factor que transforma LA en 440 Hz y multiplicar todas las demás frecuencias por ese mismo número. Sin embargo, la escala pitagórica plantea un problema: fíjese en que, aplicando nuestro método, hemos calculado las frecuencias de las notas FA# y SOL , pero ¡en realidad son la misma! Por tanto, para que la escala pitagórica permitiese una afinación perfecta del piano, los dos valores deberían coincidir. Y es muy fácil

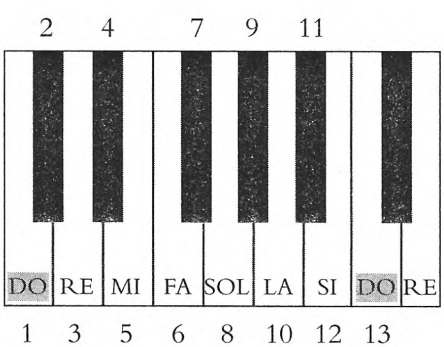
ver que esto no ocurre: en efecto, si ignoramos los cambios de octava, la frecuencia de FA# se ha obtenido multiplicando por 1,5 seis veces, y la de SOL , dividendo por la misma cantidad otras tantas. Para que la afinación fuese perfecta, las frecuencias de $(3/2)^6$ Hz y $(2/3)^6$ Hz sólo podrían estar separadas por un cierto número de octavas, o dicho de otro modo: el cociente de los números $(3/2)^6$ y $(2/3)^6$ debería ser una potencia de 2. Pero esto es imposible, porque los números 2 y 3 son primos entre sí.

LÉVI-STRAUSS: ¿Por eso se introdujo el *temperamento igual*?

WEIL: Bueno, antes hubo otros métodos, como la escala diatónica, pero digamos que el temperamento igual es el que más éxito ha tenido. Un piano está afinado de esta forma cuando la relación entre las frecuencias de los sonidos de dos teclas consecutivas, sean del color que sean, es siempre la misma. Para un matemático, eso significa que si $f_1, f_2, f_3 \ldots$ representan las frecuencias consecutivas a partir de una nota cualquiera, digamos DO, DO#, RE..., entonces el resultado de dividir f_2 entre f_1 será el mismo que el de dividir f_3 entre f_2, que a su vez coincidirá con f_4 entre f_5, y así sucesivamente. Si decido, por ejemplo, pararme en f_{13}, entonces tendremos las igualdades:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \ldots = \frac{f_{13}}{f_{12}}.$$

LÉVI-STRAUSS: Pero al contar trece teclas a partir de una nota cualquiera se obtiene de nuevo la nota de partida, una octava más alta.



Una octava en el piano.

WEIL: Y subir una octava equivale a duplicar la frecuencia, luego el cociente de f_{13} entre f_1 es igual a 2. Observe que también podríamos escribir f_{13} entre f_1 pasando

por todas las frecuencias intermedias, de modo que las que aparecen en los denominadores se vayan anulando con las que figuran en los numeradores:

$$\frac{f_{13}}{f_1} = \frac{f_{13}}{f_{12}} \cdot \frac{f_{12}}{f_{11}} \cdot \ldots \cdot \frac{f_3}{f_2} \cdot \frac{f_2}{f_1}.$$

El *temperamento igual* implica que todos los factores del producto son iguales a una misma cantidad, pongamos *d*. Por tanto, f_{13} entre f_1 es igual a 2, pero también el resultado de multiplicar el número *d* por sí mismo doce veces. Se llega así a la ecuación $d^{12} = 2$, según la cual, dada una frecuencia, la siguiente se calcula multiplicándola por la raíz duodécima de 2, que vale aproximadamente 1,05946. Por ejemplo, si la frecuencia del LA es de 440 Hz, como hemos dicho, entonces la frecuencia del SI (que está dos teclas por encima) será de unos 494 Hz, y la del SOL (dos teclas más grave), de alrededor de 392 Hz.

DO	DO#	RE	RE#	MI	FA
261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23

FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI
369,99	392	415,30	440	466,16	493,88

Tabla de frecuencias de las notas centrales del piano.

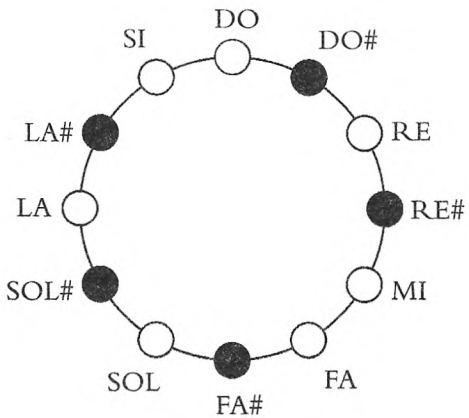
LÉVI-STRAUSS: Así que llamar LA a la frecuencia de 440 Hz es una convención, pero una vez que se decide hacerlo, las demás frecuencias vienen determinadas.

WEIL: Siempre bajo la hipótesis de que una octava se divide en doce notas, cuyas frecuencias guardan la misma relación, no lo olvide. Ésos son los presupuestos básicos, pero no siempre las orquestas afinan de acuerdo con la nota temperada. Además, todo esto ha cambiado mucho en la música contemporánea; por no hablar de otras culturas que se rigen por sistemas diferentes. En la música india, por ejemplo, no hay temperamento igual...

LÉVI-STRAUSS: Me avergüenza reconocer que me han interesado muy poco las llamadas músicas etnográficas. Es cierto que en mis expediciones por el Brasil tuve el privilegio de escuchar algunas melodías maravillosas, hoy perdidas. Recuerdo que en las flautas de los indios nambikwara creí distinguir la «Acción ri-

tual de los antepasados» de *La consagración de la primavera* de Stravinsky. Durante el viaje, dediqué muchos esfuerzos a transcribir lo mejor que mis conocimientos me lo permitían la música que escuchaba. De regreso a Francia, una pianista me ayudó a mejorar las partituras y las interpretó para que pudiese elegir las que despertaban ecos más precisos en mi memoria. ¿Sabe qué ocurrió después? El editor encargado de publicarlas las perdió en un taxi. Quizá fuera esta decepción la culpable de que no volviese a ocuparme seriamente de la música hasta casi treinta años después, aunque ha habido pocos días en mi vida en los que no me haya acompañado alguna pieza de Ravel, de Debussy, de Chopin. Uno de sus estudios calmó muchas de mis angustias en la selva. Necesité treinta años, le decía. La música es el hilo conductor de mis *Mitológicas*. Al principio pensé que era una buena forma de organizar un discurso complejo, con muchas variaciones sobre un mismo tema. Todos lo hacemos; también usted se sirve de la música en sus memorias, señor Weil. El último capítulo es un «ballet bufo» con un preludio, una fuga y un *intermezzo*. Sin embargo, pronto comprendí que había una razón más profunda: en el momento en el que la novela sustituyó la misión civilizadora de los antiguos mitos, la música asumió sin darse cuenta el papel de una mitología agonizante. Ésta debería ser una de las claves de interpretación de una obra como la *Tetralogía* de Wagner.

WEIL: Volviendo al tema, si le parece, déjeme recordarle que hace un rato me decía usted mismo que, al contar trece teclas a partir de una nota dada, caemos de nuevo en la misma nota una octava más alta. Una octava se divide en doce unidades. Gracias a este principio, la teoría de grupos puede desempeñar un papel interesante en el estudio de la armonía. En realidad, nosotros utilizamos una única nota, por ejemplo, LA, para referirnos a diferentes sonidos, relacionados entre sí por octavas. En el teclado de un piano, sin ir más lejos, hay ocho LAs distintos, y en principio podríamos seguir considerando octavas más agudas y más graves indefinidamente, de no ser porque el oído sólo percibe un rango limitado de frecuencias. Según los cálculos anteriores, llamamos LA a cualquier nota de frecuencia 55, 110, 220, 440, 880, 1.760... Esta situación no es nueva en absoluto; haga memoria, señor Lévi-Strauss. Al hablarle de los *grupos del reloj*, le expliqué que identificábamos las seis de la mañana con las seis de la tarde, las seis de la mañana del día siguiente o la seis de la tarde del día anterior. Una octava arriba, doce horas después. Una octava abajo, doce horas antes. ¡Es lo mismo! Por eso es extremadamente práctico enrollar el teclado del piano en lo que llamaremos el *círculo dodecafónico*.



El círculo dodecafónico.

LÉVI-STRAUSS: El intervalo que separa cada nota de la siguiente en este círculo se llama *semitono*. Dos semitonos forman, como era de esperar, un *tono*, y tres semitonos componen lo que suele denominarse una *tercera menor*. De hecho, la tradición clásica asocia un nombre a cada intervalo:

3	Tercera menor
4	Tercera mayor
5	Cuarta
6	Tritono
7	Quinta

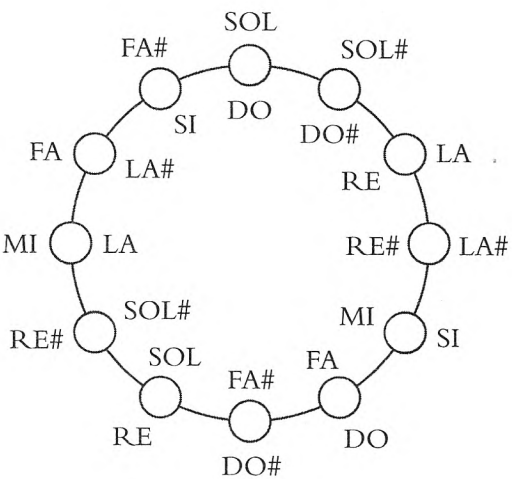
8	Quinta aumentada
9	Sexta mayor
10	Sexta aumentada
11	Séptima mayor
12	Octava

Observe que una *quinta* está formada por siete semitonos, que corresponden exactamente a las ocho teclas del piano que contábamos a partir de la nota.

WEIL: Transponer una melodía, como usted sabe, consiste en sumar o restar una cantidad constante de semitonos a cada nota. Supongamos que, por la razón que fuese, nos viéramos en la necesidad de subir una quinta las tres notas que se repiten en los primeros compases del *Claro de Luna* de Beethoven:

Primeras notas de la sonata Claro de Luna *de Beethoven.*

Como se trata de SOL#, DO# y MI, al sumar siete semitonos a cada una de las notas obtendríamos RE#, SOL# y SI. No ha sido difícil calcularlo contando con los dedos, pero ¡imagine tener que transponer así la sonata entera! Es aquí donde un modelo musical basado en la teoría de grupos se revela extraordinariamente útil. ¿Qué le parecería si le digo que basta con girar el círculo dodecafónico siete semitonos en sentido antihorario?



Transposición de una quinta.

Conservando en la parte interior del círculo las notas originales, se obtiene una correspondencia que nos permite transponer sin dificultad alguna. Mire qué fácil sería hacerlo con el bello *leitmotiv* de la *Pavana* de Fauré:

Con el nuevo método, la secuencia de notas

FA#-SOL#-LA-SI-LA-SOL#-LA-FA#-SOL#-LA-SOL#-FA#-SOL#-MI-FA#-FA-DO#

se transforma en un abrir y cerrar de ojos en

DO#-RE#-MI-FA#-MI-RE#-MI-DO#-RE#-MI-RE#-DO#-RE#-SI-DO#-DO-SOL#.

LÉVI-STRAUSS: ¡Impresionante, señor Weil! Pero hay algo que me intriga en todo esto. Primero dijimos que la percepción de la estructura de una melodía no se alteraba al multiplicar todas las frecuencias por un factor común, y después nos hemos puesto a sumar semitonos. ¿Acaso coinciden las dos operaciones?

WEIL: Muy buena pregunta, señor Lévi-Strauss. Es cierto que al principio de nuestra charla estipulamos que el cociente entre las frecuencias de dos notas consecutivas es constante; fue eso lo que nos permitió escribir la tabla de frecuencias empezando por la nota LA. Fíjese en que la resta de dos frecuencias sucesivas no es en absoluto constante. Mientras que DO y DO# están separados por una frecuencia de $277{,}18-261{,}63=15{,}55$ Hz, la distancia entre LA# y SI es de $493{,}88-466{,}16=27{,}72$ Hz, ¡casi el doble! Para transformar los productos en sumas y los cocientes en restas, es preciso recurrir al *logaritmo*. Parece que fue Newton el primero que comprendió su utilidad en los cálculos musicales. Permítame que le recuerde rápidamente de qué se trata; quizá la última vez que se lo explicaron fue hace casi un siglo. Dados dos números positivos a y b, se llama logaritmo en base b de a, y se escribe $\log_b(a)$, a la cantidad a la que hay que elevar b para obtener a. Es decir: c es el logaritmo en base b de a si los números a, b y c satisfacen la relación $b^c=a$. Por ejemplo, se sabe que $\log_2(4)=2$ y $\log_2(8)=3$, pues $2^2=4$ y $2^3=8$, aunque no siempre es tan fácil de calcular. Sólo tiene que tener presente que el logaritmo es una operación que transforma cocientes en restas:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b(x)-\log_b(y).$$

Siguiendo con el ejemplo, si la base fuera $b=2$, y los números que intervienen en la fórmula, $x=8$ e $y=4$, entonces su cociente valdría 2, de modo que el término a la izquierda representaría $\log_2(2)=1$. Por otra parte, ya hemos calculado $\log_2(8)=3$ y $\log_2(4)=2$. La fórmula se verifica en este caso, pues $1=3-2$. La demostración general se deduce de las propiedades básicas de las potencias, ¡inténtelo!

Ahora bien, nosotros sabemos que los cocientes de dos frecuencias consecutivas coinciden, luego lo seguirán haciendo si les aplicamos el logaritmo:

$$\log_b\left(\frac{f_2}{f_1}\right)=\log_b\left(\frac{f_3}{f_2}\right)=\ldots=\log_b\left(\frac{f_{13}}{f_{12}}\right).$$

En vista de la fórmula anterior, se deduce que

$$\log_b(f_2)-\log_b(f_1)=\log_b(f_3)-\log_b(f_2)=\ldots=\log_b(f_{13})-\log_b(f_{12}),$$

y todo esto sirve para cualquier valor positivo de b. Imagine que elijo uno muy particular: la raíz duodécima de 2, ese número d que satisface la ecuación $d^{12}=2$. Hace un rato le expliqué que cada uno de los cocientes de dos frecuencias sucesivas valía d, así que, si tomo logaritmos en base d, me encontraré con:

$$\log_d\left(\frac{f_2}{f_1}\right)=\log_d\left(\frac{f_3}{f_2}\right)=\ldots=\log_d\left(\frac{f_{13}}{f_{12}}\right)=\log_d(d)=1,$$

pues el exponente al que hay que elevar d para obtener d es uno. Así las cosas, puedo recurrir a la expresión que transforma el logaritmo de un cociente en una resta de logaritmos para deducir que:

$$\log_d(f_2)-\log_d(f_1)=\log_d(f_3)-\log_d(f_2)=\ldots=\log_d(f_{13})-\log_d(f_{12})=1.$$

LÉVI-STRAUSS: ¿Qué significa todo esto? ¡Me he perdido!

WEIL: Ah, fue usted el que pidió una explicación... Le resumo enseguida lo que he querido decir con estos cálculos: si en lugar de concentrarnos en las frecuencias $f_1, f_2\ldots$ propiamente dichas, cambiamos de escala y atendemos a los logaritmos en base d de las frecuencias, $\log_d(f_1)$, $\log_d(f_2)$, entonces pasar de una nota a la siguiente consiste en sumar una unidad. ¡Eso es un semitono!

LÉVI-STRAUSS: Hasta ahora no nos hemos ocupado de un hecho esencial. Mirando el círculo de la transposición, uno podría imaginarse que todas las notas se utilizan por igual, pero es evidente que el subconjunto formado por las siete teclas blancas DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI desempeña un papel predominante. Fíjese en que esta secuencia se construye de un modo muy extraño: para pasar de DO a RE y de RE a MI hay que añadir un tono, pero cambiar de MI a FA supone sólo un semitono, y no hay ninguna señal en el piano ni en el pentagrama que lo indique. Luego seguimos sumando tonos para pasar de FA a SOL, de SOL a LA y de LA a SI, pero el intervalo entre SI y DO vuelve a romper la simetría:

$$\text{DO}\xrightarrow{1}\text{RE}\xrightarrow{1}\text{MI}\xrightarrow{1/2}\text{FA}\xrightarrow{1}\text{SOL}\xrightarrow{1}\text{LA}\xrightarrow{1}\text{SI}\xrightarrow{1/2}\text{DO}.$$

Ésta es la escala de «do mayor». A partir de cualquier nota podemos construir nuevas escalas *equivalentes* reproduciendo la sucesión de intervalos 1, 1, 1/2, 1, 1, 1, 1/2. En general habrá que añadir alteraciones. Piense en el *Cuarteto para cuerda n.º 3* de Shostakovich; junto al título leemos «fa mayor». De algún modo, eso significa

que la nota predominante en la partitura no es DO, sino FA, luego conviene reconstruir la escala empezando por FA. Lo que queremos es que se mantenga el patrón 1, 1, 1/2, 1, 1, 1, 1/2: de FA a SOL y de SOL a LA hay un tono, muy bien, pero de LA a SI no hay un semitono como nos gustaría, sino un tono entero, así que en lugar de SI hay que considerar la nota que se encuentra un semitono por debajo, es decir SI . Continuemos: de SI a DO, de DO a RE y de RE a MI hay un tono, y, para terminar, el intervalo entre MI y FA consta de un semitono, como queríamos. Por tanto, la escala de «fa mayor» se obtiene sustituyendo SI por SI , lo cual suele indicarse junto a la clave del pentagrama, para no tener que escribir la alteración cada vez que aparezca la nota SI en la partitura:

Escala de fa mayor.

En este caso sólo ha hecho falta añadir una alteración, pero mire cuántas necesitaríamos si empezáramos la escala por un FA# como en esa extraordinaria *Décima sinfonía* que Mahler no tuvo tiempo de terminar. De FA# a SOL hay un semitono y queremos que haya un tono, así que hay que empezar cambiando SOL por SOL#. Ahora de SOL# a LA hay sólo un semitono, luego también hay que pasar a LA#. De LA# a SI hay un semitono, ningún problema; pero el intervalo entre SI y DO también consta de un semitono, cuando en realidad deberíamos tener un tono entero: pongamos DO#. Eso hace que la distancia a RE se reduzca a un semitono, luego también hay que alterar RE, y lo mismo ocurre con MI. Finalmente, de MI# a FA# hay un semitono (si lo recuerda, MI# era otra forma de llamar a FA), como queríamos. Por tanto, para construir la escala de «fa sostenido mayor», hemos tenido que alterar ¡seis de las siete notas!

Escala de fa sostenido mayor.

WEIL: Lo que su explicación pone de manifiesto, señor Lévi-Strauss, es que las transposiciones de una *cuarta* (cinco semitonos) son muy dulces —a veces casi imperceptibles—, porque sólo modifican una nota de la escala estándar. Cuando se quiere hacer una transición suave entre dos tonalidades, conviene pasar por varias cuartas intermedias. Esto siempre es posible porque [5] genera el grupo del reloj, en el sentido de que todos sus elementos se pueden obtener sumando [5] repetidamente. Por ejemplo, transponer una tercera menor (tres semitonos) equivale a transponer tres cuartas, pues [5]+[5]+[5]=[3].

Con el *tritono* (seis semitonos) ocurre todo lo contrario. Como [6]+[6]=[0], al aplicar esta transposición dos veces, se vuelve al punto de partida. Seguro que ha oído hablar del *diabulus in musica*. Durante la Edad Media, la Iglesia prohibió el uso del tritono bajo el pretexto de que un intervalo tan disonante, que movía el pensamiento hacia lo impuro, sólo podía ser obra del diablo. Uno de los lugares en los que el tritono aparece de modo natural es en el acorde de SI. No hace falta que le recuerde que los acordes clásicos se forman a partir de las teclas blancas del piano saltando de dos en dos: por ejemplo, DO re MI fa SOL es el acorde de DO, y SOL la SI do RE, el de SOL. Dese cuenta de que, en ambos casos, siete semitonos separan los extremos entre sí. Es una propiedad común a todos los acordes salvo al que comienza con la nota SI, pues la longitud total de SI do RE mi FA es de seis semitonos: el tritono maldito. ¡Aquí está el *diabulus in musica*! Habría que esperar hasta el Barroco para que se relajara la prohibición y el tritono comenzase a aparecer en la armonía, al principio únicamente como acorde de paso, que enseguida debía resolverse en alguno de los otros seis.

LÉVI-STRAUSS: Eso cambiaría con la llegada de los románticos. Una de las primeras piezas que explota todo el potencial del *diabulus in musica* es la *Sonata a Dante* de Franz Liszt. Su primer tema está compuesto en «re menor». Por ahora sólo me he referido a los modos mayores de la música; voy a explicarle ahora rápidamente qué significa el adjetivo «menor». Pensemos de nuevo en la escala DO RE MI FA SOL LA SI. Al enrollarla en un círculo, una pregunta muy natural es qué pasaría si girásemos las notas. Obtendríamos, por ejemplo, la escala LA SI DO RE MI FA SOL, que ya no respeta la secuencia de intervalos 1,1, 1/2, 1, 1, 1, 1/2, luego no es equivalente a la de partida. Vale la pena, por tanto, investigar qué ocurre cuando los semitonos se sitúan en otras posiciones. En el ejemplo, los semitonos aparecen en la segunda y en la quinta posición: 1, 1/2, 1, 1, 1/2, 1, 1. Las escalas que responden a este patrón se llaman *menores*. Así, «la menor» es la escala correspondiente a «do mayor». En general, la escala menor asociada se determina contando tres semitonos

descendentes desde la primera nota: así, «re menor» es la escala correspondiente a «fa mayor»:

Do mayor	La menor
Do# mayor	La# menor
Re mayor	Si menor
Mi mayor	Do menor
Mi mayor	Do# menor
Fa mayor	Re menor

Fa# mayor	Re# menor
Sol mayor	Mi menor
Sol# mayor	Fa menor
La mayor	Fa# menor
Si mayor	Sol menor
Si mayor	Sol# menor

Correspondencia entre los modos mayores y menores.

Una observación crucial es que la escala menor asociada tiene exactamente las mismas alteraciones que la mayor, luego éstas no bastan para determinar si una obra está escrita en modo mayor o menor. Es necesario atender a otros criterios más subjetivos, como cuál es la nota en la que tienden a terminar las cadencias de la melodía.

WEIL: Su discurso sobre las tonalidades, señor Lévi-Strauss, nos lleva otra vez a la sospecha de que no todas las notas del círculo dodecafónico son igual de importantes en una melodía. Era una idea que Arnold Schönberg no podía soportar. Por eso, mientras Einstein ultimaba los detalles de su primera teoría de la relatividad, él compuso una *Kammersymphonie* que iniciaba el desmantelamiento de los principios tonales. Las posiciones más extremas no llegarían hasta los años veinte, cuando el padre del *dodecafonismo* puso en marcha un programa que defendía la igualdad absoluta de las doce notas en cualquier composición, y que cristalizaría en la obra de la Segunda Escuela de Viena.

LÉVI-STRAUSS: Recuerdo mi primer contacto con la nueva música. Desde muy joven mis padres me llevaban los domingos a la ópera Garnier y a otras salas de conciertos. Tiene que pensar que mi bisabuelo materno fue el violinista Isaac Strauss, que colaboraba con Offenbach y había conocido a Rossini. Algo de eso quedaba en la familia, pero mi historia de la música terminaba en Wagner. Descubrí a Schönberg, a Alban Berg, a Anton Webern con la pasión por los sonidos que se escuchan por primera vez. Creo que nunca he conseguido acostumbrarme. Mucho menos a compositores *serialistas* como Luciano Berio, que no sólo defienden la democracia de las

alturas, sino también de las duraciones, de los timbres; en fin, de cualquier parámetro cuantificable. Es para mí una frustración, quisiera salir de la perplejidad que me producen, porque algunas de las voces de *Sinfonía* gritan textos de mi libro *Lo crudo y lo cocido*. Pero supongo que no es tan fácil dejar de ser un hombre del siglo diecinueve...

WEIL: No me extraña que le pareciesen sonidos completamente nuevos, porque muchas de las obras mayores de la música dodecafónica se han compuesto a partir de un cuadrado latino. Ya sabe que no es más que una disposición de un conjunto de símbolos en una tabla —en este caso las doce notas musicales—, de modo que cada fila y cada columna los contengan todos. El primer paso consiste en elegir una secuencia formada por las doce notas, a partir de la cual se construirá el resto del cuadrado latino atendiendo a una serie de reglas prefijadas. Hay, por tanto, tantas «guías de composición» como modos de elegir un orden de los elementos DO, DO#, RE, RE#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA# y SI. Eso hace un total de 479.001.600 secuencias.

LÉVI-STRAUSS: Son menos que los cien billones de poemas de Queneau...

WEIL: Pero un número razonable para que los compositores sigan viviendo en la ilusión de la libertad creadora, ¿no le parece? Como decía, el método se pone en marcha eligiendo un orden de las doce notas, pongamos:

MI–SOL–FA#–LA–SOL#–DO–FA–RE–RE#–DO#–SI–LA#,

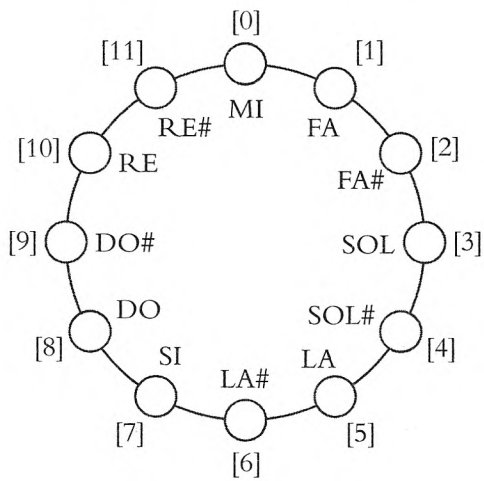
que en clave de sol se escribe así:

y en clave de fa tiene el siguiente aspecto:

Por tanto, la primera línea de la tabla será:

MI	SOL	FA#	LA	SOL#	DO	FA	RE	RE#	DO#	SI	LA#

Otro modo de escribirla sería identificando cada nota con su posición en el *grupo del reloj*. A la hora de efectuar las operaciones que permiten construir todo el cuadrado latino a partir de la primera línea, será muy útil situar el «mediodía» en la primera nota que hemos elegido, es decir, decretar que MI es el elemento neutro del grupo. Por tanto, giramos el reloj hasta colocar MI en la posición que normalmente ocupa DO y copiamos los números de la secuencia:



Recuerde que los escribimos entre corchetes para que la propia notación deje claro que un símbolo como el [3] no sólo representa al número 3, sino también a todos los que se obtienen sumando y restando doce: 3, 15, 27, –9, –21... Esto permite traducir la primera línea del cuadrado a:

[0]	[3]	[2]	[5]	[4]	[8]	[1]	[10]	[11]	[9]	[7]	[6]

LÉVI-STRAUSS: Entiendo. ¿Cuál es el segundo paso?

WEIL: Una vez que se dispone de la secuencia fundamental, se completa la primera columna de la tabla por *inversión*. Entre cada par de notas de la primera línea habrá un cierto intervalo. Pues bien, el mecanismo de inversión consiste en reproducir ese intervalo en sentido opuesto, es decir, hacia abajo si el primero es ascendente, y hacia arriba si no lo es. Por ejemplo, de MI a SOL hay tres semitonos ascendentes (MI-FA-FA#-SOL), luego la inversión del intervalo consistirá en contar tres semitonos hacia abajo: MI-RE#-RE-DO#. Así, en la segunda casilla de la primera columna escribiremos DO#. Otro ejemplo: de SOL a FA# hay un semitono

ascendente, luego a partir del DO# que acabamos de calcular habrá que subir un semitono: de este modo se llega a RE. Continuando con el proceso, se obtiene la primera columna:

MI-DO#-RE-SI-DO-SOL#-RE#-FA#-FA-SOL-LA-LA#.

Ahora bien, señor Lévi-Strauss, ¿a qué le suena la palabra «inverso»?

LÉVI-STRAUSS: Dado un elemento cualquiera de un grupo, se llama *inverso* al que, operado con él, da como resultado el elemento neutro.

WEIL: ¡Eso es! Pues bien, lo que pretendo explicarle es que el procedimiento armónico de invertir los intervalos no es más que la forma de encontrar los elementos inversos en el *grupo del reloj*. Veamos el primer caso: la nota SOL correspondía al elemento [3]. ¿Cuál es el inverso de [3]? Tendríamos la tentación de decir que [–3], pero aquí sólo estamos considerando representantes positivos, así que hay que sumar doce. Se obtiene así [9], que es, en efecto, el inverso de [3], porque [3]+[9]=[12]=[0], el elemento neutro. ¿Y qué nota correspondía a [9]? Mirando la figura verá que es DO#, ¡exactamente la que habíamos calculado por el método de inversión! Pasemos a la siguiente casilla, por si acaso no le hubiese convencido. La nota FA# correspondía al elemento [2], cuyo inverso es [10], ya que [2]+[10]=[12]=[0]. ¿Y cuál es la nota que representa [10]? ¡RE! Por tanto, la primera columna de la «guía de composición» está formada por los inversos de los elementos de la secuencia fundamental que ocupa la primera fila:

[0] [9] [10] [7] [8] [4] [11] [2] [1] [3] [5] [6].

LÉVI-STRAUSS: Muy bien: ya tenemos una fila y una columna. Creo que sé cómo se forma el resto de la tabla. Ahora podemos calcular el intervalo que separa MI de cada una de las notas de la columna y transponer la primera fila para que la estructura de la melodía no cambie. De MI a DO# hay nueve semitonos, así que tendré que sumar esa cantidad a cada una de las notas de la secuencia de partida:

DO#	MI	RE#	FA#	FA	LA	RE	SI	DO	LA#	SOL#	SOL

WEIL: ¡Así es! Y esta transposición puede hacerla girando nueve semitonos el círculo dodecafónico, como le expliqué hace ya un rato, o bien sumando [9] a los

elementos de la primera fila. En cualquier caso, la representación simbólica de la segunda fila del cuadrado latino será:

[9]	[0]	[11]	[2]	[1]	[5]	[10]	[7]	[8]	[6]	[4]	[3]

La misma operación que hemos aplicado a la segunda fila la repetimos con las diez restantes, hasta completar la tabla:

MI	SOL	FA#	LA	SOL#	DO	FA	RE	RE#	DO#	SI	LA#
DO#	MI	RE#	FA#	FA	LA	RE	SI	DO	LA#	SOL#	SOL
RE	FA	MI	SOL	FA#	LA#	RE#	DO	DO#	SI	LA	SOL#
SI	RE	DO#	MI	RE#	SOL	DO	LA	LA#	SOL#	FA#	FA
DO	RE#	RE	FA	MI	SOL#	DO#	LA#	SI	LA	SOL	FA#
SOL#	SI	LA#	DO#	DO	MI	LA	FA#	SOL	FA	RE#	RE
RE#	FA#	FA	SOL#	SOL	SI	MI	DO#	RE	DO	LA#	LA
FA#	LA	SOL#	SI	LA#	RE	SOL	MI	FA	RE#	DO#	DO
FA	SOL#	SOL	LA#	LA	DO#	FA#	RE#	MI	RE	DO	SI
SOL	LA#	LA	DO	SI	RE#	SOL#	FA	FA#	MI	RE	DO#
LA	DO	SI	RE	DO#	FA	LA#	SOL	SOL#	FA#	MI	RE#
LA#	DO#	DO	RE#	RE	FA#	SI	SOL#	LA	SOL	FA	MI

que, como hemos visto, contiene la misma información que

[0]	[3]	[2]	[5]	[4]	[8]	[1]	[10]	[11]	[9]	[7]	[6]
[9]	[0]	[11]	[2]	[1]	[5]	[10]	[7]	[8]	[6]	[4]	[3]
[10]	[1]	[0]	[3]	[2]	[6]	[11]	[8]	[9]	[7]	[5]	[4]
[7]	[10]	[9]	[0]	[11]	[3]	[8]	[5]	[6]	[4]	[2]	[1]
[8]	[11]	[10]	[1]	[0]	[4]	[9]	[6]	[7]	[5]	[3]	[2]
[4]	[7]	[6]	[9]	[8]	[0]	[5]	[2]	[3]	[1]	[11]	[10]
[11]	[2]	[1]	[4]	[3]	[7]	[0]	[9]	[10]	[8]	[6]	[5]
[2]	[5]	[4]	[7]	[6]	[10]	[3]	[0]	[1]	[11]	[9]	[8]
[1]	[4]	[3]	[6]	[5]	[9]	[2]	[11]	[0]	[10]	[8]	[7]
[3]	[6]	[5]	[8]	[7]	[11]	[4]	[1]	[2]	[0]	[10]	[9]
[5]	[8]	[7]	[10]	[9]	[1]	[6]	[3]	[4]	[2]	[0]	[11]
[6]	[9]	[8]	[11]	[10]	[2]	[7]	[4]	[5]	[3]	[1]	[0]

LÉVI-STRAUSS: Una tabla dodecafónica como la que hemos construido podría servir para componer el siguiente fragmento:

Por una parte, el pentagrama inferior reproduce en clave de FA la secuencia fundamental de la primera fila, a partir de la cual se ha obtenido el resto. Por otro lado, el pentagrama superior contiene dos melodías: la más grave reproduce la segunda columna de la tabla, mientras que la más aguda es la primera fila leída de derecha a izquierda. ¡Las posibilidades son casi infinitas!

WEIL: Así suena hoy la música de las esferas.

LÉVI-STRAUSS: Y así la escucharemos hasta que el álgebra nos separe.

Anexo

Grupos abelianos finitos con dos generadores[1]

En este anexo presentamos una demostración completa del teorema de estructura de los grupos abelianos finitos generados por dos elementos, al que André Weil hace referencia en su diálogo con Claude Lévi-Strauss (pág. 73).

Teorema. Un grupo abeliano finito generado por dos elementos es isomorfo a un grupo cíclico o a un producto directo de dos grupos cíclicos.

Antes de adentrarnos en los detalles de la prueba, recordaremos el concepto de isomorfismo de grupos, que ya apareció brevemente en la pág. 57.

Isomorfismo de grupos

Sean G y H dos grupos cuyas operaciones denotaremos con los símbolos $*$ y $\bullet$ respectivamente. Llamemos e_G y e_H a sus elementos neutros.

Definición. Un *homomorfismo* entre G y H es una función $\varphi: G \to H$ que, a cada elemento g de G, asocia un elemento $\varphi(g)$ de H (la *imagen* de g a través de φ), de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:

(i) La función φ transforma el elemento neutro de G en el elemento neutro de H, es decir: $\varphi(e_G) = e_H$.

(ii) El resultado de operar dos elementos de G y calcular después la imagen del producto coincide con el de aplicar primero φ a cada uno de ellos y luego operarlos en H: $\varphi(a * b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$.

---

1 Quisiera dar las gracias a Gustavo Ochoa por su ayuda en la preparación de este anexo.

Una consecuencia inmediata de esta definición es que los homomorfismos «respetan» los elementos inversos, es decir: $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$, sea cual sea g en G. En efecto, $g * g^{-1} = e_G$, luego $\varphi(g * g^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H$ gracias a la condición (i). Por otra parte, la propiedad (ii) garantiza que $\varphi(g * g^{-1}) = \varphi(g) \bullet \varphi(g^{-1})$. Juntando ambos resultados, tenemos que $\varphi(g) \bullet \varphi(g^{-1}) = e_H$, y lo mismo es cierto intercambiando el orden de $\varphi(g)$ y $\varphi(g^{-1})$. Por tanto, $\varphi(g)$ es el inverso de $\varphi(g^{-1})$.

Los homomorfismos son una herramienta fundamental a la hora de comparar entre sí dos grupos distintos. Un caso particularmente relevante es aquel en el que ambos son indistinguibles desde el punto de vista de la estructura, como ocurre, por ejemplo, con el grupo simétrico S_3 y el grupo de movimientos que dejan invariante un triángulo equilátero (pág. 56). Para formalizar el hecho de tener la misma estructura se introduce la noción de isomorfismo.

Definición. Se dice que un homomorfismo $\varphi: G \to H$ es un *isomorfismo* de grupos cuando se cumplen las propiedades:

(1) *Inyectividad.* Si a y b son dos elementos distintos de G, entonces $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ son dos elementos distintos de H.
(2) *Sobreyectividad.* Cada elemento de H es imagen de algún elemento de G, es decir: dado cualquier h en H, existe g en G tal que $\varphi(g) = h$.

Gracias a las propiedades de los homomorfismos, se puede ver que la inyectividad equivale a esta otra condición (más fácil de verificar en la práctica):

(1') El único elemento de G que φ transforma en el elemento neutro de H es el elemento neutro de G, es decir: si $\varphi(g) = e_H$, entonces $g = e_G$.

En efecto, supongamos primero que (1) es cierta y que $\varphi(g) = e_H$. Como φ es un homomorfismo, sabemos que $\varphi(e_G) = e_H$, luego por fuerza g debe coincidir con e_G, ya que, en caso contrario, dos elementos distintos tendrían la misma imagen. Recíprocamente, veamos qué ocurre cuando se cumple la propiedad (1'). Sean a y b dos elementos de G tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Queremos demostrar que $a = b$. Usemos primero la propiedad de eliminación (véase la pág. 58) para rees-

cribir la igualdad bajo la forma $\varphi(a) \bullet \varphi(b)^{-1} = e_H$. Como φ es un homomorfismo, $\varphi(b)^{-1}$ coincide con $\varphi(b^{-1})$ y $\varphi(a) \bullet \varphi(b^{-1}) = \varphi(a * b^{-1})$. Por tanto, $\varphi(a * b^{-1}) = e_H$ y de (1') se deduce que $a * b^{-1} = e_G$. Multiplicando por b a ambos lados, se concluye que $a = b$.

Otra observación que nos será útil a lo largo de la demostración es que, dado un homomorfismo entre dos grupos finitos *del mismo orden* (es decir, con el mismo número de elementos), para ver que se trata de un isomorfismo basta con comprobar una sola de las dos propiedades (inyectividad o sobreyectividad) porque la otra se deduce automáticamente (¡demuéstrelo!).

Mencionemos también el siguiente resultado:

Proposición. Un homomorfismo $\varphi: G \to H$ es un isomorfismo si y sólo si existe otro homomorfismo $\psi: G \to H$ tal que el resultado de aplicar primero φ y luego ψ es la identidad en G (es decir, la aplicación que deja fijos todos los elementos de G), y lo mismo ocurre con la composición de ψ y φ cambiando G por H.

De hecho, dada φ, la función ψ se define como aquella que, a cada h en H, asigna el único g en G tal que $\varphi(g) = h$. Diremos que dos grupos G y H son *isomorfos* cuando existe un isomorfismo entre ellos, y escribiremos $G \simeq H$.

Después de estos preliminares, estamos en condiciones de probar el teorema de estructura. Sea, pues, G un grupo abeliano finito generado por dos elementos. Nuestro objetivo es construir un isomorfismo entre G y un grupo cíclico o un producto directo de dos grupos cíclicos. En la primera parte de la prueba veremos que siempre es posible elegir dos generadores de modo que el orden de uno de ellos divida al orden del otro.

Cómo elegir convenientemente los generadores

Empecemos con un lema sobre los grupos cíclicos cuyo orden es un producto de dos números primos entre sí. Para aligerar la notación, de ahora en adelante omitiremos el subíndice correspondiente al grupo a la hora de escribir los elementos neutros y, en lugar de separar los términos que se operan con el símbolo $*$, los concatenaremos.

Lema 1. Supongamos que el orden de un elemento a se descompone como $n = mr$, con m y r dos enteros primos entre sí. Entonces $<a>$ es isomorfo al producto directo de los grupos cíclicos $<a^m>$ y $<a^r>$, cuyos órdenes son r y m respectivamente.

Como m y r son primos entre sí, la identidad de Bézout (pág. 91) garantiza la existencia de dos enteros u y v tales que $um + vr = 1$. Definamos la aplicación

$$\varphi : \langle a \rangle \to \langle a^m \rangle \times \langle a^r \rangle,$$

que envía un elemento a^i de $<a>$ al par $((a^m)^{ui},(a^r)^{vi})$. Como a es de orden n, se tiene que $a^i = a^{i+kn}$ para cualquier entero k, y lo primero que hay que comprobar es que las imágenes de a^i y a^{i+kn} a través de φ coinciden. Para ello, observemos que

$$(a^m)^{u(i+kn)} = (a^m)^{ui}(a^m)^{ukn} = (a^m)^{ui}(a^n)^{ukm} = (a^m)^{ui}e^{ukm} = (a^m)^{ui},$$

pues $a^n = e$. Lo mismo es cierto para la segunda coordenada, luego podemos concluir que $\varphi(a^i) = \varphi(a^{i+kn})$. La aplicación está, por tanto, bien definida. Veamos ahora que se trata de un homomorfismo de grupos. La condición $\varphi(e) = e$ no presenta ningún problema, pues al sustituir $i = 0$ en la fórmula que define φ, se obtiene

$$\varphi(e) = \varphi(a^0) = ((a^m)^0, (a^r)^0) = (e, e) = e.$$

En cuanto a la segunda propiedad:

$$\varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = ((a^m)^{u(i+j)},(a^r)^{v(i+j)}) = ((a^m)^{ui}(a^m)^{uj},(a^r)^{vi}(a^r)^{vj}) =$$
$$= ((a^m)^{ui},(a^r)^{vi})((a^m)^{uj},(a^r)^{vj}) = \varphi(a^i)\varphi(a^j),$$

pues, en un producto directo de dos grupos, las operaciones se efectúan coordenada a coordenada (pág. 70). Esto demuestra que φ es un homomorfismo. Probemos que se trata, de hecho, de un isomorfismo. Para ello, observemos que $<a>$ y $<a^m> \times <a^r>$ son grupos del mismo orden. En efecto, los elementos a^m y a^r son de orden r y m respectivamente, pues $(a^m)^r = (a^r)^m = a^{mr} = a^n$ y el elemento a tiene orden n por hipótesis. Por tanto, el orden de $<a^m> \times <a^r>$ es el producto de r y

m, es decir n, y coincide con el orden de $<a>$. Así las cosas, basta con demostrar que φ es inyectiva, es decir, que si $\varphi(a^i) = e$, entonces $a^i = e$. Ahora bien, si $\varphi(a^i)$ es el elemento neutro, entonces $a^{mui} = a^{rvi} = e$. Esto implica que n divide a mui y rvi, luego dividirá también a la suma de ambos números. Pero, como consecuencia de la identidad de Bézout, se tiene que $mui + rvi = (mu + rv)\, i = i$. Por tanto, n divide a i, o lo que es lo mismo, $a^i = e$, y la aplicación φ es inyectiva. Así concluye la demostración del lema.

Nótese que el resultado anterior también es cierto en sentido contrario: si r y m son dos enteros primos entre sí, entonces el producto directo de dos grupos cíclicos de órdenes r y m es isomorfo a un grupo cíclico de orden rm, pues el lema proporciona un isomorfismo entre $Z/r \times Z/m$ y Z/rm. Veamos ahora cómo podemos utilizarlo para elegir los generadores de G de modo que el orden de uno divida al del otro. Partamos de dos generadores cualesquiera a y b. Recordemos que, siendo G un grupo conmutativo, todos sus elementos pueden escribirse de la forma $a^i b^j$, con i y j enteros que satisfacen las condiciones $0 \leq i < \text{orden}\,(a)$ y $0 \leq j < \text{orden}\,(b)$ (pág. 72).

Otra forma más sofisticada de expresar la misma condición es la siguiente: la función $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \to G$ que envía el par (a^i, b^j) al elemento $a^i b^j$ de G es sobreyectiva. Por supuesto, toda la dificultad radica en que no hay ninguna razón por la que deba ser también inyectiva, de modo que la escritura $a^i b^j$ podría no ser única y, al considerar todos los términos $a^i b^j$, estaríamos contando más de una vez algunos elementos de G. De ese problema nos ocuparemos más adelante.

Por ahora, miremos los órdenes de a y b. Gracias al teorema fundamental de la aritmética (pág. 89), ambos se descomponen como producto de números primos. La idea es separar los factores en dos bloques en función de si dividen o no al mismo tiempo a los órdenes de a y b. Para que el argumento se entienda mejor, nos limitaremos a la situación en la que existe un único número primo p que divide a la vez a los órdenes de a y b (el caso general es completamente análogo, pero hay subíndices por todas partes que dificultan la escritura). Extrayendo las máximas potencias de p, podemos escribir $\text{orden}(a) = p^e m$ y $\text{orden}(b) = p^f n$, con e y f dos enteros positivos. Supongamos además que $e \leq f$. Nótese que m y n son primos entre sí, porque si hubiera algún factor primo que dividiese a ambos, entonces dividiría también a los órdenes de a y b, luego por fuerza tendría que ser p. Lo mismo vale para p^e y m, y p^f y n.

Aplicando el lema a los grupos cíclicos generados por a y b, obtenemos isomorfismos $\langle a \rangle \simeq \langle a^m \rangle \times \langle a^{p^e} \rangle$ y $\langle b \rangle \simeq \langle b^n \rangle \times \langle b^{p^f} \rangle$. Por tanto:

$$\langle a\rangle\times\langle b\rangle \simeq \langle a^m\rangle\times\langle a^{p^e}\rangle\times\langle b^n\rangle\times\langle b^{p^f}\rangle \qquad (\star)$$

Consideremos los tres últimos factores, de órdenes m, p^f y n respectivamente. Como m y p^f son primos entre sí, el lema afirma que el producto directo $\langle a^{p^e}\rangle\times\langle b^n\rangle$ es isomorfo a un grupo cíclico de orden $p^f m$. Ahora bien, n y $p^f m$ también son primos entre sí, luego podemos aplicar de nuevo el lema para ver que el producto de los tres factores es isomorfo a un grupo cíclico $<x>$ de orden $p^f mn$. Pongamos $y = a^m$, que es un elemento de orden p^e. La fórmula (★) implica que los productos directos $<a>$ $<b>$ y $<x>$ $<y>$ son isomorfos, luego existe una aplicación sobreyectiva de $<x>$ $<y>$ en G. O, dicho de otro modo, x e y generan G. Y ahora es muy fácil comprobar que orden$(y) = p^e$ divide a orden$(x) = p^f mn$, pues hemos supuesto $e \le f$. Hemos demostrado así el siguiente lema[2]:

Lema 2. Sea G un grupo abeliano finito generado por dos elementos. Se pueden elegir los generadores de modo que el orden de uno divida al orden del otro.

Continuemos con la demostración.

El orden del grupo

De acuerdo con el lema precedente, podemos elegir generadores x e y de G tales que orden$(y) = l$ y orden(x) sea un múltiplo de l, pongamos lk. Así, todos los elementos de G se escriben como $x^i y^j$, con $0 \le i < lk$ y $0 \le j < l$. Ahora bien, si dos potencias de los generadores coincidiesen, esta escritura no sería única. Por ejemplo, si y^3 fuese igual a x^2, entonces $x^2 y^4$ y $x^4 y$ serían dos modos distintos de referirse al mismo elemento. Llamemos, pues, t al menor entero positivo tal que y^t coincide con x^s para algún entero s. Sabemos que $t \le l$, ya que $y^l = e = x^{lk}$.

---

2 De hecho, nuestro razonamiento demuestra el siguiente resultado más preciso:
Sea G un grupo abeliano finito generado por dos elementos a y b. Pongamos orden$(a) = p_1^{e_1}\ldots p_r^{e_r} m$ y orden$(b) = p_1^{f_1}\ldots p_r^{f_r} n$, donde los p_i son números primos, los e_i y los f_i son enteros no negativos, y m y n son primos entre sí. Entonces G es isomorfo a un grupo generado por dos elementos x e y tales que orden$(x) = p_1^{h_1}\ldots p_r^{h_r} mn$ y orden$(y) = p_1^{g_1}\ldots p_r^{g_r}$, siendo $h_i = \max(e_i, f_i)$ y $g_i = \min(e_i, f_i)$ para cada $i = 1, \ldots, r$.

Con esta nueva notación, cada elemento de G se escribe de manera única como $x^i y^j$, donde $0 \leq i < lk$ y $0 \leq j < t$. En efecto, si fuera $x^i y^j = x^{i'} y^{j'}$ para algún $0 < j' \leq j < t$, entonces tendríamos $x^{i'-i} = y^{j-j'}$, o lo que es lo mismo: $y^{j-j'}$ sería una potencia de x. Como $j'-j$ es estrictamente menor que t, sólo puede ser cero, luego $j = j'$ e $i' = i$, ya que $x^{i'-i} = e$ con $-lk < i' - i < lk$. Esto demuestra que el orden de G es el producto de las dos cotas superiores entre las que se mueven los exponentes i y j, es decir, lkt.

El entero v

Llamemos r al orden del elemento y^t. Así, $e = (y^t)^r = y^{tr}$. Como y es un elemento de orden l, sabemos que $l \leq tr$. Queremos demostrar que $l = tr$, de modo que hay que excluir el caso en el que $l < tr$. Razonemos del siguiente modo: si fuera $l < tr$, entonces existiría un entero $u < r$ tal que l esté comprendido entre tu y $t(u+1)$, es decir: $tu < l < t(u+1)$. Fijémonos en la cantidad $t(u+1) - l$. Por una parte, se trata de un entero positivo menor que t, pues $0 < t(u+1) - l < t(u+1) - tu = y$. Por otra, se tienen las igualdades $y^{t(u+1)-l} = y^{t(u+1)} = x^{s(u+1)}$, pues el orden de y es l, e $y^t = x^s$. Pero entonces hemos demostrado que existe un entero positivo menor que t tal que y elevado a él coincide con una potencia de x, lo cual es absurdo teniendo en cuenta la definición de t como el menor entero con esa propiedad. La posibilidad $l < tr$ queda, por tanto, excluida, y tenemos $l = tr$. Así, $e = y^l = y^{tr} = x^{sr}$.

Para continuar, necesitaremos este pequeño resultado:

> **Lema 3.** Sea g un elemento de orden n en un grupo G. Entonces n divide a cualquier entero d tal que $g^d = e$.

Basta demostrarlo para el caso en el que d es positivo. Como n es el menor entero positivo tal que g elevado a él coincide con el elemento neutro, sabemos que $n \leq d$. Podemos, por tanto, dividir d entre n para obtener $d = pn + r$, donde $0 \leq r < n$ es el resto de la división. Entonces $e = g^d = g^{pn+r} = (g^n)^p g^r = g^r$, pues $g^n = e$. Así, $g^r = e$, lo cual implica que $r = 0$, ya que, en caso contrario, el orden de g no sería n sino r. Esto concluye la prueba.

Como $x^{sr} = e$, el lema 3 afirma que orden$(x) = lk$ divide al entero sr, es decir: existe v tal que $sr = lkv$. Sustituyendo el valor de l que acabamos de calcular, se tiene

$sr = trkv$. Como r es el orden del elemento y^t, se trata de un entero no nulo y, dividiendo a ambos lados, se concluye que $s = tkv$.

Fin de la demostración

En esta última sección demostraremos que G es isomorfo al producto directo de los grupos cíclicos generados por x y $x^{-vk}y$, donde v es el entero que acabamos de definir. Se trata de elementos de órdenes lk y t respectivamente. En el primer caso no hay nada que demostrar. En el segundo, observemos que

$$(x^{-vk}y)^t = x^{-vkt}y^t = x^{-vkt}x^s = x^{s-vkt} = e,$$

pues $y^t = x^s$ y $s = vkt$. Si existiera otro entero $t' < t$ con la propiedad $(x^{-vk}y)^{t'} = e$, entonces tendríamos $y^{t'} = x^{-vkt'}$. Pero esto contradice la elección de t como el menor entero tal que y^t es una potencia de x. Por tanto, $x^{-vk}y$ tiene orden t, y el orden del producto directo $\langle x \rangle \langle x^{-vk}y \rangle$ es lkt.

Consideremos la función $\varphi : \langle x \rangle \times \langle x^{-vk}y \rangle \to G$ que envía el par $(x^i, (x^{-vk}y)^j)$ al elemento $x^{i-vk}y^j$. Mediante un cálculo muy similar al que realizamos en la demostración del lema 1, se comprueba que φ está bien definida y que es un homomorfismo de grupos (¡escriba los detalles!). Como G y $\langle x \rangle \times \langle x^{-vk}y \rangle$ tienen el mismo orden, para ver que φ es un isomorfismo es suficiente con demostrar que es inyectiva, es decir, que $x^{i-vk}y^j = e$ implica $x^i = e$, y $(x^{-vk}y)^j = e$. Esta última igualdad equivale a $y^j = x^{vkj}$, de modo que y^j es una potencia de x. Mediante un argumento esencialmente análogo al que nos permitió demostrar el lema 3, vemos que j debe ser un múltiplo de t, luego existe j' tal que $j = tj'$. Sustituyendo:

$$e = x^{i-vk}y^j = x^{i-vktj'}y^{tj'} = x^{i-(vkt)j'}x^{sj'} = x^{i-sj'}x^{sj'} = x^i,$$

pues $y^t = x^s$ y $s = vkt$. Por tanto, $x^i = e$ como queríamos. Hemos visto que G es isomorfo al producto directo de dos grupos cíclicos. Cuando sus órdenes sean primos entre sí, será isomorfo a un grupo cíclico. Así concluye la prueba.

Bibliografía

ARBONÉS, J., MILRUD, P., *La armonía es numérica. Música y matemáticas*, Barcelona, RBA, 2010.

AUBIN, D., «The Withering Immortality of Nicolas Bourbaki: a Cultural Connector at the Confluence of Mathematics, Structuralism and the Oulipo in France», *Science in Context*, 10 (2), 1997, 297-342.

BERTHOLET, D., *Claude Lévi-Strauss*, Granada, Universidad de Granada, 2005.

BOREL, A. ET AL., *André Weil (1906-1998)*, número especial de la *Gazette des Mathématiciens*, 1999.

BROUÉ, M., «Les tonalités musicales vues par un mathématicien», en «Le temps des savoirs», Revue de l'Institut Universitaire de France, 4, eds. D. Rousseau & M. Morvan, París, Odile Jacob, 2002, 37-78.

BOURBAKI, N., «Foudations of Mathematics for the Working Mathematician», Journal of Symbolic Logic 14, 1949, 1-8. N.

—: *Théorie des ensembles*, París, Hermann, 1954.

—: «L'architecture des mathématiques», en *Les grands courants de la pensée mathématique*, París, ed. F. Le Lionnais, Cahiers du Sud, 1948, 35-47.

CALVINO, I., «Rapidez» en *Seis propuestas para el próximo milenio*, Madrid, Siruela, 1990.

CARTIER, P., «Le défi post-hilbertin», prólogo a Jeremy J. Gray, *Le défi de Hilbert. Un siècle de mathématiques*, París, Dunond, 2003.

—: «Matemáticos sin fronteras», Gaceta de la RSME, aparecerá.

—: «Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques III. Le structuralisme en mathématiques: mythe ou réalité?, *Prepublications de l'IHÉS* M/98/28.

CARTIER, P., CHEMLA, K., «Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques II. La création des noms mathématiques: l'exemple de Bourbaki», *Prépublications de l'IHÉS* M/98/20.

DIOFANTO, *La «Aritmética» y el libro «Sobre los números poligonales»*, ed. M. Benito Muñoz, E. Fernández Moral y M. Sánchez Benito, Tres Cantos, Nivola, 2007, 2 vols.

ERIBON, D., LÉVI-STRAUSS, C., *De cerca y de lejos*, Madrid, Alianza, 1990.

FRESÁN, J., «Le château de groupes. Entretien avec Pierre Cartier» en «Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques V. Le problème de l'espace», *Prépublications de l'IHÉS* M/09/41. Un resumen en inglés se ha publicado en EMS Newsletter, diciembre 2009, 30-33.

—: «Lejos de las cigarras inclementes», *Revista de Libros*, nº 158, febrero 2010, 7-8.

—: «En casa de los Weil», *Clarín: revista de nueva literatura*, XVI, nº 93,15-20.

JAMES, J., *The Music of the Spheres: Music, Science and the Natural Order of the Universe*, Nueva York, Grove Press, 1993.

JOULIA, É., *Lévi-Strauss. L'homme derrière l'oeuvre*, París, JC Lattès, 2008.

LÉVI-STRAUSS, C., *Las estructuras elementales del parentesco*, Barcelona, Paidós, 1998.

—: *Mirar, escuchar, leer*, Madrid, Siruela, 1994.

—: *Tristes trópicos*, Barcelona, Paidós, 2006.

MARCHAND, J.J., *Entretien avec Claude Lévi-Strauss*, disponible con subtítulos en español en http://www.youtube.com/watch?v=_Vg4Jx3wzo4 y sucesivos.

SENECHAL, M., «The Continuing Silence of Bourbaki – An Interview With Pierre Cartier», *The Mathematical Intelligencer* 20 (1), 1998, 22-28.

TODOROV, T., «Jakobson y Bajtín», en *La experiencia totalitaria*, Barcelona, Galaxia Gutenberg, 2010.

WEIL, A., *Memorias de aprendizaje*, Tres Cantos, Nivola, 2002.

—: *Number Theory. An Approach Through History from Hammurapi to Legendre*, Boston, Birkhäuser, 1994.

—: *Œuvres scientifiques: collected papers*, Berlín, Springer, 2009, 3 vols.

WEIL, S., *Œuvres*, París, Gallimard, 1999.

—: *En casa de los Weil. André y Simone*, Madrid, Trotta, 2011.

WRIGHT, D., *Mathematics and Music*, Providence, American Mathematical Society, 2009.

Índice analítico

Abel, Niels Henrik 54
Academia de Ciencias 18
álgebra 12, 18, 37
algoritmo de Euclides 90, 91
alteración 111, 118-121
Antología Palatina 87
Apología de un matemático 21
Argelia, guerra de 26
Aristóteles 16
aritmética 88-89
aritmética de las curvas algebraicas, La 35
Arquíloco 16
arquitectura de las matemáticas, La 23
armonía 9, 107, 109, 114, 120
Artin, Emil 18, 54
asociatividad 58, 72, 96, 103-105
Astronomia nova 108
Audin, caso 28
axiomático, método 19

Bach, Johann Sebastian 109
Baudelaire, Charles 40
Beauvoir, Simone de 26
Beethoven, Ludwig van 115
bemol 110
Berg, Alban 121
Berio, Luciano 121
Berlin, Isaiah 16, 40
Bézout, identidad de 91-92, 130-131
Bhagavad-Gītā 15
Borges, Jorge Luis 107
bororo (indios) 37
Bouglé, Célestin 29, 36
Bourbaki 9, 17-23, 27, 37, 39, 53, 54
brahmanes 15
Breton, André 39
Brouncker, William 94

caduveo (indios) 37
cálculo diferencial e integral 17, 18
Calvino, Italo 16
campesino de París, El 39
Cartan, Élie 18
Cartan, Henri 17, 27
Chern, Shiing-Shen 21
Chevalley, Claude 17
Chomsky, Noam 12
Chopin, Frédéric 114
Cien billones de poemas 39
Círculo de Praga 40
círculo dodecafónico 114-116, 121, 124
Claro de Luna 115
clases preparatorias 17, 29
composición 45-55, 68, 75, 84
Conferencias sobre el icosaedro y la solución de la ecuación de quinto grado 71
conjetura
  de Birch-Swinnerton-Dyer 106
  de Mordell 35
conjuntos, teoría de 18-19, 23, 37
Conrad, Joseph 32
consagración de la primavera, La 114
contrato social, El 37
Courant, Richard 13, 16

Cours d'analyse 17
criptografía 93-94, 106
crow (indios) 66
crudo y lo cocido, Lo 122
cuadrado
  latino 52, 59, 61, 122-123, 125
  mágico 51-52
cuarta 115, 120
Cuarteto para cuerda nº 3 118
curva elíptica 98-106

Dante 16
De la metafísica a las matemáticas 25
Debussy, Claude 114
Décima sinfonía 119
Dehn, Max 21
Delsarte, Jean 17
diabulus in musica 120
diapasón 109
Dieudonné, Jean 17
Diofanto de Alejandría 87
divisor 89-92, 109
dodecafonismo 121
Durero, Alberto 51, 52
Durkheim, Émile 69

École libre des hautes études 40
ecuación
  algebraica 9, 54
  de Pell-Fermat 88, 94-97
  de quinto grado 54, 71
  diofántica 87-106
  homogénea 91-92
  lineal 88, 91-93
educación sentimental, La 33
Einstein, Albert 12, 121
Elementos 20
Elementos de matemática 20
eliminación 58-61, 82, 128
Elkin, padre 77
Enriques, Federigo 13
escala 110-112, 118-121
Escuela de Viena 121
Escuela Normal Superior 17, 29
esferas, música de las 107-126
Essai sur la théorie des nombres 21
estructura 23-41, 52-57, 60, 65-73, 95-98, 117, 124, 127-129
estructuras elementales del parentesco, Las 35, 41, 66, 72
estructuralismo 9, 39
etnografía 25, 29, 36
Euclides 20
Euler, Leonhard 94
exogamia 69

Fauré, Gabriel 116
Fermat, Pierre de 88, 94
filosofía 13, 25, 28-29, 107
Flaubert, Gustave 33
fonología 40
Fourier, Joseph 87
frecuencia 109-118
función 57, 61-75, 80-83, 127, 129, 131, 134
Fundación Rockefeller 13, 38

Gallimard, editorial 32, 35
Galois, Évariste 54-55
Gandhi, Mahatma 15
Garnier, ópera 121

gatos, Los 40
Gaugin, Paul 27
Gauss, Carl Friedrich 33
generador (de un grupo) 62, 70, 72, 129-132
geometría algebraica 13, 35
Goncourt, Academia 32
Goursat, Édouard 17
grupo
  abeliano 54, 70, 72-73, 85, 88, 96, 105-106, 127-134
  abeliano finitamente generado 73, 106, 127-134
  cíclico 62-63, 70-74, 76-77, 82, 97, 127-134
  conmutativo 54
  de Klein 71, 74
  de orden dos 60
  de orden tres 60-62
  del reloj 62, 70, 93, 114, 120, 123-124
  isomorfo 57, 61, 73, 83-84, 97, 127-129
  simétrico 55-57, 68, 70, 77
  transitivo 76-77

Hadamard, Jacques 17, 35, 106
Hardy, Godfrey Harold 14, 21
Harmonices mundi 109
Hausdorff, Felix 18
hercio 109
Hertz, Heinrich Rudolf 109
Hilbert, David 18
Hindemith, Paul 109
Hipaso de Metaponte 108

identidad 48, 50-51, 53, 59, 68, 76, 83, 129
Ilíada 15
incesto 66, 69, 72
intercambio
  generalizado 67, 73
  restringido 74, 75, 77
Internacional Obrera 26
invariante 43-48, 51, 56, 60, 70-71, 84, 106, 128
inversión 123-124
inverso, elemento 53-54, 57-58, 76, 88, 96-97, 103, 124, 128

Jacobi, Carl Gustav Jacob 87
Jakobson, Roman 40-41
Jordan, Camille 54
Joyce, James 16
judío 9, 11, 15, 28
juventud y matemáticas 21

kaingang (indios) 36-37
Kammersymphonie 121
Kepler, Johannes 108-109
Klein, Felix 71
Kronecker, Leopold 89
Kuhn, Thomas 18-19

Lefschetz, Solomon 18
Legendre, Adrien-Marie 21, 87
Lévi, Sylvain 13
Libri, Guglielmo 33
lingüística 40-41
Lionnais, François Le 39
Liszt, Franz 120
logaritmo 117-118

Lowie, Robert H. 29, 32

Mahler, Gustav 119
Malinowski, Bronislaw 33
matemático frente al siglo, Un 28
matrimonio 65-85
máximo común divisor 90-92
Melancolía I 51
Miguel Ángel 85
Mitológicas 107, 114
Mittag-Leffler, Gösta 13
monoide 53
Montaigne, Michel de 16, 29
Mordell, Louis 13, 35, 105-106
Mozart, Wolfgang Amadeus 107
multiplicación, tabla de 49, 58-61, 71
mundé (indios) 37
murngin (indios) 77-85

nambikwara (indios) 37, 65, 113
neutro, elemento 53-54, 57-60, 70-72, 96-97, 103, 123-124, 127-129, 131, 133
Nevanlinna, Rolf 27
Newton, Isaac 117
Nietzsche, Friedrich 16
Noether, Emmy 18
nomenclatura 20, 54
números
  enteros 54, 63, 73, 88, 90-91, 130-134
  irracionales 89, 108
  naturales 49, 54-55, 62, 70, 72, 88-91, 93, 108
  primos 89-90, 93
  racionales 89, 98, 105

octava 108, 111-115
Offenbach, Jacques 121
omaha (indios) 66
orden 48-51, 59-63, 71, 74, 83, 84, 128-134
origen de la desigualdad entre los hombres, El 37
Oulipo (Taller de Literatura Potencial) 39

paradoja 19
Pavana 116
Pell, John 94
permutación 55-56, 60, 68-70, 73, 76, 82
perspectiva 101
Pitágoras 107-108
Platón 16, 28
Plimpton, tablilla 21
Plon, editorial 32
Poincaré, Henri 9, 18, 34-35, 43, 105
Poldevia 18
polinomio 13, 35, 99-100
política 25-28
primos cruzados 77
Principia Mathematica 20
producto directo 70-74, 97, 127-134
Proust, Marcel 11, 16
psicoanálisis 15

Queneau, Raymond 39, 122
quinta 108, 110-111, 115-116

Rabelais, François 29
Ravel, Maurice 114

rey de los elfos, El 34
Riemann, Bernhard 20, 54
Rossini, Gioachino 121
RSA 90
rotación 44-45, 48
Rousseau, Jean-Jacques 37
Ruan 27, 108
Russell, Bertrand 19

Sartre, Jean-Paul 26
Schönberg, Arnold 121
Schubert, Franz 34
Schwartz, Laurent 27
semántica 40
semitono 115-120, 123-124
Serge, Victor 38-39
Severi, Francesco 13, 16
Shakespeare, William 16
Shannon, Claude 38
Shostakovich, Dmitri 118
Si es medianoche en el siglo… 38
Si esto es un hombre 38
simetría 9, 44-50, 53, 62, 71, 118
socialismo 26
Sociedad de Observadores del Hombre 29
Sociedad Matemática Europea 27
sociedad
  compleja 66
  elemental 66
  irreductible 75-76, 84
  mínima 37
  reductible 75, 83-84
sociedad primitiva, La 32
sociología 29
Sócrates 21
solución (de una ecuación) 35, 71, 87-106
  fundamental 97
Sonata a Dante 120
sostenido 110
Stokes, fórmula de 17
Strauss, Isaac 121
Stravinsky, Igor 114
subgrupo 62, 70, 72-77, 84

Tagore, Rabindranath 15
Talmud 15
tangente, recta 102-103
temperamento igual 112-113
teorema
  de estructura de los grupos abelianos finitamente generados 73, 127-134
  de las unidades de Dirichlet 97
  de Mordell 105
  fundamental de la aritmética 89
tercera 115, 120
tono 109, 115, 118-119
topología 18, 37
transformación 43-63, 70-71
transposición 116, 118, 120, 124
Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas 54
triángulo 43-63, 70-71
Tristes trópicos 25, 26, 32, 35, 66
tritono 115, 120
Trubetskoy, Nikolai 40
tupi-kawahib (indios) 37

unicidad 57

van der Waerden, Bartel Leendert 18
Vichy, gobierno de 38, 40
Vietnam, guerra de 28
Volterra, Vito 13

Wagner, Richard 114, 121
Warburg, Aby 17
Webern, Anton 121
Weil, Eveline 26-27
Weil, Simone 12, 15, 28, 108
Whitehead, Alfred North 19

Hasta que el álgebra os separe

La teoría de grupos y sus aplicaciones

Los franceses André Weil y Claude Lévi-Strauss —matemático uno, antropólogo el otro— se cuentan entre las mayores figuras intelectuales de los últimos cien años. Mediante un diálogo ficcional entre ambos se explica cómo la teoría de grupos, liderada por el primero, arroja luz sobre el estudio de las estructuras que articulan las sociedades y sus rituales, el objeto de investigación del segundo. Un estudio fascinante de la confluencia de la matemática y el comportamiento humano y un retrato vívido de dos genios.