Formas que se deforman

La topología

Vicente Muñoz

El mundo es matemático

A mi mujer Ana por todo su apoyo y cariño.
A mis hijos Carmen, Miguel y Alonso

© 2011, Vicente Muñoz por el texto
© 2011, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Créditos fotográficos: iStockphoto
Infografías: Tenllado Studio

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-7439-7
Depósito legal: NA-2695-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 7

Capítulo 1. Introducción 9
La forma de la Tierra 11
Geometría y topología 16
La forma del universo 19

Capítulo 2. Un mundo de dos dimensiones 25
El Departamento de Topología 33
Mirando los lazos en Planilandia 36
Primer intento: el toro 38
El modelo del cuadrado del toro 42
Otras posibilidades 46
Orientabilidad. La banda de Möbius 47

Capítulo 3. La topología de las superficies 51
Topología intrínseca y topología extrínseca 54
Orientabilidad 55
La botella de Klein 58
Topología de las superficies 62
Finitud y compacidad 62
Sin borde *versus* ilimitado 63
El problema de la clasificación 64
Característica de Euler-Poincaré 66
Las superficies compactas, sin borde y orientables 68
La suma conexa 70
Polígonos fundamentales 71
El teorema de la clasificación de superficies 73

Capítulo 4. Geometría en Planilandia 75
Los geómetras de Planilandia 76
La geometría esférica 82
Geometría extrínseca e intrínseca 87
Isometrías 88
Geometría *versus* topología 90
Geometría 90
Topología 91
Curvatura 92
Teorema de Gauss-Bonnet 94

Homogeneidad e isotropía 99
Geometría hiperbólica 102
Geometrías de curvatura constante 105
La esfera 107
El toro 108
Superficie de género $g \geq 2$ 111
¿Qué queremos decir con «geometrías»? 113
¿Y cómo averiguaron cómo era Planilandia? 114

Capítulo 5. Topología y geometría en dimensión 3 115
Variedades 115
Topologías en dimensión 3 118
La 3-esfera 120
El 3-toro 122
Orientabilidad 125
La 3-botella de Klein 127
Puertas interespaciales y pegado de asas 128
Sumas conexas 130
Cirugías a lo largo de nudos 131
Geometrías en dimensión 3 133
Geometrías homogéneas en tres dimensiones 135
Geometrías isotrópicas en variedades compactas 138

Capítulo 6. ¿Qué forma tiene nuestro universo? 143
El universo 144
Cosmología 149
La geometría del universo 151
El corrimiento hacia el rojo y el Big Bang 153
Las formas espaciales 156
El futuro del universo 157
Geometría del universo 159
La expansión acelerada 162
Los parámetros cosmológicos 162
La topología del universo 163
El fondo de radiación cósmica 166

Epílogo 169

Bibliografía 171

Índice analítico 173

Prefacio

Dicen que un topólogo es un matemático que no sabe distinguir un donut de una taza de café. La topología se ocupa de estudiar figuras que se pueden deformar y retorcer. Son matemáticas pero no parecen matemáticas: sin fórmulas, sin ecuaciones, sin funciones... ¡ni números y ni letras! Un área de las matemáticas muy abstracta pero que suele jugar con objetos muy concretos, lo que nos hace difícil intuir cómo se matematiza el mundo de la topología.

No muy alejada de la topología se encuentra la geometría, que estudia figuras en el espacio: triángulos, polígonos, rectas y planos... pero también figuras curvas, tales como superficies y cuerpos sólidos. La geometría es el estudio de las medidas de los objetos, es decir, de su forma. Algo que se hace incluso más palpable cuando irrumpen las geometrías no euclideas en el siglo XIX para mostrar que incluso el espacio tiene su propia forma.

Ambas, la geometría y la topología, se ocupan de la forma. La geometría, usando las propiedades métricas (distancias, ángulos, etc.), se centra en cómo se ve el espacio de forma local. Especial importancia tendrá la curvatura, que cuantifica cómo se «abomba» un espacio. La topología, sin embargo, al permitir moldear un objeto como si fuera elástico, se ocupa de la forma global del espacio: cómo se anuda, cuántos agujeros tiene... Ambas están íntimamente relacionadas: la forma local determina en gran medida la forma global.

Cuando la editorial RBA me planteó la idea de escribir un libro sobre topología y geometría, no pude resistirme a la tentación de adentrarme con el lector en un problema real donde tanto la geometría como la topología tienen algo que decir. Quizás uno de los problemas que más ha intrigado al ser humano es el de la forma de nuestro propio espacio. Curiosamente, la geometría ha resultado ser la herramienta indispensable para entender el espacio en el que vivimos, el universo. Y, por tanto, la topología va a ayudar en el proyecto de averiguar su forma. Es curioso que los expertos en cosmología no se hayan percatado hasta muy recientemente de que la respuesta a esta pregunta precisaba de la topología.

En las páginas que siguen haremos un pequeño viaje por el mundo de la geometría y la topología. Observaremos que la pregunta sobre la forma de nuestro espacio no tiene una respuesta obvia, y tendremos cuidado en precisar dicha cuestión. De hecho, la pregunta es casi más importante que la respuesta. Durante varios capítulos visitaremos un mundo de dos dimensiones que nos mostrará el significado

de la topología y la geometría en una versión simplificada. Veremos cómo las geometrías no euclideas irrumpen en este contexto, y cómo la topología y la geometría de un espacio interactúan y se complementan en el teorema de Gauss-Bonnet. Aquí seguiremos las peripecias de unos amigos bidimensionales empeñados en averiguar la forma de su universo. Y aprenderemos la diferencia entre la geometría intrínseca y la extrínseca, y la importancia de mirar los espacios siempre desde dentro.

Después regresaremos a los espacios de dimensión 3 para analizar conceptos topológicos y geométricos de los mismos. Finalizaremos repasando lo que se ha ido averiguando sobre el cosmos en el último siglo, y cómo todo ello ha servido para entender la geometría de nuestro espacio. Los últimos avances han hecho aparecer la materia oscura y la energía oscura, de cuya existencia sabemos indirectamente. Ahí acabará nuestro camino, dejando, como la vida misma, la pregunta aún inconclusa.

Quiero concluir agradeciendo a Javier Fresán sus numerosas correcciones y sugerencias, que han mejorado el texto enormemente, y también a Miguel Muñoz por algunos de los dibujos que aparecen.

Capítulo 1

Introducción

En efecto, las cosas que aparecen
nos hacen vislumbrar las cosas no-patentes.
Anaxágoras

Desde tiempos inmemoriales, el ser humano ha mirado al cielo estrellado y se ha preguntado dónde vivía. Ha buscado explicaciones a su existencia. Y ha encontrado multitud de respuestas (casi tantas como las que ha acabado descartando), siempre tomando la que le parecía más razonable de entre las que tenía a su disposición en cada momento.

Somos una especie producto de la evolución. Ésta ha configurado la forma de comportarnos. Muchas especies desarrollan habilidades concretas. Nuestra particularidad es un cerebro hiperdesarrollado, especializado en construir situaciones imaginadas. Así, miramos a nuestro alrededor y, antes de decidirnos a actuar de una u otra manera, imaginamos cómo puede continuar la situación. Las hormigas, de las que hay billones, prueban con las diversas opciones; muchas de ellas eligen un camino equivocado y mueren, pero entonces sus compañeras pueden elegir otra opción mejor. Nosotros «probamos» en nuestra mente, y eso nos ahorra (como especie) gastar muchos de nuestros individuos en intentos vanos.

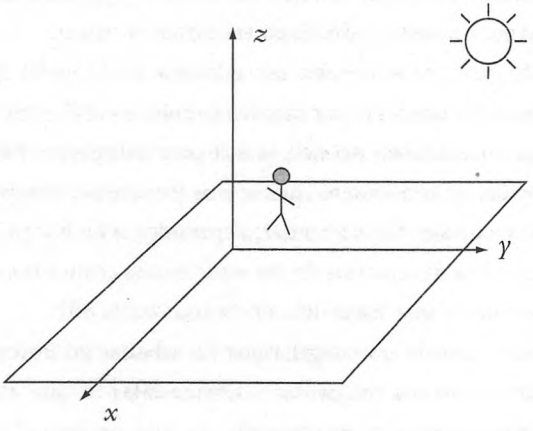
Pero el cerebro, que nos ha hecho tan exitosos en la lucha de las especies por sobrevivir y perpetuarse, también nos acarrea problemas. Nuestra cabeza no para de trabajar, ni siquiera cuando esto no nos es útil para sobrevivir. No cesamos de preguntarnos sobre todas las situaciones que se nos presentan, siempre impulsados por una energía interior que nos lleva a actuar, a aprender, a luchar por mejorar, a desear tener más... y a sentir esa frustración de no estar nunca contentos en el punto al que hemos llegado, por arduo que haya sido el camino hasta allí.

Así, el ser humano, desde que vagaba por las sabanas en busca de alimento, miraba a su alrededor y buscaba preguntas y respuestas a lo que veía. Pero no podía quedarse bloqueado con una pregunta cada vez que no tenía los datos necesarios para resolverla de forma concluyente. Nuestro mecanismo para salir de ese círculo

vicioso es tan simple como ingenioso: tomamos la respuesta más plausible de entre las que están a nuestra disposición y la damos por cierta. No es difícil imaginar cómo en este caldo de cultivo surgieron los mitos y las leyendas (un ser querido muere, no entendemos qué ha sucedido, pero al rememorarle creemos oír su voz en nuestra cabeza; por tanto, su voz está aún vagando por aquí). Incluso el nacimiento de las religiones puede explicarse como subproducto de un cerebro superproductivo.

Mirar al firmamento y preguntarse qué hacen todos esos pequeños puntos de luz en medio de la oscura y tranquila noche sería quizás uno de los interrogantes que inquietarían a nuestro hombre de las cavernas. Algo importante tenían que estar haciendo ahí cuando aparecían todas las noches, al dejar el sol de mostrar su reiterada presencia diaria. Seguramente, no tardaría en darse cuenta de que, día tras día, esos puntos de luz aparecían en los mismos lugares. Esto debía de tener un significado tan profundo que no podía ser porque sí. A falta de ecuaciones y teorías sobre galaxias y constelaciones, el hombre del Paleolítico debió de concluir que un dios, un ser mucho más poderoso que cualquiera de los animales que caminaban por la tierra, los tuvo que poner ahí. El lector puede fácilmente imaginar el resto de la historia.

¿Qué forma tendría el universo? Seguramente, para nuestro amigo prehistórico esa pregunta tenía fácil solución. Hay tres direcciones en las que podemos mirar: adelante-atrás, derecha-izquierda y arriba-abajo (las denominaremos *longitud*, *anchura* y *altura*). Por tanto, el espacio se expande en esas tres direcciones. Había descrito el espacio euclideo. Pregunta resuelta. ¿Para qué buscarle tres pies al gato?



Las tres dimensiones del espacio euclideo.

La forma de la Tierra

Una de nuestras pasiones es buscarle tres pies al gato. Ciertamente, buscamos respuestas a nuestras preguntas, y también concluimos nuestra búsqueda con aquella respuesta que más nos cuadra. Pero somos conscientes de que la respuesta es provisional. O quizá no lo seamos, pero nos movemos en ese eterno estado de provisionalidad. Solemos buscar nuevos datos en relación con cualquier interrogante, incluso para los que ya tenemos respuesta. Si estos datos corroboran lo que sabemos, si cuadran con nuestras deducciones, nos reafirmamos. Si no lo hacen, nos vemos obligados a modificar nuestra actitud. Bien podemos cambiar (levemente o drásticamente) la respuesta que teníamos, bien nos ocupamos de explicar el nuevo dato de manera que cuadre con lo que sabíamos. Los seres humanos somos muy ingeniosos en esta actividad, dado que, después de todo, se trata de nuestra especialidad.

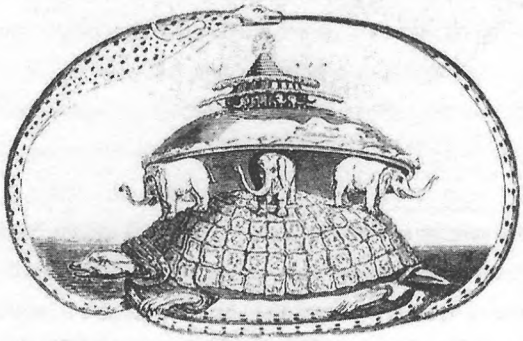
EL MÉTODO CIENTÍFICO

El método científico es el método de investigación usado principalmente en la producción de conocimiento en las ciencias. De hecho, está basado en la provisionalidad de las respuestas a los problemas del mundo natural. El método científico tiene dos pilares fundamentales: la reproducibilidad de los experimentos y la falsabilidad de las hipótesis. Funciona de la siguiente manera: cada vez que queremos explicar un fenómeno natural, proponemos una hipótesis (tales hipótesis parten de nuestra inventiva, son nuestro intento plausible de explicación del fenómeno). La hipótesis produce, a través de argumentos lógicos, consecuencias que pueden ser testeadas en el mundo físico a través de observaciones o de experimentos. Toda hipótesis debe ser susceptible de ser negada, y de que puedan diseñarse experimentos que pudiesen ser acordes con las consecuencias de la negación de la hipótesis.

Si todo experimento que diseñamos tiene un resultado acorde con las predicciones, damos la hipótesis por verdadera y la elevamos al rango de teoría. Sin embargo, toda verdad es susceptible de ser refutada, corregida o mejorada por otra nueva teoría en algún momento futuro en el que se diseñe un experimento con el que no sea acorde. Por ejemplo, la teoría de la gravedad de Newton cuadraba perfectamente con los movimientos de los planetas con una precisión asombrosa (para el siglo XVIII), pero no pudo explicar la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, notada en el siglo XIX. La teoría de la relatividad general de Einstein explicó este fenómeno, a principios del siglo XX.

Al mirar al cielo, la primera obviedad es que no podemos ir hacia abajo, simplemente porque está el suelo. La tierra que pisamos tiene dos direcciones, longitud y anchura. Es como un gran plano surcado de pequeñas imperfecciones: valles y montañas, ríos y lagos, que parecen estar ahí como de adorno. Nuestra vista apenas alcanza a distinguir un pequeño trozo, pero «sabemos» que hay tierra más allá. Ésta es una curiosa deducción, del tipo de las que hemos mencionado hace unos instantes: cada vez que pensamos en qué habrá más allá de nuestra vista, y viajamos hasta allí, acabamos comprobando que no hay más que otra porción de tierra, con sus pequeños adornos, pero en esencia igual que aquella en la que estábamos. De aquí hay ya sólo un pequeño paso de inducción que nos lleva a concluir que la Tierra es un plano ilimitado sobre el que los seres humanos caminamos.

Sin embargo, la inmensidad nos abruma. El concepto de infinito parece más un engendro diabólico que algo que percibamos como existente. Quizá porque el infinito no lo podemos agarrar, o quizá porque algo finito (nosotros) en un mundo infinito es como no ser nada. Sea como fuere, seguramente al ser humano, colocado en mitad de su hábitat, no le gustase pensar que este mundo era infinito, sin límite allá donde se dirigiese (ya veremos a lo largo de este libro que hay una sutil pero fundamental diferencia entre infinito e ilimitado, una diferencia que el hombre prehistórico no sería capaz de apreciar). Por tanto, era lógico deducir que vivimos en un inmenso disco, una especie de plato, colocado en algún lugar, sujeto de alguna forma. Llegar al borde del mundo sería peligroso, pues podríamos caer. Afortunadamente, el territorio conocido acababa siempre al llegar a la costa, desde donde se divisaba un ancho mar. ¿Y quién sabe si viajando hacia los confines del mar encontraríamos ese borde?



En sus mitos más antiguos, la cosmogonía china y la india mantenían que la Tierra era un plato sostenido por cuatro elefantes, que a su vez estaban dispuestos sobre una gran tortuga marina.

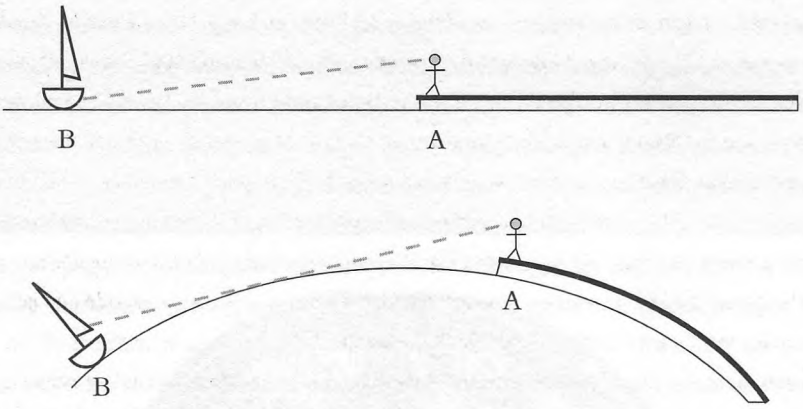
RUSSELL Y LAS TORTUGAS

Cuenta una historia que en cierta ocasión el filósofo y matemático Bertrand Russell (Reino Unido, 1872-1970) estaba dando una conferencia sobre astronomía, en la que describió cómo la Tierra giraba alrededor del Sol, que a su vez giraba en torno a las estrellas de nuestra galaxia. Al final de la charla, una anciana se levantó al fondo de la sala y dijo: «Todo lo que nos ha contado usted son disparates. En realidad, el mundo es una placa plana que se sostiene sobre el caparazón de una tortuga gigante». A Russell estos comentarios no lo amilanaban. Sonrío con suficiencia y dijo: «¿Y sobre qué se sostiene la tortuga?». «Se cree usted muy agudo, joven», replicó la anciana. «Pero hay infinitas tortugas».

Mapamundi del cartógrafo genovés Pietro Vesconte, año 1320.
En él aparecen Europa, Asía y África (los continentes conocidos en aquella época).
El mapa tiene situado el Este hacia arriba, y el Oeste, hacia abajo.

En vista de lo que tenemos a nuestro alrededor, decir que «la Tierra es plana» es una deducción obvia. Y, sin embargo, se nos dibuja una sonrisa al pensar que alguien lo pudo creer alguna vez. ¿Quién fue el primero que dijo que la Tierra no era plana? ¿Cómo se le ocurrió pensar eso? ¿En qué basó tan atrevida afirmación?

Se dice que uno de los motivos que planteó la posibilidad de que la Tierra se fuera curvando fue el hecho de que, al adentrarse un barco en el mar, se deja de ver su casco y sólo se ve el mástil cuando tan sólo se ha alejado de la costa unos pocos kilómetros.



La figura de arriba corresponde a una Tierra plana: un observador situado en la costa (A) podría percibir que el barco (B) se aleja sin dejar de ver su casco. Sin embargo, en la figura de abajo, correspondiente a una Tierra que se curva, el casco del barco va dejando de verse a medida que se aleja del observador, y éste tiene la sensación de que se hunde en el mar.

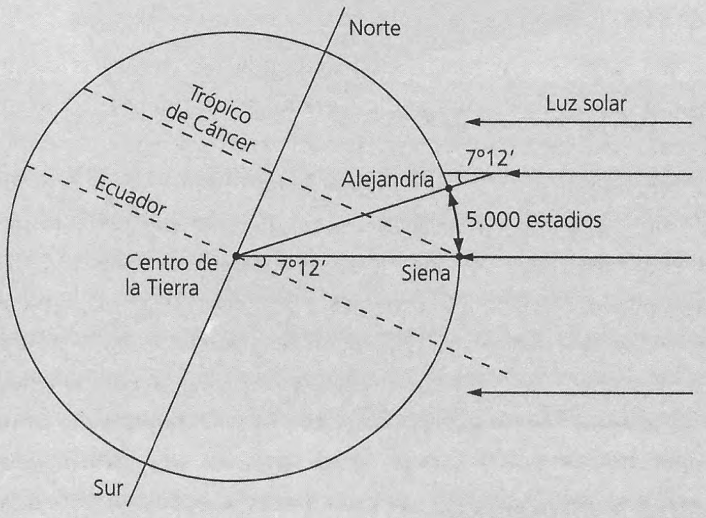
La idea de una Tierra esférica ya estaba extendida en la Grecia helénica; de hecho, Eratóstenes había hecho un cálculo bastante preciso del perímetro de la Tierra. Posteriormente, Cristóbal Colón, usando una estimación de la circunferencia terrestre de 25.255 km, bastante inferior a la de Eratóstenes (al parecer fue debido a que usó el valor de la milla romana, más corta que la milla árabe), propuso un posible viaje en barco para llegar a las Indias viajando hacia el Oeste. Tal viaje abriría una nueva ruta, que salvaría a los barcos del peligroso y largo viaje que en aquellos tiempos se hacía rodeando África. Quizá con las mediciones de Eratóstenes el viaje no se habría llegado a realizar, al menos en aquella época y con aquellos medios, y seguramente éste sea el error que más ha influido en la historia de la humanidad.

El descubrimiento de tierra firme hacia el Oeste es otra muestra de cómo el ímpetu humano siempre nos lleva a culminar nuevas metas. Pero fue un explorador y cartógrafo italiano de nombre Amerigo Vespucci el primero en percatarse de que las tierras situadas al Oeste no se correspondían con las Indias. Y, curiosamente, la historia le ha dado el honor de bautizar al nuevo continente como América (¡qué gran distinción para alguien que dibuja mapas!).

EL MÉTODO TRIGONOMÉTRICO DE ERATÓSTENES

Eratóstenes (Cirene, ca. 276 a.C.-Alejandría, ca. 194 a.C.), matemático, geógrafo y astrónomo griego y director de la Biblioteca de Alejandría durante 45 años, calculó el perímetro de la Tierra con un ingenioso método trigonométrico que él mismo inventó. Por referencias obtenidas de un papiro de su biblioteca, Eratóstenes sabía que en Siena, la actual Asuán (Egipto), el día del solsticio de verano los objetos no proyectaban sombra alguna y la luz alumbraba el fondo de los pozos; esto significaba que la ciudad estaba situada justamente sobre la línea del trópico. Eratóstenes partió de la base de que el Sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos, de manera que midió la sombra en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía, demostrando que el cénit de la ciudad distaba 1/50 parte de la circunferencia, es decir, 7° 12′ del de Alejandría. Posteriormente, tomó la distancia estimada entre ambas ciudades, fijándola en 5.000 estadios, de donde dedujo que la circunferencia de la Tierra era de 252.000 estadios.

La longitud de la circunferencia terrestre es de 40.008 km. Admitiendo que Eratóstenes usó el estadio de 185 m, su estimación fue de 33.392 km, es decir, cometió un error del 17%. Sin embargo, también es posible que usara el estadio egipcio, en cuyo caso el error fue de tan sólo un 1%.



La figura muestra el método que empleo Eratóstenes para la medición del perímetro de la Tierra, con la localización de Alejandría y Siena y la incidencia de los rayos solares durante el solsticio de verano.

Imagen de la Tierra tomada en la misión Apolo 17.

En aquel momento aún podríamos haber mantenido la idea de que la Tierra era plana, y que más allá de América estaría su borde. La irrefutable evidencia de la redondez de la Tierra nos la brindó la primera expedición que completó una vuelta alrededor del globo, entre 1519 y 1522, capitaneada por Fernando de Magallanes (aunque Magallanes murió durante el viaje y fue Juan Sebastián Elcano el que finalizó el periplo). Claro que, a estas alturas, el lector no debería ser confiado y creer que la Tierra es esférica sólo por un viaje; por ejemplo, ¡podría ser cilíndrica! Pero tal como dijimos antes, siempre tomamos la respuesta más plausible como correcta, y ahora la respuesta plausible es la esfera. Afortunadamente, esta vez acertamos (para ser rigurosos, la Tierra no es exactamente una esfera porque está achatada por los polos). La confirmación final la tenemos en las fotografías tomadas por los satélites artificales y los módulos espaciales enviados desde la Tierra a partir de la década de 1960 y que muestran el planeta en todo su esplendor.

LA SOCIEDAD DE LA TIERRA PLANA

En 1956, Samuel Shenton, compositor de canciones, estableció la Flat Earth Society con la intención de aglutinar a aquellos que estaban convencidos de que la Tierra es plana, de aportar argumentos científicos a favor de esta teoría y de hacer una amplia campaña publicitaria para evitar que los niños fueran instruidos en la escuela sobre la idea de que la Tierra es esférica. La carrera espacial erosionó el proyecto de esta sociedad, si bien a día de hoy aún pervive y mantiene una página web: *http://www.alaska.net/~clund/e_djublonskopf/Flatearthsociety.htm.*

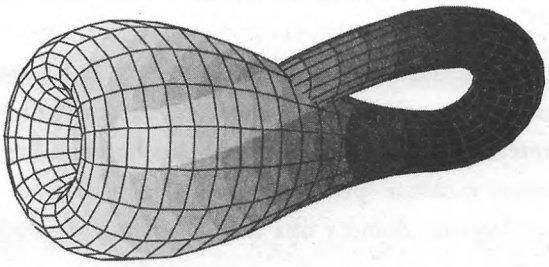
Geometría y topología

Para un matemático, la cuestión de la forma de la Tierra debería plantearse siguiendo un razonamiento más riguroso. En principio hay muchas posibilidades para la forma de una superficie. Primero debemos conocer todas esas posibilidades y luego,

seleccionar (con las herramientas de que dispongamos, incluido un viaje en barco) cuál de ellas es la correcta. Esto es, debemos aplicar el método científico.

Aquí hay un detalle al que hemos de prestar atención: la *forma esférica* es una percepción de la que disponemos los seres humanos; una manzana o un canto rodado son esféricos. Es posible imaginarnos la Tierra como un pedrusco gigantesco esférico sobre el que vivimos. Sólo hay dos inconvenientes: ¿qué sujeta a ese pedrusco en el inmenso firmamento? ¿Por qué los seres que viven en la parte «de abajo» no se caen? Esas cuestiones fueron las que hicieron que la idea de Tierra esférica tardase un tiempo en aceptarse. En todo caso, podemos zanjar el tema poniendo la Tierra en el centro del universo (¿y por qué no iba a ponernos Dios en el centro, si somos su mayor creación?) y argumentando que todo debe «caer» hacia ella.

Más difícil hubiera sido concluir que la Tierra es esférica si no hubiéramos podido tomar esa manzana en nuestras manos. De hecho, vamos a hacer el análisis al revés: hay posibles formas de superficies, como la botella de Klein, que no podemos tener en nuestras manos porque no se pueden construir en el espacio tridimensional.

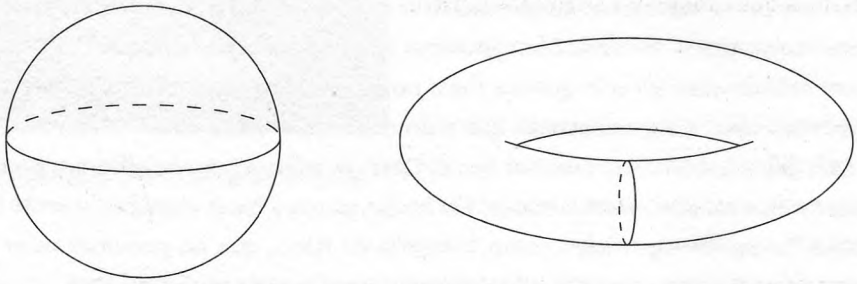


Una botella de Klein es aquella en la que el cuello se conecta con la parte interior de la base de la misma. Pero lo hace sin traspasar sus paredes, algo imposible de concebir en nuestro espacio tridimensional.

Si la Tierra hubiera tenido la forma de una botella de Klein nos hubiera costado bastante más averiguarlo, porque el primer paso, tener una imagen visual de la superficie como posibilidad para la Tierra, de entrada estaría ausente. Sí, es posible imaginarse superficies que no estén en el espacio tridimensional, pero debemos recurrir a otros elementos para comprender esas formas. Quizá debamos hacer una pausa y abordar la cuestión desde un marco filosófico más general: ¿en qué consiste describir (percibir, entender) la forma de un objeto? «En que lo vemos» es sólo una posible respuesta, quizá la que más seguridad nos da, dado que somos un animal con percepción de tipo preeminentemente visual. Pero, en realidad, lo que buscamos es:

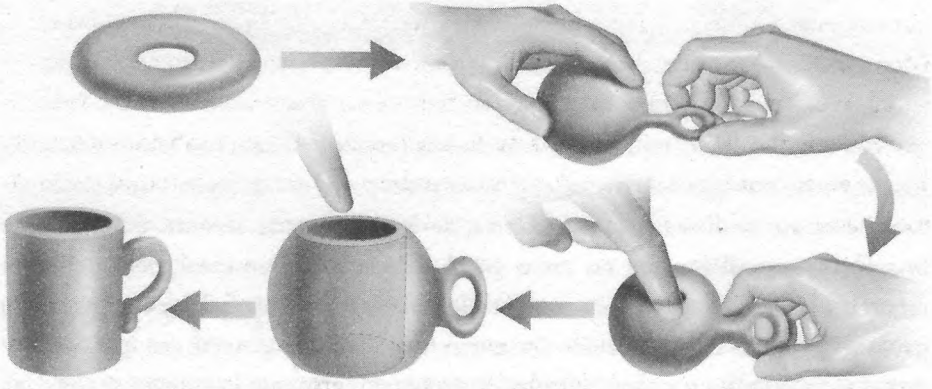
conocer sus propiedades (¿cuáles?, ¿cuántas?), saber contestar cualquier pregunta que se nos plantee sobre el objeto, poder distinguirlo de entre otros de su mismo tipo, poder detectarlo, saber construirlo (¿con qué herramientas?, ¿con qué piezas?, ¿con qué método?).

La *topología* es la rama de las matemáticas que estudia la «forma global» de los objetos, es decir, cómo es un objeto cuando se lo mira en su totalidad. Por ejemplo, no es lo mismo ser una esfera que un donut.



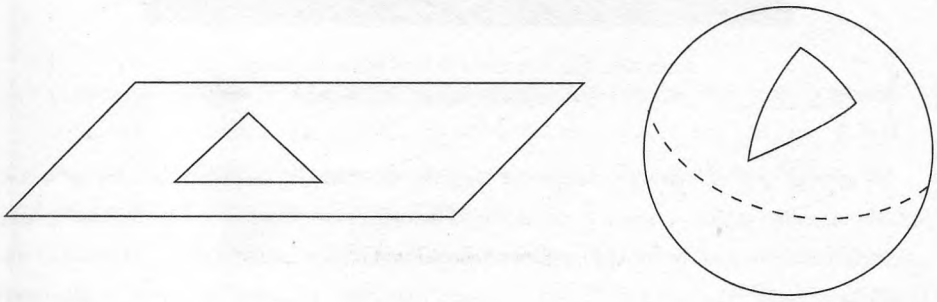
Una esfera y un donut tienen distinta forma global.

Sin embargo, para un topólogo, dos objetos tienen la misma forma global si podemos deformar uno en otro por un proceso de estiramiento, pero sin romperlo ni pegarlo. Para entenderlo, imaginemos que las figuras están hechas de una goma flexible que podemos moldear (pero no cortar ni desgarrar, ni tampoco coser o pegar). Para un topólogo, un donut y una taza son objetos equivalentes, que tienen la misma forma global.



Un donut se puede transformar en una taza;
ambas superficies son topológicamente equivalentes.

La *geometría* estudia las propiedades métricas, es decir, cuestiones como las distancias, los ángulos, principalmente cuando los queremos estudiar «dentro» del objeto. Por tanto, la geometría está más interesada en la «forma local» de los objetos. Por local entendemos aquello que se puede estudiar en un pequeño entorno, es decir, cerca de un punto concreto del espacio o del objeto. Para un geómetra, un plano y una esfera no son equivalentes, ya que el segundo está curvado, mientras que el primero no lo está. Esto tendrá consecuencias, por ejemplo, en la forma de las figuras que dibujemos en ambos espacios.



Un triángulo representado dentro de dos superficies distintas: un plano y una esfera.

La forma del universo

Después de todas las vicisitudes por las que hemos pasado para averiguar qué forma tiene nuestro pequeño planeta, ya no nos enfrentamos a la inmensidad del universo con una actitud incauta. «¿Qué forma tiene el universo?» ha pasado a ser una pregunta de enjundia, seguramente nada fácil de resolver. Veíamos un espacio estrellado que se extiende en tres direcciones de forma indefinida, y colocábamos a nuestra Tierra en el centro del mismo. Por cierto, también hubo una historia (mucho más interesante que la de la redondez de la Tierra) que fue relegando al planeta desde su posición en el centro del universo hasta situarlo girando alrededor del Sol, y que luego también retiró al Sol del centro del universo: éste resultó ser una pequeña estrella en el borde de una galaxia de tamaño medio, sumida en un universo que no parece tener ningún centro. Y los seres humanos inmersos en este lugar ¿podremos, mirando a nuestro alrededor (y discurriendo inteligentemente) llegar a averiguar qué forma tiene?

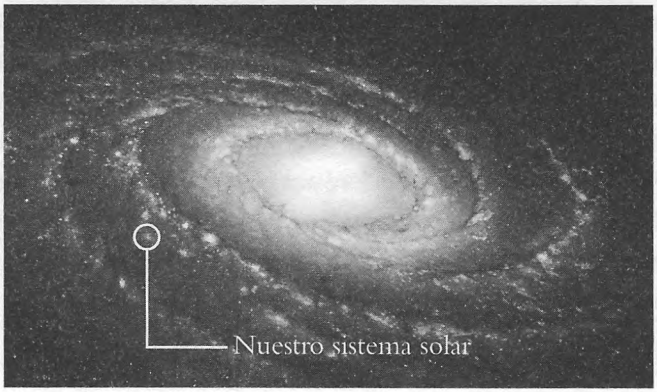


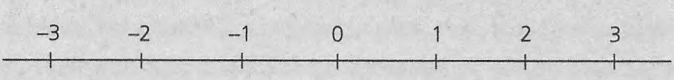
Ilustración que reproduce la Vía Láctea, la galaxia en la que se encuentra el sistema solar.

Se estima que el universo tiene un tamaño de más de 90.000 millones de años luz. Recorrerlo entero parece fuera de toda cuestión: yendo a la velocidad de la luz, necesitaríamos al menos 90.000 millones de años. Como la teoría de la relatividad de Einstein sitúa la velocidad de la luz como la máxima velocidad que puede alcanzar una partícula, cualquier sonda espacial, por avanzada que fuera, tardaría al menos ese tiempo. Y, desde luego, ¡no queremos esperar tanto para contestar a la pregunta! Mejor que usar sondas podemos usar como viajeros espaciales algunas partículas. De hecho, lo mejor es usar la propia luz, como veremos en el capítulo 6. La edad estimada del universo es de unos 13.700 millones de años, de manera que en un universo «tan joven» incluso la luz apenas ha tenido tiempo de dar la primera vuelta. Recogeremos la luz (y las demás radiaciones que recibamos del cosmos) y con ella podremos intentar contestar a nuestra pregunta. Pero el resto de la deducción la tendremos que basar en argumentos matemáticos. Es aquí donde intervienen la geometría y la topología: nos darán las pistas de cómo aprovechar los datos que reciban nuestros telescopios. Al fin y al cabo, esto no es muy distinto de lo que hizo Eratóstenes: mirar la luz que recibía del Sol para comprobar que la Tierra era esférica.

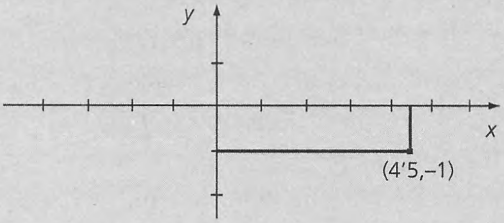
En primera instancia, el lector, a menos que ya tenga nociones de geometría o haya leído antes sobre este tema, seguramente no imaginará cuáles son todas esas *posibles formas* del universo a las que los matemáticos se refieren. La primera respuesta que uno imagina es que se extiende de forma infinita e ilimitada en las tres direcciones, largo, ancho y alto. A tal espacio se le denomina *espacio tridimensional* o *espacio tridimensional cartesiano,* en honor a René Descartes, filósofo y matemático francés de la primera mitad del siglo XVII, que inventó los ejes de coordenadas.

LAS COORDENADAS

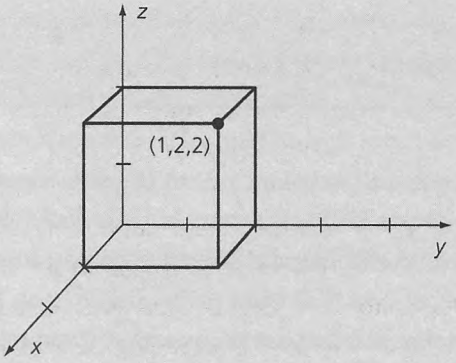
En matemáticas podemos considerar espacios de cualquier dimensión. El espacio cartesiano n-dimensional se denota $\mathbb{R}^n$. La recta es el espacio 1-dimensional $\mathbb{R}^1$ (la $\mathbb{R}$ es el símbolo de los «números reales»). Sus puntos se corresponden con una coordenada, es decir, con un número real x. Si el número es positivo, se encuentra a la derecha del cero, y si es negativo, a su izquierda.



El plano cartesiano es $\mathbb{R}^2$, y sus puntos vienen dados por dos coordenadas (x, y). La primera indica la posición horizontal, y la segunda, la vertical. Por ejemplo, el punto (4'5, –1) está situado 4'5 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo. Cada punto está dado por sus coordenadas. Por tanto, identificamos el plano con $\mathbb{R}^2$.



El espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$ se define análogamente. Dibujamos los ejes x, y, z con una flecha que indica el lado *positivo* del eje. Localizamos cualquier punto en el espacio tridimensional cartesiano dando sus tres coordenadas.



Desde nuestro lugar en el espacio, y mirando a nuestro alrededor, tenemos la impresión de que los tres ejes coordenados se extienden infinitamente. Por tanto, podríamos postular que el universo es un espacio cartesiano. Sin embargo, esto equivale a suponer que la Tierra es plana sólo porque podemos dibujar dos ejes sobre el suelo. ¡Y ya comprobamos cómo en ese caso incurríamos en un error!

El universo podría ser el análogo de una esfera, pero en dimensión 3 (lo que podemos llamar una *hiperesfera,* aunque los matemáticos lo denominan 3-esfera). No es fácil de imaginar, quizá porque no tenemos una hipermanzana a nuestra disposición que nos dé una idea de qué imaginar. Debería ser un universo que se «curvase» de manera que lo pudiésemos rodear. Un hipotético viaje en línea recta pasaría por un punto antipodal (¿habrá algo especial en las hiperantípodas?) y luego regresaría, describiendo una gran circunferencia. Fue el matemático alemán Bernhard Riemann el primero en postular esta hipótesis allá por 1854.

ESPACIOS DADOS POR ECUACIONES

Los matemáticos recurren (cuando es posible) a ecuaciones para describir objetos. La 3-esfera viene dada por una ecuación en el espacio 4-dimensional. Dicho espacio tiene cuatro ejes (perpendiculares entre sí) que llamaremos x, y, z, t. La 3-esfera vive en $\mathbb{R}^4$, al igual que la 2-esfera (que es la esfera usual y corriente) vive en $\mathbb{R}^3$. Los puntos de la 3-esfera son aquellos que están a distancia fija del origen de coordenadas. Suponiendo que el radio de la 3-esfera es $r = 1$ (siempre podemos elegir las unidades de medida para ajustar esto), los puntos de la 3-esfera tienen coordenadas (x, y, z, t) que verifican que

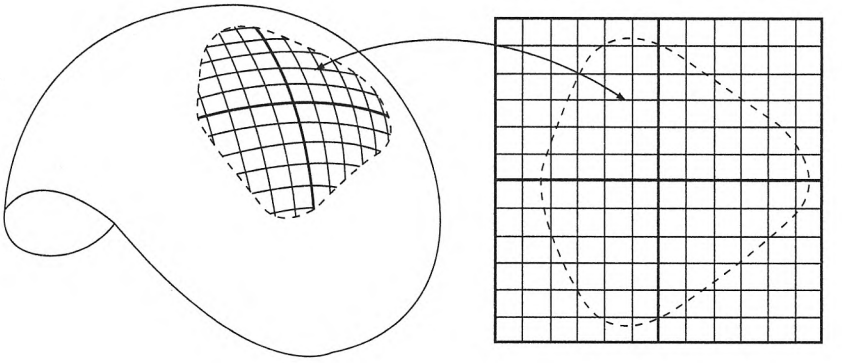
$$x^2+y^2+z^2+t^2=1.$$

En general, a la esfera de dimensión n la llamamos n-esfera, y la denotamos S^n. Son los puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ a distancia 1 del origen. La 2-esfera S^2 es la esfera usual, y la 1-esfera S^1 es la circunferencia de radio 1. ¿Qué es la 0-esfera S^0?

Lo que ocurre es que sólo podemos ver un pequeño entorno a nuestro alrededor. Quizá nos da la impresión de que vemos (con nuestros telescopios) galaxias muy lejanas, pero en realidad la cantidad del espacio a la que tenemos acceso es muy pequeña en comparación con el tamaño global del cosmos. Por tanto, lo máximo que podemos decir sobre nuestro universo es que «localmente es equivalente al espacio tridimensional cartesiano».

Haremos un (pequeño) acto de fe para creer que se verifica la propiedad de poder colocar coordenadas localmente en cualquier otro lugar del universo. Hay varios postulados físicos que corroboran esta idea. El primero es que las ecuaciones de la física no deben depender del punto donde nos encontremos o de la posición en la que nos coloquemos (principio de consistencia). El segundo viene dado por un principio de relatividad (plasmado, en su forma más elaborada, en la teoría de la relatividad general de Albert Einstein) que dice que no hay ningún lugar ni ningún sistema de coordenadas privilegiado.

Una *variedad* es un espacio que «localmente» se ve como el espacio cartesiano. Por tanto, se pueden colocar coordenadas en cualquier punto, y ninguno de ellos es privilegiado con respecto a los demás. La palabra *variedad* hace referencia a que dicho espacio tiene «varias» direcciones.



Una variedad de dimensión 2 es una superficie.
En un entorno de un punto, podemos poner coordenadas (x, y).

Expresado en estos términos, el problema se puede estudiar con herramientas matemáticas. ¿Qué espacios de dimensión 3 hay? ¿Cómo encontrarlos y cómo construirlos? ¿Y cuál de ellos es nuestro universo?

Entramos ahora en un terreno de las matemáticas muy complejo, ya que trata un problema que aún no está resuelto y en el que muchos especialistas han trabajado (y siguen haciéndolo) y han obtenido resultados parciales de gran interés. Algunas hipótesis sobre el universo pueden simplificar el problema:

— Es natural esperar que el espacio no tenga borde, que no haya ningún lugar donde se acabe. Por tanto, el espacio sería ilimitado.

— Una hipótesis algo más discutible, pero razonable, consiste en suponer que el universo no es infinito. Podría ser, por tanto, un espacio finito pero ilimitado (tal como lo es la Tierra). Desde el punto de vista filosófico, podemos defender esta postura argumentando con paradojas sobre la infinitud, en el caso de que el universo tuviera una cantidad infinita de materia. Sin embargo, los argumentos son débiles. Debemos tener esto en cuenta, pues alguna evidencia posterior podría llevarnos a revisar una hipótesis de este tipo. Más adelante veremos cómo se pueden compatibilizar las características de «ilimitado» y de «finito».

— Se suele suponer que en el universo la materia está equidistribuida (en términos aproximados). La distribución de galaxias parece más o menos uniforme. Esto tiene implicaciones en la geometría del espacio, pues convierte el espacio en homogéneo, es decir, que tiene la misma geometría en todas partes (al menos de forma aproximada). Esta hipótesis se basa en la exploración de la parte del universo que es observable para nosotros (el universo cercano), y es compatible con otras teorías, como la del Big Bang.

El problema de encontrar las 3-variedades que cumplen estas tres propiedades es más sencillo que el de encontrar *todas* las 3-variedades. No obstante, es un problema que no ha sido resuelto en su totalidad. Eso sí, existe suficiente información como para poder complementar el desarrollo matemático con experimentos cosmológicos (consistentes en recoger radiaciones cósmicas) que nos hagan progresar en la investigación. Si esto dará resultados, y cuándo, está aún por descubrir.

A partir de ahora nos adentraremos en un mundo de matemáticas, de topología y de geometría. Mostraremos las dificultades de entender la forma global de los espacios, y cómo la forma local y la forma global (la geometría y la topología) de un espacio están íntimamente relacionadas. Navegaremos por las ideas matemáticas que han ido desarrollándose en los últimos 150 años para estudiar las variedades, para después retomar con fuerzas renovadas el problema original.

Nos centraremos en las superficies para ir descubriendo poco a poco la topología y la geometría de las variedades. Ahí estaremos acompañados de unos amigables personajes: los planilandeses. Una historia de superación que nos lleva a un mejor conocimiento de la realidad, manteniendo siempre un espíritu crítico.

Capítulo 2

Un mundo de dos dimensiones

Cuando queremos estudiar cuestiones sobre el mundo natural usando herramientas matemáticas, tenemos que traducir el mundo que nos rodea a términos definibles matemáticamente. Este proceso se denomina *modelizar* el problema. La geometría y la topología estudian los problemas relativos a la forma de los espacios y las figuras. Dado que queremos averiguar la forma de nuestro universo, el objetivo es entender cómo son los espacios de dimensión 3. Pero como éste es un problema de gran dificultad, empezaremos por uno más sencillo: entender los espacios de dimensión 2, las superficies.

LOS *TOY MODEL*

En matemáticas, cuando tenemos entre manos un problema de gran dificultad y entramos en un punto muerto, por lo general se presentan dos opciones. La primera consiste en simplificar el problema, buscar otro parecido pero con menos ingredientes y que sea posible resolver. Se lo suele denominar *baby model* o *toy model* («modelo de juguete»). Con ello se pretende hallar pistas para repensar el problema original. Si éste se refiere a variedades de alguna dimensión, una posibilidad es estudiar el problema con menos dimensiones.

La segunda opción es la «huida hacia delante»: poner el problema en un marco más general, es decir, plantear un problema del que el nuestro es sólo un caso particular. Así, en ocasiones se puede construir toda una teoría, una consecuencia de la cual es la solución a nuestro problema. Por ejemplo, la topología algebraica, una rama de la topología, nace de la generalización del estudio de los agujeros de las variedades.

Planilandia es un mundo de dos dimensiones. En él viven unos seres también de dos dimensiones que se pueden desplazar hacia delante y hacia atrás, a la izquierda y a la derecha. No tienen noción de una dirección arriba o abajo. De hecho, en Planilandia ese concepto no existe, y no hay forma de hacérselo imaginar a sus habitantes.

FLATLAND

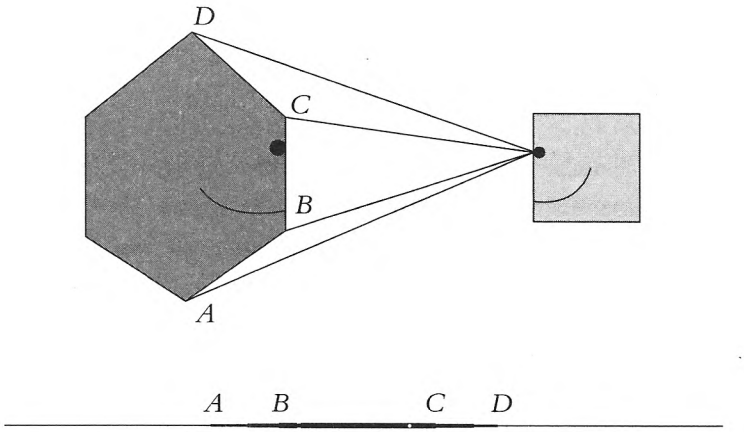
La idea de Planilandia aparece en una divertida novela publicada en 1884 por Edwin Abbott (Londres, 1838-1926), bajo el título *Planilandia. Una novela de muchas dimensiones* (de título original, *Flatland. A Romance of Many Dimensions*). En ella se narran las peripecias de unos seres de dos dimensiones que viven en un mundo plano. Es una novela popular entre los estudiantes de matemáticas, aunque su trasfondo es una dura crítica del autor a la sociedad victoriana de su época. Los seres de Planilandia son triángulos, cuadrados, pentágonos, etc. Tienen más privilegios sociales y más poder cuanto mayor sea su número de lados. Los círculos, con infinitos lados, son los sacerdotes. Las mujeres son meros segmentos, y se las tiene degradadas a la mínima consideración social.

Portada de la primera edición del libro de Edwin Abbott.

El protagonista es un Cuadrado, que tiene la revelación de la tercera dimensión. Cuando intenta transmitir su conocimiento a sus congéneres, es considerado un hereje y encerrado en una cárcel a perpetuidad. La novela ha sido llevada al cine en 2007 bajo la forma de un cortometraje de animación con el título *Flatland: The Movie*.

En Planilandia hay una bulliciosa ciudad, Planid, donde viven más de 200.000 habitantes, los planilandeses. Nuestra primera protagonista se llama Cuadradina, una hermosa joven cuyo nombre hace honor a sus casi perfectamente iguales cuatro lados y a sus delicados ángulos de 90°. Cuadradina bien podría haber participado en concursos de belleza, pero sus inquietudes científicas y exploradoras la llevan por otros derroteros. Los planilandeses son seres completamente planos, ven y conocen dos dimensiones y se desplazan a lo largo de ellas. Todos tienen forma poligonal (triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) o circular. No tienen grosor alguno. No es que Planilandia sea muy delgada, como una fina hoja de papel, y que los planilandeses yazcan sobre ella; es que su mundo no tiene «ningún» grosor, y ellos, simplemente, están «dentro».

Antes de iniciar la narración de las peripecias de nuestros nuevos amigos, conviene que nos hagamos a la idea de cómo perciben su mundo. Cuando un planilandés mira a su alrededor, su campo visual es una línea (al igual que nuestro campo visual es un plano, y nuestra percepción de profundidad es elaborada por nuestro cerebro). Un planilandés ve a un compañero siempre como un segmento. Percibe la profundidad gracias a lo más o menos marcadas que estén las líneas que ve, con lo que puede distinguir dónde se encuentran los vértices, y de ahí deducir la forma poligonal de cualquier planilandés. En caso necesario, se mueven para poder observarse desde distintos puntos y así tener una mejor percepción.



Visión de un planilandés.

Los planilandeses son seres muy inteligentes y tienen muchas inquietudes científicas. Les gusta entender el mundo que les rodea y el porqué de las cosas. Cierto día, tomando unas copas en una pequeña taberna de Planid, Cuadradina charlaba con su amigo Pentagón, de profesión matemático, sobre Planilandia:

— *Cuadradina:* Me gustaría hacer un gran viaje y llegar más allá de donde haya llegado nadie, descubrir nuevos lugares y nuevas gentes. ¿Tú crees que si voy más allá de las últimas montañas de la cordillera del Norte, donde ningún planilandés se ha adentrado nunca, encontraré otras ciudades con otros seres como nosotros?

— *Pentagón:* Chica emprendedora. Cuando hayas recorrido todo, vuelve y escribe tus memorias. ¡Pasarás a la historia!

— *Cuadradina:* La verdad es que es una idea a la que le he dado muchas vueltas. Es un viaje que me planteo en serio. Pero seguramente continuaré sin intención de volver, explorando lugares y lugares, siempre buscando sitios nuevos.

— *Pentagón:* Todo el mundo cree que Planilandia es un plano infinito. Pero yo lo he meditado mucho, y la idea no me convence. No puedo concebir que Planilandia sea infinita; es como decir que no somos nada. Creo que Planilandia es finita, que puedes terminar de recorrerla entera. Además, ¡me encantaría verte de vuelta y que nos contases todas tus hazañas!

— *Cuadradina:* ¿Pero cómo va a ser finita? Entonces acabaré llegando al final. Espero no caerme. ¿Y qué hay detrás?

— *Pentagón:* No digo que tenga final. No creo que tenga ningún borde. De hecho, diría que es finita pero ilimitada.

— *Cuadradina:* ¿Quéee? ¿Eso cómo va a ser?

— *Pentagón:* No estoy seguro, pero tengo motivos para pensarlo. Creo que si vas recto durante mucho tiempo, acabas llegando al punto de partida. Es como si al irte alejando, acabases llegando a un punto que está como al otro lado de Planilandia (yo lo llamo antípoda, porque está justo anti-aquí, o algo así). Luego, si continúas en línea recta sin variar tu dirección, en realidad te estarás acercando de nuevo a Planid, pero viniendo desde la dirección opuesta, hasta acabar regresando al punto de partida.

— *Cuadradina:* O sea, que si voy al Norte sin variar mi rumbo en ningún momento, ¿acabaría regresando por el Sur?

— *Pentagón:* ¡Exacto!

— *Cuadradina:* Pues no hay quien se crea semejante teoría. ¿Y en qué te basas para decir algo tan extraño?

— *Pentagón:* Bueno, toda esta idea viene de mis estudios en geometría. No se lo he comentado a mucha gente, pues igual me toman por loco. Lo que he hecho ha sido pensar en cómo se sentiría un ser de dimensión 1 y cómo vería su mundo.

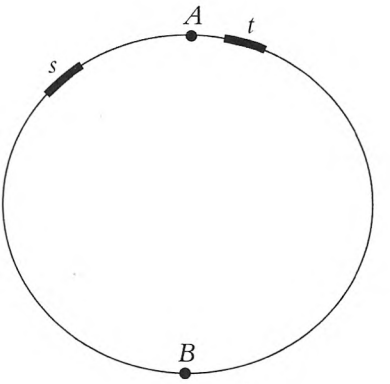
— *Cuadradina:* ¿Un ser de dimensión 1? ¿Qué quieres decir? ¿Eso existe?

— *Pentagón:* ¡Obviamente no! El mundo tiene dos dimensiones, eso es incuestionable. Pero yo me puedo imaginar cómo sería un universo de una dimensión, en caso de existir. Te lo voy a contar. Yo lo llamo *Linealandia*. En este mundo sólo hay una dirección: adelante y atrás. No hay dirección hacia los lados. De hecho, los seres que viven en Linealandia sólo pueden ir hacia de-

lante o hacia atrás. Estos seres son puntos o segmentos. De hecho, si un segmento *s* está delante de un segmento *t*, entonces no hay forma de que *s* se pueda mover para colocarse detrás de *t*. Te voy a hacer un dibujo:

»La verdad es que es un mundo un poco pobre en sus posibilidades, pero me vale para explicar lo que quiero. En Linealandia todos los habitantes piensan que su mundo es una recta, infinito e ilimitado. Lo creen porque siempre que se mueven en una dirección pueden seguir haciéndolo sin obstáculo. No hay límite, no hay borde; por tanto, deducen que se extiende indefinidamente hacia delante y hacia atrás.

»Cuadradina, mira ahora este dibujo:



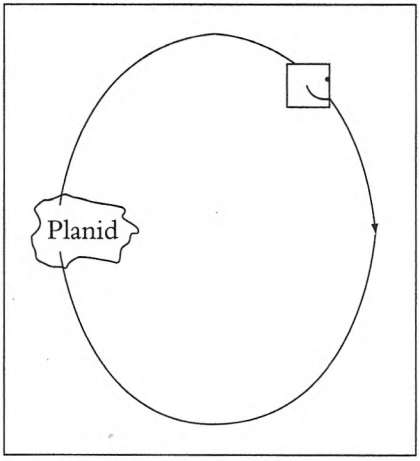
»Lo ves, Linealandia puede ser una circunferencia, es decir, un mundo de dimensión 1 que no tiene límites, pero que ¡es finito! Cuando continúas en una dirección acabas regresando al punto de partida. De hecho, si empiezas en *A*, acabas llegando al punto antipodal, el *B*, y a partir de entonces, seguir en la misma dirección significa ir acercándose al punto de partida.

— *Cuadradina:* ¡Vaya! Ahora lo entiendo. Voy a iniciar mi viaje lo antes posible. ¡Sería fantástico poder averiguar si Planilandia es como tú sugieres!

Finalmente, Cuadradina salió de expedición al verano siguiente, bien pertrechada de víveres y de instrumental para afrontar cualquier eventualidad: temperaturas

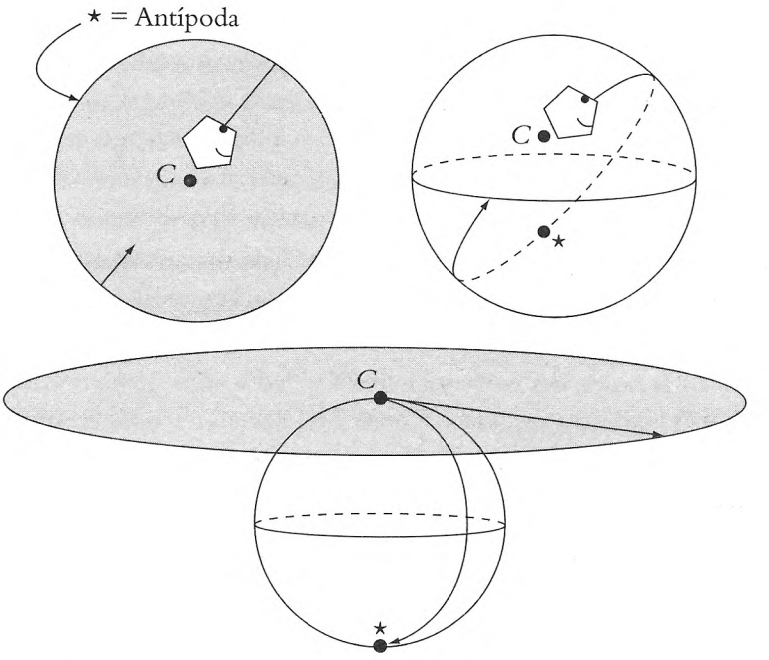
extremas, falta de alimento, etc. Decidió ir hacia el Norte, manteniendo su rumbo lo más recto posible. En Planid, sus amigos la despidieron con lágrimas y abrazos, muchos pensando que no regresaría jamás.

Tres años después Cuadradina llegó de vuelta a Planid. Venía caminando desde el Sur, tal y como Pentagón había predicho. Los periódicos de los días siguientes se llenaron de titulares grandilocuentes, narrando la gran expedición de Cuadradina, los lugares que había conocido y todas las peripecias que atravesó. Pero el mayor revuelo se produjo dentro de la comunidad científica. Pentagón empezó a defender públicamente su teoría en la Universidad de Planid, dando multitud de conferencias. No obstante, había un numeroso grupo de incrédulos. Opinaban que Cuadradina seguramente se fue desviando hacia el Este un poquito, y que había seguido una ruta imperceptiblemente circular. Ni que decir tiene que este tipo de comentarios indignaron sobremanera a nuestra exploradora.



Supuesta ruta de Cuadradina.

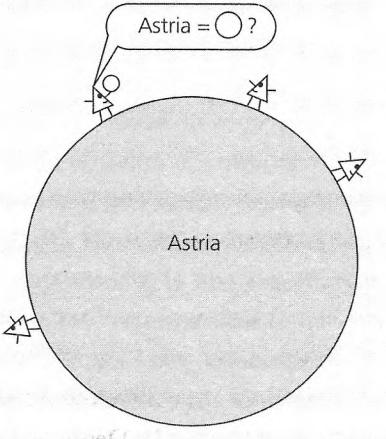
Pentagón expuso su *teoría de la Planilandia esférica* de la siguiente forma al gran público: dibujaba Panilandia como un disco y ponía un punto marcado con un signo como éste, ⋆, al que llamaba antípoda. Si ibas en cualquier dirección fija, acababas llegando al borde del disco. En ese momento, en realidad estabas pasando por la antípoda y volviendo por la dirección opuesta. Lo curioso es que ¡el viajero no notaba nada! Ni siquiera Cuadradina supo identificar cuál de los lugares que había visitado era la antípoda. Desde luego, no era un lugar especial, al menos no se distinguía sobre el terreno.



Pentagón dibujaba la esfera como un disco (arriba a la izquierda), donde el camino desde C a la antípoda es una línea recta. Vemos el camino recorrido en la esfera «usual» (arriba a la derecha), y la correspondencia de ambos (abajo).

ASTRIA, UN PLANETA BIDIMENSIONAL

En la novela de Charles H. Hinton, *Un episodio de Planilandia* (1907), el autor describe unos seres bidimensionales que viven sobre Astria, un planeta con forma de disco, sujetos al suelo por la gravedad. Los astrianos tienen su movilidad casi tan restringida como los seres de Linealandia, puesto que no son capaces de intercambiar sus posiciones cuando uno está frente a otro. Sin embargo, sí que tienen conciencia de «arriba» y «abajo». Por tanto, para un astriano es más fácil de concebir la idea de que su mundo tenga forma de circunferencia que para un habitante de Linealandia.



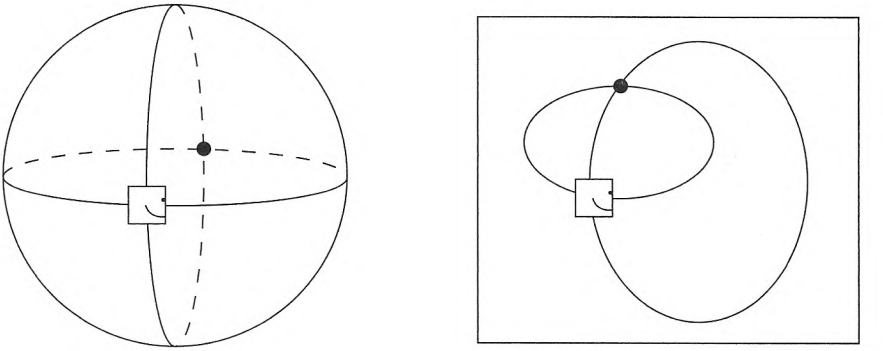
Si Planilandia fuese esférica, entonces no tendría ningún borde, es decir, estuviéramos donde estuviéramos, siempre podríamos continuar viajando en cualquier dirección. Por tanto, se trata de una superficie ilimitada. Sin embargo, el área total es finita: la cantidad de valles y montañas, ríos y lagos que puede haber en una Planilandia esférica es finita. Ser finita e ilimitada no son en absoluto conceptos contradictorios.

En Planid, las autoridades decidieron que se realizaría un segundo viaje exploratorio para confirmar o refutar la teoría de Pentagón. Esta vez saldrían hacia el Este, y en el grupo viajarían diversas personalidades de Planid, tanto defensores como detractores de la teoría del universo infinito, y todos ellos irían comandados por Cuadradina. El segundo viaje les llevó solamente dos años, tras los cuales regresaron al punto de partida por el Oeste. Después de las celebraciones pertinentes, pasaron a analizar la situación en la que habían quedado las distintas teorías. Equiláterus, político de profesión, defensor de las tradiciones y de la *teoría de la Planilandia infinita*, y que había ido en la expedición, participaba en la conversación.

— *Cuadradina:* Parece que la teoría de la Planilandia esférica queda totalmente confirmada. Esta vez podemos asegurar que no nos hemos desviado ni un ápice de nuestra ruta en línea recta. Hemos viajado siguiendo la ruta con toda la precisión posible.
— *Equiláterus:* Eso es cierto, lo confirmo.
— *Pentagón:* Estoy muy contento de haber podido confirmar la teoría. ¿Y cómo era la antípoda?
— *Cuadradina:* Nos ha ocurrido lo mismo que en el primer viaje. No supimos identificar ningún lugar concreto que fuera el punto a partir del cual ya nos estábamos acercando de nuevo a Planid. Y esta vez lo teníamos muy en mente. Estuvimos midiendo la distancia recorrida. Según entendí, la antípoda debería estar justo a la mitad de nuestro viaje.
— *Pentagón:* ¡Pero esta vez era más fácil! No hacía falta llevar la cuenta de la distancia. La antípoda debe estar en el sitio donde vuestro segundo viaje se cruzase con el primero que hiciste. De hecho, la antípoda la has visitado ya en tu viaje anterior.
— *Cuadradina:* ¡Qué extraño! Los dos caminos no se han cruzado. Llevamos un diario de viaje exhaustivo, con la descripción de todos los lugares que hemos visto. ¡No hemos pasado en este segundo viaje por ningún lugar por el que yo hubiera pasado en el primero!

— *Equiláterus:* ¡Lo sabía! Nos estábamos desviando de la ruta y yendo en círculo. Algo les debe de pasar a nuestros aparatos de medida del rumbo, que tienen una desviación ahí fuera que no notamos. Eso sí, queda claro que estamos en un plano infinito.

— *Pentagón:* Estoy sorprendidísimo. ¡Planilandia no es una esfera! Pero, Equiláterus, es que ¡tampoco es un plano! Fíjate, en el caso de que fuera plana, si tienes una ruta que va al Norte y viene por el Sur, y otra que va al Este y viene por el Oeste… ¡éstas también se cortan!



Las rutas de las dos expediciones de Cuadradina deberían cortarse.

En Planilandia se habían quedado sin teorías sobre la forma del universo. Y, además, no sabían qué tipo de expedición hacer para averiguarlo. Así que decidieron fundar un Departamento de Topología en la Universidad de Planid, en la que prestigiosos científicos se dedicaran a resolver el gran problema del momento: averiguar la forma de Planilandia. Pentagón se encargó de dirigir el proyecto.

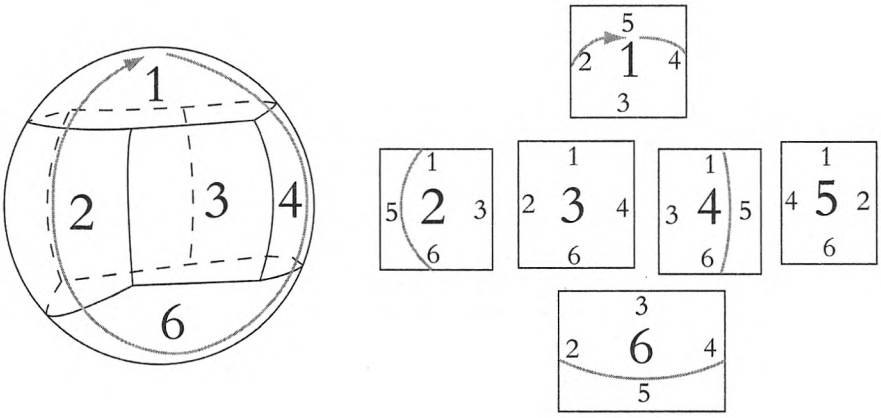
El Departamento de Topología

Había una manera efectiva y concluyente, aunque un poco costosa, de conocer la forma de Planilandia. Consistía en explorar todo el territorio y hacer mapas de todo. Algo así como tener un atlas del lugar. Cada mapa iría en una página numerada (podría contener dibujos y nombres de los distintos enclaves: lagos, ríos, colinas), pero, sobre todo, en el borde de cada mapa habría números con los mapas por los que continuaríamos viajando si fuéramos en esa dirección.

Es innegable que ésta es una manera «completa» de «conocer» un espacio. Con un atlas se puede viajar a cualquier parte sin perderse nunca. Al fin y al cabo, ¿qué

quiere decir «conocer» un espacio? Sin duda, ser capaz de contestar a cualquier pregunta referente al mismo. Por ejemplo, con el atlas se podrían dibujar las dos rutas de Cuadradina y ver por qué no se habían cortado.

Pentagón dibujó las cartas que formarían el atlas de su modelo de Planilandia esférica. Tenía de este modo seis mapas, numerados del 1 al 6, y contenían las reglas de ir-de-uno-a-otro.



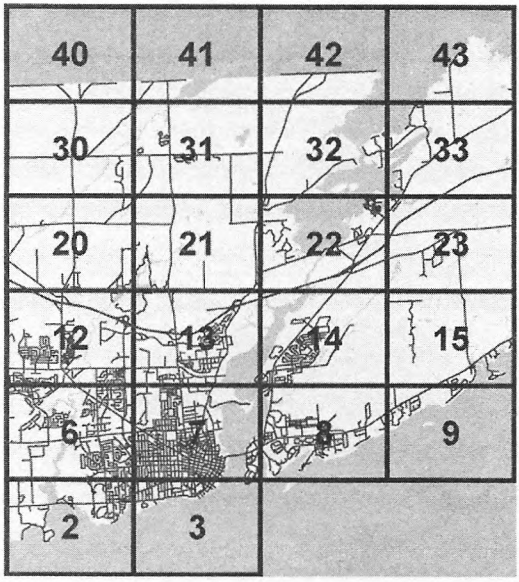
Representación de la esfera de Pentagón con mapas. La ruta dibujada atraviesa los mapas 1-4-6-2-1. Supuestamente, Cuadradina salió del mapa 1 y llegó a la antípoda a la mitad del viaje, en el mapa 6.

La esfera que proponía Pentagón se podía dibujar con seis mapas, pegados con las reglas que se ven aquí. Planid se encuentra en el mapa 1, y el punto antipodal está en el 6. El dibujo de la izquierda de la figura anterior nos revela qué está pasando (pero sólo nos es útil a nosotros, ¡seres tridimensionales!). La representación de la esfera como superficie en el espacio tridimensional nos ayuda a entender (y nos da cierta sensación de seguridad), pero es importante percatarse de que el dibujo de la derecha es «tan completo» como el de la izquierda. De hecho, una superficie no necesita estar en el espacio tridimensional para ser superficie. Y Planilandia no está en ningún espacio, dado que «es» el espacio en sí misma.

Para demostrar que el modelo de los seis mapas es equivalente al modelo del disco-con-antípoda de la pág. 31, Pentagón no tenía a su disposición la imagen de la esfera en el espacio tridimensional. En su lugar, argumentó de la siguiente manera: comenzó a pegar los mapas. Con los cinco primeros no tenía ningún problema. Evidentemente, para pegarlos necesitaba estirarlos, pero esto no importaba, dado

LOS ATLAS

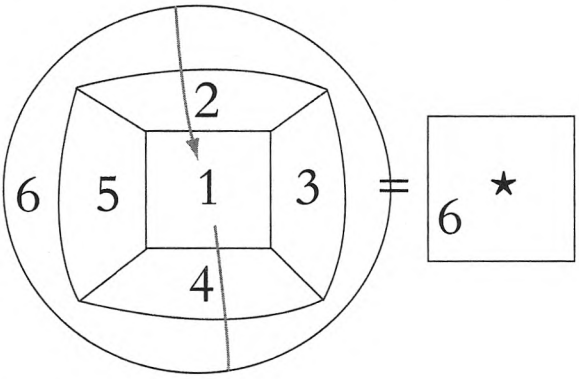
En nuestra vida cotidiana estamos acostumbrados a usar mapas de zonas de la Tierra. Estos mapas aparecen como páginas de un atlas, y en los bordes de cada una de ellas aparecen los números de las páginas a las que debemos referirnos para continuar por cierto camino o carretera. De hecho, es común que la zona del borde de un mapa aparezca repetida en el mapa que sirve de continuación. A veces, la zona repetida está un poco distorsionada por un cambio de escala, por una ligera rotación del mapa, o bien por la distorsión que provoca la curvatura de la Tierra. Pero si desplegásemos las páginas del atlas y nos dedicásemos a unirlas por los bordes, obtendríamos un mapa fiel (quizás un poco deformado, pero eso a un topólogo no le importa mucho) de la región en cuestión.



La imagen corresponde a un atlas de 43 páginas (cartas) de la ciudad de Central Kingston (Ontario, Canadá).

En cartografía, a los mapas también se les denomina *cartas*. En matemáticas, un espacio *n*-dimensional se denomina *variedad*, y se entiende como un conjunto de cartas que se «coleccionan» en un atlas, donde se imponen unas «reglas de pegado», es decir, una manera de salir de una carta y entrar en otra. Los mapas de regiones de la Tierra representan, por tanto, variedades de dimensión 2.

que estaba estudiando el problema desde el punto de vista topológico. Para el mapa 6, tenía que pegar su borde al de los otros cinco, siguiendo la numeración dada. Al no haber manera de hacerlo dentro de Planilandia (por la escasez de «hueco» en su mundo bidimensional), marcó un punto ⋆ en el mapa 6 (que él sabía que debía ser la antípoda) y volvió el cuadrado 6 del revés (con lo de fuera hacia dentro, y lo de dentro hacia fuera). Así pegó el borde de este cuadrado a los anteriores mapas, siempre recordando que ahora la parte de fuera del mapa 6 se correspondía con el punto ⋆. El resultado era su modelo del disco para la Planilandia esférica.

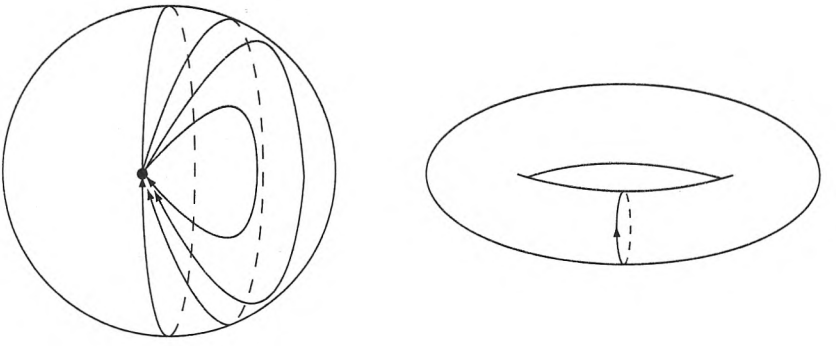


El resultado de la unión de los seis mapas, donde al cuadrado marcado con el 6 se le ha quitado el punto ⋆, para poder volverlo así del revés.

Mirando los lazos en Planilandia

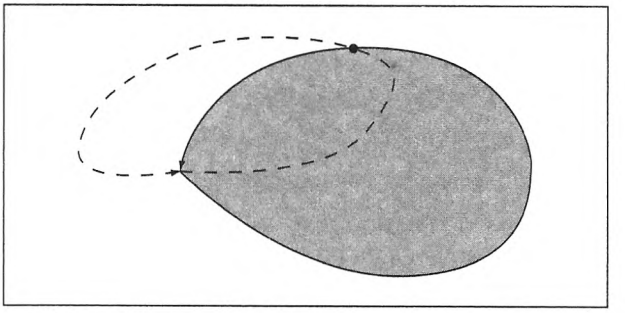
El problema inicial al que se enfrentaron en el Departamento de Topología era explicar cómo era posible que dos caminos desde Planid (uno en dirección Norte-Sur y el otro en dirección Este-Oeste) no se cortasen.

Para estudiar los caminos en una superficie, lo mejor era pensar que estaban formados por una cuerda elástica, de manera que la ruta se convertía en un *lazo*. Si movemos un lazo hacia un lado (estirándolo o encogiéndolo según sea necesario), lo que estamos haciendo es cambiar de ruta. Algunos lazos se pueden mover de forma que los podemos «recoger», es decir, podemos traerlos hacia nosotros y después contraerlos hasta convertirlos en un punto; a estos lazos los llamaremos *triviales*.



Un lazo en la esfera siempre se puede recoger; sin embargo, en el donut hay lazos no triviales.

Los topólogos de Planilandia dedujeron que los caminos que Cuadradina había realizado no podían ser lazos triviales. Imaginemos que uno de los lazos (dibujado con trazo continuo en la figura siguiente) es trivial. Entonces se puede contraer tirando de los extremos. Lo que queda en medio es un disco (de color gris en la figura). El lazo discontinuo tiene un extremo dentro del disco y otro fuera, luego hay un momento en que «sale» del disco. Ése sería un punto de corte de los dos lazos.

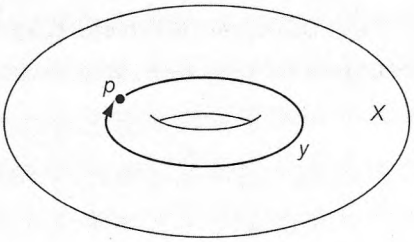


Dos lazos en Planilandia. Si uno de ellos es trivial, ambos lazos se cortan.

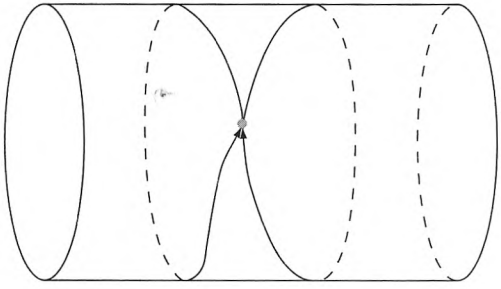
Por tanto, si Cuadradina hubiera tendido un hilo flexible a lo largo de su recorrido y después hubiera atado sus extremos, no lo podría contraer tirando. Esto es como decir que ese lazo «rodea un agujero», aunque ese agujero los planilandeses no lo vean. De hecho ¿qué mejor manera de decir que hay un agujero? Podemos decir que un agujero aparece cuando tenemos un lazo que no podemos contraer. O incluso mejor, que «un agujero es un lazo no trivial». Si un lazo no trivial se

BUSCANDO AGUJEROS: EL GRUPO FUNDAMENTAL

El grupo fundamental es un invariante algebraico que nos encuentra los «agujeros» de un espacio *X*. Tomamos un punto *P* de *X*, al que llamamos punto base. Llamamos lazo en *X* a un camino que empieza y acaba en *P*, y que podemos imaginar como una cuerda cerrada que



puede mover hasta llegar a otro lazo, entonces representan el mismo agujero. A dos lazos que se pueden deformar el uno en el otro les ponemos el gracioso nombre de *homótopos* (del griego *homo*, «similar» y *topos*, «lugar»).



Dos lazos homótopos «rodean» el mismo agujero.
El agujero tiene existencia en el mundo bidimensional,
independientemente de que la superficie esté en el espacio tridimensional.

Primer intento: el toro

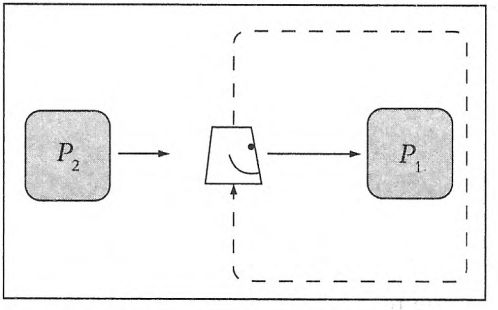
La primera teoría sobre una forma de Planilandia que permitía la existencia de rutas como las realizadas por Cuadradina fue aportada por un joven alumno de doctorado, Trapeciote, que realizaba su tesis en el Departamento de Topología con una beca que le aportaba escasos ingresos, y cuyo director de tesis, Pentagón, le

hemos lanzado al espacio. Los lazos en X se pueden mover, siempre manteniendo su punto inicial y final fijo en P. En este movimiento, la longitud del camino puede variar (pensemos en la cuerda como si fuese una goma elástica). Si moviendo el camino de alguna manera más o menos hábil, logramos que el lazo se pueda llevar todo a un entorno de P, y finalmente (dado que es elástico) contraerlo hasta que se convierta en el propio punto P, diremos que el lazo es «trivial». Los lazos no triviales rodean agujeros. El grupo fundamental está formado por todos los agujeros de X, es decir, por todos los lazos, donde se consideran iguales dos de ellos si uno se puede llevar en el otro por un movimiento elástico.

El grupo fundamental es uno de los objetos más importantes que existen en topología, de ahí su pomposo pero merecedor apelativo de «fundamental».

procuraba más agobios de los convenientes. La idea, como casi todas las ideas geniales, vino por casualidad. Trapeciote estaba buscando cómo construir un lazo que no cortara a otro. Había leído sobre una reciente teoría física en la que una partícula podía desaparecer en un lugar del espacio y aparecer en otro. Aunque (según la teoría física) éste era un efecto a escala cuántica, se planteó, como hipótesis, que hubiera una zona del espacio en la que si un planilandés entraba, apareciese en otra zona alejada del espacio. La zona debía ser de un tamaño considerable para que cupiera un individuo. Sería como una especie de puerta interespacial que sirviese para viajar rápido de un lugar a otro.

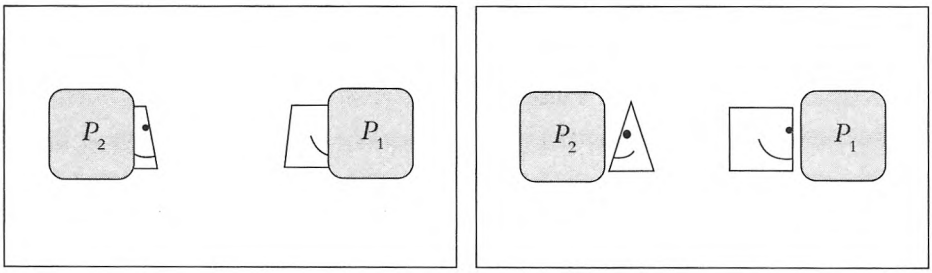
Imaginemos un universo en el que tenemos una puerta interespacial al Este y otra al Oeste, de forma que si entramos por P_1, salimos por P_2, y viceversa. En esta situación, podríamos dibujar las dos rutas que pudo haber seguido Cuadradina:



Trapeciote viaja por una puerta interespacial.

Estas dos rutas no se cortan. De hecho, el camino en trazo continuo es no trivial: si lo movemos, siempre entrará por P_1 y saldrá por P_2. Este hecho le impide ser recogido cerca del punto de origen. El camino en trazo discontinuo tampoco es trivial, no hay forma de moverlo para recogerlo. Trapeciote tenía dos inconvenientes en este modelo:

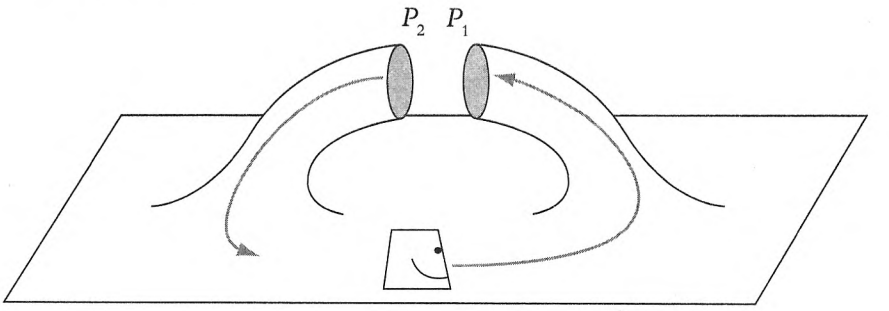
1) La ruta discontinua no es una recta. Trapeciote pudo haber contestado que como topólogo se le permitía dibujar una línea recta o una línea curva para hablar del mismo camino. Pero dio una explicación alternativa, haciendo un modelo en el que había un punto antipodal. El camino discontinuo iba siempre al Norte, pasaba por la antípoda y retornaba entonces desde el Sur. Por tanto, el espacio era finito e ilimitado, igual que lo había sido el modelo de la esfera.
2) Cuadradina no había visto ninguna puerta interespacial, ningún sitio circular (o con otra forma) donde se percibiese que al entrar ahí se sale por otro lugar. Trapeciote argumentó que no había motivo para que se notase la transición al atravesar estas puertas. Si miramos hacia la puerta P_1, simplemente vemos lo que hay «detrás», que es la zona del espacio que está frente a P_2, puesto que la luz también viaja libremente a través de la puerta. De hecho, no habría manera de distinguir esa puerta, por lo que pasaría inadvertida.



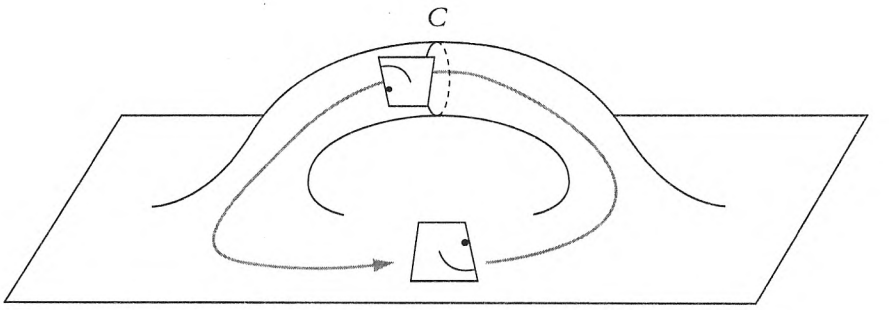
Izquierda: Trapeciote ha entrado por P_1 y está a medio camino, saliendo por P_2. Derecha: Cuadradina y Triangulín hablando amigablemente. Se encuentran uno frente al otro, sin percibir ninguna peculiaridad del espacio.

Para el lector, ya seguramente convertido en topólogo (tridimensional, eso sí), entender el mundo propuesto por Trapeciote es más sencillo de lo que parece. Nosotros podemos hacer uso de la tercera dimensión para visualizar Planilandia. Además, como estamos tratando la forma desde un punto de vista topológico, podemos estirar a nuestro antojo zonas de Planilandia.

Comenzamos estirando la región alrededor de las puertas P_1 y P_2, de manera que podamos aproximarlas:



Los puntos de P_1 y P_2 están en correspondencia. La continuación de un camino que entra por un punto de P_1 sale por el punto correspondiente de P_2. Aproximamos P_1 y P_2 hasta que los puntos que se correspondan queden juntos.



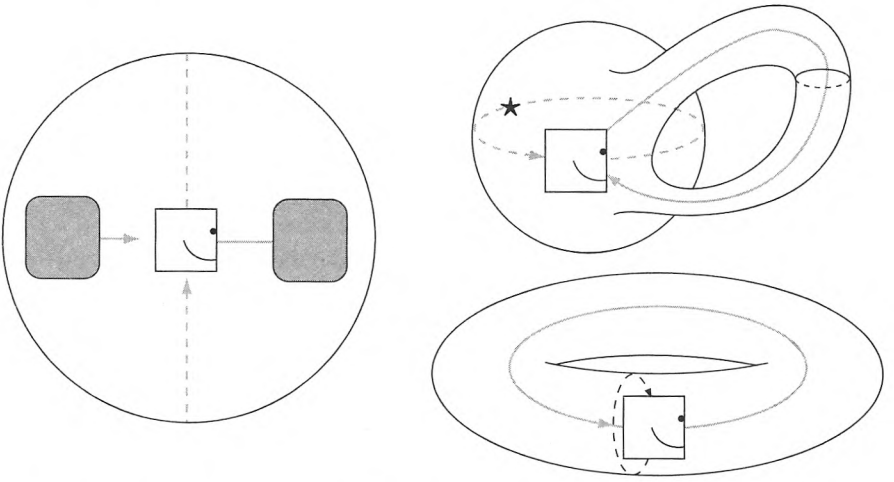
Hemos unido P_1 y P_2. El resultado es un «asa». En la superficie, lo que antes entendíamos por P_1 y P_2 ha quedado dibujado como una circunferencia, denotada con la letra C.

Recordemos que la puerta interespacial pasa inadvertida. No hay ninguna línea negra en Planilandia que marque la puerta *C*. Un planilandés no notaría ningún cambio fisiológico al atravesarla. Por tanto, desde el punto de vista físico, la puerta *C* no existe en Planilandia, sino que se trata de un mero artificio formal que le sirve a Trapeciote para explicar cómo es posible resolver el problema de los viajes de Cuadradina.

Cuando Trapeciote realiza un viaje a través de la puerta interespacial *C*, camina desde la derecha hacia la izquierda cruzando *C*, como en el camino de la figura de la página anterior. Este lazo es no trivial, es decir, no puede ser recogido en un

punto, lo que pone de manifiesto que estamos rodeando un agujero. Aunque el agujero sólo lo percibimos visualmente desde la tercera dimensión, ésta no es necesaria para tener constancia del mismo, puesto que los planilandeses pueden reconocer la existencia del agujero con sus herramientas (los lazos en Planilandia). Por tanto, podemos decir que Trapeciote también «ve» el agujero.

Trapeciote llamó *modelo del toro* a su modelo de espacio bidimensional con puerta interespacial y con antípoda (Trapeciote acuñó el vocablo «toro» a partir de la abreviatura TRO, «Transporte Remoto Oculto»). Y postuló que Planilandia era un toro. Al igual que el modelo de la esfera, la extensión de Planilandia sería finita, pero no habría ningún borde. En este territorio se podían llevar a cabo los dos viajes de Cuadradina. La superficie de un donut se conoce en matemáticas con el nombre de *toro*. Es menester confesar que, en realidad, este término proviene del latín y significaba «cojín».

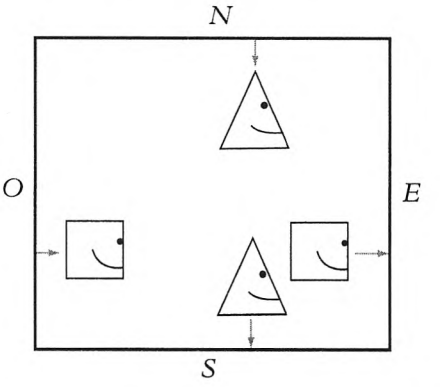


El modelo del toro tiene un par de puertas interespaciales y una antípoda. En él, Cuadradina puede realizar dos viajes en línea recta que no se cortan. Si hacemos una deformación topológica vemos que la superficie es equivalente a la de un donut, y en dicha superficie podemos dibujar desde un punto dos lazos que no se cortan en ningún otro lugar.

El modelo del cuadrado del toro

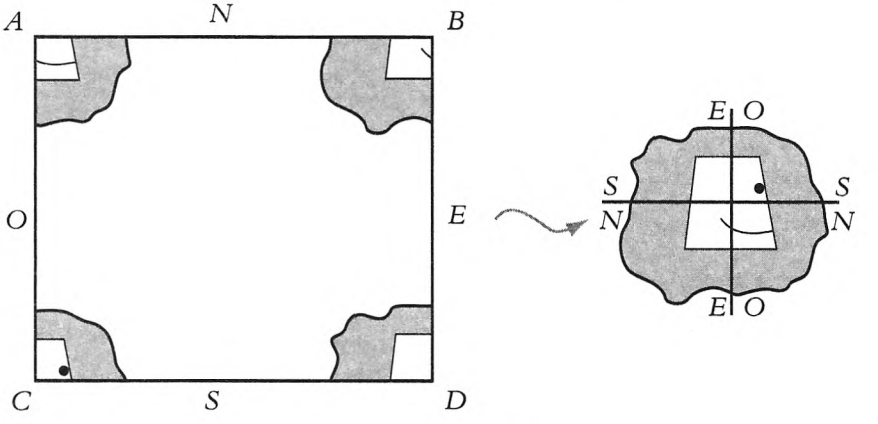
Trapeciote propuso un segundo modelo para el toro. Consistía en dibujar un cuadrado con cuatro lados, uno en cada punto cardinal: Norte, Sur, Este y Oeste (*N*, *S*, *E* y *O*). Si un planilandés se acercaba al lado *E*, entonces aparecía por el punto correspon-

diente del lado *O* (el punto correspondiente estaba a la misma altura). En vez de una pequeña puerta interespacial, estaba considerando una gran línea a través de la cual uno se «transportaba» a otra zona. A su vez, si alguien viajaba hacia el Norte y se encontraba con el lado *N*, aparecía por el punto correspondiente del lado *S*.



Planilandeses en el modelo del cuadrado del toro.

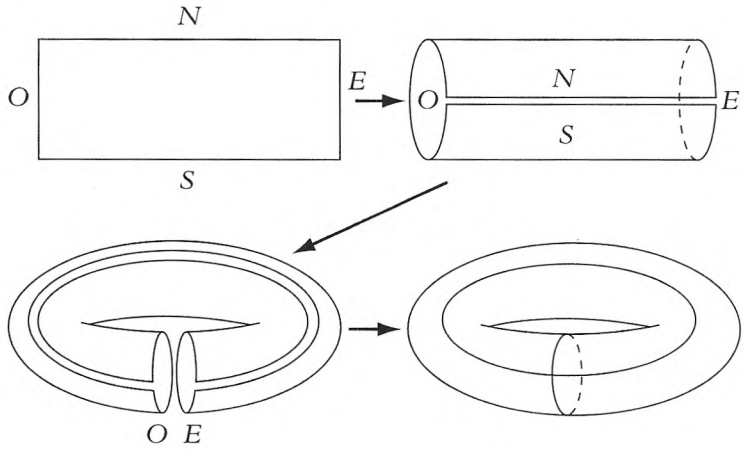
Al haber elegido puertas interespaciales de tamaño tan grande, ahora surge el problema de explicar qué pasa en el sitio donde se unen esas líneas. Podría pasar que al atravesar por una de esas puertas, la mitad de nosotros se transportara a un lugar de Planilandia, y la otra mitad, a otro lugar distinto. ¡Qué horror! Trapeciote se dio cuenta de ello, y comprobó que cuando nos situábamos en uno de esos puntos y nos quedábamos allí parados, teníamos nuestro cuerpo repartido por cuatro zonas.



Un entorno del vértice.

Sin embargo, la sensación de un planilandés en dicho punto no sería especial. Veámoslo. Supongamos que Trapeciote viaja hasta el punto *B* y se queda ahí quieto. Al estar viajando hacia *N* y hacia *E*, parte de su cuerpo se ha ido a *S* y otra parte a *O*. De hecho, ha quedado simultáneamente transportado a los puntos *A*, *C* y *D*. Una vez que ha llegado a *B*, podría decidir salir por cualquiera de los cuatro vértices, dependiendo de la dirección que tome. Desde *B*, Trapeciote puede mirar a su alrededor y ver una zona del toro (se supone que Planilandia es muy grande, por lo que no verá demasiado trozo). Esa zona está formada por cuatro regiones: la que está al Suroeste es la zona del cuadrado con ángulo en *B*; la región al Noreste es la zona del cuadrado con ángulo en *C*; la del Noroeste se corresponde con la zona con ángulo en *D*; y finalmente, la región al Sureste, con el ángulo en *A*. Así verá Planilandia todavía como un mundo plano. Si las puertas interespaciales estuvieran pintadas con líneas negras, al menos vería una cruz justo en el sitio en el que está. Pero como estas puertas no están marcadas, no tiene ninguna percepción extraña. Por tanto, las puertas no «rompen» a los planilandeses.

De nuevo, nosotros podemos hacer uso de la tercera dimensión para dibujar, topológicamente, el «cuadrado» de Trapeciote. Lo estiramos hasta dejarlo con forma de rectángulo. Ahora juntamos el lado *N* con el lado *S* y los pegamos. Los lados *E* y *O* se han convertido en circunferencias. Para pegarlos, estiramos el cilindro que se ha formado y juntamos *E* con *O*; al unirlos queda un toro. Las cuatro esquinas se han juntado para formar un punto que, tras eliminar las marcas del pegado, es indistinguible de los demás puntos del toro.

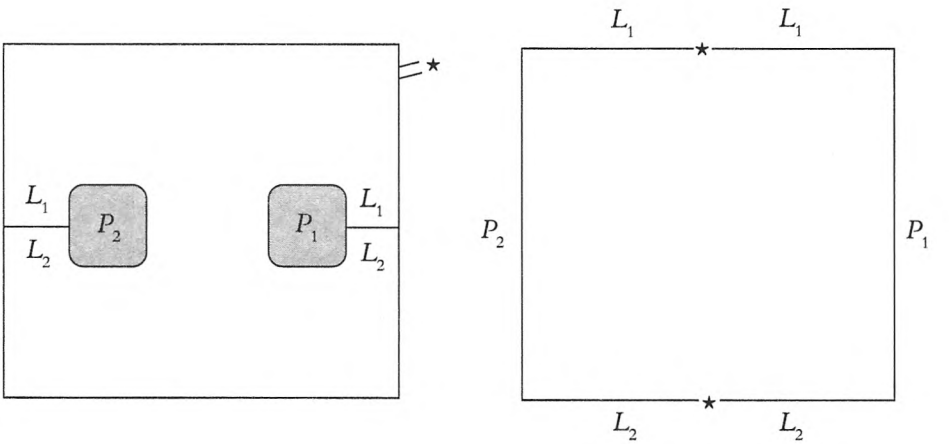


Un cuadrado con los lados N *y* S *pegados y con los lados* E *y* O *pegados equivale, topológicamente, a la superficie de un donut.*

Trapeciote también demostró que su modelo del cuadrado era equivalente a su modelo del toro. De hecho, éste fue el camino que le llevó a descubrir el segundo modelo. Tomó su modelo primigenio e hizo una línea desde la puerta interespacial P_2 hacia el Oeste, pasando por la antípoda y llegando a la puerta P_1 por el Este. A esta línea la llamó L, más concretamente al lado de arriba L_1 y al de abajo, L_2. En este punto hizo un proceso inverso al de pegado. Se dijo: «L va a ser una puerta interespacial. Si entras por L_1, sales por L_2, y viceversa». Es decir, había dibujado el resultado final de tener una puerta interespacial y mover el espacio para «pegar» sus dos bordes.

La clave estriba en que una puerta interespacial es una línea de Planilandia que atravesamos para salir por otro punto de Planilandia. De hecho, podemos dibujar «cualquier» línea en Planilandia y declararla puerta interespacial, ya que realiza la misma función. Como hemos dicho con anterioridad, no hay nada que nos indique que hay una puerta aquí o allá. A no ser que la pintemos con tinta negra, los planilandeses serán incapaces de verla. Recurriendo a este razonamiento, cualquier línea «es» una puerta interespacial, dado que se entra por un lado y se sale por el otro.

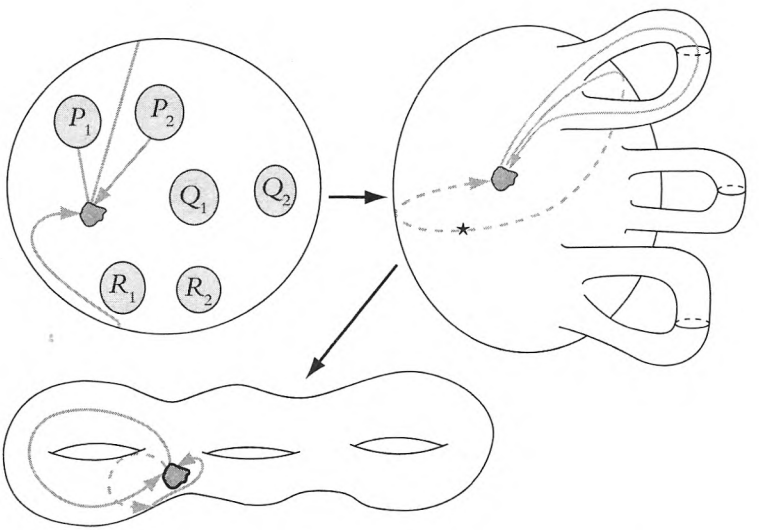
Una vez que Trapeciote tuvo este dibujo, separó las dos zonas L_1 y L_2, recordando siempre que si entras por L_1, sales por (el punto correspondiente de) L_2. Y de aquí llegó al modelo del cuadrado.



*P_1 y P_2 se convierten en E y O, respectivamente, mientras que L_1 y L_2 se convierten en N y S. La antípoda pasa a ser el punto medio (marcado con un *) en L_1 y, por tanto en L_2, pues ambas zonas están pegadas.*

Otras posibilidades

Trapeciote no sólo recibió el título de doctor por su brillante idea, sino que fue galardonado con un premio al joven investigador del año. Había propuesto una teoría magnífica que explicaba las dos rutas de Cuadradina, y que seguramente dejaría resuelto el problema de la forma de Planilandia. Sólo faltaba una confirmación de que ésa era la forma de su mundo. Pero antes de que hubiera tiempo de preparar una expedición que sirviese para comprobar si Planilandia era tal y como la había predicho Trapeciote, fue el mismo Pentagón, el eminente topólogo (y director de tesis de Trapeciote) el que dio al traste con las esperanzas de zanjar esta cuestión a corto plazo, haciendo lo que un matemático experimentado como él sabe bien hacer: generalizar teorías ya conocidas. Con la misma idea de las puertas interespaciales, Pentagón encontró la forma de construir una multitud de posibles mundos bidimensionales, todos ellos potencialmente válidos como formas de Planilandia. Para ello colocó cuatro, seis o cualquier número par de puertas interespaciales en un disco. Estas puertas tenían que ir emparejadas. Por ejemplo, seis puertas con los nombres P_1, P_2, Q_1, Q_2 y R_1, R_2. Cada vez que se entra por una puerta P_1, se sale por P_2, y viceversa. Si entramos por Q_1, salimos por Q_2, y al revés. Y así sucesivamente. En un mundo como éste, es posible encontrar dos rutas que no se corten, como las que había recorrido Cuadradina.



Un mundo con tres pares de puertas interespaciales. Hay dos rutas desde Planid que no se cortan. Usando la tercera dimensión y una deformación topológica, podemos comprobar que este mundo es equivalente a la superficie de un «donut con tres agujeros».

Estos espacios tienen muchos lazos no triviales. Llamamos *género* al número de pares de puertas interespaciales, y lo denotamos con la letra g. En un modelo de este tipo hay $2g$ puertas interespaciales. El caso de género $g = 1$ es el que había descrito Trapeciote. Pentagón había generalizado este caso para tener cualquier $g \geq 1$. Por cada par de puertas, tenemos el camino que entra por una de ellas y sale por la otra (y acaba regresando a Planid). También tenemos la ruta que rodea la primera puerta. Estos dos lazos no se cortan; por tanto, no pueden ser triviales. Haciendo esto para cada par de puertas, al final tenemos $2g$ lazos no triviales.

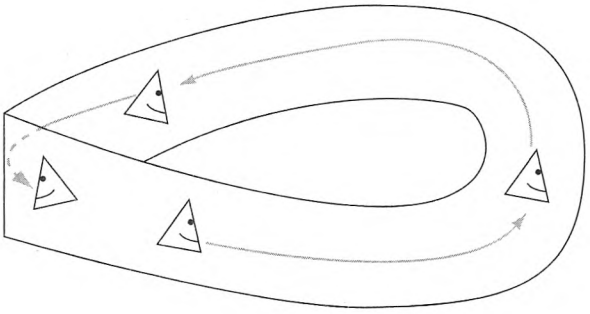
Orientabilidad. La banda de Möbius

La cuestión de la forma de Planilandia se convirtió rápidamente en tema de conversación cotidiana en cafés y tertulias. Todo planilandés quería dar su pequeña aportación al mismo, o creía estar seguro de la respuesta. Había quienes daban argumentos de lo más acientíficos. Otros aprovecharon el tirón para hacer negocio con productos de consumo. Hubo hasta quienes intentaron zanjar la pregunta haciendo una macroencuesta entre los planilandeses: «¿Qué forma opina usted que tiene Planilandia?»

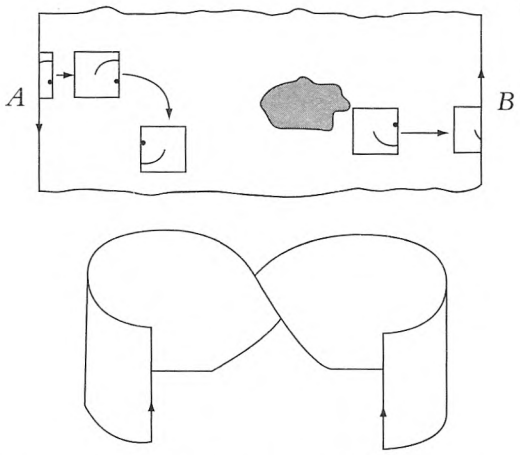
Un novelista de ciencia ficción escribió una novela en la que un planilandés, de nombre Isoscelín, viajaba a través de Planilandia, y al volver a su ciudad natal, ¡regresaba invertido! Es decir, su lado izquierdo se había convertido en su lado derecho y viceversa. Los planilandeses tienen su ojo a la derecha. Sin embargo, Isoscelín, tras su viaje, lo tenía a la izquierda. Tras una novelesca persecución, los servicios secretos lo capturan y lo encierran en prisión. Le hacen un montón de experimentos médicos, así como un duro interrogatorio, esperando descubrir de qué extraño mundo extraplanilandés venía. Pero Isoscelín aseguraba en todo momento que él era el mismo Isoscelín que salió de viaje varios años atrás. Lo más curioso es que Isoscelín, en su delirio, aseguraba que él tenía el ojo a su derecha, y que era el resto de los planilandeses quienes tenían el ojo a su izquierda. De hecho, parecía usar las palabras izquierda y derecha siempre al revés, levantando su mano derecha cuando se le pedía la izquierda, y al contrario. Era como si viviera al otro lado del espejo y asegurara que ése era el lugar real y lo demás era la imagen especular.

La novela finaliza con el descubrimiento por parte del hermano de Isoscelín, que durante todo el tiempo estuvo luchando por encontrarle y liberarle, de una puerta interespacial de la que se salía «del revés». El hermano de Isoscelín consigue liberarlo, y antes de que sea capturado de nuevo, viajan por la puerta interespacial y

regresan a casa. Isoscelín ha recuperado su orientación inicial, y ya no puede ser apresado por los policías. Sin embargo, el hermano de Isoscelín, al haberle acompañado en su segundo viaje, ha vuelto con el ojo a la izquierda, y antes de que pueda explicar lo sucedido, ¡él es apresado!



Isoscelín vive en un curioso mundo donde, tras hacer un viaje, regresa con la orientación cambiada. Pero su sensación es que él no ha cambiado.



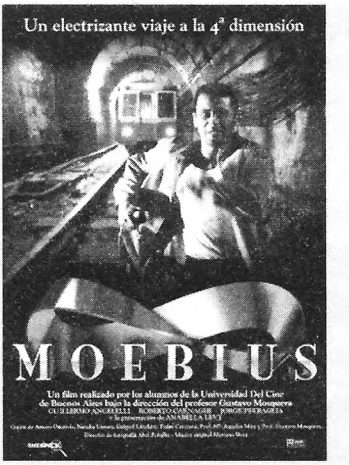
Las líneas A *y* B *se pegan, pero los puntos se corresponden con la orientación invertida, es decir, los puntos de arriba de* A *se corresponden con los de abajo de* B*, y los de abajo de* A *con los de arriba de* B*. Con la flecha marcada en* A *y en* B *se pretende indicar esta idea: pegar* A *con* B*, pero de forma que las flechas coincidan. La superficie resultante se conoce como banda de Möbius.*

Entre los científicos planilandeses hubo consenso en que, aunque la idea de realizar viajes que invirtiesen la orientación podía dar mucho juego en el cine y las novelas, no era nada que se ajustase a la realidad. Este tipo de fenómenos no se habían

descrito nunca en Planilandia. En el mundo real, todos los habitantes tienen su ojo a la derecha, y sería «impensable» que algo distinto ocurriese. Por tanto, se descartó de entrada que Planilandia pudiese ser un mundo con patologías de orientación.

MÖBIUS

En la película argentina *Moebius* (1996), la red del metro subterráneo de Buenos Aires se convierte de pronto en una cinta de Möbius. Uno de los trenes de la línea se desvanece en el espacio y en el tiempo. En la época en que tiene lugar la narración, la maraña del subterráneo bonaerense es un laberinto sólo intercomunicado por el Perimetral, una de las líneas en las que es posible hallar alguna pista del convoy extraviado. La película muestra los peligros que pueden acechar en un mundo no orientado, y se basa en un cuento de A.J. Deutsch, A *Subway Named Möbius* (1950).



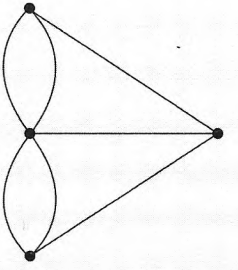
Capítulo 3

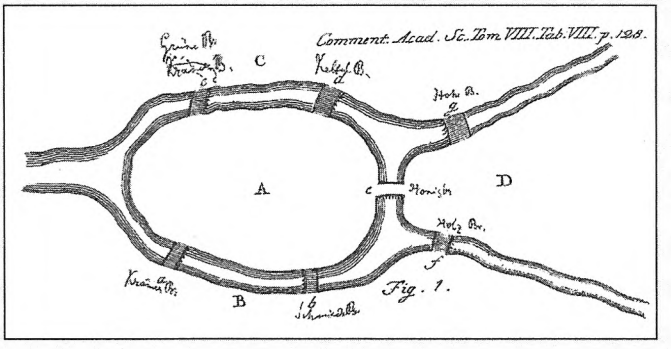
La topología de las superficies

La topología es la rama de las matemáticas que estudia la «forma global» de los espacios cuando éstos pueden ser deformados mediante transformaciones continuas, del estilo de estirar o contraer, pero sin que se permita realizar cortes, pegados o aplastamientos. Etimológicamente, la palabra topología proviene de la raíz griega *topos*, que significa «lugar», y del sufijo *logía*, «estudio».

LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

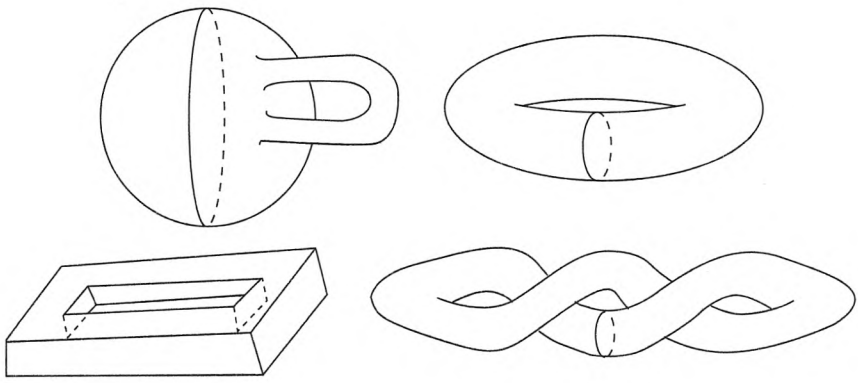
Se puede decir que la investigación de cuestiones topológicas se remonta al trabajo que Euler llevó a cabo en 1736 sobre los siete puentes de Königsberg (ciudad de Prusia Oriental, hoy llamada Kaliningrado y perteneciente a la Confederación Rusa). Euler estudió el problema de encontrar un camino que atravesara una y sólo una vez los siete puentes, y se percató de que para ello sólo necesitaba las propiedades de las figuras relativas a su forma: la posición de sus partes y cómo están conectadas, sin tener en cuenta las distancias o propiedades métricas de las mismas. De hecho, Euler identificó cada zona de la ciudad con un punto, y cada puente con un camino, con lo que traducía el problema al de dibujar el grafo que aparece a la derecha con un solo trazo.



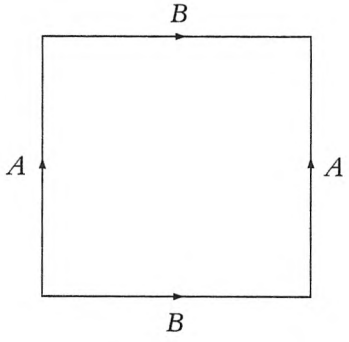


El gráfico muestra la solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg.

Para un topólogo, figuras como las siguientes son equivalentes. Cualquiera de ellas es merecedora del nombre de toro.



La idea es pensar que la figura está hecha de un material elástico, muy flexible, pero que no puede romperse, aunque sí moldearse a nuestro antojo (por ejemplo, en la tercera figura tenemos «esquinas» que pueden ser redondeadas). Llamaremos *deformaciones elásticas* a este tipo de deformaciones. La figura siguiente también es un toro:

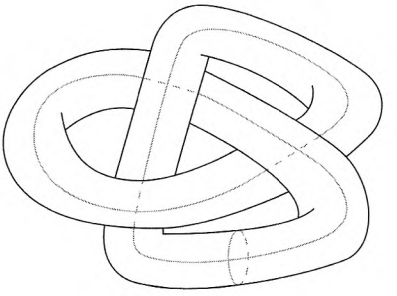


Un cuadrado con los lados identificados a pares.

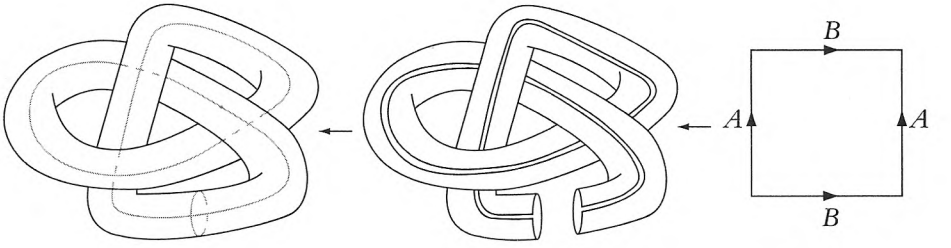
Aquí hemos indicado que los dos lados marcados con una A se consideran «identificados», y análogamente para los que están marcados con la letra B. Las flechas sirven para señalar en qué dirección tenemos que identificar los lados: cuando los juntemos las flechas tendrán que coincidir. Esto es necesario porque sería posible tener dos maneras distintas de pegar. Por tanto, el espacio que representa la figura anterior es un toro después de pegar los lados A entre sí y los lados B entre sí.

En la figura de la pág. 44 hemos visto que si deformamos el cuadrado en el espacio tridimensional, podemos juntar los lados *A* entre sí y los lados *B* entre sí. Ahora estamos autorizados a pegarlos. Aquí hay que hacer una puntualización, porque acabamos de decir que pegar no es un procedimiento permitido. La cuestión es que, en esta situación, decíamos que estos lados están «formalmente» pegados (identificados). Por tanto, en el último paso de la figura de la pág. 44, que consiste en pegar los lados *A* entre sí y los lados *B* entre sí, en realidad no estamos haciendo nada; sólo devolvemos a la realidad (visual) algo que era formalmente cierto. Además, una vez pegados los lados, quedan dibujadas dos circunferencias en la superficie, marcadas con las letras *A* y *B*; estas circunferencias se pueden «borrar», pues ahora no tienen significado alguno.

¿Y qué ocurre con la siguiente figura?



¡Esta figura también es un toro! Veámoslo de la siguiente forma: marcamos dos lazos, con las letras *A* y *B*, y cortamos a lo largo de ellos, escribiendo letras repetidas y unas flechas para indicar una identificación. De nuevo, cortar no es una operación permitida. Pero en realidad lo que hemos hecho ha sido «cortar recordando que no hay ningún corte hecho», es decir, topológicamente, ¡no hemos hecho nada! El resultado es de nuevo el cuadrado con los lados identificados igual que antes.



Con el cuadrado de la página anterior podemos conseguir el toro anudado de arriba.

El lector se preguntará cómo es posible que un toro anudado se pueda llevar hasta el toro con forma de donut de la figura de la pág. 52 con los procesos de estirar y encoger. Ciertamente, no hay manera de desanudar un toro «dentro» del espacio tridimensional. Para entender esto, hemos de ser un poco más precisos en la terminología que estamos usando.

Topología intrínseca y topología extrínseca

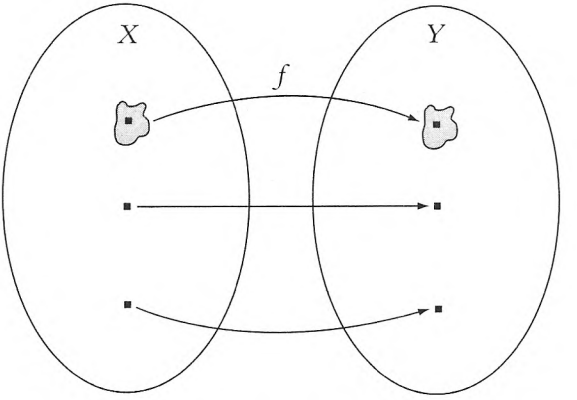
Llamamos *propiedades extrínsecas* a aquellas que dependen de la figura dentro del espacio ambiente (el espacio tridimensional). Dos objetos tienen la misma topología extrínseca si se puede ir de uno a otro por una deformación «dentro» del espacio ambiente. Las superficies de la figura de la pág. 52 son topológicamente equivalentes desde el punto de vista extrínseco. Sin embargo, el toro anudado es extrínsecamente diferente del toro usual. Imaginemos que tenemos un toro de goma con la forma del toro anudado; no nos es posible desanudarlo, por mucho que lo deformemos, sin romperlo.

Por otro lado, denominamos *topología intrínseca* a aquellas propiedades topológicas de la figura en sí misma que no dependen de cómo esté metida en el espacio tridimensional. Los toros de la figura de la pág. 52 y el toro anudado son intrínsecamente equivalentes. De hecho, ni siquiera es necesario que la figura esté metida en el espacio tridimensional. Todas estas superficies son topológicamente equivalentes: un ser dentro de ellas no las podría distinguir.

Podemos decir que dos superficies del espacio son topológicamente equivalentes si podemos llevar una a otra por un proceso de deformaciones elásticas (estiramientos y encogimientos), permitiendo la operación de «cortar, deformar y pegar de nuevo por el mismo lugar por el que hemos cortado». En este caso, un ser bidimensional no distinguiría la superficie original de la final.

La forma correcta de entender la topología (intrínseca) de un espacio consiste en mirar el espacio en sí, sin pensar si está o no inmerso en el espacio tridimensional o en cualquier otro espacio. En esta situación, si dos espacios X e Y son equivalentes, la «deformación» entre ellos viene dada por una aplicación $f\colon X \to Y$. Esta aplicación hace corresponder los puntos de X con los de Y (técnicamente, f es una biyección), de forma que cada entorno de un punto de X se corresponda con un entorno de un punto de Y (en términos matemáticos, f es «continua», en las dos direcciones, de X a Y y de Y a X). La propiedad de continuidad es la que refleja que la deformación estira o encoge, pero no rompe.

El término matemático que designa la deformación *f* es el de *homeomorfismo* (del griego, *homeo*, «mismo», y *morfo*, «forma»). Por tanto, dos espacios son *homeomorfos* si tienen la misma forma (global).



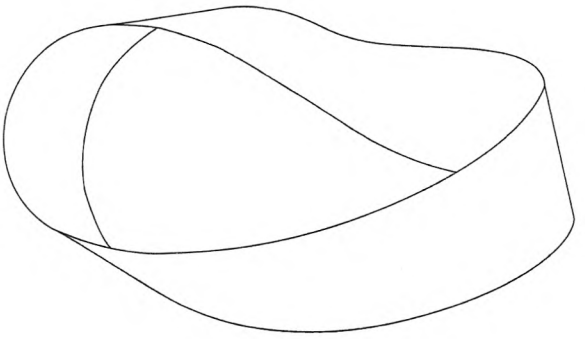
Un homeomorfismo entre dos espacios X e Y.
Lleva puntos a puntos y un entorno a otro entorno.

Orientabilidad

Decimos que una superficie es *no orientable* cuando podemos dibujar un lazo en ella que «da la vuelta a la orientación». Es decir, que si un planilandés viaja a lo largo de ese camino, vuelve con su lado de la derecha a la izquierda y viceversa (como en la figura superior de la pág. 48).

La banda de Möbius es una superficie no orientable. Se construye con una tira larga de papel, pegando sus dos bordes estrechos dando media vuelta a uno de ellos. Fue descubierta, independientemente, por los matemáticos alemanes August Möbius y Johann Listing en 1858 (por cierto, fue Listing quien acuñó el término «topología»). Se trata de una superficie con propiedades curiosas:

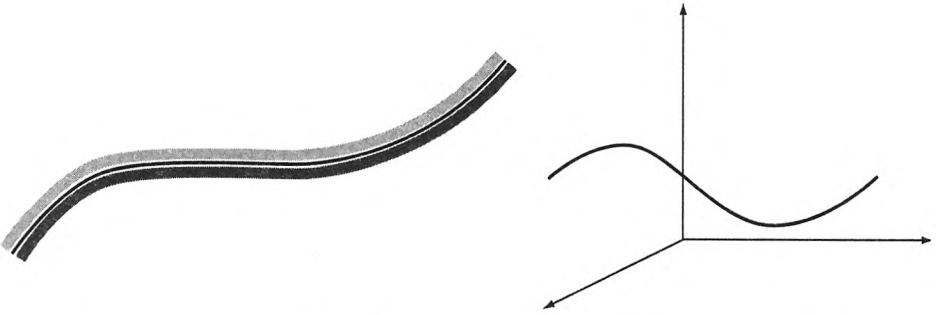
— Tiene un solo borde: si marcamos un punto en el borde, y movemos el dedo a lo largo del mismo hasta volver al punto marcado, recorreremos el borde por entero.
— Tiene una sola cara: si ponemos un dedo en una cara y lo vamos moviendo a lo largo de la misma, llegamos al mismo punto con el dedo tocando en el otro lado. Por tanto, ambos lados de la banda de Möbius son la misma cara.



Banda de Möbius.

Decimos que una superficie del espacio tridimensional es *bicoloreable* si tiene dos caras, de forma que podemos colorearla con dos colores (en la figura siguiente se han utilizado dos tonos de gris). Por tanto, la banda de Möbius no es bicoloreable. A veces se confunde la propiedad de ser orientable con la de tener dos caras, pero son conceptos distintos: ser orientable es una propiedad intrínseca, mientras que ser bicoloreable es una propiedad extrínseca.

Como seres tridimensionales, tenemos la percepción de que las superficies tienen caras, pero, en realidad, las superficies no tienen caras en sí mismas (con una cara de una superficie nos referimos a una zona del espacio tridimensional que está cercana a la superficie). Por tanto, es un concepto extrínseco. Al lector que aún dude de que el coloreado de superficies es un proceso tridimensional le proponemos la siguiente cuestión: ¿podemos bicolorear las curvas? La respuesta es: las curvas se pueden bicolorear si están en el espacio bidimensional, pero no si están en el tridimensional, o si las entendemos en sí mismas, sin estar en ningún espacio.



Una curva en el plano se puede bicolorear, es decir, tiene dos caras. Una cara se colorea pintando una región cercana del plano. Una curva en el espacio no tiene «caras».

Para una superficie en el espacio, si nos colocamos en un punto concreto, tenemos dos caras, que podemos marcar con rojo y azul, respectivamente. Pero el concepto de bicolorear «toda» la superficie es global. Podría ocurrir que al intentar colorear toda la superficie (prolongando los colores que hemos elegido en el punto inicial a todas partes) nos encontrásemos con que los colores se mezclan. Esto es exactamente lo que ocurre con la banda de Möbius, y por ese motivo no es bicoloreable.

La orientabilidad es un concepto intrínseco. Una superficie es, en términos matemáticos, infinitamente plana, con grosor cero. Un planilandés no se encuentra «sobre» la superficie, sino «dentro» de la superficie. En su universo no tiene modo de distinguir una cara de otra, puesto que no puede mirar en la dirección perpendicular a la superficie y decir «la cara de este lado es azul». Es más, la superficie podría no encontrarse dentro del espacio tridimensional (ser una superficie abstracta, como el toro de la figura inferior de la pág. 52), en cuyo caso ni siquiera tendría sentido hablar de caras (independientemente de que un planilandés no pueda verlas).

Es interesante observar que en el caso de una superficie en el espacio tridimensional, ésta es bicoloreable exactamente cuando es orientable. Luego estos dos conceptos coinciden (aunque el primero es extrínseco, y el segundo, intrínseco). La ventaja del concepto de orientabilidad frente al de bicoloreabilidad es que el primero también puede aplicarse a superficies abstractas (aquellas que no están en ningún espacio) y a las que están en espacios no tridimensionales (espacios de dimensión cuatro y mayores).

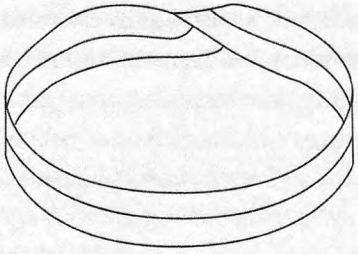
Comprobemos el resultado mencionado. Si tenemos una superficie bicoloreada, elijamos uno de los dos colores, por ejemplo el azul. Como seres tridimensionales, podemos mirar a Isoscelín desde el lado azul. Supongamos que lo vemos con el ojo a la derecha. A medida que Isoscelín se desplaza por la superficie, lo vamos siguiendo con la vista, siempre mirándolo desde el lado azul. En todo momento continuaremos viendo su ojo a la derecha (basta con seguir su movimiento lentamente y comprobar que el ojo sigue todo el tiempo en el mismo sitio). Al viajar a lo largo de la superficie y volver al lugar de partida, Isoscelín mantiene su ojo en el mismo lugar que cuando partió (mirándolo aún desde la cara azul), luego la superficie es orientable.

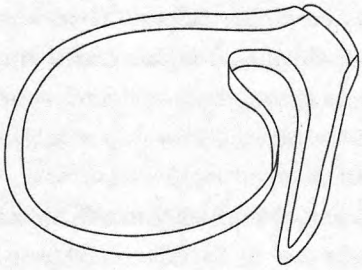
Sin embargo, si la superficie no es bicoloreable (si tiene una sola cara), Isoscelín puede moverse a lo largo de la misma, de forma que nosotros comencemos mirando por un lado y acabemos mirando «desde el otro lado». En todo el proceso, siempre vemos el ojo de Isoscelín a la derecha. Al finalizar el viaje, Isoscelín tiene el ojo a su derecha mirándolo «desde el lado opuesto al original», es decir, si lo miramos desde el lado original, tiene el ojo a su izquierda. ¡Ha sufrido inversión en la orientación!

LA BANDA DE MÖBIUS Y EL CILINDRO

El siguiente experimento con la banda de Möbius es muy divertido. Para ello se toma una tira larga de papel, de unos 4 cm de ancho y 10 cm de largo, y se unen los bordes estrechos. Si los pegamos tal como están colocados, obtenemos un cilindro (con sus dos bordes y sus dos caras). Pero si damos medio giro antes de unirlos, tendremos una banda de Möbius (con un solo borde y una sola cara). Ahora cortemos a lo largo del «ecuador» con unas tijeras. ¡Obtenemos una sola banda de 2 cm de ancho!

Esta banda resulta tener dos bordes y dos caras (como podemos comprobar paseando el dedo por la banda). De hecho, resulta la misma superficie que obtendríamos si hubiésemos pegado un rectángulo como el original (eso sí, de 2 cm de ancho y 20 cm de largo) dando dos medios giros al borde estrecho. Topológicamente, esta superficie es un cilindro. ¿Por qué? Si cortamos ahora dicha superficie de nuevo por el ecuador, la nueva banda será de 1 cm de ancho. El resultado son dos bandas entrelazadas, que son a su vez cilindros retorcidos.

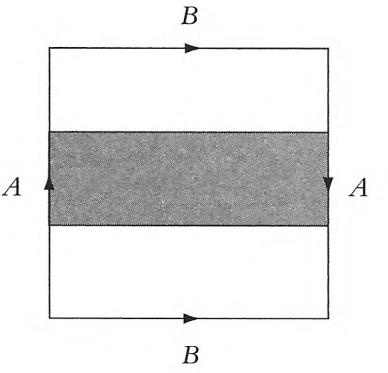




La botella de Klein

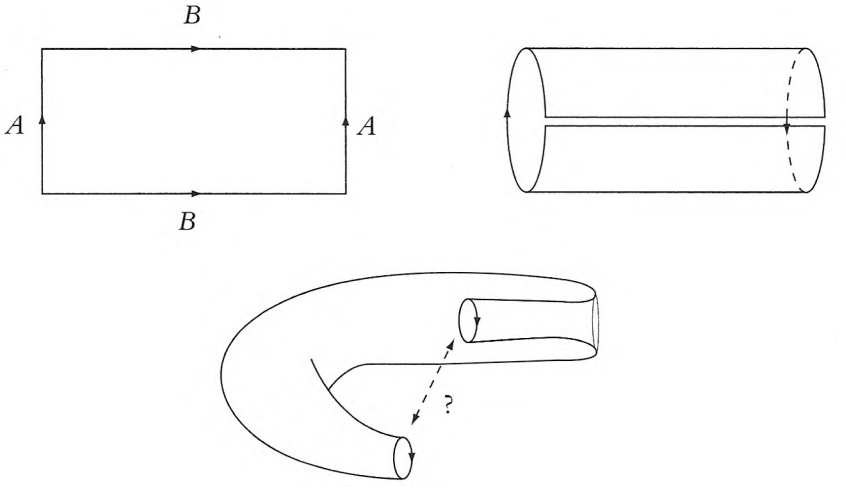
La botella de Klein, que ya hemos tratado en la pág. 17, es una superficie no orientable, sin borde, que se ha hecho muy popular entre el público no matemático. Tiene aspecto de botella, aunque su nombre se debe a un error en la traducción. La introdujo el matemático alemán Felix Klein en 1882, y la llamó *fläche*, que significa «superficie» en alemán. Como botella se dice *flasche*, se tradujo erróneamente, y una vez que adoptó ese nombre, fue imposible corregirlo. El hecho de que la representación tridimensional recuerde la forma de una botella contribuyó al error.

La botella de Klein se obtiene de un cuadrado, identificando los lados como se indica en la figura siguiente:



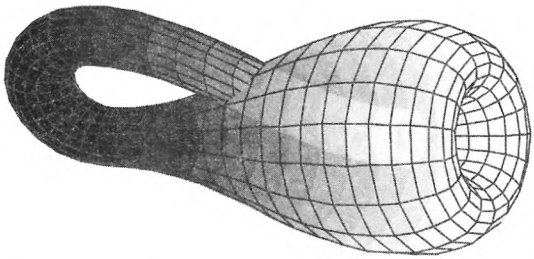
Si Cuadradina va al Este, aparece por el Oeste con la orientación invertida, pero si va hacia el Norte, regresa por el Sur «del derecho». Por tanto, es una superficie no orientable. Además, contiene una banda de Möbius, en gris en la figura anterior.

Intentemos ahora construir la botella de Klein en nuestro mundo tridimensional. Pegando los lados con la letra *B* obtenemos un cilindro, en el que ahora tenemos que pegar sus dos extremos, las circunferencias marcadas con la *A*. Pero las flechas están recorridas en sentido contrario, con lo que tenemos que «introducir» uno de los extremos del cilindro por dentro para tener las circunferencias recorridas en el mismo sentido y poder pegarlas.



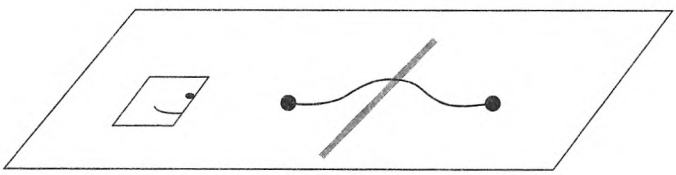
La figura muestra el pegado de los lados de una botella de Klein en función de la posición de las flechas.

¡Pero ahora resulta imposible pegar las dos circunferencias correspondientes a la letra *A*!, ya que, precisamente, la pared de la propia superficie está separando las dos circunferencias. Hay dos soluciones: una es cortar por lo sano, dejar que el cilindro atraviese la pared de la superficie y pegar. Obtenemos entonces una superficie como la siguiente:



No se trata exactamente de la botella de Klein, ya que ésta no tiene esa autointersección del cuello con la pared, pero podemos «fingir» que tal autointersección no existe.

La segunda solución consiste en recurrir a la cuarta dimensión. Como la botella de Klein no cabe en el espacio tridimensional, necesitamos más espacio para construirla. Lo que hacemos es poner un cuello que una las dos circunferencias del último dibujo de la página anterior, introduciéndolo en la cuarta dimensión; así no interseca la pared, que está en las tres dimensiones usuales. Para entender cómo pegar el cuello, vamos a hacer una pequeña analogía con el mundo de los planilandeses. Supongamos que Cuadradina quiere pegar una cuerda a dos puntos de su mundo, y hay una pared de por medio que no quiere atravesar. Si usa una dimensión extra, puede subir un poco la cuerda a esa «tercera» dimensión para evitar el corte.



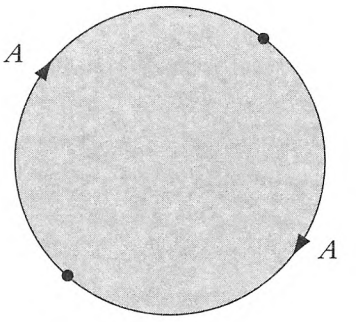
Cuadradina une dos puntos de Planilandia usando la tercera dimensión para evitar una pared.

Análogamente, nosotros podemos comenzar desde la circunferencia externa (en el último dibujo de la página anterior), prolongar el cuello subiéndolo un poquito

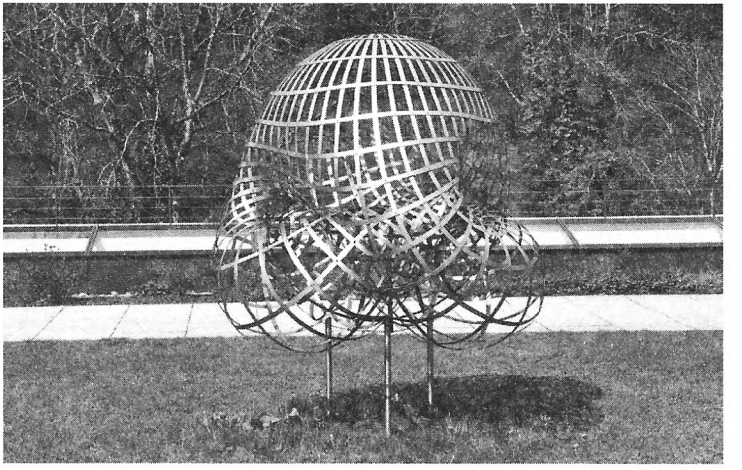
en la dirección «positiva» de la cuarta dimensión, allí entrar en la zona interior de la botella y luego bajar en la cuarta dirección para continuar con el pegado del cuello a la circunferencia interna ya en el mundo tridimensional.

Es interesante advertir que una superficie como la botella de Klein «no cabe» en el espacio tridimensional. Es otro motivo más para centrarnos en el estudio de los espacios de forma intrínseca y no hacerlos depender del espacio ambiente, en el que puede ocurrir que ni siguiera podamos meterlos.

Existen otras superficies no orientables. Una de las más famosas es el plano proyectivo, que se puede dar con la siguiente figura:



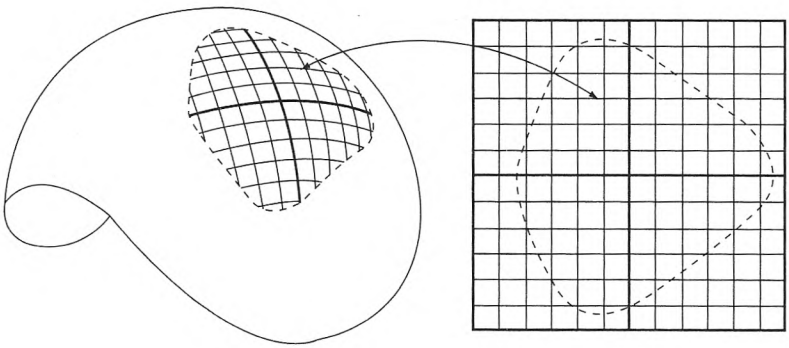
Tomamos un polígono de dos lados (!) y los identificamos siguiendo las flechas. Así obtenemos una superficie no orientable conocida como «plano proyectivo».



El famoso Instituto de Matemáticas de Oberwolfach (Alemania) tiene un modelo a gran escala del plano proyectivo en su entrada, construido y donado por Mercedes-Benz en enero de 1991. Al ser no orientable, esta superficie tiene autointersecciones.

Topología de las superficies

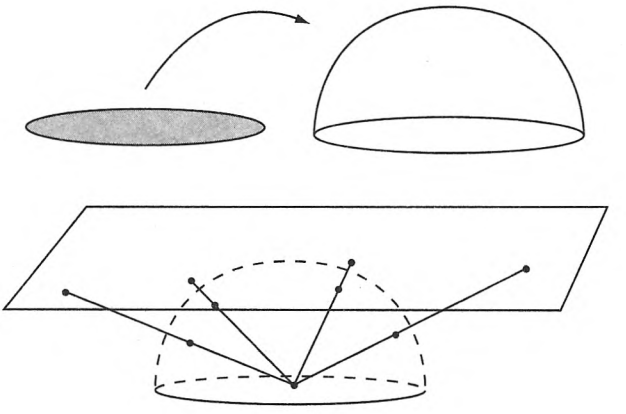
Nuestro objetivo ahora es entender la topología de los mundos bidimensionales, aquellos que pueden ser mundos posibles para los planilandeses. A tales espacios se los denomina *superficies* (o superficies topológicas). Se trata de espacios tales que cualquier punto tiene un pequeño entorno que es como un trocito de plano. Llamamos *entorno* a los puntos que están cerca de un punto *P* dado. Por lo tanto, un ser bidimensional que estuviera en una superficie y que fuera miope (en relación al tamaño del mundo, es decir, que sólo pueda ver a corta distancia) podría creer que este espacio es un plano.



En un entorno de cada punto podemos poner dos coordenadas (x,y), pero no podemos poner coordenadas en toda la superficie simultáneamente.

Finitud y compacidad

Los planilandeses discutían sobre si Planilandia era finita o infinita. Una superficie como el plano es infinita, ya que tiene área infinita. Pero aquí debemos ser cuidadosos, ya que el concepto de área no es topológico (es necesario hacer mediciones para calcularlo). De hecho, como topológicamente se nos permite estirar, podemos conseguir que superficies con área finita se conviertan en superficies de área infinita. Por ejemplo, un disco abierto (sin borde) puede ser estirado para llegar a ser todo el plano: en primer lugar lo abombamos para que se convierta en un hemisferio, y a continuación proyectamos ese hemisferio desde el centro para que llegue a todo el plano.



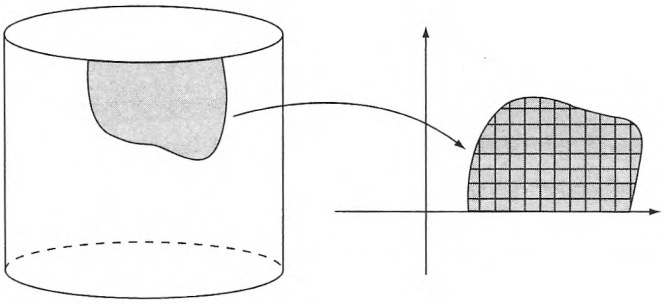
Un homeomorfismo entre el disco y el plano.

Para evitar equívocos con el concepto de finitud, los topólogos han acuñado otro, el de *compacidad*, que sí que es topológico pero que mantiene la idea básica de la finitud. Una superficie es compacta si no se la puede estirar topológicamente para conseguir que tenga área infinita. Por ejemplo, la esfera y el toro son superficies compactas porque las podemos hacer tan grandes como queramos, pero siempre tendrán área finita.

Sin borde *versus* ilimitado

Los planilandeses también imaginaban que Planilandia era ilimitada. Las superficies pueden ser «limitadas» por dos motivos. Por un lado, pueden tener borde. Ejemplos de superficies con borde son: un disco, cuyo borde es una circunferencia; la banda de Möbius, cuyo borde también resulta ser una circunferencia; un cilindro, que tiene dos circunferencias en su borde. Técnicamente, justo en el borde nuestras coordenadas (x,y) no forman un entorno del plano, sino sólo la mitad de uno, porque tenemos la condición $y \geq 0$. Si tuviéramos una superficie con borde, un ser bidimensional podría llegar al mismo, a partir del cual no podría continuar su viaje (sería como encontrarse una pared al final del camino). Obviamente, una superficie con borde está limitada, ya que éste actúa como límite.

También podemos encontrarnos con superficies sin borde, pero que no son ilimitadas. Por ejemplo, un disco sin su borde, lo que se llama un disco abierto. Un planilandés podría caminar hasta llegar al «borde inexistente» del disco, donde encontraría el final de la superficie, aunque esta vez sin encontrarse con una «pared».



Una superficie con borde.

El concepto de tener borde es topológico, pero el de ser ilimitado, no. Un disco abierto y un plano son topológicamente equivalentes, pero el segundo es ilimitado, mientras que el primero no lo es. Con ilimitado queremos decir, por tanto, que si un planilandés camina a velocidad constante, puede caminar durante toda su existencia sin salirse jamás de la superficie.

Toda superficie compacta sin borde es ilimitada. Nos interesa encontrar las superficies *compactas sin borde* (que son los términos precisos que hemos de usar los topólogos para traducir las expresiones coloquiales *finita* e *ilimitada* del capítulo 2).

El problema de la clasificación

Queremos clasificar todas las superficies que existen. En matemáticas, «clasificar» (algún tipo de objeto) consiste en lo siguiente:

— Dar una lista de dichos objetos, donde aparezcan «todos» los que cumplan la o las propiedades que nos interesan; así seremos exhaustivos.
— Comprobar que dos de los objetos cualesquiera de la lista son «distintos» (es decir, que no son objetos equivalentes desde el punto de vista que estemos estudiando); así evitaremos repeticiones.
— Determinar algún método (a ser posible constructivo, o mecanizable, para que lo podamos programar en un ordenador) que nos sirva para que, cada vez que un objeto de este tipo nos venga dado, podamos «detectar» qué objeto de la lista es su equivalente.

En términos matemáticos, supongamos que queremos clasificar las superficies. Forman un conjunto gigantesco $\mathcal{S}$, el conjunto de todas las superficies. Queremos

dar una lista $\mathcal{L}$, que es un subconjunto de $\mathcal{S}$. En la lista $\mathcal{L}$ habrá sólo unas poquitas superficies. Deben cumplir que:

1. $S, S' \in \mathcal{L}$, $S \neq S' \Rightarrow S \not\approx S'$. Se lee: si S, S' son dos superficies de la lista y son distintas, entonces no son homeomorfas.
2. $S \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists\ S' \in \mathcal{L}, S \approx S'$. En castellano: dada cualquier superficie S, existe una superficie S' de la lista que es homeomorfa a ella (sólo hay una, por el punto anterior).
3. Hay un procedimiento $P : \mathcal{S} \to \mathcal{L}$, que asigna a cada superficie S, la superficie $S' = P(S)$ de la lista tal que S y S' son homeomorfas.

LA IMPORTANCIA DE LOS PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN

Los problemas de clasificación son de suma importancia en numerosas áreas de las matemáticas, dado que nos permiten tener una lista manejable de un conjunto de objetos, de los que posteriormente podremos analizar sus propiedades. Por regla general, los problemas de clasificación suelen ser muy complejos. Uno de los más famosos de los que se han resuelto es el de los grupos simples, que fue completado en el año 1982, poco después de que se construyera el Grupo Monstruo, el de mayor tamaño posible, con 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000 elementos.

Pero de hecho, hay problemas de clasificación que son irresolubles, como es la clasificación topológica de las variedades compactas de dimensión 4. Dado que cualquier grupo finitamente presentado puede ser grupo fundamental de una 4-variedad, no puede haber un algoritmo que decida si dos 4-variedades son homeomorfas, porque se necesitaría una solución al «word problem» de la teoría de grupos, que es una cuestión indecidible.

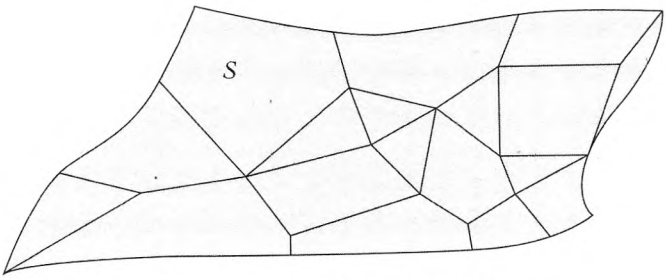
Para poder clasificar las superficies, necesitamos herramientas que las distingan. Es decir, necesitamos propiedades que nos ayuden a decir cuándo dos superficies no son homeomorfas. Algunas de ellas pueden ser las siguientes:

1. Si S es una superficie, ver si S es orientable o no lo es.
2. Ver si los lazos de S son triviales. De hecho, podemos mirar todos los lazos de S y ver cuántos agujeros tiene S. Esto da lugar al *grupo fundamental.*
3. La característica de Euler-Poincaré, que definiremos a continuación.

Hay otros ejemplos de herramientas que sirven para distinguir tipos de espacios. El área de las matemáticas que se dedica a estudiar estas herramientas se llama *topología algebraica*. La topología algebraica busca asociar a los espacios topológicos algún tipo de objeto de tipo algebraico (es decir, un conjunto dotado de alguna operación con propiedades algebraicas), más o menos sofisticado, pero usualmente más manejable que el espacio en sí. A cambio, en este proceso se suele perder información.

Característica de Euler-Poincaré

Supongamos que una superficie compacta está dividida en regiones poligonales (estos polígonos no tienen por qué ser rectilíneos, pueden estar deformados; recordemos que estamos estudiando la superficie desde el punto de vista de la topología).



Una superficie divida en regiones poligonales.

Denotemos por V el número de vértices, por A el número de aristas y por C el número de caras (polígonos) de la división. Llamamos caracterísitca de Euler-Poincaré al número

$$\chi = V - A + C$$

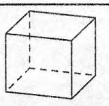
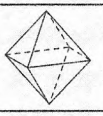
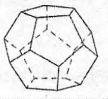
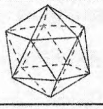
(denotado por la letra griega chi, que se escribe χ y se lee «qui»).

La propiedad más importante estriba en que este número no depende de la división en regiones. Esto se ve comprobando que cada vez que añadimos o quitamos una región, el número χ es el mismo (cada vez que tenemos una división en regiones podemos ir añadiéndolas o quitándolas, y así llegamos a la configuración final deseada).

Comprobemos esta propiedad. Tomemos una división y partamos una de las regiones en dos, como en la figura superior de la página 68. Denotamos por V',

LA CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ Y LOS POLIEDROS PLATÓNICOS

La famosa fórmula de Euler establece que, para cualquier poliedro, tenemos que la suma $V-A+C=2$. Euler mostró su extrañeza de que esta sorprendente relación no hubiera sido descubierta por los geómetras griegos, ya conocedores de todos los sólidos platónicos y arquimedianos. Como cualquier poliedro es homeomorfo a la esfera, en realidad esta fórmula sólo quiere decir que la característica de Euler-Poincaré de la esfera es 2.

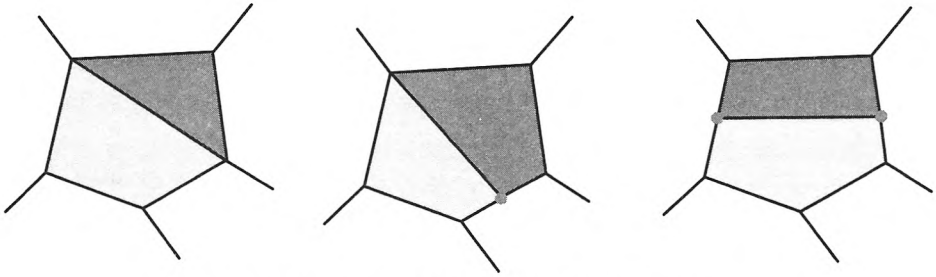
Nombre		Vértices V	Aristas A	Caras C	Característica de Euler $V-A+C$
Tetraedro		4	6	4	2
Hexaedro o cubo		8	12	6	2
Octaedro		6	12	8	2
Dodecaedro		20	30	12	2
Icosaedro		12	30	20	2

A', C' el nuevo número de vértices, aristas y caras. Claramente, hay una cara más: $C'=C+1$. Por otro lado, puede haber los mismos vértices, uno o dos más, dependiendo de si la nueva arista aprovecha los vértices ya existentes o hay otros nuevos. Escribimos $V'=V+x$, con $x=0, 1$ o 2. Finalmente, hay una nueva arista y, además, cada vértice de ella puede romper una arista antigua en dos, generando otra nueva. Por tanto, $A'=A+1+x$.

Hagamos la cuenta de χ para la nueva división en regiones:

$$V'-A'+C'=V+x-(A+1+x)+(C+1)=V+x-A-1-x+C+1=V-A+C\,.$$

Es decir, obtenemos el mismo resultado.

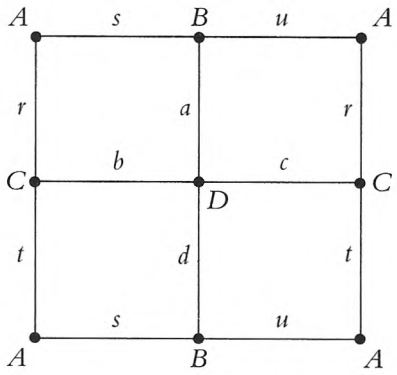


Partición de una región en dos. Hay tres casos: x = *0, 1, 2.*

Las superficies compactas, sin borde y orientables

Comenzaremos por la superficie más sencilla, la *esfera*. En ella todo lazo es trivial. La característica de Euler-Poincaré es 2. Lo podemos comprobar con los mapas de la pág. 34; así, tenemos: $C=6$, $V=8$ y $A=12$. Luego $\chi = V-A+C=2$.

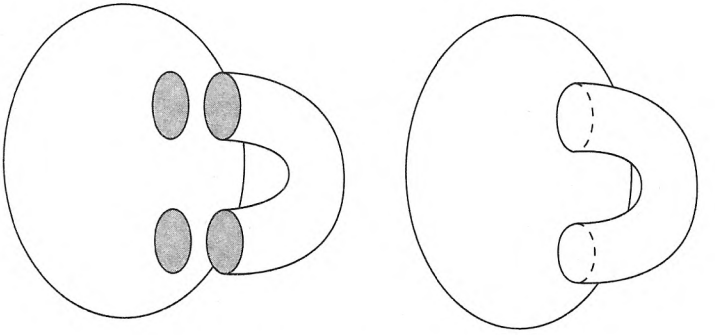
En segundo lugar, consideraremos el *toro*. En la figura de la pág. 42 hemos dibujado los dos agujeros recorridos por los lazos no triviales (hay otros lazos no triviales, pero se obtienen a base de repetir esos dos). Por tanto, el toro tiene «dos» agujeros. El lector puede pensar inicialmente que el «donut» tiene sólo un agujero, pero observándolo como la superficie de un flotador, vemos los dos: el primero es por donde introducimos nuestro cuerpo, y el segundo, por donde se introduce el aire. (En todo caso, pensar en un agujero como un lugar por donde podemos introducir algo, es pensar «extrínsecamente», y aquí queremos remarcar los espacios en sí mismos, es decir, «intrínsecamente».) La característica de Euler-Poincaré con respecto al toro se calcula dividiéndolo como en el siguiente dibujo:



División en regiones del toro.

Tenemos que $C=4$. El número de vértices es $V=4$ (recordemos que el punto A está repetido cuatro veces, pero que en el toro es un solo punto; análogamente, los puntos B y C están repetidos dos veces). El número de aristas es $A=8$. Así, $\chi=4-8+4=0$.

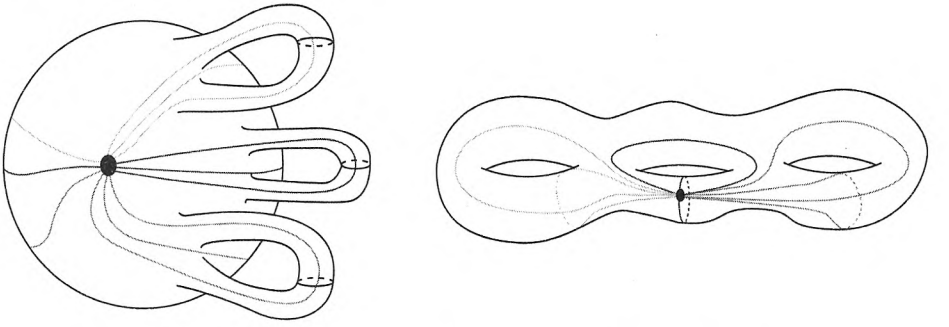
El toro se obtiene a partir de la esfera con un proceso de «pegado de asas». Este proceso es el análogo del método de las puertas interespaciales descubierto por Trapeciote (véase el capítulo 2): consiste en quitar dos pequeños discos alrededor de dos puntos de la esfera y pegar un cilindro a lo largo de sus bordes.



Pegado de un asa.

Topológicamente este proceso equivale al de tomar los bordes de los discos y estirarlos hasta llegar a pegarlos. Se dice que el toro tiene género $g=1$, lo que significa que se obtiene pegando un asa a la esfera.

Por último, vemos el caso general, es decir, la *superficie de género* g. Se obtiene por un proceso de pegado de g asas a la esfera. Tiene $2g$ agujeros, donde cada nueva asa aporta dos nuevos lazos no triviales.

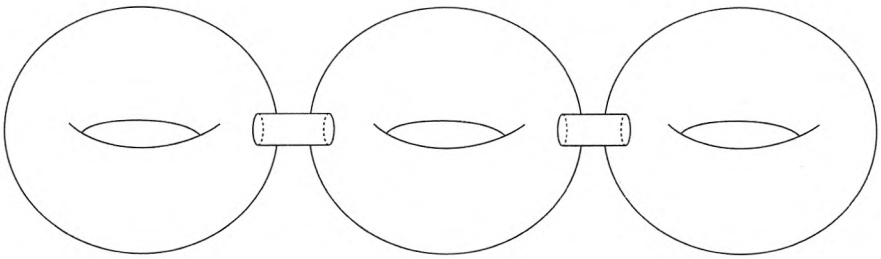


Tras pegar tres asas a la esfera, obtenemos seis lazos no triviales.

La suma conexa

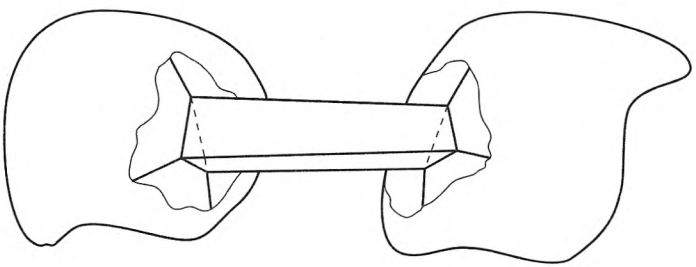
La suma conexa es un proceso semejante al pegado de asas. Se realiza de la siguiente forma: tomamos dos superficies y quitamos un disco de cada una de ellas. Ahora pegamos un asa (cilindro) que va de una superficie a otra.

Si tomamos g toros y hacemos la suma conexa del primero con el segundo, del segundo con el tercero, y así sucesivamente, obtenemos la superficie de género g.



Una suma conexa de 3 toros.

Pasemos a calcular la característica de Euler-Poincaré de la suma conexa. Tomamos dos superficies divididas en polígonos, y lo hacemos de tal forma que los discos que quitamos sean un triángulo en cada una de ellas (recordemos que podemos elegir la triangulación a nuestro antojo, y que un disco es homeomorfo a un triángulo). El asa que pegamos al unir los bordes de los triángulos será como la que se observa en la figura siguiente:



Una suma conexa con las superficies divididas en regiones poligonales.

Llamamos V_1, A_1, C_1 al número de vértices, aristas y caras de la primera superficie, y V_2, A_2, C_2 al número de vértices, aristas y caras de la segunda. La superficie resultante tiene:

$V = V_1 + V_2$
$A = A_1 + A_2 + 3$
$C = C_1 + C_2 + 1$
$\chi = \chi_1 + \chi_2 - 2$

Ahora apliquemos esto a la figura superior de la página anterior. Cada vez que hacemos una suma conexa tenemos que restar 2. Si tomamos g toros, tendremos que hacer $(g-1)$ sumas conexas. Por tanto,

$$\chi = 0+0+\ldots+0-2-2-\ldots-2 = -2(g-1) = -2g+2,$$

donde hemos sumado 0's (uno por cada toro) y -2's (uno por cada suma conexa).

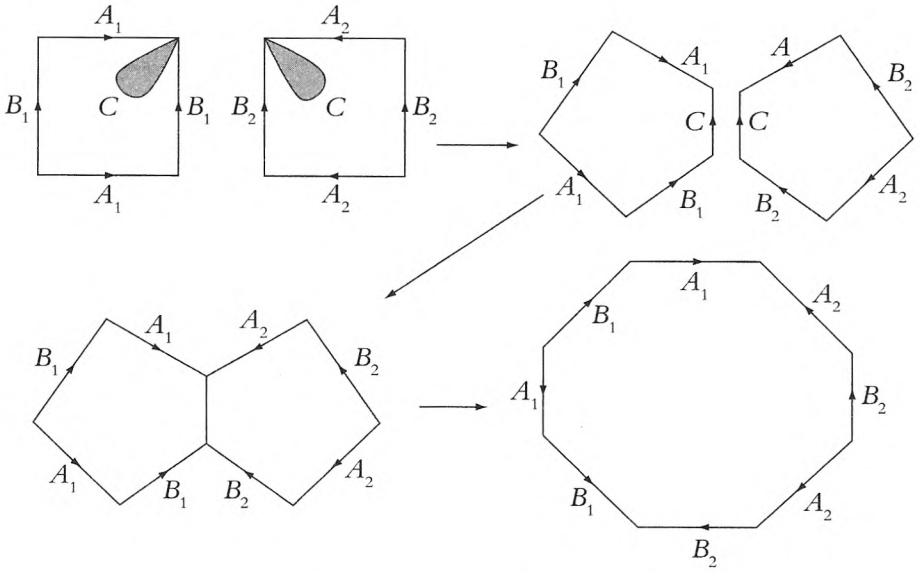
Esta fórmula relaciona directamente la característica de Euler-Poincaré con el género de la superficie.

Polígonos fundamentales

El toro admite una descripción dada por un cuadrado con los lados identificados (pegados) a pares. Veamos que la superficie de género g también admite una descripción con un polígono con lados identificados. Esto se conoce como el *polígono fundamental* asociado a la superficie.

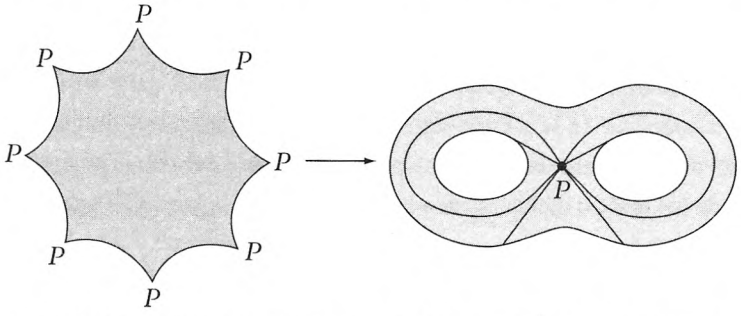
Para ello, vamos a suponer que tenemos dos toros dibujados como cuadrados y queremos hacer la suma conexa. Quitaremos dos discos, pero los elegiremos de modo que toquen el punto que es el vértice del cuadrado (para su identificación, en la figura superior de la página siguiente los discos aparecen de color gris). Haciendo una deformación tenemos dos pentágonos, que deben ser pegados a lo largo del borde de los discos; dicho borde está marcado con la letra C. Pegando a lo largo de C obtenemos un octógono, con los lados identificados tal y como está indicado en la citada figura.

Si hacemos más sumas conexas obtenemos, para la superficie de género g, un polígono de $4g$ lados, con los lados identificados a pares. De aquí sale también la característica de Euler-Poincaré, dado que la superficie tiene una sola cara, un solo vértice y $2g$ aristas: $C=1$, $V=1$, $A=2g$. Luego $\chi = 2-2g$.



Una suma conexa de dos toros. Obtenemos un octógono con lados identificados.

En el caso de la superficie de género g, ¿podemos realizar el proceso que hicimos con el cuadrado en la figura de la pág. 44 para obtener el toro? Ciertamente es posible. Si tomamos un octógono de un material muy flexible y lo estiramos convenientemente, podemos pegar a lo largo de los lados A_1, A_2, B_1, B_2, de forma que obtenemos una superficie de género 2. Los ocho vértices del octógono confluyen en el mismo punto (están identificados en el modelo). Por eso, en la deformación elástica hemos de estirar un poco los vértices para conseguir una forma puntiaguda.



Pegado de los lados del octógono para obtener una superficie de género 2.

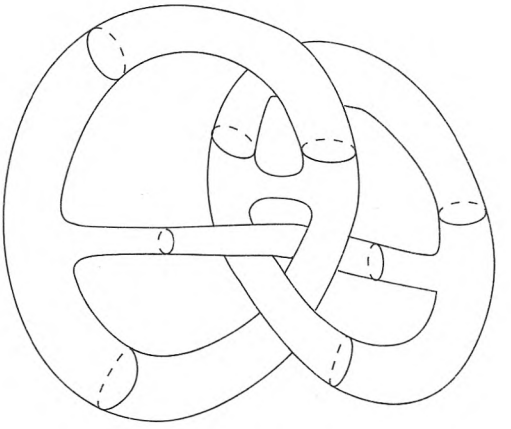
Si colocamos a Cuadradina en el vértice P, su cuerpo quedará dividido en ocho trozos en el modelo, pero en la superficie ella estará sana y completa.

El teorema de la clasificación de superficies

Las superficies compactas (sin borde) orientables son las siguientes:

— La esfera; tiene género $g=0$.
— El toro; tiene género $g=1$.
— Las sumas conexas de g toros; tienen género $g\geq 2$.

De forma más abreviada, consideramos una esfera y tomamos un número entero $g\geq 0$. A la esfera le hacemos suma conexa de g asas. La superficie resultante tiene género g. El teorema de clasificación de superficies dice que la lista completa de superficies está dada por éstas.



Una superficie muy enredada.

La característica de Euler-Poincaré de la superficie de género g es $\chi=2-2g$; por tanto, las superficies anteriores son distintas. Faltaría ver que la lista es completa, es decir, que no hay más superficies que las anteriores. De forma equivalente, toda superficie compacta orientable (por curiosa que parezca o por raro que sea el método con el que nos la han dado) es homeomorfa a una superficie de la lista. Meditemos este detalle por un instante. Una superficie puede ser muy extraña: por ejemplo, puede estar dada en el espacio tridimensional y tener muchos recovecos o estar muy anudada; o bien, pueden habernos dado un polígono con lados identificados de alguna manera inusual; o puede ocurrir que hayan ideado un nuevo método para darnos una superficie. Lo que hay que demostrar es que, sea cual fuere el caso, si

calculamos la característica de Euler-Poincaré de esa superficie S, χ, y hallamos el número g que resuelve $\chi = 2-2g$, entonces, en primer lugar, g es un entero y $g \geq 0$, y en segundo lugar, la superficie S es homeomorfa a la correspondiente superficie de género g de la lista. ¡Ciertamente no es un asunto trivial!

Para finalizar, nótese que el teorema de clasificación de superficies permite dar un procedimiento como el requerido en el punto 3 del problema de clasificación, dado que el cálculo de la característica de Euler-Poincaré se puede realizar con un procedimiento mecanizable, y que la característica de Euler-Poincaré nos da el género.

ARNOLD Y LA EDUCACIÓN

El matemático ruso Vladimir Arnold (1937-2010), famoso por sus numerosas contribuciones en diversas áreas de las matemáticas, ha mostrado una gran preocupación por la forma en la que se enseña esta ciencia. En el texto «On teaching mathematics» (accesible en *http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html*, en inglés), se muestra muy crítico con la forma axiomática de enseñar matemáticas que predomina en la actualidad y defiende una enseñanza más cercana a los problemas que han producido su desarrollo (muchos de ellos provenientes de la física o la geometría). Entre otras cosas, Arnold afirma que: «El teorema de la clasificación de las superficies es un logro matemático de alto nivel, comparable con el descubrimiento de América o los rayos-X. Es un descubrimiento genuino de la ciencia natural matemática e incluso es difícil decir si el hecho en sí es más atribuible a la física o las matemáticas». Y también dice: «El teorema de la clasificación de las superficies debería haberse incluido en los cursos de matemáticas de secundaria (probablemente sin la prueba), pero por alguna razón no se incluye incluso en cursos de matemáticas universitarias».

Capítulo 4

Geometría en Planilandia

La geometría (del griego, *geo*, «tierra», y *metría*, «medida») es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los espacios cuando en ellos tiene sentido realizar mediciones métricas: distancias, ángulos, tamaños. La geometría es una de las ramas más antiguas de las ciencias. Fue puesta en forma axiomática por Euclides alrededor del siglo III a.C. Desde entonces se ha desarrollado enormemente, sobre todo guiada por la necesidad de estudiar los movimientos de los cuerpos celestes.

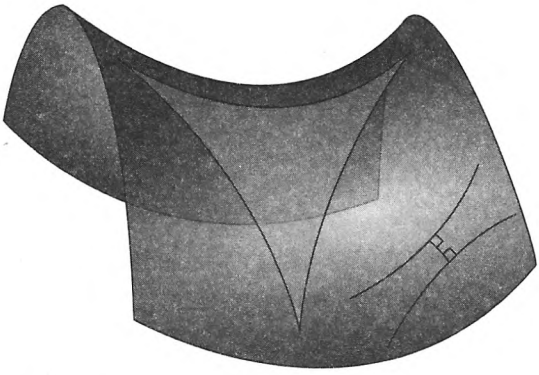
Desde Euclides, y durante casi dos mil años, se estudiaron propiedades geométricas de las figuras planas y espaciales, pero siempre sobreentendiendo el concepto de espacio. Se asumía el espacio como infinito en todas direcciones y completamente extendible. Esta visión fue abolida por el revolucionario descubrimiento de las geometrías no euclideas, llevado a cabo por Gauss (que nunca publicó sus trabajos), Bolyai y Lobachevski. Desde entonces se entendió el espacio euclideo como «uno» de los posibles espacios donde desarrollar la geometría, y se expusieron las bases para

BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

En 1853, Carl Friedrich Gauss pidió a su estudiante Riemann que preparase su habilitación (el examen para obtener la máxima categoría en la carrera universitaria en Alemania) sobre la fundamentación de la geometría. Durante muchos meses, Riemann desarrolló su teoría de «los espacios de dimensión superior». Finalmente impartió su conferencia en Gotinga en 1854, dejando al público entusiasmado, con uno de los trabajos más influyentes de la historia de la geometría, y que supuso el nacimiento de la geometría riemanniana. Riemann había encontrado la manera correcta de extender a una dimensión cualquiera la geometría que Gauss había desarrollado para superficies. Quizás el más impresionado fue el mismo Gauss, como reportó su colaborador Wilhelm Weber.

desarrollarla en otros tipos de espacios. La formalización de esta idea vino dada por la geometría riemanniana, en la que se considera un espacio junto con la manera de realizar mediciones métricas en él. De hecho, esta teoría resultó crucial en el desarrollo posterior de la teoría general de la relatividad que vino de la mano de Einstein.

La geometría estudia la «forma local» de los espacios. Con esto queremos decir que las propiedades métricas determinan la forma en un pequeño entorno del lugar donde nos encontremos (propiedades del estilo de: cómo son las circunferencias, los segmentos, etc., dibujados dentro de ese espacio), mientras que las propiedades topológicas determinan su «forma global», es decir cómo es el espacio cuando se lo considera en su totalidad (propiedades tales como ser compacto, u orientable).



Un triángulo en una superficie hiperbólica. También tenemos dos «rectas» que no se cortan y que, por tanto, merecen el apelativo de «paralelas». Estas rectas no se mantienen a distancia constante.

Los geómetras de Planilandia

El teorema de clasificación de superficies fue toda una revolución en Planilandia. El Departamento de Topología de la Universidad de Planid había logrado hacer el inventario de todas las distintas formas que podía tener Planilandia. No sólo eso, también había dado un criterio explícito para averiguar en la práctica cuál de las opciones era la correcta: calcular su característica de Euler-Poincaré. Es cierto que se habían asumido varias propiedades, pero no eran en sí muy problemáticas. Revisémoslas:

— Panilandia no tiene borde, es decir, es ilimitada. Esta propiedad es esperable: de haber borde, ¿qué pasaría al llegar a él? ¿Nos caeríamos o desaparecería-

mos? ¿Y a dónde? Además, nadie nunca había visto nada parecido a un borde, ni siquiera Cuadradina y su equipo de exploradores.

— Planilandia es compacta y, por tanto, finita (en extensión). Esta propiedad es algo más controvertida. En un principio se había creído que Planilandia podía ser un plano infinito, pero esa idea quedó descartada tras las famosas expediciones. El argumento a favor de la finitud estaba apoyado por la idea de «relevancia existencial»: «si pensamos que los planilandeses somos un pequeño grupo de seres y que el mundo a nuestro alrededor es infinito, entonces no somos "nada", perdidos en la inmensidad de nuestro universo» (en matemáticas escribimos la fórmula $1/\infty = 0$). Reconozcámoslo, es un argumento casi místico: «quien haya hecho nuestro mundo, no nos puede haber hecho tan insignificantes». Es curioso que este argumento fuera apoyado por un científico agnóstico como Pentagón. Pero, de hecho, la idea caló hondo entre los planilandeses, y fue adoptada por el sector eclesial formado por los distinguidos Círculos de Planilandia. Los últimos reticentes a la teoría de la finitud de Planilandia (entre los que se encontraba Equiláterus) se vieron forzados a abandonar su posición tras las dos expediciones de Cuadradina. ¡Hubiera sido mucha casualidad que Planilandia no fuera finita, pero que en los dos viajes se regresara al punto de partida!

— Planilandia es orientable. La orientabilidad era un tema que nadie se había planteado antes de toda esta «revolución topológica». Pero, después de entender en qué consistía y la influencia que tendría, se empezó a postular que Planilandia era orientable por motivos que también denotaban una preferencia de índole psicológica. Los planilandeses tienen el ojo a la derecha, y esto les hace muy conscientes de la diferencia entre izquierda y derecha. Suponer que el mundo era no orientable equivalía a decir que estos conceptos no tienen sentido, y que en algún lugar «accesible» (en un viaje) la derecha y la izquierda están intercambiadas, lo cual no era de recibo. Pero, además, la orientabilidad estaba apoyada por los dos viajes de Cuadradina: siempre regresó «del derecho», y no «del revés». Obviamente, debían hacer más viajes para comprobar este hecho, pero al menos estos dos constituían una corroboración en el 100% de los viajes realizados.

Por tanto, el teorema de clasificación de superficies les decía que bastaba calcular la característica de Euler-Poincaré para determinar cómo era Planilandia. Los viajes de Cuadradina habían mostrado que no era una esfera; por tanto, es una superficie

de género g, con $g \geq 1$. Para calcular la característica de Euler-Poincaré «bastaba» con recorrer todo el territorio de Planilandia y hacer un atlas de su superficie. Pero enseguida se vio que eso era impracticable: un equipo de más de 200 planilandeses tardaría unos 80 años en explorar todo el territorio. Eso dejaba el problema en punto muerto.

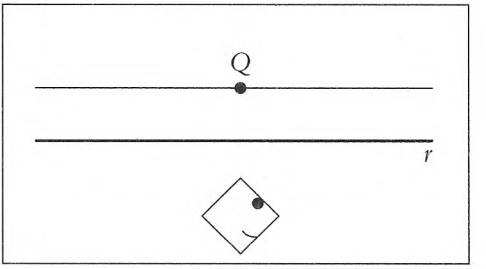
EL MAPA DE BORGES

El siguiente minirrelato de Borges (de su libro *El hacedor*, 1960) fantasea sobre qué sería un mapa a escala real. Borges lo presenta como una cita que atribuye a un libro de un tal Suárez de Miranda, pero este detalle forma parte del juego, pues una de las cosas que más le gustaba a Borges era inventarse citas por doquier:

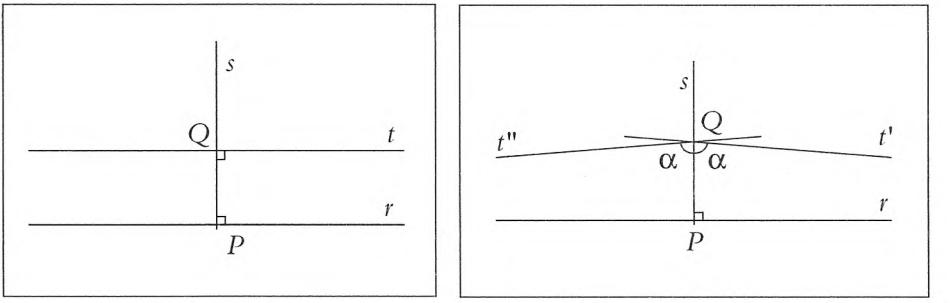
> **«Del rigor en la ciencia**
>
> En aquel Imperio, el Arte de la Cartografía logró tal Perfección que el Mapa de una sola Provincia ocupaba toda una Ciudad, y el Mapa del Imperio, toda una Provincia. Con el tiempo, estos Mapas Desmesurados no satisficieron y los Colegios de Cartógrafos levantaron un Mapa del Imperio, que tenía el Tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos Adictas al Estudio de la Cartografía, las Generaciones Siguientes entendieron que ese dilatado Mapa era Inútil y no sin Impiedad lo entregaron a las Inclemencias del Sol y los Inviernos. En los Desiertos del Oeste perduran despedazadas Ruinas del Mapa, habitadas por Animales y por Mendigos; en todo el País no hay otra reliquia de las Disciplinas Geográficas.»

El camino de salida a esta situación iba a provenir de otra área de las matemáticas: la geometría. Los geómetras de Planilandia eran un reducido grupo que se dedicaba a estudiar las propiedades de las figuras planas: los triángulos, los polígonos, las circunferencias. Todas ellas eran las formas de los planilandeses, lo que hacía de la geometría y la anatomía disciplinas muy cercanas. La geometría que se estudiaba en Planilandia era básicamente euclidea. En el plano se podían trazar rectas y medir ángulos. Había una noción de perpendicularidad (cuando el ángulo entre dos rectas que se cortan es de 90°) y de paralelismo (cuando dos rectas no se cortan). El desarrollo de esta «geometría de Planilandia» estaba limitado a las dos dimensiones, pues su propósito era ajustarse a la realidad, explicarla y axiomatizarla. Entre los postulados (principios fundacionales) de la teoría se encontraba uno muy famoso:

Postulado del paralelismo (de la geometría de Planilandia):
Por un punto Q exterior a una recta *r* se puede trazar una y sólo una paralela a *r*.



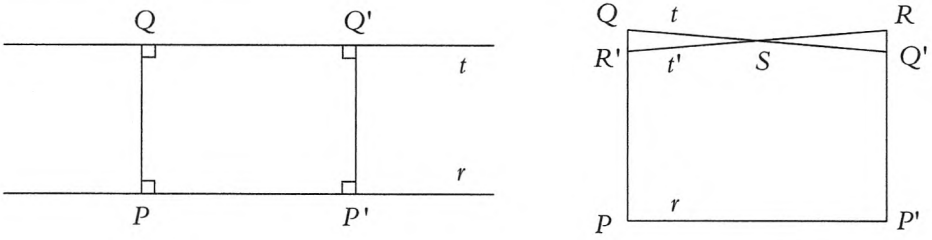
Una paralela es una recta que no corta a otra. Si desde Q trazamos una perpendicular a *r*, que llamamos *s*, y luego trazamos una recta *t* perpendicular a *s* por Q, tendremos que *t* y *r* no se cortan. Ciertamente, si la paralela a *r* por Q, que existe según el postulado, fuera una recta *t'* cuyo ángulo con *s* no fuera de 90°, su simétrica *t"* también sería paralela, contradiciendo el mismo postulado del paralelismo. Por tanto, la paralela a *r* es *t*.



En el caso de la derecha, cuando $\alpha \neq 90°$*,*
se viola el postulado de las paralelas.

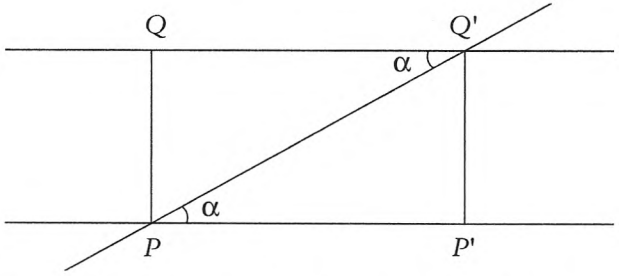
De hecho, las paralelas *t* y *r* mantienen su distancia de forma constante. Si tomamos otro punto *P'* en *r* y *Q'* en *t*, con *P'Q'* perpendicular a *r*, de nuevo *P'Q'* es perpendicular a *t* (porque *t* es también la única paralela a *r* por *Q'*). Así tenemos un rectángulo *PP'QQ'*.

En un rectángulo, los lados opuestos son iguales. Si fuera $P'Q' < PQ$, trazaríamos el rectángulo simétrico, haciendo una simetría al intercambiar *P* y *P'*. Obtendríamos el siguiente dibujo:



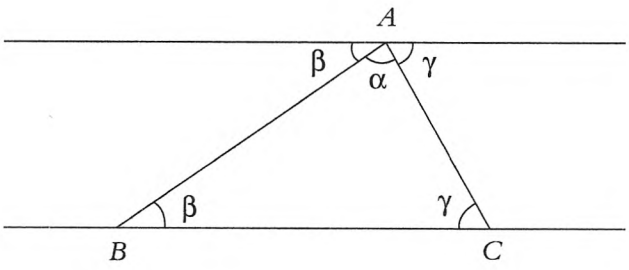
Este rectángulo tiene vértices $PP'RR'$. Las rectas t (que contiene el segmento QQ') y t' (que contiene el segmento RR') son paralelas a r, pero han de cortarse forzosamente en un punto S. Por tanto, hay dos paralelas a r por S, violando de nuevo el postulado.

Hemos concluido que en un rectángulo $PQP'Q'$ los lados opuestos tienen la misma longitud. Trazando la diagonal PQ', tenemos que los triángulos $PP'Q'$ y PQQ' son iguales (pues tienen sus lados iguales). Luego tienen los ángulos iguales (marcados con la letra α en la figura).



Los ángulos internos con que una recta corta a dos paralelas son iguales.

De aquí se deducen resultados tan archiconocidos por todos como que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180°. Sea ABC un triángulo. Tracemos la paralela a la recta BC por A. El dibujo dice claramente que $\alpha+\beta+\gamma=180°$:



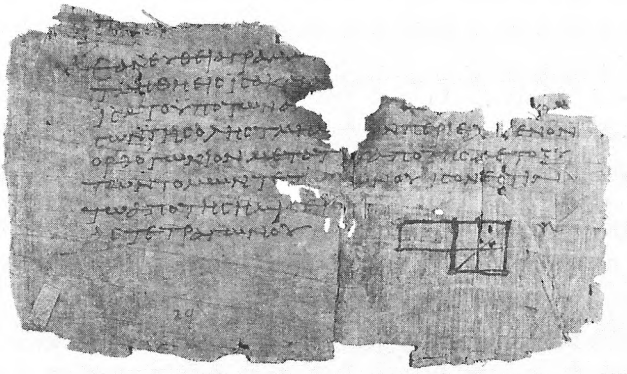
Montones de resultados de este estilo ya habían sido deducidos por los geómetras de Planilandia. Pero los avances recientes eran escasos, y la geometría se había convertido en una disciplina de individuos circunspectos, que no gozaban de una gran reputación como científicos.

Rombete era uno de esos geómetras. Se había percatado de que el postulado de las paralelas tenía un fallo de concepto: suponía que las rectas se podían extender indefinidamente, y que en esa extensión las propiedades que se veían a pequeña escala seguían siendo válidas a largas distancias. Para eso, se hacía preciso poder extender el espacio indefinidamente. Es decir, Planilandia «tenía que ser» un plano.

LOS *ELEMENTOS DE GEOMETRÍA* DE EUCLIDES

Hasta hace apenas 200 años, la geometría en Europa y en el mundo islámico estaba basada en la geometría griega. Los *Elementos* de Euclides era uno de los textos más importantes sobre geometría, y en él se presentaba la geometría desde un punto de vista axiomático, usando métodos constructivos. El tratado no es, como a veces se piensa, un compendio de todas las matemáticas helénicas sobre geometría. Es más bien una introducción elemental a la misma. El mismo Euclides escribió ocho libros más avanzados en geometría. De hecho, los *Elementos* no fue el primer tratado en geometría de la época (aunque los textos anteriores se han perdido), y muchos de sus resultados eran conocidos con anterioridad.

Se considera uno de los libros publicados más influyentes de la historia: fue uno de los primeros textos sobre matemáticas impreso tras la invención de la imprenta, y algunos historiadores estiman que es el segundo libro en número de ediciones, por detrás de la Biblia.

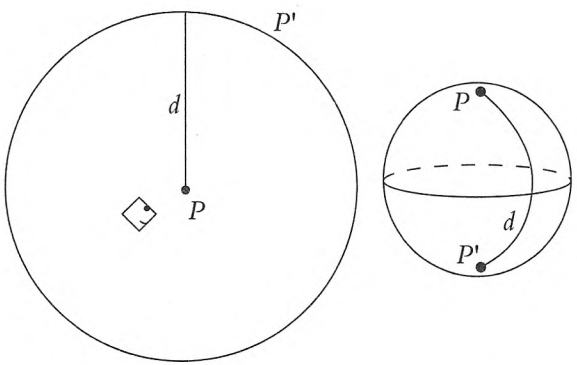


Un papiro con un fragmento de los Elementos, *datado hacia el año 100 a.C.*

La geometría esférica

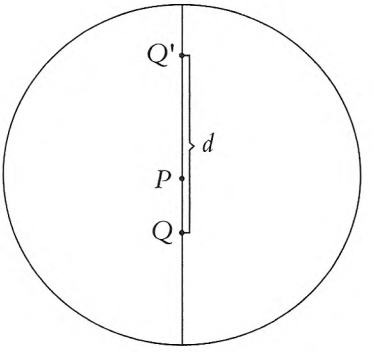
Cuando Cuadradina hizo sus viajes alrededor de Planilandia, la teoría del espacio plano e infinito voló por los aires. Pero mientras que los viajes de Cuadradina y los resultados topológicos tuvieron una gran cobertura mediática entre el público de Planid, los comentarios de Rombete sobre las consecuencias que esto tenía en el postulado de las paralelas pasaron completamente desapercibidos. Sin la infinitud de Planilandia, el postulado de las paralelas no podía ser cierto, y sin él caían muchos de los resultados que se deducían, por obvios que nos pareciesen.

Recordemos que tras el primer viaje de Cuadradina, la idea predominante era que Planilandia probablemente era una esfera (como había sugerido Pentagón). Rombete le dio muchas vueltas a cómo sería la geometría en semejante espacio. Supongamos que Planilandia es una esfera. Nos colocamos en un punto P y nos movemos en línea recta (en cualquier dirección). Recorrida una distancia d llegamos a la antípoda P', y recorrida la distancia $2d$ volvemos al punto de partida. Esto mismo debe pasar en cualquier dirección. Por tanto, podemos pintar Planilandia como un disco de radio d, donde el borde quiere significar la antípoda.

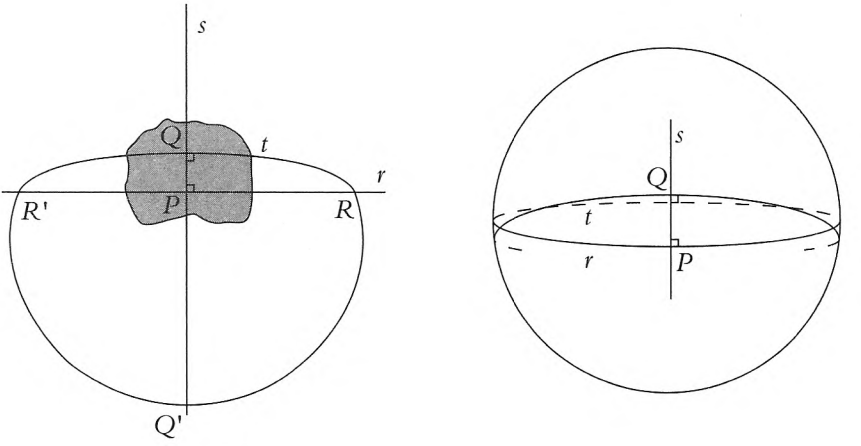


El disco como un modelo de la esfera, con una recta desde P *que llega hasta la antípoda* P'. *Vemos también el correspondiente dibujo tridimensional.*

Por tanto, cualquier recta que pasa por P pasa por la antípoda P'. Esto da el curioso resultado de que dos rectas que se cortan lo hacen en dos puntos. Cualquier punto podía haber sido elegido como centro: el mundo no debería tener ningún punto privilegiado. Por tanto, todo punto Q debe tener una antípoda. Rombete comenzó por encontrar la antípoda Q' en su modelo. Trazamos la recta de P a Q y tomamos en esa recta una distancia d. El punto resultante Q' es la antípoda de Q:



Veamos qué pasa con el postulado de las paralelas. Consideramos una recta *r* por *P*, trazamos una perpendicular suya *s*, y desde un punto *Q* de *s* tomamos una recta perpendicular *t*. Esa recta, como todas las rectas de la esfera, debe pasar por la antípoda de cada uno de sus puntos, en este caso por *Q'*, una vez recorrida una distancia *d*. Es decir, tenemos el siguiente dibujo.



Dada una recta r, *dibujamos la recta* t *como potencial paralela suya. Sin embargo,* r *y* t *se acercan hasta llegar a cortarse (en dos puntos). Si miramos a pequeña escala, en un entorno de* P *(de color gris), el dibujo parece euclideo. A la derecha vemos las dos rectas* r *y* t *dibujadas en la esfera del espacio tridimensional.*

Rombete se dio cuenta de que, a pequeña escala, el dibujo euclideo era correcto, pero que en realidad era sólo una aproximación, y que a gran escala pasaba algo muy distinto. Las rectas *r* y *t* se acercan, en el sentido de que la distancia entre ellas disminuye, hasta que llegan a cortarse (por cierto, en dos puntos *R* y *R'* antipodales).

Lo que más le costó explicar a Rombete fue el motivo por el que la recta t no parecía recta en el dibujo. Si es una recta, ¡no debería torcerse! El problema es que estamos mirando el dibujo con «ojos euclideos», y con esos ojos la recta se ve torcida. Pero si la geometría no cumple las propiedades euclideas, la noción de «ser recta» y la de «torcerse» deben de tener un significado distinto, que debemos averiguar. Ése es el papel del geómetra.

Nosotros, los humanos, podemos recurrir al dibujo de la esfera en el espacio tridimensional para entender lo que ocurre. Al pintar la esfera como un disco (algo a lo que se veía forzado Rombete porque su mundo era bidimensional), tenemos que estirar o encoger zonas de la esfera. Esto produce una distorsión que hace que las rectas se vean torcidas en el dibujo. Dicha distorsión no ocurre a pequeña escala, y por eso a los planilandeses les parecía que las rectas t y r no se tenían que cortar nunca. Sin embargo, a escala global, las rectas acaban cortándose.

La clave para entender la geometría está en replantearnos qué queremos decir con la palabra «recta», y no dejarlo en el aire como un concepto no definido, como algo que todos entendemos. Una recta es la trayectoria más corta entre dos puntos. Con esta definición, lo que Rombete había comprobado es que en la esfera las rectas siempre se cortan, y que, por tanto, no podía haber ninguna paralela a una recta por un punto exterior a ella.

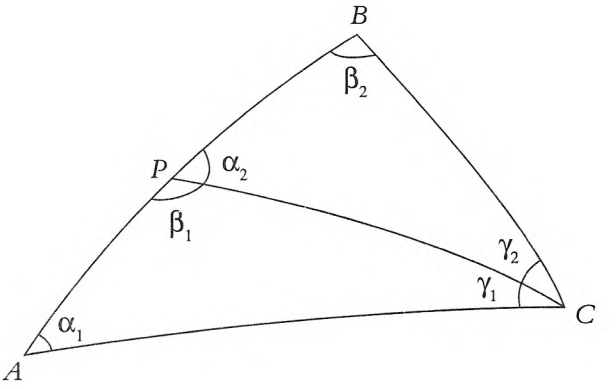
Mirando la superficie en el mundo tridimensional, la trayectoria más corta entre dos puntos se consigue colocando un trozo de hilo de uno a otro sobre la superficie, y tensándolo para que adquiera la mínima longitud.

¿Y qué ocurre con los ángulos de un triángulo? Pues que la suma de ellos es mayor que 180°. Basta considerar en la figura inferior de la página anterior el triángulo PQR, donde R es el punto de corte de las rectas r y t. Tiene dos ángulos de 90° y otro ángulo más. Por pequeño que sea este último, la suma ha de superar los 180°.

Lo más sorprendente es que el exceso de la suma de los ángulos con respecto a los 180° es «proporcional» al área del mismo. Matemáticamente escribimos

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \text{Constante} \cdot \text{Área}.$$

Eso quiere decir que si en un triángulo la suma de los ángulos es 182°, otro con el doble de área tiene por suma 184°, y uno con diez veces esa área alcanza la suma de 200°. Nuestro amigo Rombete lo comprobó de la siguiente forma: tomamos un triángulo ABC y lo dividimos en dos, APC y BPC, tal como se muestra en la figura siguiente:



La suma de los ángulos de *APC* es $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$, y la suma de los ángulos de *BPC* es $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$. Además, los ángulos de *ABC* son $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_2$ y $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Y también $\alpha_2 + \beta_1 = 180°$. Por tanto, queda:

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180°) + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - 180°) = \alpha + \beta + \gamma - 180°,$$

que es el correspondiente exceso a 180° de la suma de los ángulos de *ABC*. Así, si las áreas se suman, los excesos se suman, de donde se obtiene la proporcionalidad mencionada.

Remarquemos la importantísima fórmula que hemos obtenido para la suma de los ángulos de un triángulo esférico:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° + k \cdot \text{Área},$$

donde k es una constante positiva.

La cuestión es que ¡esta misma fórmula es válida para el plano, poniendo $k = 0$! La constante k juega el papel de la distorsión con respecto a la situación euclidea. Cuanto más grande es k, mayor es la suma de los ángulos de un triángulo y, por tanto, más se «curvan» las rectas (bien, deberíamos evitar esta terminología, pues las rectas por definición no se curvan). Por eso Rombete llamó a esta constante «curvatura». Para ser más precisos, como los matemáticos medimos los ángulos en radianes, llamó curvatura a

$$K = k \cdot \pi / 180,$$

y la fórmula quedaba como:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° + K \cdot \text{Área} \cdot 180° / \pi\ .$$

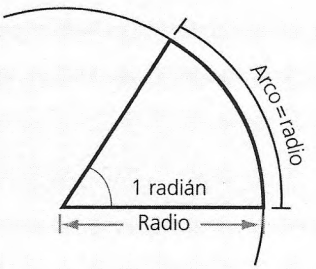
Otra consecuencia importante que se obtiene de la fórmula anterior es que no podemos tener un triángulo tan grande como queramos: dado que un ángulo no puede superar los 360°, la suma de tres ángulos no puede superar cierta cantidad tope ($3 \cdot 360° = 1.080°$). Por tanto, el área tampoco puede superar cierta cantidad tope (que depende de K, por supuesto). Esto impide hacer un triángulo semejante a otro (recordemos que dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos, pero el segundo tiene los lados del primero multiplicados por cierto factor). Ciertamente, de poder hacer triángulos semejantes, esto nos permitiría hacer triángulos cada vez más y más grandes, pudiendo sobrepasar el tope de área.

La diferencia entre la geometría euclidea y las geometrías no euclideas estriba en que en la primera tenemos las *homotecias*. Éstas permiten agrandar las longitudes y las áreas de las figuras, manteniendo los ángulos iguales. Acabamos de ver que cuando $K > 0$, esto no podemos hacerlo.

Sin embargo, el gran tratado de *Geometría de Planilandia esférica* que Rombete estaba escribiendo tras el primer viaje de Cuadradina no vio la luz. Cuando Cuadradina llegó de su segundo viaje, quedó claro que Planilandia no era una esfera, y el texto de Rombete se vio relegado a un cajón. ¡Así es la dura vida del científico!

GRADOS Y RADIANES

El radián es la unidad de ángulo en el Sistema Internacional de Unidades, y es la unidad de medida de ángulos preferida por físicos y matemáticos. Su símbolo es rad. Un radián se define como el ángulo que da un arco cuya longitud coincide con la del radio.



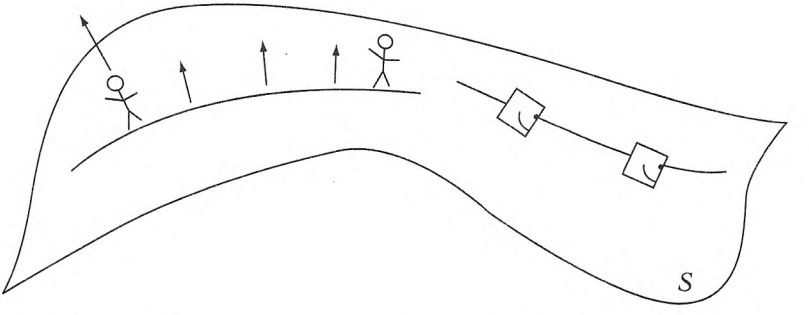
Fijando una circunferencia de radio $R = 1$, tenemos que la longitud de la circunferencia es $2\pi = 6{,}283185$. Esto quiere decir que el ángulo completo (de 360°) tiene 2π rad. Por tanto, $360° = 2\pi$ rad, y 1 rad $= 360°/2\pi = 57{,}296°$. Para pasar de ángulos a radianes, multiplicamos por $\pi/180$.

Rombete comprendió que Planilandia tenía que ser un espacio más general que los que había estado estudiando, y se planteó la idea de que la curvatura K no fuera una constante, sino que fuera cambiando de punto a punto. Y no sólo eso, que además pudiera ser positiva o negativa, según el caso. De esta forma, la suma de los ángulos de un triángulo dependería del lugar donde lo dibujásemos. Además, la suma sería mayor de 180° si la curvatura fuera positiva, $K>0$, o menor de 180° si fuera negativa, $K<0$.

Geometría extrínseca e intrínseca

Para entender las cuestiones geométricas relativas a las superficies nos viene bien, de nuevo, aprovechar nuestra intuición de seres de un mundo tridimensional. Consideremos una superficie S e imaginémonos que estamos de pie sobre dicha superficie, y que podemos caminar a lo largo y ancho de ella.

A diferencia de un planilandés, nosotros podemos mirar en tres direcciones distintas: podemos mirar a lo largo y a lo ancho, pero también hacia arriba, en la dirección perpendicular a la superficie. La dirección perpendicular se suele llamar *vector normal*. Sin embargo, un planilandés sólo puede mirar en las dos direcciones, largo y ancho, y no es consciente de la dirección normal.



Una persona y un planilandés sobre la superficie S. El primero puede mirar en la dirección normal, algo que no le está permitido al ser bidimensional.

En la superficie podemos, entre otras cosas:

— Medir ángulos.
— Medir distancias y dibujar «líneas rectas». Un «segmento» que une dos puntos P y Q viene a ser la curva más corta «en la superficie» que pasa por ambos

puntos. A esta línea se la suele denominar *geodésica*. La longitud de ese segmento en S es la distancia de P a Q, que se escribe $d(P,Q)$ (si hubiera varios caminos, consideraríamos el más corto de todos ellos).

— Dibujar circunferencias: son los puntos a una distancia fija de un punto dado (el centro de la circunferencia).

Todo esto lo podemos hacer tanto nosotros como un planilandés. La «geometría» de la superficie nos da las propiedades de las figuras que dibujemos en ella. Por ejemplo, dos «rectas» en S pueden tender a separarse, o bien a juntarse, dependiendo de la superficie.

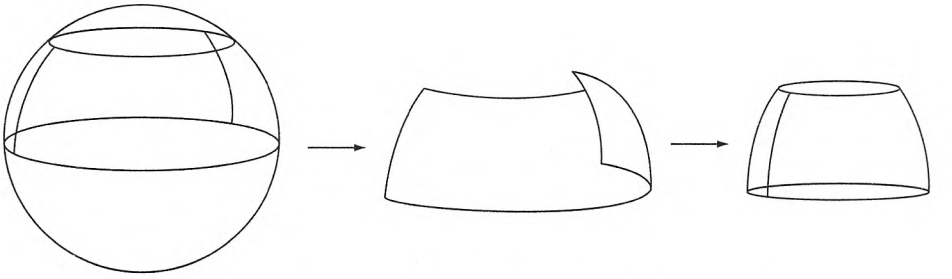
Se denomina *geometría intrínseca* a todas aquellas nociones geométricas que pueden ser percibidas «desde dentro» de la superficie, es decir, a aquellas propiedades geométricas que un planilandés puede estudiar (por ejemplo, llevar a cabo mediciones). Se denomina *geometría extrínseca* a todas aquellas nociones geométricas que pueden ser estudiadas por un ser que vive en el espacio ambiente (tridimensional) y que ve la superficie desde fuera (por ejemplo, caminando sobre ella).

Pero una superficie no tiene por qué encontrarse dentro del mundo tridimensional. Ya vimos que la botella de Klein o el plano proyectivo no estaban nunca en el espacio tridimensional. En principio, una superficie es un mundo bidimensional y está definido como tal, sin referencia a ningún mundo exterior y a ninguna dirección normal. De hecho, los planilandeses entienden las superficies de esta manera. En el caso de una superficie que está dada «en sí misma» sólo tiene sentido hablar de su geometría intrínseca.

Isometrías

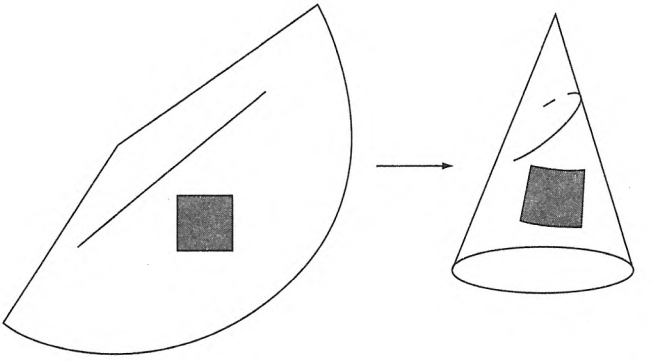
Desde el punto de vista geométrico, decimos que dos superficies son equivalentes si un planilandés no las puede distinguir haciendo cualquier tipo de experimento geométrico en ellas. Es decir, si tienen la misma geometría intrínseca.

Podemos imaginar el siguiente experimento: construyamos la superficie S con una lámina muy fina de un material rígido que no se pueda estirar o encoger, pero que sí admita que lo podamos «retorcer». Un ejemplo de esta situación se da si tomamos una hoja de papel y la enrollamos para que adopte la forma de un cilindro o un cono. Otro ejemplo práctico lo podemos hacer con una pelota de playa de goma, de la que recortamos un trozo con unas tijeras: el trozo de goma resultante tiene forma esférica, pero admite «deformaciones rígidas».



Un trozo de pelota de goma (esférica) puede ser «enrollado» para adoptar una nueva forma, isométrica *a la inicial. Un planilandés no lo notaría.*

Cualquier figura geométrica (circunferencia, triángulo, etc.) que dibujemos en la superficie antes y después de la «deformación rígida» que mencionábamos tiene los mismos ángulos y distancias. Por tanto, un planilandés que se mueve dentro de la superficie no los podrá distinguir. Sólo los seres tridimensionales pueden distinguir estas superficies, y ello es debido a que el vector normal se comporta de distinta manera.



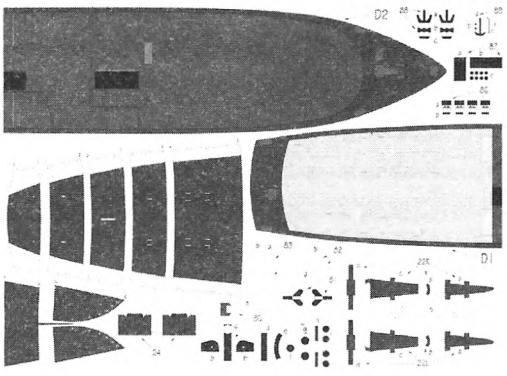
Con un trozo de papel (plano euclideo) podemos hacer un cono, que es, por tanto, isométrico a él. Los lados de un polígono y sus ángulos permanecen iguales. Una recta del plano pasa a ser una geodésica (el equivalente a una recta) del cono.

En matemáticas, a la deformación rígida mencionada arriba se la denomina *isometría* (del griego *iso*, «misma», y *metría*, «medida»). Una isometría es, por tanto, una «correspondencia» h de una superficie S a otra superficie S', lo que se escribe como $h: S \rightarrow S'$. A cada punto P de S le «corresponde» un punto P' de S'. Escribimos $P' = h(P)$. La correspondencia es *biyectiva*, es decir, a cada punto de S le corresponde uno y sólo un punto de S' y viceversa. Además, h preserva distancias y ángu-

los: si P y Q son dos puntos de S, y P' y Q' son los correspondientes puntos de S', entonces $d(P,Q) = d(P',Q')$. Por tanto, a toda figura que dibujemos en S le corresponde una figura en S' con los mismos elementos geométricos.

LOS RECORTABLES

Las superficies que son isométricas al plano son aquellas que se pueden construir recortando una hoja de papel y luego pegando los bordes de alguna forma; el cilindro y el cono son ejemplos de ellas. A estas superficies se las llama *desarrollables*. Los famosos recortables, con los que todos hemos jugado de niños, han de estar diseñados de forma que cada una de las piezas se pueda desplegar en un plano. Por tanto, todas sus partes son superficies desarrollables.

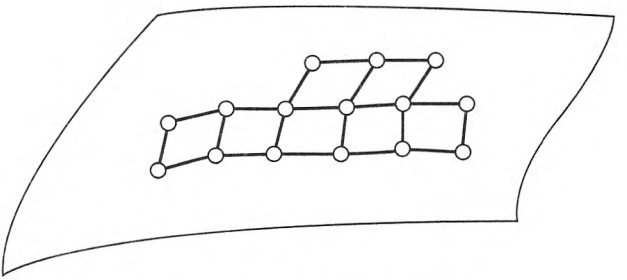


Geometría *versus* topología

Revisemos la diferencia entre la geometría y la topología de una superficie.

Geometría

Imaginemos una superficie construida de una fina malla de metal formada por pequeños cuadriláteros (quizá con lados de distintos tamaños) cuyos lados son de alambre y están unidos por nexos móviles. O incluso mejor: imaginemos que la superficie está formada por una colección de átomos (que pensamos como bolitas) y que éstos están unidos entre sí por enlaces atómicos que los mantienen a una distancia fija.



Superficie construida con una malla.

En esta superficie podemos medir distancias entre puntos yendo a lo largo de los cuadraditos. Ahora podemos deformar la superficie en el espacio. La deformación no puede modificar la distancia entre los nexos, pues estas distancias vienen determinadas por la longitud del alambre y no sufren variaciones. Decimos que la deformación es rígida. Cuando aplicamos una deformación rígida, la distancia entre dos puntos no varía.

Las propiedades geométricas (intrínsecas) son aquellas que no varían cuando hacemos deformaciones rígidas de la superficie (por ejemplo, las distancias, los ángulos, las geodésicas). Dos superficies son *isométricas* si se puede ir de una a otra por una deformación rígida. También se permite el proceso de cortar, aplicar una deformación rígida y luego pegar, siempre que peguemos por el mismo sitio por el que habíamos cortado (con lo cual un ser bidimensional no se vería afectado por este hecho).

Topología

Imaginemos ahora una superficie construida con una fina malla elástica, donde los alambres han sido sustituidos por pequeñas gomas elásticas (que se pueden estirar o encoger) unidas a través de los nexos. Alternativamente, podemos pensar que está formada por una capa de átomos, unidos entre sí por cierto tipo de enlaces atómicos que permiten un cambio en la distancia entre ellos (enlaces que, no obstante, no pueden romperse, por mucho que estiremos). En la práctica, podemos pensar en una superficie de goma elástica, lo que básicamente viene a ser lo mismo.

Las propiedades topológicas son aquellas que no cambian cuando estiramos o encogemos la superficie (por ejemplo, el número de agujeros o la orientabilidad). Dos superficies son *homeomorfas* si se puede ir de una a otra por una deformación elástica. De nuevo, también se permite el proceso de cortar, aplicar una deformación elástica y luego pegar por el mismo lugar por el que habíamos cortado.

Ahora tenemos dos problemas de clasificación distintos: clasificar las superficies topológicamente (salvo homeomorfismo) y clasificarlas geométricamente (salvo isometría). La clasificación va a ser distinta; por ejemplo, una esfera puede admitir muchas geometrías diferentes: basta pensar que puede tener distinto radio, o que puede ser una esfera redonda, achatada o presentar múltiples abombamientos.

Curvatura

Supongamos que tenemos una superficie en el espacio tridimensional, y coloquémonos sobre un punto P de la misma. Si nos movemos en una dirección sobre la superficie, notamos cómo ésta se curva en esa dirección. Para ello basta dibujar el vector normal y ver cuán rápido se mueve según caminamos en la dirección elegida.

Alternativamente, podemos hacer el siguiente ejercicio: colocamos una carretilla sobre la superficie y nos tumbamos en ella mirando al cenit. Supongamos que tenemos un cielo estrellado. Al moverse la carretilla en la dirección dada, el cielo «se desplaza» más o menos rápido (de hecho, sólo medimos la variación hacia delante y hacia atrás). La velocidad de variación se denomina *curvatura direccional*, y está dada por un número k. Un planilandés, en cambio, no puede mirar hacia el cielo estrellado. De hecho, no notaría el efecto de esa curvatura, dado que su cuerpo va describiendo la curva sobre la superficie a lo largo de la que se mueve.

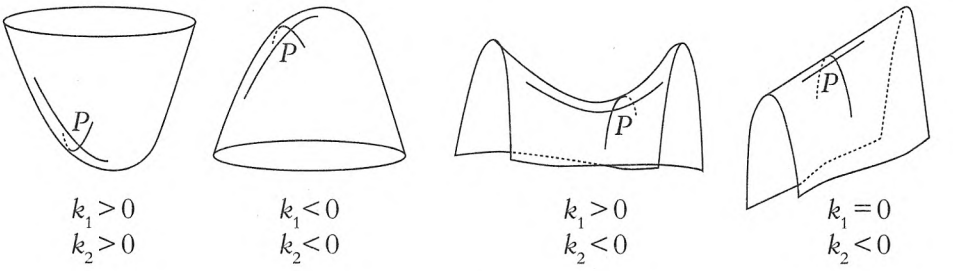
Desde cualquier punto P hay dos direcciones sobre la superficie donde la curvatura direccional alcanza sus valores máximo y mínimo. Estas dos direcciones son perpendiculares, y se las llama *direcciones principales*. Las *curvaturas principales* son, por tanto, dos números k_1, k_2 que indican la curvatura direccional máxima y mínima por P. Es importante entender que k_1 y k_2 tienen un signo, que es positivo si la curva que le corresponde se «curva» hacia el cenit, y es negativo si lo hace en dirección opuesta. Si pensamos en la superficie como en la ladera de una montaña, entonces $k_1 = 0$ significa que subimos (o bajamos) por la ladera a velocidad constante. Si tenemos $k_1 > 0$, entonces nuestro régimen de subida va aumentando según andamos (o si bajamos, cada vez bajamos más despacio con tendencia a acabar subiendo de nuevo). Finalmente, si $k_1 < 0$, ocurre lo contrario: si estamos subiendo, cada vez lo hacemos más lentamente, y si estamos bajando, cada vez aceleramos más nuestra bajada. Así:

— Si $k_1, k_2 > 0$, S se curva hacia el cenit en las dos direcciones principales. Por tanto, la superficie tiene forma de *valle*.

— Si $k_1, k_2 < 0$, S se curva hacia abajo en las dos direcciones principales, y tiene forma de *colina*.

— Si $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, S se curva hacia arriba en una dirección y hacia abajo en la dirección perpendicular. A esta forma se la suele llamar *silla de montar*.

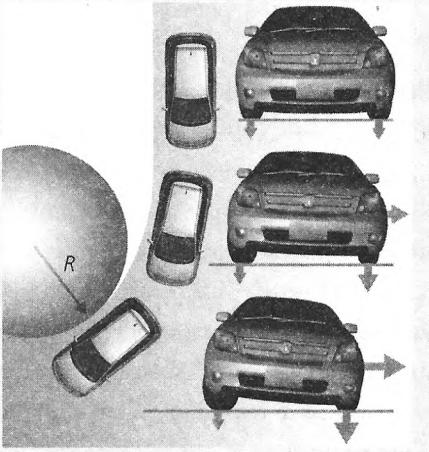
— Finalmente, si $k_1 = 0$, $k_2 < 0$, entonces S tiene forma de *ladera* de una montaña. Si $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, entonces S es básicamente *plana*. Y si $k_1 = 0$, $k_2 > 0$, entonces estamos en un *cañón* (un paso entre montañas).



Curvaturas principales y la forma de la superficie.

LA FUERZA CENTRÍFUGA

Cuando tomamos una curva experimentamos una fuerza lateral hacia afuera llamada *fuerza centrífuga*. Esta fuerza es inversamente proporcional al *radio de curvatura* de la curva, es decir, al radio de la circunferencia que aproxima la curva (a la que se llama *circunferencia osculatriz*). La curvatura de la curva es $k = 1/R$, donde R es el radio de curvatura. La fuerza centrífuga es la consecuencia física de la curvatura. Cuanto más cerrada es la curva, menor es R y mayor es la curvatura y, por tanto, la fuerza centrífuga. Las carreteras diseñadas para evitar las consecuencias de este efecto llevan un peralte, es decir, una elevación de la parte exterior de la curva que evita que el coche se salga hacia el exterior.

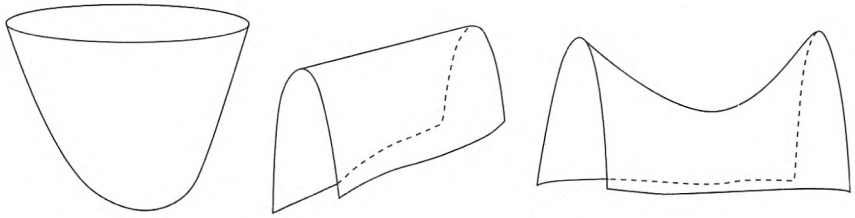


Las curvaturas principales son nociones de geometría extrínseca. Se llama *curvatura de Gauss* al producto de k_1 y k_2,

$$K = k_1 \cdot k_2.$$

Lo que resulta más sorprendente, y fue demostrado por Gauss, es que K es una noción geométrica intrínseca. A este resultado se le llama *teorema egregio de Gauss* (el adjetivo «egregio» significa, según la RAE, «insigne, ilustre», tal es la importancia del resultado mencionado).

Que la curvatura K sea intrínseca quiere decir que no cambia por deformaciones rígidas. La justificación se debe a que si tomamos un trozo de superficie (imaginémosla como una malla de alambre) y la deformamos en una dirección, podemos aumentar k_1, pero esto tensa la otra dirección y hace disminuir k_2, de forma que el producto $K = k_1 \cdot k_2$ es el mismo. Si cambiamos la posición del cenit, es decir, si intercambiamos los lugares del cielo y del subsuelo, entonces k_1 y k_2 cambian simultáneamente de signo; por tanto, $K = k_1 \cdot k_2$ no cambia de signo.



Superficies con $K > 0$, $K = 0$ y $K < 0$, respectivamente.

Pero la importancia de que K sea intrínseca realmente estriba en el hecho de que Rombete la puede calcular desde dentro de S. Que la puede calcular quiere decir que puede hacer mediciones geométricas y, con los datos obtenidos, aplicar alguna fórmula para obtener K. La fórmula que Rombete «no puede aplicar» es $K = k_1 \cdot k_2$, porque para eso necesitaría conocer los valores de k_1 y k_2, que son propiedades extrínsecas. Por tanto, debe de haber otra fórmula para K, aunque no la haya para k_1 y k_2. Y, de hecho, Gauss la encontró, pero es una fórmula un poco larga para incluirla aquí.

Teorema de Gauss-Bonnet

¿Hay algún método más rápido para encontrar la curvatura? Rombete ya se había topado con la curvatura en su estudio de los ángulos de un triángulo. Miramos un

punto P de la superficie S. Si dibujamos un triángulo pequeñito ABC cerca de P y medimos sus ángulos α, β, γ, entonces la expresión

$$K = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-180)}{\text{Área}} \cdot \frac{\pi}{180}$$

es, de hecho, el mismo número que la curvatura de Gauss de la sección anterior. El factor $\pi/180$ sirve para pasar los ángulos de grados a radianes, que son las unidades que siempre usamos los matemáticos para medir ángulos. La expresión de K es tanto más precisa cuanto más pequeñito sea el triángulo que tomemos (en términos matemáticos, se dice que hay que *pasar al límite*).

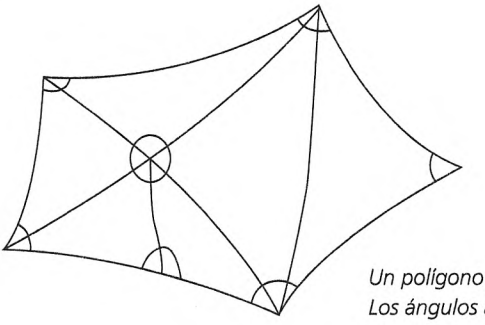
Teorema de Gauss-Bonnet (versión 1, para triángulos):
El exceso de la suma de los ángulos de un triángulo, medido en radianes, es igual a la curvatura multiplicado por el área del triángulo.

Cuando tomamos polígonos mayores, también podemos hacer un cálculo semejante a base de dividir la región en pequeños triángulos.

Dibujemos un polígono (todo lo grande que queramos), y sea n el número de lados. Por tanto, también tiene n ángulos, que escribimos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si fuera un polígono plano, la fórmula de la suma de ángulos sería

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180 \cdot (n-2).$$

¡Pero en la superficie S la historia es muy diferente por culpa de la curvatura! Veamos cuál es la formula correcta. Dividamos el polígono en multitud de triángulos pequeños T_i; digamos que hay un número N de ellos. En cada triangulito T_i tenemos sus ángulos α_i, β_i, γ_i, su área A_i y su curvatura K_i (la curvatura va cambiando de un triangulito a otro).



Un polígono dividido en triángulos. Los ángulos aparecen dibujados.

Ahora sumamos todas las fórmulas:

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 180 + \frac{A_i \cdot K_i \cdot 180}{\pi}.$$

Nos quedará la suma de todos los ángulos de todos los vértices de todos los triángulos (véase la figura de la página anterior). Contemos cuántos vértices hay. Son de tres tipos: los del interior del polígono, pongamos que son I, los que aparecen en el borde del polígono, que serán B, y los que son vértices del polígono, que ya sabemos que son n. Sumando queda:

$$360I + 180B + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180N + \frac{180}{\pi} \cdot \sum A_i \cdot K_i.$$

(el símbolo Σ se llama «sumatorio» e indica que hay que hacer una suma de todos los productos $A_i \cdot K_i$).

Para seguir con la cuenta, necesitamos calcular el número de vértices V, de aristas A y de caras C de la figura. La característica de Euler-Poincaré del polígono es $\chi = V - A + C = 1$, puesto que es homeomorfo a un triángulo y éste tiene característica igual a 1. Ahora, el número de vértices es $V = I + B + n$ (contando los del interior, los del borde y los del polígono). El número de caras es $C = N$, obviamente. El número de aristas es más complicado: cada triángulo aporta 3, luego salen $3N$, pero las del interior están contadas dos veces cada una, y las del borde (que son $B + n$), sólo una vez. Luego queda $A = (3N - B - n)/2 + (B + n)$. Juntándolo todo:

$$1 = \chi = V - A + C = I + B + n - (3N - B - n)/2 - (B + n) + N.$$

De aquí se despeja N y obtenemos $N = 2I + B + n - 2$. Sustituimos en la fórmula de antes:

$$360\,I + 180\,B + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180\,(2\,I + B + n - 2) + \Sigma\, A_i \cdot K_i \cdot 180/\pi.$$

Aquí se cancela $360\,I$ y $180\,B$, quedando:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180\,(n - 2) + \Sigma\, A_i \cdot K_i \cdot 180/\pi.$$

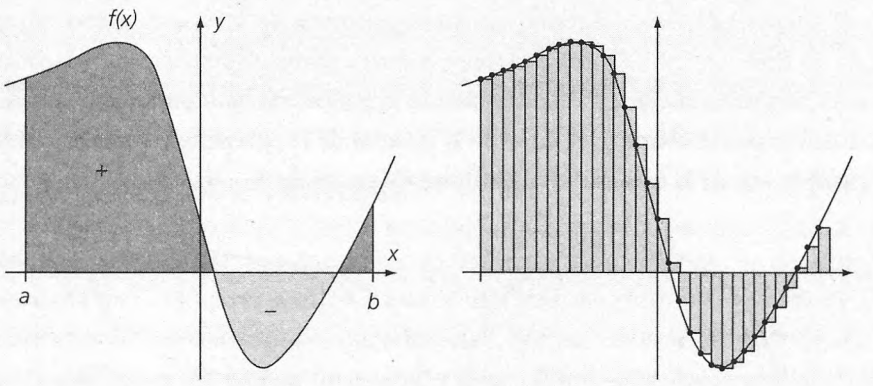
La expresión $\Sigma\, A_i \cdot K_i$ nos da las contribuciones de la curvatura ponderadas según el tamaño de cada triangulito. Esta expresión es la *integral* de la curvatura en el polígono P:

$$\Sigma\, A_i \cdot K_i = \int_P K.$$

LA INTEGRAL

La integral es, junto con la derivada, uno de los dos conceptos más importantes del cálculo. El símbolo de la integral, $\int$, es una «S» estirada, y significa «suma». La integral sirve para hacer una «suma continua», es decir, sumar una cantidad infinita de elementos infinitamente pequeños. Fue introducida por Riemann, y en los cursos de cálculo se enseña como el proceso inverso al de hacer derivadas.

La integral de una función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ calcula el área (con signo) entre el eje x, la gráfica de la función y las rectas verticales $x=a$, $x=b$. El valor $\int_a^b f(x)\,dx$ se consigue aproximando el área por una suma de rectángulos y haciendo que la base de estos rectángulos sea cada vez más pequeña (así se formaliza la idea de que el valor resultante es una suma continua).



La integral $\int_P K$ «suma» las contribuciones de la curvatura en los distintos puntos de P. Por tanto, si K_m es la «curvatura media» en P, entonces,

$$\int_P K = K_m \cdot \text{Área}\,(P).$$

Nuestra fórmula es ahora:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = 180\,(n-2)+(\int_P K)\cdot 180/\pi = 180\,(n-2)+K_m\cdot \text{Área}\,(P)\cdot 180/\pi.$$

Teorema de Gauss-Bonnet (versión 2, para polígonos):

El exceso de la suma de los ángulos de un polígono, medido en radianes, es igual a la curvatura multiplicada por el área del polígono.

Vamos a hacer una tercera versión del teorema de Gauss-Bonnet. En este caso, tomamos una superficie S compacta y sin borde. Dividimos S en pequeños triángulos T_i, igual que antes. Ahora todos los vértices son interiores, $V = I$. Hay $C = N$ triángulos, y tenemos $A = 3N/2$ aristas. La característica de Euler-Poincaré nos da $\chi(S) = I - 3N/2 + N = I - N/2$. Sumando todas las fórmulas,

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 180 + A_i \cdot K_i \cdot 180/\pi,$$

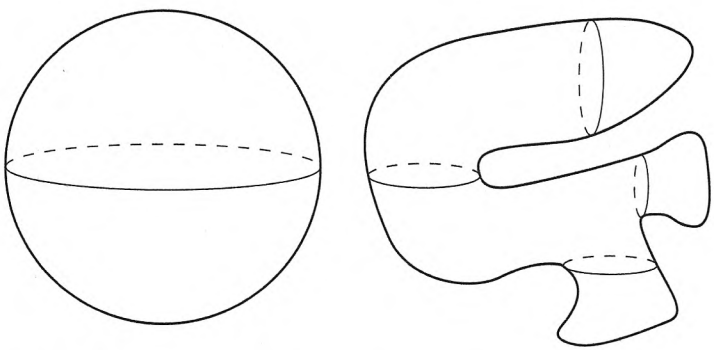
nos queda

$$360\, I = 180\, N + (\int_S K) \cdot 180/\pi = 180\, N + K_m \cdot \text{Área}\,(S) \cdot 180/\pi.$$

Y, por tanto,

$$K_m \cdot \text{Área}\,(S) = (360\, I - 180\, N) \cdot \pi/180 = 2\pi\chi(S).$$

El teorema de Gauss-Bonnet vincula la geometría de la superficie con su topología. Es decir, relaciona la forma local y la forma global del espacio. Dice que, aunque la curvatura pueda variarse cambiando la geometría de la superficie (a base de una deformación elástica), el valor de la integral de la curvatura no puede cambiar, y siempre nos da la característica de Euler-Poincaré de S.



Dos esferas, la primera con curvatura constante 1, la segunda con curvatura variable. Supongamos que ambas tienen la misma área, es decir $4\pi r^2 = 4\pi$. El teorema de Gauss-Bonnet dice que ambas tienen la misma curvatura media $K_m = 1$.

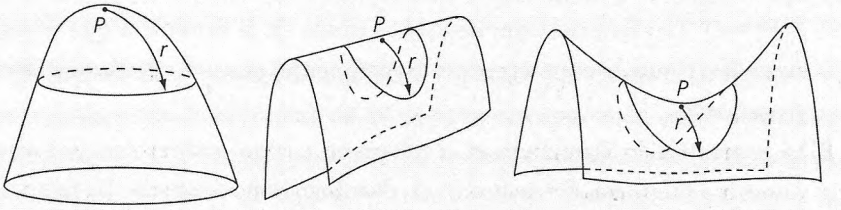
Teorema de Gauss-Bonnet (versión 3, para superficies compactas sin borde):
La característica de Euler-Poincaré multiplicada por 2π es igual a la curvatura multiplicada por el área de la superficie.

LONGITUD DE LAS CIRCUNFERENCIAS

La curvatura también afecta a la longitud de las circunferencias en una superficie. La fórmula usual para la longitud de una circunferencia (en el plano euclideo) es $l=2\pi r$, donde r es el radio. En una superficie con curvatura K, la longitud de una circunferencia de radio r y centro un punto P es, aproximadamente,

$$l \approx 2\pi(r-K(P)r^3/6).$$

Por tanto, si la curvatura es $K>0$, entonces la longitud de una circunferencia de radio r es $l<2\pi r$, y si $K<0$, entonces $l>2\pi r$.



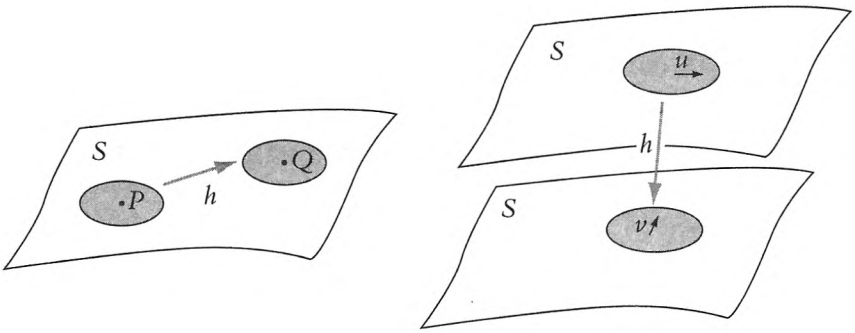
Homogeneidad e isotropía

Volvamos a Planilandia. Los conceptos geométricos estudiados por la Escuela de Geometría son conceptos «locales», es decir, dan información a pequeña escala (en un entorno del lugar donde nos encontremos). Por esa razón había prevalecido la idea de una geometría euclidea (a pequeña escala, Planilandia parece euclidea). Sin embargo, la pregunta de la forma de Planilandia es un concepto «global», es decir, se refiere a la totalidad del espacio. Fue Rombete, cuando puso ambos conceptos juntos, el que se dio cuenta de que algo no cuadraba. Y esto le llevó a pensar que la geometría de Planilandia podía no ser euclidea.

La dicotomía local/global es de suma importancia en geometría y topología. El teorema de Gauss-Bonnet expresa un puente entre el estudio local y el global. Y permitía a Rombete y a sus colegas entender la forma global de Planilandia sin recorrer todo su mundo. El cálculo de la característica de Euler-Poincaré ahora se había traducido por el cálculo de la curvatura media. Claro que la curvatura media exige calcular la curvatura en todos los lugares y luego hallar la media, lo que nos lleva de nuevo al problema de recorrer toda Planilandia. Pero... ¿no es lógico suponer que la curvatura es uniforme? En este caso, la curvatura es siempre constante y la media es «esa» constante.

Para aplicar los estudios anteriores a Planilandia había dos suposiciones que surgían de forma natural:

1. La geometría de Planilandia es la misma en cualquier punto. Si dibujamos un pequeño triángulo, con lados a, b, c y ángulos α, β, γ, y nos movemos a otro punto, podemos transportar ese triángulo de manera que preserve la medida de sus lados y ángulos. Lo mismo debe ocurrir con cualquier otra figura, como, por ejemplo, una circunferencia de radio r. A esta propiedad se la conoce con el nombre de *homogeneidad*: si P y Q son dos puntos, hay dos entornos U y V, respectivamente, para los que hay una isometría h: $U \to V$, $h(P) = Q$. Los entornos son pequeños trozos de la superficie que se pueden entender como la zona accesible (visualmente) por un planilandés desde el punto dado.
2. La geometría de Planilandia es la misma en cualquier dirección. Si nos colocamos en un punto P y miramos en dos direcciones distintas, las figuras geométricas y sus propiedades son las mismas. Por ejemplo, si dibujamos un triángulo con vértice en P, podemos girarlo y el nuevo triángulo tiene los mismos lados y ángulos. O, por ejemplo, si dibujamos un sector circular con un ángulo y radio fijos y lo giramos, entonces la medida del sector circular es la misma. A esta propiedad se la conoce con el nombre de *isotropía* (del griego, *iso*, «mismo» y *tropía*, «giro»). Matemáticamente, si u, v son dos direcciones en P, hay un entorno U, y una isometría h: $U \to U$, $h(P) = P$, $h(u) = v$.



Una superficie homogénea y otra isotrópica.

Estos postulados son locales porque las isometrías se refieren a pequeños entornos. Es decir, se nos permite trasladar o girar pequeñas figuras. Filosóficamente, el

problema del postulado de las paralelas estribaba en el hecho de que se suponía que las figuras se podían hacer «infinitamente grandes» (extender las rectas indefinidamente). De alguna forma, es un problema con el «infinito». Ahora postulamos cosas sobre pequeñas regiones del mundo, y no debería surgir este problema.

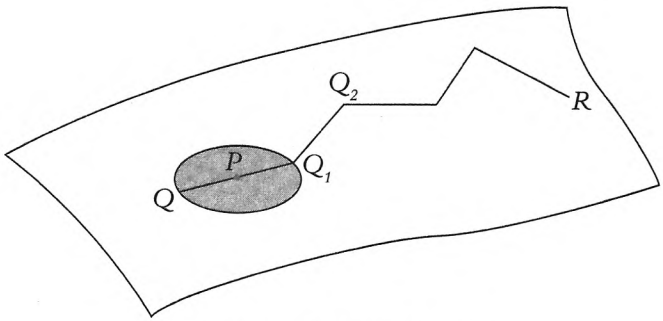
Las suposiciones de homogeneidad e isotropía se refieren a «toda» Planilandia (incluso a las zonas no visitadas). Estos dos postulados no se pueden comprobar en la práctica a menos que se viaje por todo el territorio (en cuyo caso el problema de la forma de Planilandia ya estaría resuelto). Pero son postulados muy razonables, habían sido comprobados en todas las zonas visitadas, y filosóficamente tienen mucho sentido: se supone que el estudio de la geometría será idéntico en todo el espacio.

Además, seguimos pudiendo realizar las operaciones de trasladar figuras (traslaciones) y de girarlas (rotaciones), de las que disponíamos en el espacio euclideo. La única operación que teníamos en el espacio euclideo que ahora no tendremos a nuestra disposición es la de la *homotecia*. La homotecia permite dibujar una figura «semejante» a otra dada pero de distinto tamaño (mantener los ángulos y multiplicar las distancias por un factor). Esta operación no está a nuestra disposición porque no queremos permitir que se agrande una figura indefinidamente. Recordemos que en la esfera, las áreas de los triángulos no podían hacerse todo lo grande que quisiéramos. De hecho, la existencia de homotecias es equivalente al postulado de las paralelas.

Miremos ahora las premisas 1 y 2 con más cuidado. El primer postulado implica que la curvatura coincide en P y en Q. Como esta propiedad pasa para todo par de puntos, tenemos que $K(P) = K(Q)$ para todos los puntos P, Q. Por tanto, la curvatura es constante e igual en todas partes $K(P) = K_0$, donde K_0 es una constante.

Cuando la curvatura es constante, el espacio se ve igual en todos los puntos. De hecho, también se ve igual en todas las direcciones, y la segunda propiedad se sigue de la primera.

También podemos deducir la primera propiedad de la segunda. Supongamos que una superficie se ve igual en cualquier dirección. Tomemos dos puntos cercanos Q, R y sea P el punto medio del segmento que los une. El espacio se ve igual en cualquier dirección desde P; por tanto, hay una isometría $h: U \to U$, $h(P) = P$, $h(u) = v$, con u apuntando a Q y v apuntando a R. Por tanto, $h(Q) = R$. Esto da la homogeneidad (cuando los puntos estén más alejados, los vamos llevando en varios pasos: de Q a Q_1, de Q_1 a Q_2, y así sucesivamente hasta llegar a R).



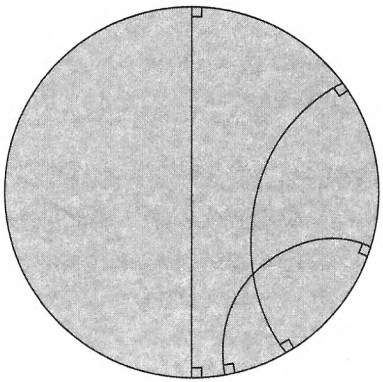
La isotropía implica la homogeneidad.

Geometría hiperbólica

A todo este estudio geométrico había llegado Rombete, en su despacho, en solitario, y sin participar en ninguna expedición. ¡Para que luego digan que los matemáticos no viajan! Lo hacen por los mundos de las ideas, donde también se encuentran soluciones a los interrogantes.

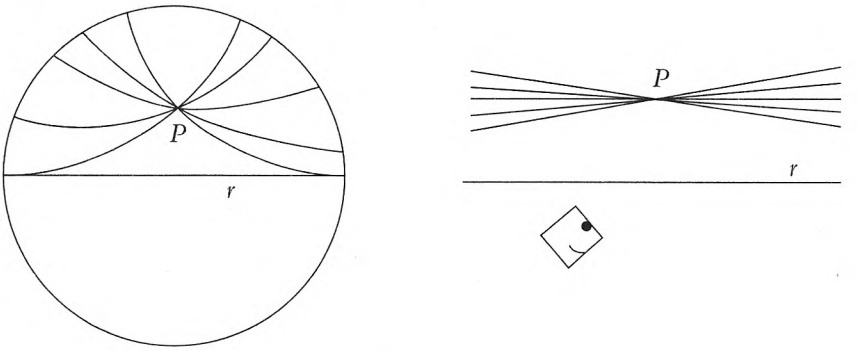
El siguiente paso era natural: la geometría de Planilandia debía ser de curvatura constante. El caso $K=0$ era el plano euclideo, y el caso $K>0$ era la esfera, que Rombete había estudiado con tanto detalle. Pero ¿qué ocurriría si $K<0$?

La geometría hiperbólica es aquella que se desarrolla en una superficie con curvatura constante negativa; se suele tomar $K=-1$. También tiene un modelo con el que los planilandeses pueden trabajar, similar al de la esfera que estudió Rombete: se denomina disco de Poincaré, y en él las geodésicas (las «rectas» de la superficie) son los diámetros del disco y los arcos de circunferencia perpendiculares al borde.



Varias rectas del disco de Poincaré.

En esta geometría, por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas («paralelas» quiere decir «que no la cortan»). Hay dos rectas «límite», que son las que cortan a la recta en el borde (pero el borde no pertenece al disco, así que no la cortan). Por tanto, el postulado de las paralelas falla por un motivo distinto al de la esfera: sí que hay paralelas, pero no son únicas.

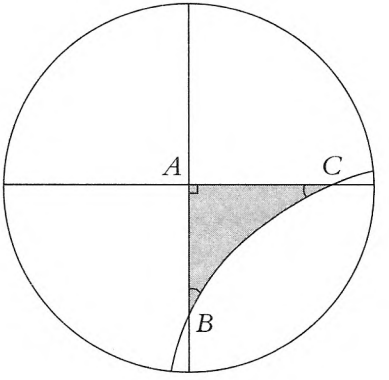


Hay todo un haz de rectas paralelas a r *por un punto* P *en el plano hiperbólico.*

Si dibujamos un triángulo, vemos que los ángulos suman menos de 180°. Por ejemplo, si dibujamos un triángulo rectángulo con vértice en el centro del disco, como en la figura, vemos que $\alpha + \beta + \gamma < 180°$. Por tanto, según la fórmula

$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = \text{Área}\,(T) \cdot \text{K} \cdot 180/\pi,$$

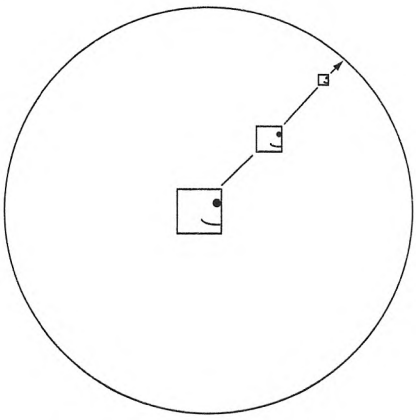
tenemos que la curvatura $K < 0$.



La suma de los ángulos del triángulo ABC *es menor de 180°.*

Una propiedad interesante es que el área del triángulo no puede ser todo lo grande que queramos (pues la suma de los ángulos es como mínimo 0° y un poquito). Por tanto, no existen homotecias que hagan los triángulos del tamaño que queramos.

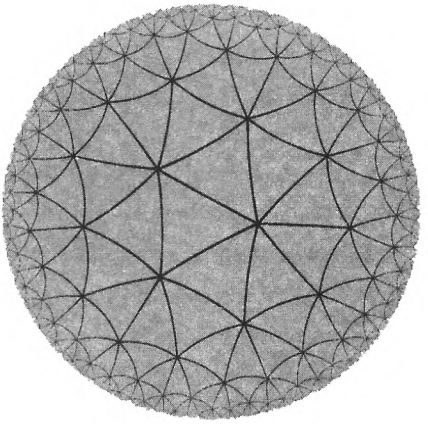
Las distancias en el disco de Poincaré están bastante deformadas. La zona hacia el borde es mucho más grande de como se percibe visualmente. De hecho, la distancia del centro al borde es infinita. Es como si hubiéramos tomado una superficie de geometría hiperbólica y la hubiéramos encogido para meterla en un dibujo en el plano (recordemos cómo habíamos abierto la esfera y la habíamos estirado para colocarla sobre el plano).



El disco de Poincaré es infinitamente grande, y no podemos llegar a su borde.

El área también es infinita. En la figura de la página siguiente tenemos una teselación con triángulos hiperbólicos, todos ellos con la misma área, ya que la suma de los ángulos siempre es la misma. De hecho, los triángulos son isométricos, tienen la misma forma. Como hay infinitos, el área total del disco de Poincaré es infinita.

El motivo de la deformación es simple: tanto el disco hiperbólico como la esfera no están dentro de un plano; cualquier dibujo plano de los mismos ha de estar forzosamente deformado. En el caso de la esfera somos conscientes de que no está en el mundo bidimensional (aunque la podemos ver en el mundo tridimensional). Los planilandeses sólo pueden entender la geometría intrínseca de la esfera, mientras que nosotros podemos entender la geometría intrínseca y la extrínseca. El caso del plano hiperbólico es más sintomático: no cabe en el mundo bidimensional de Rombete, pero ¡tampoco cabe en nuestro mundo tridimensional! Esto nos reafirma en la idea de que debemos centrar nuestro estudio en la geometría intrínseca.



Una teselación con triángulos hiperbólicos, todos ellos equiláteros y del mismo tamaño.

Geometrías de curvatura constante

Y ahora viene la pregunta realmente importante, la que nos va a decir cuál es la forma de Planilandia: ¿cuáles son las superficies de curvatura constante? Como conocemos las superficies topológicamente, la pregunta en realidad es: ¿cuáles de las superficies (compactas, orientables y sin borde) tienen una geometría de curvatura constante?

Teorema: Las superficies compactas, orientables y sin borde de curvatura constante son las siguientes:

Curvatura	Superficie
$K>0$	Esfera
$K=0$	Toro
$K<0$	Superficie de género $g\geq 2$

Si la curvatura de una superficie es constante $K=K_0$, entonces el valor medio de la curvatura coincide con esa constante, $K_m=K_0$. El teorema de Gauss-Bonnet dice que

$$2\pi\chi(S)=\text{Área}\,(S)\cdot K_0.$$

No conocemos el área de S porque ésa es una información global, pero al menos podemos determinar el signo. Hay tres opciones:

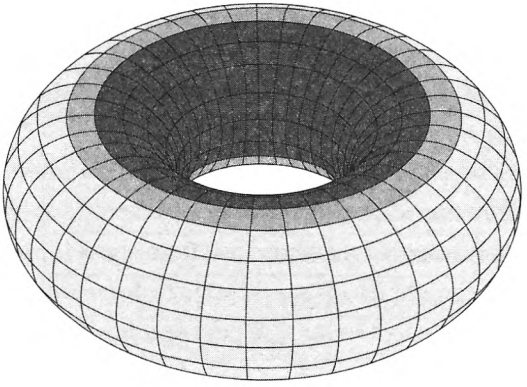
— $K_0 > 0$ y $\chi(S) > 0$. La única posibilidad de superficie con característica de Euler-Poincaré positiva es la esfera.

— $K_0 = 0$ y $\chi(S) = 0$. La única superficie con característica de Euler-Poincaré cero es el toro.

— $K_0 < 0$ y $\chi(S) < 0$. Las superficies de género $g \geq 2$ tienen $\chi(S) = 2 - 2g < 0$.

En realidad esto no garantiza que dichas superficies tengan geometrías de curvatura constante. Sólo nos está diciendo que, de tenerlas, el género se distribuye en una de esas tres opciones, dependiendo del signo de la curvatura. Además, está claro que hay geometrías de curvatura no constante, como, por ejemplo, la esfera deformada de la pág. 98.

Es más, ninguna superficie en el espacio tridimensional, con excepción de la esfera, tiene curvatura constante. Ciertamente, una superficie (compacta sin borde) de $\mathbb{R}^3$ siempre tiene puntos de curvatura positiva (por ejemplo, el punto más alejado del origen de coordenadas tiene curvatura positiva). Si la superficie S no es una esfera, entonces $\chi(S) \leq 0$, luego la curvatura media es $K_m \leq 0$. Por tanto, ha de haber puntos de curvatura negativa, y a posteriori también los habrá de curvatura cero.



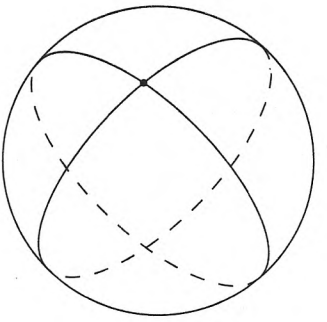
Una superficie coloreada. Tenemos las regiones de curvatura positiva y de curvatura negativa, y están separadas por una línea consistente de los puntos de curvatura cero.

Por tanto, para construir geometrías con curvatura constante en una superficie ¡tenemos que recurrir a la geometría intrínseca! Veamos cada uno de los tres casos por separado.

La esfera

Éste es el caso más fácil. La esfera de radio 1 dentro del espacio tridimensional tiene una geometría con curvatura $K=1$, es decir, curvatura constante y positiva.

Para comprobar que $K=1$, nos colocamos en un punto P. Al desplazarnos en una dirección, seguimos una circunferencia de radio 1 dentro de esa esfera, su radio de curvatura es $R=1$ y, por tanto, la curvatura direccional es $1/R=1$. Así obtenemos las curvaturas principales $k_1=1$, $k_2=1$. Y, finalmente, la curvatura de Gauss, $K=k_1\cdot k_2=1$.



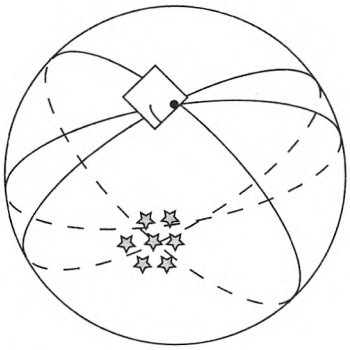
La geometría en la esfera se denomina *geometría esférica*, y Riemann fue el primero que la estudió. Las «rectas» (es decir, las geodésicas) son circunferencias máximas (circunferencias de radio 1 cuyo centro coincide con el centro de la esfera). En este caso, las rectas son ilimitadas pero finitas: dos rectas siempre se cortan (en dos puntos), violando el postulado de las paralelas. En un triángulo, la suma de sus ángulos es mayor de 180°.

La geometría esférica es homogénea e isótropa: cualquier figura en la superficie esférica se puede «trasladar» a cualquier otro lugar de la esfera, y girar en cualquier dirección. Para ello, basta hacer rodar la esfera manteniendo su centro fijo; la figura se moverá manteniendo intactos sus ángulos y distancias internos.

Comprobemos el teorema de Gauss-Bonnet. El área de la esfera es $4\pi r^2=4\pi$. La característica de Euler-Poincaré es $\chi(S)=2$. Como $2\pi\chi(S)=K_0\cdot$ Área (S), tenemos que $4\pi=4\pi K_0$, luego la curvatura es $K_0=1$.

Un detalle interesante que queremos hacer notar es el siguiente. Supongamos por una vez que Rombete no es miope, que puede ver a gran distancia. Los rayos de luz siguen las geodésicas, como es lógico. Entonces, cualquier objeto colocado en la antípoda de Rombete, ¡éste lo ve en todas direcciones! Es como si estuviese

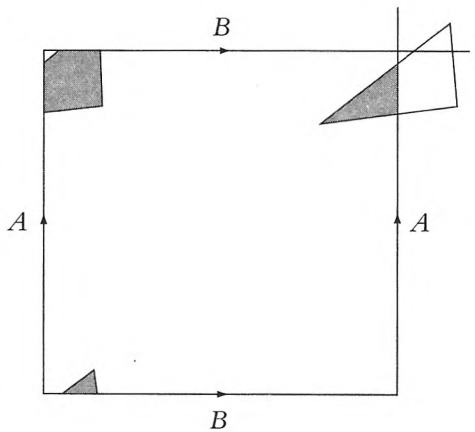
extendido (desparramado) por todo su campo visual (a una distancia d igual a la longitud de la semicircunferencia máxima).



Cuadradina ve un cielo estrellado en todas direcciones.

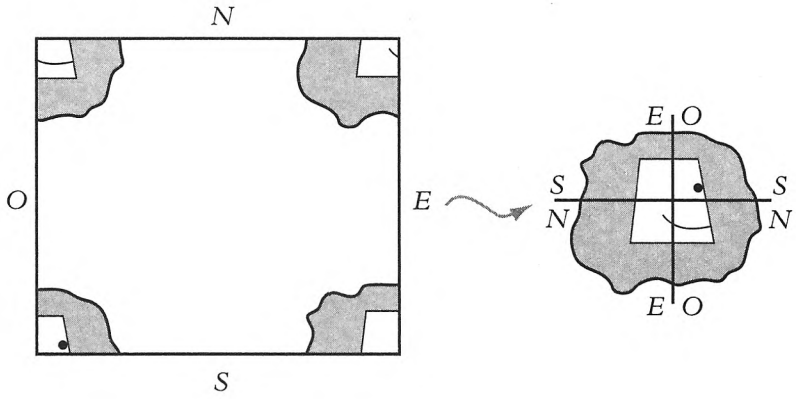
El toro

El plano euclideo tiene una curvatura $K=0$. En él, los triángulos tienen ángulos que suman 180°, y las circunferencias tienen longitud $l=2\pi r$. Ahora consideremos el toro, dado por un cuadrado cuyos lados están identificados como en la figura inferior de la pág. 52. Tomamos el cuadrado con «geometría euclidea». En esta situación, un planilandés percibe que el toro tiene geometría euclidea: ciertamente, como sólo puede ver un entorno y es indistinguible de un entorno en el plano, interpreta que la geometría es la del plano. Por tanto, la curvatura es $K=0$, los triángulos (pequeños) tienen ángulos que suman 180°, y las circunferencias (pequeñas) tienen longitud $l=2\pi r$.



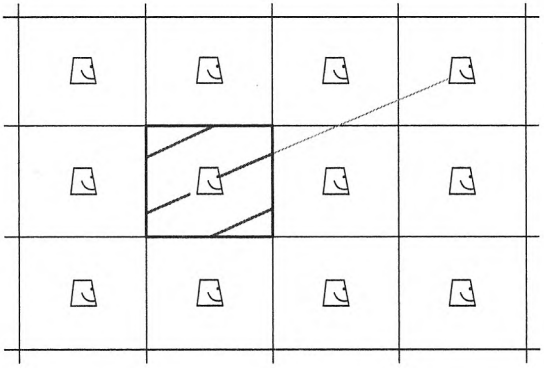
Un triángulo en el toro (de color negro). La suma de sus ángulos es 180°. Para comprobar esto, basta con transportar zonas del triángulo y recomponer un triángulo euclideo.

Es importante reseñar que el éxito de esta construcción radica en lo que ocurre cuando nos situamos en el vértice. Recordemos la figura inferior de la pág. 43:



Trapeciote, situado en el vértice, no debe de notar que ese punto tiene una geometría distinta. Para ello, el ángulo que ve a su alrededor debe ser de 360°. Lo que Trapeciote ve al situarse en el vértice está formado por cuatro regiones. Cada una de ellas aporta 90°, con lo que el ángulo global es de 360°, y la visión de Trapeciote es la de una región perfectamente euclidea.

Hasta ahora hemos estado suponiendo que los planilandeses eran «miopes» y sólo podían «ver» un pequeño entorno a su alrededor (o que Planilandia era muy grande y por eso sólo veían un pequeño trozo). Pero ¿y si la visibilidad fuera ilimitada? Los rayos de luz siguen trayectorias geodésicas. Además, cada vez que atraviesan una pared salen por la correspondiente pared que se identifica con ella. Por tanto, un rayo de luz que parte desde Trapeciote hacia la izquierda, atraviesa el lado O y retorna por el E, llegando de nuevo a Trapeciote. Éste se «ve» a sí mismo mirando hacia el este, justo delante de él, a una distancia igual a la del lado del cuadrado.

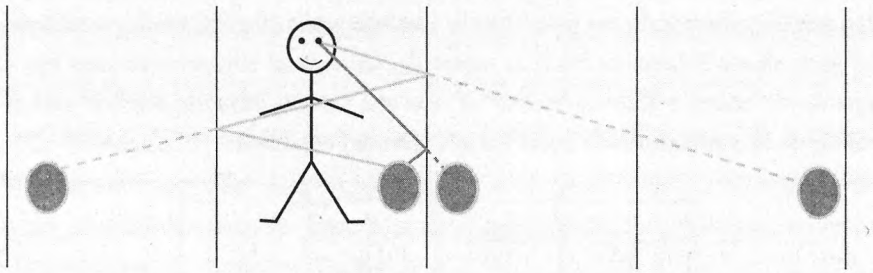


Trapeciote se mira a sí mismo. El rayo de luz describe el camino marcado en el cuadrado. Si lo desplegamos en el plano visual de Trapeciote, es una línea recta.

De hecho, Trapeciote se ve infinitas veces a sí mismo. Su campo visual se convierte en un plano, como el de la figura anterior. En él aparece repetido, aunque las imágenes de los distintos Trapeciotes están cada vez más alejadas. De hecho, puede ver cuatro copias de sí mismo que se encuentran a una distancia mínima y están en cuatro direcciones concretas: Norte, Sur, Este y Oeste.

ESPEJOS

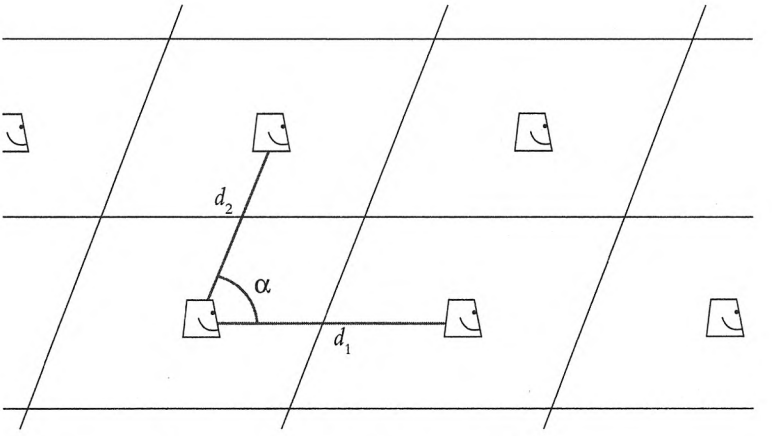
Cuando nos miramos en un espejo vemos una imagen formada con rayos de luz emitidos por nosotros mismos, pero nuestra impresión es la de que la imagen proviene de alguien que se encuentra detrás. Nuestro cerebro asume que los rayos de luz que llegan a nuestros ojos vienen siempre en línea recta, y los «continúa» desde nuestros ojos «hacia atrás», para formar la imagen al final de su supuesto lugar de emisión. Este proceso de reconstrucción visual es completamente inconsciente, y está diseñado por la evolución, adaptado a un mundo natural donde no suele haber espejos. El que veamos una imagen detrás de un espejo aunque no la haya es un «fallo» de este sistema, una situación donde la respuesta es anómala. Si colocamos dos espejos en paralelo, la misma imagen se ve repetidas veces, debido a las trayectorias de los rayos de luz. Nos vemos a nosotros mismos, tal como Trapeciote se ve cuando está en un toro.



Pero Trapeciote es «un solo individuo» en el toro. Si intenta acercarse a uno de esos otros Trapeciotes que ve, ellos también se mueven (del mismo modo que cuando caminamos se mueve nuestra sombra, siguiendo nuestros pasos), manteniéndose todos a la misma distancia.

La imagen de la figura inferior de la página anterior es muy clarificadora. Si entendemos el toro como un gran plano cuadriculado, donde las figuras están repetidas, cada vez que se mueve una figura para salirse de un cuadrado por la derecha,

entra una de sus copias por la izquierda, haciendo las veces de «puerta interespacial» sin tener que recurrir a una «teletransportación».[1]



El polígono fundamental es un paralelogramo.

Superficie de género $g \geq 2$

Una superficie de género g se obtiene (topológicamente) a partir de un polígono de $4g$ lados, identificando los lados de una determinada manera. Para nuestros dibujos, vamos a centrarnos en el caso de una superficie S de género $g=2$, en el que partimos de un octógono.

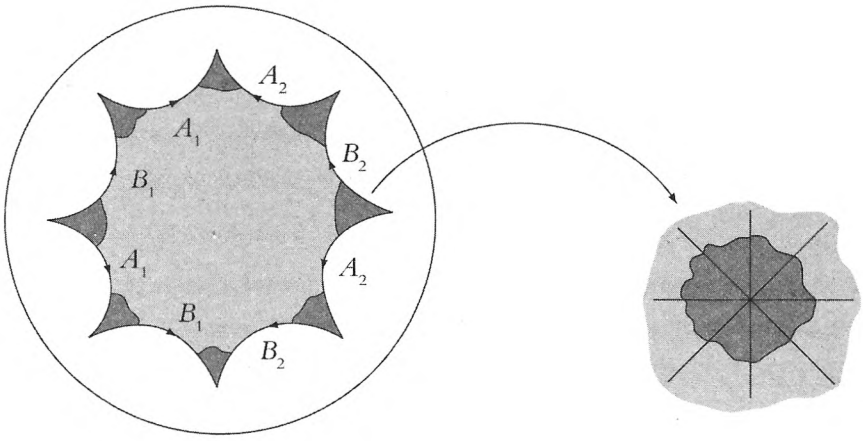
La manera de identificar los lados de un octógono es la de la figura superior de la página 72. La clave para entender qué tipo de geometría tiene S nos la da el vértice del octógono. Cualquiera que sea la geometría, si un planilandés se coloca en el vértice, ha de ver a su alrededor un ángulo de 360°. En el octógono, el entorno se distribuye en ocho porciones, como se ve en la figura anterior (véase la figura inferior de la pág. 72). Por tanto, los ángulos de estos vértices han de sumar 360°. Usemos ahora la fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos. Tenemos:

$$360 - 180\,(n-2) = K \cdot \text{Área} \cdot 180/\pi.$$

1 Para la construcción del toro, también podríamos haber comenzado con un paralelogramo. En este caso, Trapeciote vería cuatro copias de sí mismo más cercanas. Podría calcular las distancias d_1 y d_2 a esas copias (por el tamaño relativo de las figuras que ve) y el ángulo α. Estos datos dan la geometría del toro en su totalidad. El *polígono fundamental* es el paralelogramo con el que se obtiene el toro por identificación de sus lados. Toda la geometría está contenida en el polígono fundamental.

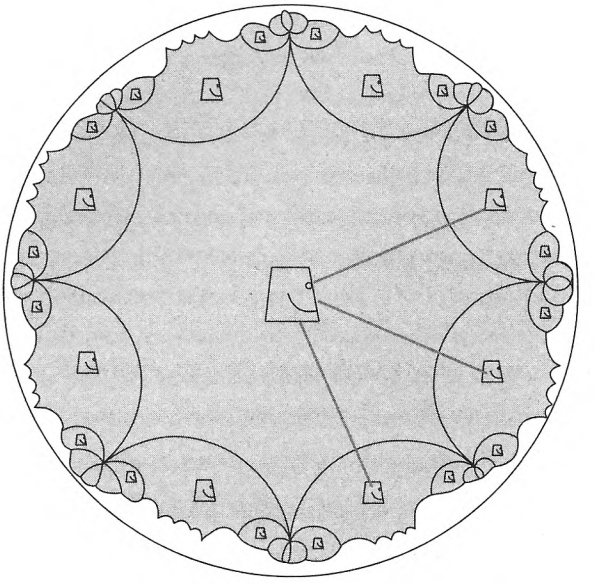
Como $n=8$, tenemos que $K\cdot\text{Área}\cdot 180/\pi$ es negativo y, por tanto, $K<0$. Es decir, el octógono ha de tener geometría hiperbólica.

Vamos a construir un octógono hiperbólico cuya suma de ángulos sea 360°. Lo más fácil es usar un octógono regular, con lados iguales y con ángulos de $360°/8 = 45°$. Dibujamos el octógono dentro del disco de Poincaré. Los ocho vértices del octógono quedan identificados (en la superficie de la figura inferior de la pág. 72 se ve que los vértices se pegan en un punto de S). Moviendo un entorno de cada uno de esos vértices al punto de S, vemos ocho sectores de 45°. Los lados que delimitan esos entornos son geodésicas, las cuales son «rectas» para un planilandés. Por tanto, Trapeciote lo ve como en el dibujo de la derecha de la figura siguiente:



Los vértices del octógono se unen para formar ocho sectores circulares, cada uno de 45°, completando así un entorno. El vértice es, por tanto, un punto «regular» de la superficie.

¿Qué ve Trapeciote si hay visibilidad infinita? Haciendo como en el caso del toro, podemos trasladar los octógonos para cubrir el plano hiperbólico. El resultado es lo que se llama una *teselación hiperbólica*. Esta teselación está formada por octógonos «iguales», todos ellos obtenidos a base de trasladar el octógono original. Ciertamente son iguales, aunque visualmente unos parecen más pequeños que otros. Esta apariencia se debe a la deformación de las medidas según nos acercamos al borde del disco de Poincaré. Todos los octógonos son regulares y tienen los lados de la misma longitud (lo cual se puede deducir del siguiente hecho claro: si dos octógonos regulares comparten un lado, entonces sus lados son iguales).



Una teselación del disco de Poincaré con octógonos regulares, todos ellos con ángulos de 45° y con lados iguales. Trapeciote se ve a sí mismo en ocho direcciones.

Trapeciote se ve a sí mismo infinitas veces, y ve ocho imágenes cercanas de sí mismo. Esto le da la información de que se trata de un octógono, y que, por tanto, el género es 2. El polígono fundamental es ahora un octógono. Y, de hecho, es un *octógono hiperbólico*. Con el polígono fundamental recuperamos la superficie y también «su geometría».[2]

¿Qué queremos decir con «geometrías»?

Cuando los geómetras hablamos de la «geometría» de un espacio, nos podemos referir a distintas cosas, dependiendo de nuestra área de especialización. Los investigadores de geometría diferencial suelen referirse a estructuras en una variedad, de las que una métrica (una «regla» para medir longitudes, ángulos y distancias) es el ejemplo paradigmático. Estas métricas pueden tener, obviamente, curvatura variable.

2 También se puede comenzar con un octógono no regular, con la única condición de que la suma de los ángulos sea 360°. De esta forma, tenemos distintas geometrías de curvatura $K<0$ en la superficie de género $g=2$. La clasificación de estas geometrías está relacionada con el estudio de estos polígonos hiperbólicos, lo que lleva a la teoría de grupos fuchsianos y a la construcción del espacio de Teichmüller.

Pero, en muchos textos, se denomina geometría a una estructura de un espacio en la que las figuras se pueden mover de un lugar a otro (copiando sus distancias y ángulos), siguiendo la interpretación del siglo XIX. Este concepto se refiere, por tanto, a estructuras métricas homogéneas. Si, además, permitimos rotar las figuras, nos estamos refiriendo al concepto más restrictivo de estructuras métricas isotrópicas. Desde este punto de vista, se obliga a la curvatura a que sea constante, y sólo hay tres tipos de geometría: la geometría euclidea ($K=0$), la geometría elíptica ($K>0$) y la geometría hiperbólica ($K<0$). Estas tres geometrías comparten la existencia de «traslaciones» y «rotaciones» (no así las «homotecias»). Recordemos que las geometrías hiperbólicas y elípticas surgieron históricamente debido al fallido intento de demostrar que el postulado de las paralelas era cierto siempre.

¿Y cómo averiguaron cómo era Planilandia?

El lector no querrá quedarse con las ganas de saber en qué quedó la historia de la forma de Planilandia. Rombete desarrolló toda la teoría de superficies de curvatura constante. Ciertamente, el tamaño de Planilandia era muy grande para tener cualquier percepción visual de imágenes repetidas de Planid. Rombete propuso un proyecto a la Escuela de Ingenieros de Telecomunicaciones de Planid, consistente en enviar señales de radio de alta frecuencia que no pudieran ser confundidas con ningún otro tipo de señal, que viajasen siempre en línea recta y que pudieran atravesar todo tipo de obstáculos, tales como muros, zonas de valles y montañas, etc., para llegar finalmente al lugar de partida.

Tras construir un sofisticado aparato que pudiera emitir y recibir estas señales, se emitieron ráfagas de las mismas y se recogieron los tiempos que tardaban en retornar (y que eran aproximadamente proporcionales a la distancia recorrida) y las direcciones por las que llegaban. Con esto pudieron reconstruir el «polígono fundamental» y así determinar el «género de Planilandia».

Capítulo 5

Topología y geometría en dimensión 3

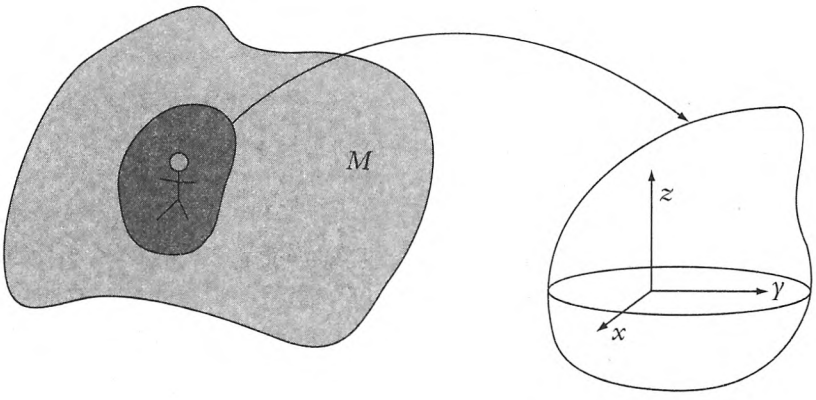
Vivimos en un mundo tridimensional, mucho más rico en posibilidades que el mundo bidimensional de Planilandia. Durante muchas páginas hemos seguido las peripecias de los planilandeses intentando entender el mundo en el que se encuentran y cómo interpretarlo. Los hemos mirado a veces por encima del hombro, desde nuestra perspectiva tridimensional en la que muchas cosas que ellos interpretan de maneras complicadas son evidentes para nosotros mediante facilísimos dibujos.

Pero este viaje nos ha enseñado una lección mucho más importante: somos un mero ser tridimensional en un mundo tridimensional, y nos cuesta comprender e interpretar el espacio en el que vivimos. Cualquier ser «tetradimensional» que nos estuviera mirando se reiría de lo que nos cuesta entender e imaginar espacios de dimensión 3. Y, si no existe tal ser, tampoco eso nos va a hacer sentir más reconfortados; ahora ya somos conscientes de nuestras limitaciones. Esta limitación sólo la podemos suplir tal y como lo hicieron en Planilandia, a través de las matemáticas, que son el lenguaje que nos ayuda a entender la geometría.

Y lo primero que hemos aprendido es que los espacios deben analizarse desde dentro, es decir, «intrínsecamente». No necesitamos suponer que hay nada fuera del espacio en el que estamos. Por un lado, porque posiblemente no haya nada más que nuestro espacio y, por otro, porque en todo caso no nos es accesible y, por tanto, no podemos ni contestar a la cuestión de su existencia ni usarlo para otros fines.

Variedades

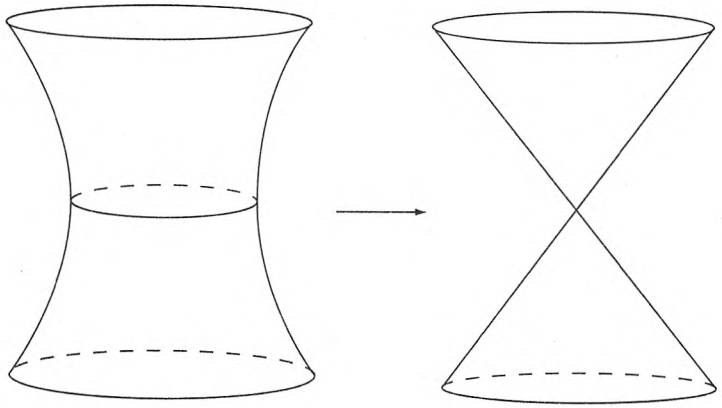
Una *variedad* de dimensión 3 es un espacio en el que, desde cualquier punto, podemos mirar a nuestro alrededor y tener la impresión de que estamos en un espacio tridimensional. La noción de «mirar a nuestro alrededor» refleja que sólo podemos ver un pequeño entorno del punto. Por tanto, un entorno de un punto es homeomorfo (tiene la misma forma) que (un entorno de) el espacio tridimensional. Los entornos del espacio tridimensional se llaman bolas (en dimensión 2 eran discos).



Un entorno de un punto en una 3-variedad.

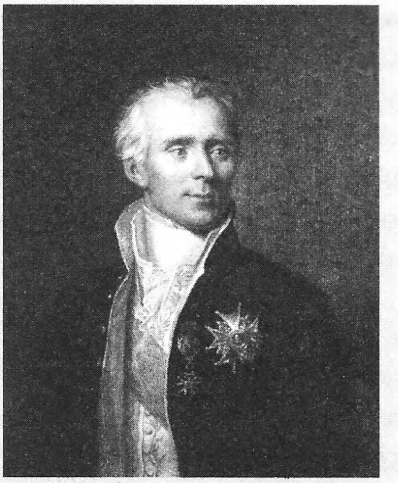
La palabra «variedad» se refiere a las «varias» direcciones en las que podemos mirar (desde cada punto). Para abreviar usaremos la expresión *3-variedad* en vez de *variedad de dimensión 3*.

A un punto que tiene un entorno homeomorfo a una bola del espacio tridimensional se le llama *punto liso*. Un punto que no es liso, también llamado *punto singular*, se presenta cuando hay zonas que han sido «estrujadas» y en las que no podemos poner coordenadas. Las variedades tienen, por definición, sólo puntos lisos. Hay toda un área de las matemáticas dedicada al estudio de los puntos singulares, la teoría de singularidades.



El punto central del cono es singular: no tiene un entorno homeomorfo a una bola del espacio euclideo.

PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827)



Laplace fue un matemático y astrónomo francés muy interesado en el estudio de la mecánica celeste. Cuenta una anécdota que Laplace presentó una edición de su libro *Mecánica celeste* a Napoleón cuando ambos viajaban a bordo del barco que los llevaba a Egipto. Alguien le había dicho a Napoleón que el libro no contenía mención alguna a Dios. Napoleón, al que le gustaba plantear preguntas comprometidas, dijo a Laplace al recibir el libro: «M. Laplace, me han comentado que ha escrito este extenso libro sobre el sistema del universo, y que no ha mencionado el nombre de su Creador». Laplace, que a pesar de ser un político muy tolerante, era muy determinado en sus convicciones, contestó seriamente: «No he necesitado en ningún momento esa hipótesis». Napoleón, agradado por la respuesta, se la comentó a Lagrange, quien exclamó: «¡Ah! Ésa es una bonita hipótesis: explica un montón de cosas».

¿Por qué consideramos sólo un entorno? Sencillamente, porque esto es lo que más se ajusta a la realidad física. El espacio geométrico es así, vivimos en una variedad de dimensión 3. Desde nuestra posición, mirando alrededor, vemos un entorno que es similar al espacio tridimensional. El universo es tan grande que la parte que vemos es una pequeñez, es decir, un entorno. Por ese motivo no es de extrañar que nuestra primera impresión fuese que el universo se trataba de un espacio euclideo.

En nuestros dibujos geométricos podemos interpretar que el habitante de la 3-variedad es «miope», que sólo ve a corta distancia, con lo cual apenas percibe un entorno suyo.

Si queremos contestar a la pregunta de la forma de nuestro universo, primero debemos entender cómo son los espacios de dimensión 3, es decir, dar una «clasificación de las 3-variedades». Luego deberíamos mirar las posibles geometrías de las 3-variedades y, finalmente, diseñar algún experimento (físico, astronómico) que nos permita averiguar cuál es la respuesta. Éste es el patrón que seguimos en los capítulos anteriores para entender los espacios bidimensionales, las 2-variedades.

Topologías en dimensión 3

Vaya por delante que los matemáticos aún no tenemos una clasificación exhaustiva y completa de las 3-variedades (compactas y sin borde). Construir una lista donde estén todas las 3-variedades no es el problema, pues hay diversos métodos para hacerlo (aunque quizás algunos no sean todo lo explícitos que podríamos desear). El problema realmente difícil es distinguir dos variedades cualesquiera de la lista, de forma que, si dos variedades resultaran ser equivalentes, entonces podríamos (y deberíamos) tachar una de ellas.

Para distinguir 3-variedades se han diseñado herramientas matemáticas a lo largo de muchos años de investigación por parte de los expertos en una rama de las matemáticas conocida como topología de baja dimensión. De hecho, el problema de distinguir la más simple de las 3-variedades, la 3-esfera, ha dado lugar a una de las conjeturas más famosas en geometría y topología, la conjetura de Poincaré, un problema que ha tardado 100 años en resolverse. La dificultad inicial para entender las 3-variedades estriba en el hecho de que nos las tenemos que imaginar estando dentro de un mundo tridimensional. Necesitamos ingeniosos métodos

LA CONJETURA DE POINCARÉ

La conjetura de Poincaré es uno de los problemas más famosos en geometría de todos los tiempos, y el que más repercusión ha tenido en el desarrollo de la geometría y la topología durante el siglo XX. Tal es su relevancia que fue incluido en la lista de los siete problemas para el nuevo milenio propuestos por el Clay Mathematics Institute (http://www.claymath.org/millennium/). Curiosamente, ha sido el primero en ser resuelto (y por ahora el único). El problema fue planteado por Henri Poincaré en 1904 y dice lo siguiente:

Si X es una 3-variedad compacta, sin borde, y todo lazo en X es trivial, entonces X es homeomorfa a la 3-esfera.

La conjetura de Poincaré se engloba en un problema más amplio: el problema de clasificación de 3-variedades (compactas, sin borde). Recordemos que el problema de clasificación consiste en dar una lista que incluya todas las 3-variedades, y en la que no haya repeticiones. La conjetura de Poincaré vendría a caracterizar la primera de las 3-variedades de la lista: la 3-esfera.

En las décadas de 1950 y 1960, varios matemáticos, algunos muy influyentes, dieron pruebas erróneas de la conjetura de Poincaré. La consecuencia fue una colección de técnicas muy potentes

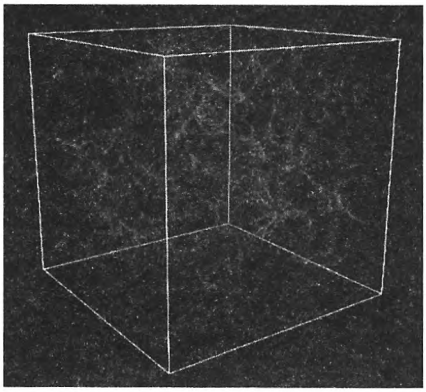
(como los que usaron Pentagón y Trapeciote para dibujar 2-variedades dentro de Planilandia) que nos permitan «ver» las 3-variedades. «Ver» un espacio de dimensión tres (o mayor) es algo que no se hace con la vista (al menos, no en el sentido en el que vemos las superficies), sino que consiste en ser capaz de contestar preguntas sobre el espacio, en hacer dibujos más o menos manipulables que nos permitan transformar un espacio en otro, y determinar si son equivalentes (homeomorfos) o si son distintos. En este capítulo queremos mostrar diversos métodos para construir y entender 3-variedades.

En primer lugar, tenemos la forma más «segura» de describir una 3-variedad, que consiste en dar un atlas con todas sus cartas. Ahora bien, una carta de un espacio de dimensión 3 no es como la página de un libro, que era lo que usábamos para los espacios de dimensión 2. En esta ocasión, necesitamos unas «páginas» 3-dimensionales. El atlas consistiría en una colección de esas cartas, en las que se dijese de qué carta a qué carta ir cada vez que saliéramos por cada uno de los «seis» puntos cardinales: adelante, atrás, a la derecha, a la izquierda, arriba y abajo. El sistema no parece muy operativo en la práctica, pero describe el espacio completamente.

que ayudaban en el problema de clasificación de las 3-variedades, y numerosos métodos de construcción de 3-variedades, tales como la cirugía, y el desarrollo de la teoría de nudos.

Fue en 2003, un siglo más tarde de que Poincaré planteara su conjetura, cuando un matemático ruso, Grigory Perelman, dio con la solución al problema. Esto le hizo merecedor de la Medalla Fields, el galardón más prestigioso en matemáticas, que se le otorgó en el Congreso Internacional de Matemáticos (Madrid, agosto de 2006). No obstante, Perelman rehusó la medalla. El 18 de marzo del 2010, el Clay Mathematics Institute le otorgó el premio del milenio por resolver el problema, dotado con un millón de dólares; Perelman también rechazó este premio.

Jules Henri Poincaré (1854-1912)



Una «carta» del «atlas» de nuestro universo. Para navegar por el espacio con naves interestelares necesitaremos este tipo de cartografía galáctica.

Para visualizar la 3-variedad, deberíamos «pegar» estas cartas, poniendo una junto a la otra, siguiendo el criterio de qué carta va unida a qué carta. Para hacer esto, algunas de ellas deberán ser estiradas o encogidas (recordemos que sólo queremos describir el espacio topológicamente). Es posible que algunos pegados no se puedan llevar a cabo por encontrarnos dentro de un espacio tridimensional, de forma similar a lo que ocurrió con la botella de Klein de la figura inferior de la pág. 59 (seguramente un ser tetradimensional no tendría estas dificultades). Nuestra solución es «hacer como si» estuvieran ya pegadas. ¡Y funciona!

Por ejemplo, una vez descrito el espacio con un atlas, podemos contar el número de vértices V, el número de aristas A, el número de caras C. Y ahora también tenemos el número de bloques de dimensión 3, que llamaremos B. La característica de Euler-Poincaré es

$$\chi = V - A + C - B.$$

Desafortunadamente, esta vez χ no nos da mucha información. Para cualquier 3-variedad compacta y sin borde, $\chi = 0$.

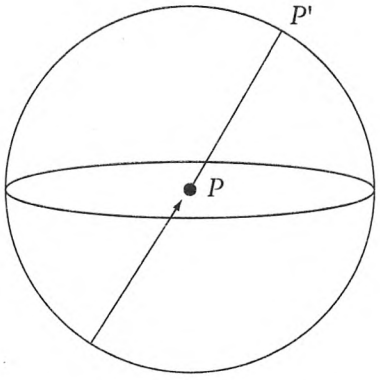
La 3-esfera

Empezamos ahora con los ejemplos más sencillos. En primer lugar, tenemos la 3-esfera. Según su definición matemática, es el conjunto de puntos a una distancia fija R del origen de coordenadas dentro del espacio 4-dimensional euclideo. Esto no es muy útil, dado que no es fácil imaginarse el espacio 4-dimensional. Pero, además,

éste no es el camino que queremos usar, pues no queremos ver las 3-variedades inmersas en un espacio mayor, sino entenderlas en sí mismas.

Describamos la 3-esfera de otra manera, a través de sus propiedades. Si nos situamos en un punto P de la 3-esfera y viajamos en línea recta, al cabo de un tiempo, cuando hayamos recorrido una distancia d, nos encontraremos en un punto llamado *antípoda*, P', que es el punto más alejado de P. A partir de ese momento, siempre continuando nuestro viaje en línea recta, nos acercaremos de nuevo al punto de partida, regresando por la dirección opuesta. Llegamos finalmente a P tras recorrer una distancia total $2d$. Este fenómeno pasa yendo en cualquier dirección y partiendo desde cualquier punto.

Para describir este espacio, dibujamos una «bola» de radio d y en su centro, el punto P. Una bola es el interior de una esfera usual en el espacio tridimensional. Cuando viajamos desde P en una dirección dada y llegamos al borde, aparecemos por el punto del borde opuesto al punto de entrada. De hecho, interpretamos que cualquier punto del borde es la antípoda P' de P. Por tanto, estamos identificando todo el borde a un solo punto de la 3-esfera.

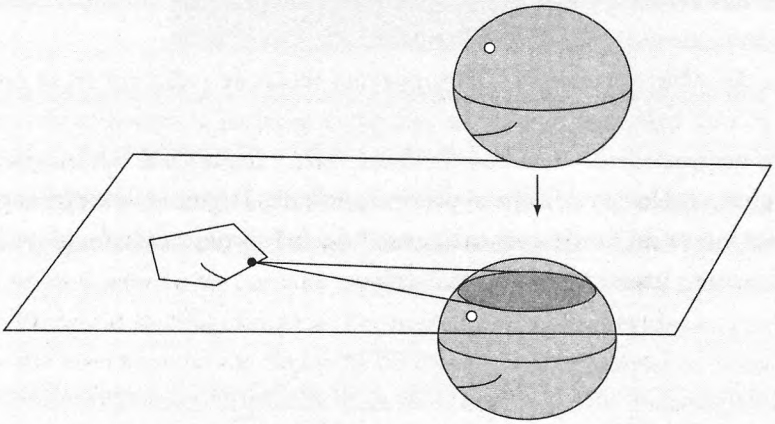


Viaje en línea recta sobre la 3-esfera.

Lo habitual es pensar en la 3-variedad como un espacio «muy extenso» en comparación con el habitante, que sólo tendría acceso a un pequeño entorno del mismo. Pero supongamos que la visibilidad en la 3-variedad nos permite ver todo el espacio. En ese caso, dado que los rayos de luz viajan en línea recta, es decir, siguiendo geodésicas, podríamos ver la antípoda. De hecho, la veríamos en cualquier dirección que mirásemos. Por tanto, en nuestra bóveda celeste podríamos percibir, «en cualquier dirección», un objeto celeste fijo, que estaría «esparcido» de alguna manera.

LA 3-ESFERA Y LA CUARTA DIMENSIÓN

Podemos imaginarnos objetos en la cuarta dimensión. De nuevo, recurrimos a Planilandia para aprender cómo hacer esto. Un planilandés puede «ver» una 2-esfera de la siguiente guisa: la 2-esfera viaja de arriba abajo cruzando Planilandia. El planilandés ve sus secciones (los cortes de la esfera con el plano): primero vería un punto, que crece con forma de circunferencia hasta llegar a tener un diámetro máximo, para luego pasar a decrecer y, cuando es de nuevo un punto, desaparecer.

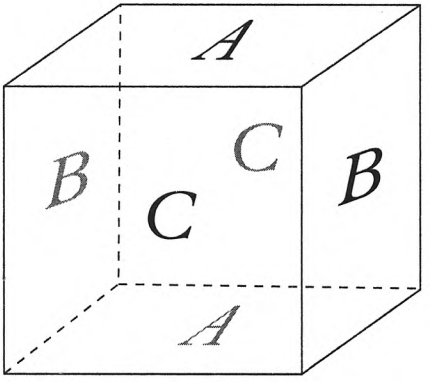


Ahora, si interpretamos que estamos en nuestro espacio de 3 dimensiones y que una 3-esfera dentro del espacio de 4 dimensiones nos visita, esta 3-esfera puede moverse de «arriba» «abajo» (en una dirección incomprensible para nosotros, pues sólo existe como cuarta dimensión). Lo que nosotros veríamos sería lo siguiente: un punto aparece y se convierte en una pequeña esferita, la cual va creciendo hasta llegar a un tamaño máximo. Después la esfera decrece, hasta transformarse en un punto y desaparecer.

Todo objeto en el espacio tetradimensional se puede entender a través de sus secciones.

El 3-toro

Supongamos que tenemos un cubo como el de la figura siguiente, de tal forma que cuando nos movemos hacia arriba y cruzamos la cara A, aparecemos por la cara A de abajo. Del mismo modo, si vamos hacia la derecha y cruzamos la cara B, aparecemos por la cara B de la izquierda. Y, finalmente, si nos movemos hacia el fondo, al cruzar la cara C aparecemos por la cara C frontal.

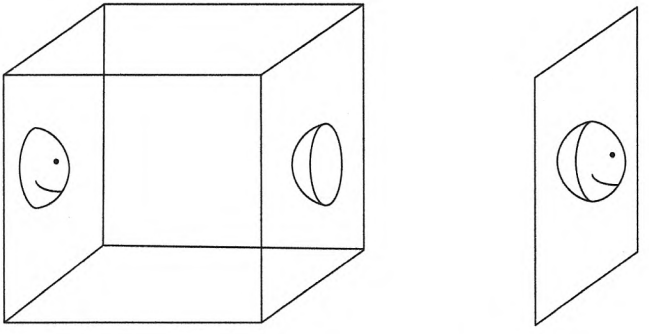


Un cubo con caras identificadas a pares.

Nos encontraríamos en una 3-variedad compacta y sin borde, a la que llamamos 3-toro por su analogía con el toro 2-dimensional de la figura inferior de la pág. 52. Las caras están identificadas (pegadas) cuando tienen la misma letra.

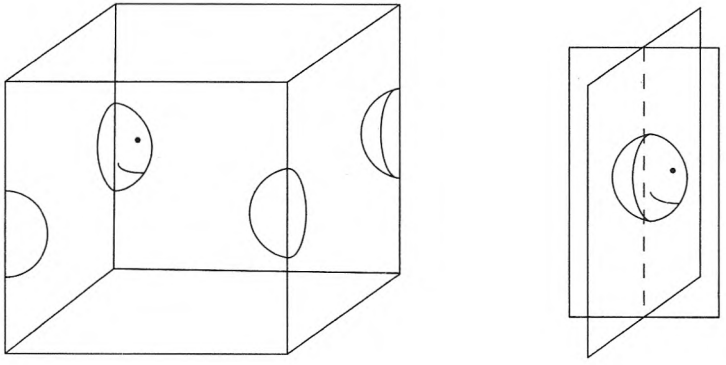
Para que el 3-toro sea una 3-variedad, necesitamos comprobar que no ocurre nada raro en los lugares de pegado, es decir, que las identificaciones se realizan de tal manera que la propiedad de que «localmente tenemos un entorno homeomorfo a un entorno del espacio tridimensional» también se verifica si nos colocamos «en mitad de» una cara, o de una arista, o de un vértice.

Veamos qué ocurre en cada uno de estos casos. Si nos colocamos en mitad de una cara, es decir, si estamos atravesando la cara *B*, entonces la mitad de nosotros está a la derecha y la otra mitad, a la izquierda. Lo que vemos a nuestro alrededor, un entorno, está formado por dos semibolas que, pegadas (con la identificación), nos dan una bola tridimensional (homeomorfa a la usual).



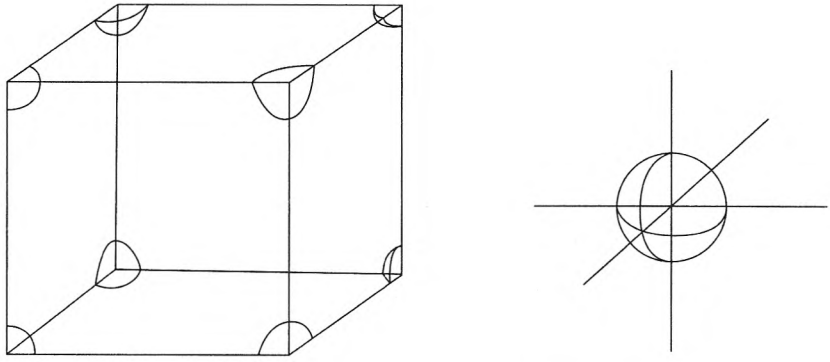
Una esferita caminando hacia la cara derecha del 3-toro.

Si nos colocamos en una arista, por ejemplo, en la que delimitan las caras B y C, tenemos cuatro trozos distintos que, una vez pegados con la identificación, nos dan un entorno homeomorfo a una bola tridimensional.



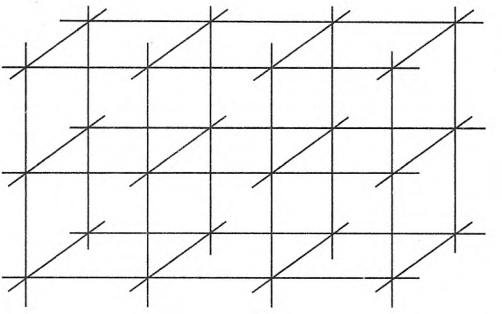
La esferita se coloca ahora en una arista del 3-toro.

Finalmente, los ocho vértices del cubo se identifican con un solo punto. De hecho, en el 3-toro, «son» el mismo punto. Los entornos de estos vértices «encajan» perfectamente para formar una bola tridimensional.



La esferita se coloca en el vértice. Tiene su cuerpo «repartido» por ocho zonas del cubo, pero la sensación que tiene es la de estar en un punto liso de una 3-variedad.

Las caras, las aristas y los vértices de los cubos encajan geométricamente. La manera de comprobar esto de forma fehaciente es «teselar» el espacio tridimensional con cubos.

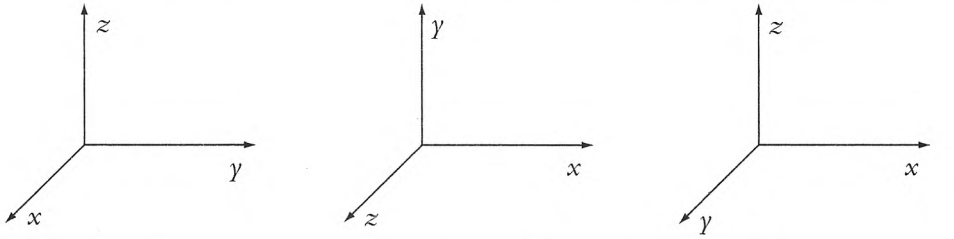


Colocamos infinitas copias del cubo, pegando sus caras según las reglas de pegado del cubo original. Todas ellas teselan (recubren) el espacio tridimensional euclideo usual.

Ahora nos podemos colocar en una cara, arista o vértice y comprobar que el 3-toro es una 3-variedad en dicho punto. La identificación de caras consiste ahora en decir que: «nos situemos en cualquiera de los cubos (de la figura anterior) que nos situemos, es como si estuviéramos en el cubo inicial». Si estuviésemos en un 3-toro con una visibilidad ilimitada, veríamos infinitas copias de nosotros mismos, tanto delante como detrás, arriba y abajo, y a derecha e izquierda. Seis de estas copias son las más cercanas; las demás se disponen a mayor distancia.

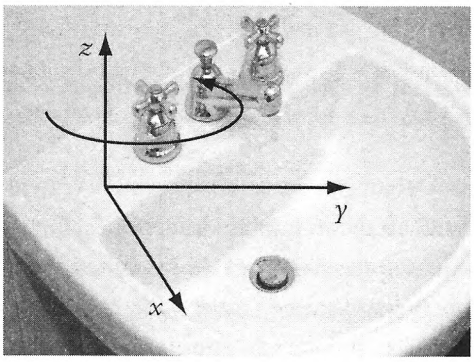
Orientabilidad

En el espacio de dimensión 3 también tenemos una orientación. En este caso viene dada por una ordenación de los tres ejes x, y, z. Podemos entender la orientación como la distinción entre la izquierda y la derecha. Hay dos orientaciones, la *positiva* y la *negativa*. En la orientación positiva, si nos situamos de pie, con el eje z apuntando hacia nuestra cabeza, y el eje x apuntando hacia el frente, entonces el eje y apunta hacia la izquierda. En la orientación negativa, el eje y apuntaría hacia la derecha.



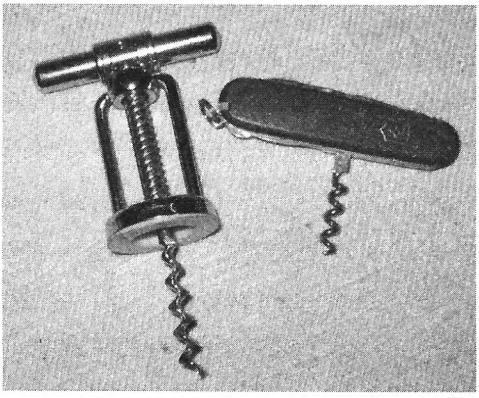
Las dos primeras referencias cartesianas tienen orientación positiva, mientras que la tercera tiene orientación negativa.

Hay otras formas curiosas de interpretar la orientación. Por ejemplo, los grifos giran con orientación positiva. Pensemos en una pila, colocada sobre el plano xy, con un grifo de tipo clásico (de los que tienen una manivela que gira). Para abrir el grifo, giramos desde el eje x hasta el eje y. De hecho, podemos incluso notar un leve movimiento de la manivela hacia arriba (hacia el eje z), dado que un émbolo interno está abriéndose para permitir el paso del agua.



Sentido de giro para abrir un grifo.

También los sacacorchos giran en sentido positivo: cuando movemos la mano girándolos desde el eje x al eje y, extraemos el corcho, que se desplaza en la dirección del eje z.



El sacacorchos tiene forma de espiral. Esta espiral está orientada «positivamente».

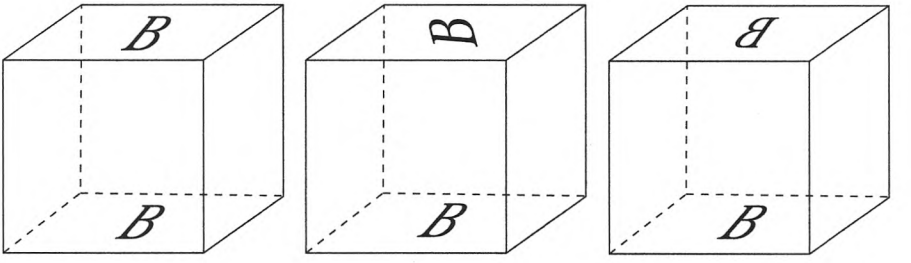
Un espacio no orientable es aquel en el que podemos viajar a lo largo de un camino y volver al punto original de forma que la orientación quede cambiada. Si nos

fuéramos de viaje a lo largo de ese camino, con un sacacorchos y un grifo en la mano, al regresar nuestro corazón estaría a la derecha, nuestro sacacorchos abriría las botellas girándolo en el sentido opuesto y el grifo también se abriría girando al revés. Es más, nosotros mismos, tras regresar, asegurariamos que nuestro sacacorchos y nuestro grifo están bien, y que son todos los demás sacacorchos y grifos, los que se quedaron aquí antes de nuestro viaje, los que ahora giran al revés. Claro que, al levantar nuestra mano izquierda, los demás verían la derecha, y al levantar ellos su mano izquierda, nosotros veríamos que levantan la derecha. El mundo a través del espejo...

Por último, veamos que si el espacio es no orientable, entonces el lazo (o los lazos) que reversa la orientación no es trivial, es decir, rodea un agujero. Ciertamente, si fuera trivial podríamos recoger el lazo moviéndolo hasta que lo tuviéramos en las manos. El lazo original da la vuelta a la orientación, y esta propiedad se mantiene cuando vamos moviéndolo a lo largo de nuestro espacio. Justo antes de terminar de recogerlo tendríamos un pequeño lazo que podríamos poner sobre una mesa y que daría la vuelta a la orientación. Esto es absurdo: ¿cómo va a convertirse un sacacorchos en su imagen especular sólo por moverlo haciendo un círculo sobre una mesa?

La 3-botella de Klein

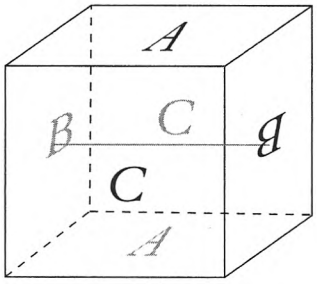
Al describir el 3-toro, hemos marcado el pegado de los lados del cuadrado en la figura superior de la pág. 123 con pares de letras. En el caso bidimensional, pegábamos los lados dibujando una flecha. No obstante, había dos maneras de pegar, dependiendo de cómo colocáramos las flechas. En el caso tridimensional, las caras son polígonos bidimensionales (cuadrados en este caso), y se pueden pegar de múltiples formas, dado que se pueden rotar y también se pueden «invertir» (dar la vuelta con una simetría que cambie la orientación de la cara). Por ello, las letras en las caras no sólo identifican qué caras pegamos, sino la posición en la que las debemos pegar.



Diversas maneras de pegar dos caras.

Marcaremos con una letra las caras que vamos a pegar y las colocaremos en una posición que indique «cómo» pegarlas: en la identificación siempre deben coincidir las letras de manera exacta. En el cubo de la izquierda de la figura de la página anterior, si cruzamos la cara de arriba, aparecemos por debajo en la misma posición. En el cubo central, al cruzar por arriba aparecemos por debajo girados 90° en sentido horario. Finalmente, en el cubo de la derecha, al cruzar por arriba aparecemos por debajo con la parte de la derecha a la izquierda, y la de la izquierda, a la derecha: ¡aparecemos invertidos!

La 3-botella de Klein es el análogo a la botella de Klein y se consigue con la siguiente identificación en el cubo:



La 3-botella de Klein.

Es una 3-variedad no orientable. Si caminamos a lo largo del lazo de la figura anterior, regresamos a la posición original con la orientación invertida. Obviamente, al recorrerlo una segunda vez recuperamos la orientación original.

Hay muchas otras posibilidades de pegado, aparte de la figura anterior y la de la pág. 123, que nos dan 3-variedades orientables y no orientables a partir de un cubo. Hay toda una teoría matemática, conocida bajo el nombre de grupos de Bieberbach, dedicada a estudiar estas 3-variedades.

Puertas interespaciales y pegado de asas

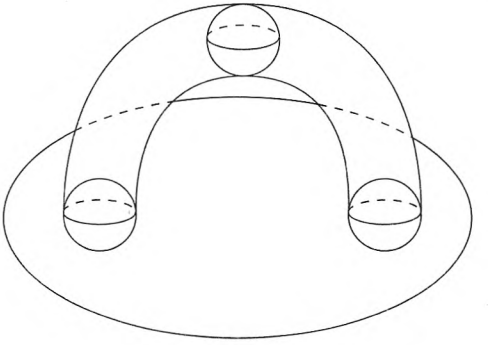
Una *puerta interespacial* es un lugar del espacio por el que podemos entrar para después salir por otro lugar distinto. Como truco cinematográfico es ideal para permitir viajes interestelares. Nosotros lo vamos a usar matemáticamente para «pegar un asa» a una variedad.

Podemos pensar el proceso de dos formas distintas, pero equivalentes topológicamente. La primera forma consiste en identificar una zona A del espacio con otra

zona B. Elegimos dos pequeñas bolas, cuyos bordes serán las zonas de entrada y salida, A y B, de una puerta interespacial. Podemos entrar por A en cualquier dirección y saldremos por el correspondiente punto de B.

Puertas interespaciales en una 3-variedad.

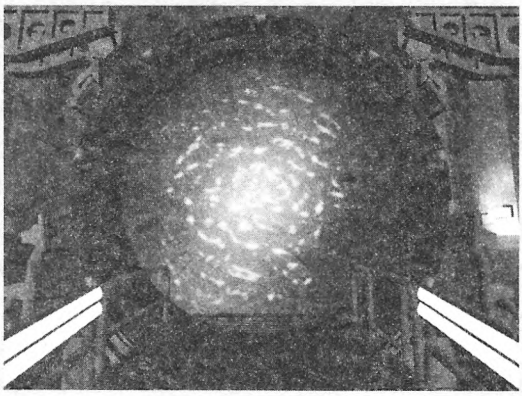
La segunda forma de realizar un pegado de asas consiste en disponer un «asa» a lo largo del espacio uniendo A con B. La «pequeña» pega es que el asa no nos cabe en nuestro espacio (recordemos lo que ocurría al pegar asas a las superficies). Luego necesitamos hacer uso de algo de espacio extra, tomándolo prestado de la cuarta dimensión. La cuarta dimensión no se refiere al espacio-tiempo: es una cuarta dimensión espacial que tiene una dirección extra u, con lo que las coordenadas ahora son x, y, z, u. Esta cuarta dimensión no tiene entidad física (no existe en la realidad, o si existe no la podemos detectar, con lo cual es como si no existiese). Pero la podemos usar como un artefacto matemático. De esta forma, el espacio de nuestra 3-variedad tiene tres coordenadas (locales) x, y, z, siendo la coordenada $u = 0$. Cuando nos movemos fuera de la 3-variedad, u deja de valer 0. Ahora, a pegar el asa: empezamos con la esfera A; la levantamos en la cuarta dimensión un poquito, con lo que ahora hay una esfera con $u > 0$; movemos esta esfera (es decir, movemos espacialmente x, y, z) hasta que la colocamos sobre B; finalmente, bajamos la coordenada u hasta tener $u = 0$, con lo que acabamos en B. Un viaje a través del asa es como un viaje a través de la cuarta dimensión, ¡realmente ciencia ficción!



Pegado de un asa a una 3-variedad.

STARGATE

La película de ciencia ficción *Stargate*, estrenada en 1994, gira en torno a una puerta interestelar que sirve para viajar a otras zonas del universo, a otros planetas de otros sistemas solares, simplemente atravesándola. La forma de regresar es la misma: cruzar la puerta interestelar en la dirección opuesta. A la película inicial le han seguido otras dos, y hay dos más en proyecto. También se han realizado tres series de televisión con más de 350 capítulos, aparte de aparecer en libros, cómics y juegos de ordenador.



Sumas conexas

Un ejemplo particular de pegado de asas tiene lugar cuando tenemos la siguiente situación. Sean S_1 y S_2 dos variedades de dimensión 3, y consideremos dos zonas, B_1 en S_1 y B_2 en S_2, que pegamos con el proceso anterior. Esto nos da una nueva 3-variedad, a la que llamamos *suma conexa* de las variedades dadas. Se le llama suma conexa porque es una forma de unir las dos variedades, obteniendo algo que está conectado. Ciertamente, ahora podemos ir de S_1 a S_2 y viceversa a través de la zona de pegado.

Podemos imaginar la situación como si hubiese dos universos paralelos conectados a través de una puerta interespacial. Eso sí, como los puntos de la 3-variedad resultante deben ser todos lisos, no debe notarse nada especial en aquellos donde se produce la identificación, de tal forma que pasar de S_1 a S_2 se produzca sin que lo percibamos. La consecuencia de este hecho es que no podemos determinar si hay dos universos conectados o si en realidad se trata de un solo universo. Por ejemplo, la puerta de mi habitación puede ser una puerta interespacial que conecta un pe-

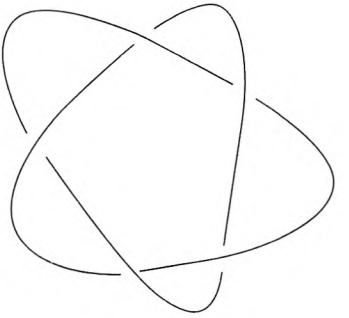
queño universo (mi habitación) con otro más grande (el resto). Al pasar de uno a otro a través de la puerta no percibo ninguna singularidad. ¿Pero no es más lógico decir que el conjunto (habitación y todo lo de fuera de la habitación) forma un todo, un único espacio?

Cirugías a lo largo de nudos

En dimensión 3 tenemos mucha más riqueza (¡y, por tanto, más complicaciones!) que en dimensión dos. Para empezar, tenemos más posibilidades de pegado de asas que las que hemos visto en la sección anterior.

En matemáticas se suele generalizar por analogías. La esfera usual, o 2-esfera, son los puntos del espacio tridimensional que están a distancia fija de uno dado. Pasando a otras dimensiones, tenemos las n-esferas. Por ejemplo, la 1-esfera son los puntos del plano a distancia fija de un punto dado, es decir, una circunferencia. La 3-esfera la hemos descrito antes. También podemos hablar de la 0-esfera, que son los puntos de la recta que se encuentran a una distancia fija de otro punto dado; por tanto, la 0-esfera son «dos puntos».

Revisemos ahora el pegado de asas que hemos descrito antes: consiste en elegir dos puntos, engordarlos y luego conectarlos identificando las esferas resultantes (véase la figura superior de la pág. 129). Por tanto, hemos elegido una 0-esfera (dos puntos). ¿Qué pasaría si en vez de elegir una 0-esfera eligiéramos una 1-esfera en la 3-variedad?

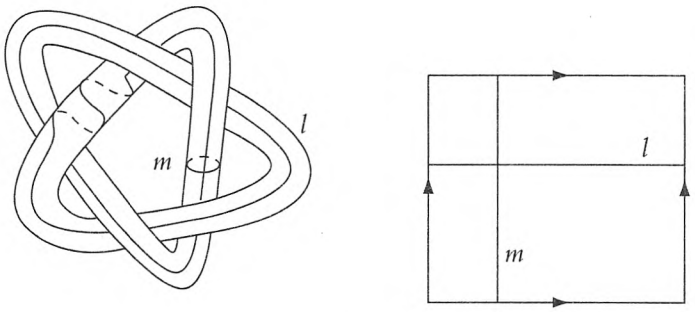


Una 1-esfera es un nudo.

Una 1-esfera es una circunferencia en la 3-variedad. Pero «una circunferencia» quiere decir «una circunferencia intrínsecamente». Es decir, tenemos un lazo en la 3-variedad, que en general puede estar anudado. La teoría de nudos se encarga de

estudiar los nudos y sus propiedades. De hecho, el problema de clasificación de nudos no está resuelto.

Ahora engordemos un poquito el nudo, con lo que obtendremos un toro sólido, es decir, un donut (con relleno). El borde del donut es la superficie, es decir, un toro. En un toro hay dos tipos de circunferencias: las que van transversalmente, llamadas *meridianos,* que son las que aparecen al engordar el nudo inicial (y desaparecerían si contrajésemos el donut al nudo), y las que van longitudinalmente, llamadas *longitudes,* y que recorren el toro siguiendo el camino del nudo inicial (de contraer el donut, las longitudes irían a parar al nudo).

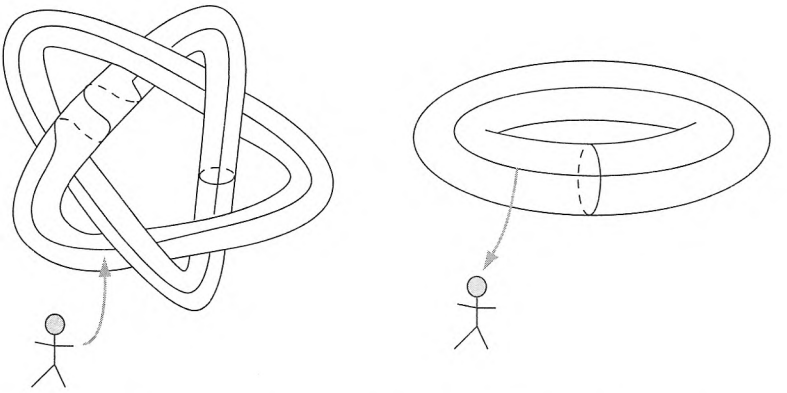


Un toro con un meridiano m *y una longitud* l.
A la derecha, aparecen en el modelo intrínseco del toro.

No hay posibilidad de elección para el meridiano: dos meridianos cualesquiera son *homótopos* (uno se puede llevar en el otro). Sin embargo, tenemos cierta libertad para elegir la longitud. Nos podemos permitir que se enrosque alrededor del nudo según lo va recorriendo longitudinalmente. Este «enroscamiento» está dado por un número entero al que se le denomina *framing,* que significa «referencia» en inglés. Una vez elegido este framing, hay una única forma de llevar el toro anudado (izquierda de la figura anterior) en el toro usual (derecha de la figura), de forma que el meridiano vaya al meridiano y la longitud, a la longitud. Con esto queremos decir que hay un homeomorfismo entre ambos con esta propiedad y que es esencialmente único (no es único, pero casi: dos posibles homeomorfismos son homótopos). El framing nos da la «referencia» necesaria para este homeomorfismo.

Ahora pasamos a realizar la *cirugía a lo largo de nudos.* Se trata de un pegado de forma similar al pegado de asas. En matemáticas se denomina cirugía a procesos de cortado y pegado (o cosido) de espacios para obtener nuevos espacios. En la situación actual tomamos dos nudos (en dos espacios o en el mismo), los engordamos y

formamos dos toros sólidos. Nos olvidamos del interior de los toros sólidos y elegimos framings. Ahora identificamos los bordes pegando longitudes con longitudes y meridianos con meridianos. El espacio resultante es una especie de suma conexa a lo largo de los toros.



Entramos por un toro y salimos por el punto correspondiente del otro toro. La «correspondencia» entre los toros hace coincidir los meridianos y las longitudes.

Las posibilidades que esto nos reporta son innumerables, principalmente porque tenemos muchos nudos a nuestra disposición. De hecho, cualquier 3-variedad se puede describir con pegados de este tipo. Si consiguiésemos describir todos los nudos, también habríamos descrito todas las 3-variedades topológicas.

Geometrías en dimensión 3

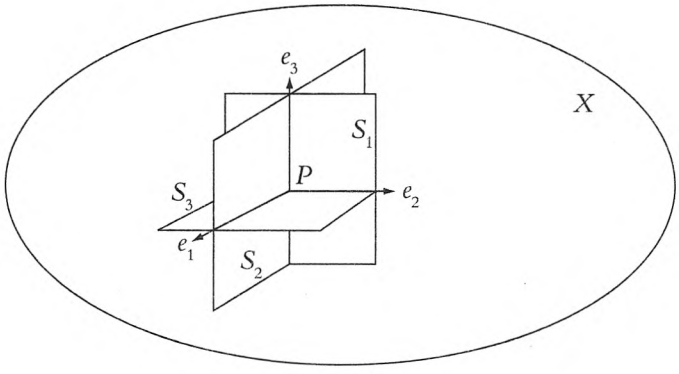
La geometría estudia las propiedades métricas de los espacios (distancias, ángulos, curvatura, etc.). En el caso bidimensional, para analizar cómo se curvaba una superficie nos era muy útil mirarla desde el espacio tridimensional. Pero también comentábamos cómo los planilandeses podían analizar la curvatura de las superficies intrínsecamente. Ahora, para analizar cómo se curvan las 3-variedades, nos sentimos como verdaderos planilandeses, ya que no podemos mirar el espacio en el que estamos inmersos desde el exterior (que no sabemos si existe, ni tenemos acceso a él).

Un ser tetradimensional que viese una 3-variedad dentro de su espacio miraría a los seres tridimensionales que allí habitamos y nos hablaría de su geometría extrínseca y de cómo puede «ver» la curvatura mirando al cenit tetradimensional. Si nos moviésemos siguiendo una trayectoria geodésica de la 3-variedad y pudiésemos

mirar hacia la «cuarta» dirección, veríamos cuánto se curva dicha trayectoria para calcular la curvatura direccional con la fórmula $k = 1/R$, donde R es el radio de curvatura. Sin embargo, como seres tridimensionales, al movernos siguiendo una geodésica y sin posibilidad de mirar fuera de la 3-variedad, no percibimos ningún efecto de «curvatura» (precisamente esto es lo que significa «geodésica»).

El ser tetradimensional nos explicaría que hay tres direcciones perpendiculares e_1, e_2, e_3 en las que las «curvaturas direccionales» son k_1, k_2, k_3, donde k_1 es la máxima, y k_3, la mínima curvatura direccional posible. Para nuestra desesperación, no hay manera de encontrar nada de esto sin su ayuda. Estos datos pertenecen a la geometría extrínseca, que sólo se ve desde fuera de la 3-variedad. Nosotros estamos dentro y sólo podemos hacer geometría intrínseca.

Lo que tenemos a nuestro alcance es lo siguiente: tracemos tres pequeños «trozos» planos en el punto P que contengan a cada pareja de dos de estas tres direcciones e_1, e_2, e_3. Un trozo plano es una pequeña superficie en la 3-variedad que contiene dos vectores en P. Está formado por geodésicas que pasan por P.



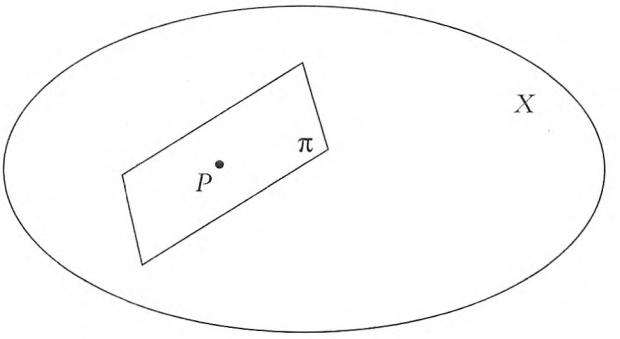
Tres trozos planos en el punto P.

Obtenemos tres superficies S_1, S_2, S_3. La superficie S_1 contiene los vectores e_2 y e_3, con curvaturas k_2 y k_3, por lo que tiene curvatura $K_1 = k_2 \cdot k_3$. Esta curvatura es un dato intrínseco. ¡La puede incluso obtener un ser plano dentro de S_1! Análogamente, la superficie S_2 tiene curvatura $K_2 = k_1 \cdot k_3$, y la superficie S_3 tiene curvatura $K_3 = k_1 \cdot k_2$. Aunque no conozcamos los números k_1, k_2, k_3, sí que conocemos $k_1 \cdot k_2$, $k_1 \cdot k_3$ y $k_2 \cdot k_3$.

El lector avispado se habrá dado cuenta de que hemos hecho un poco de trampa. ¿Cómo vamos a conocer las superficies S_1, S_2, S_3 si los vectores e_1, e_2, e_3 son extrínse-

cos? Y, sin ellas, no podremos averiguar el resto. La solución pasa por tomar «todos» los trozos planos (aunque hay infinitos de ellos) en todas las direcciones que pasen por P. A las curvaturas de los trozos planos se las denomina *curvaturas seccionales*.

Tomando todos estos trozos planos, tenemos muchos posibles valores para la curvatura seccional. Con ellos podemos recuperar $k_1 \cdot k_2$, $k_1 \cdot k_3$ y $k_2 \cdot k_3$. Por ejemplo, si los tres números k_1, k_2, k_3 son positivos, la mayor de las curvaturas seccionales es $k_1 \cdot k_2$, y la menor, $k_2 \cdot k_3$. Esto nos permite encontrar también los planos S_1 y S_3. El plano S_2 es el perpendicular a ambos, y $k_1 \cdot k_3$ se recupera al ser su curvatura.



Dado un punto P y un plano π, existe un número $K_p(\pi)$, llamado curvatura seccional, que es la curvatura del trozo plano correspondiente (y es intrínseco).

Curiosamente, con $k_1 \cdot k_2$, $k_1 \cdot k_3$ y $k_2 \cdot k_3$ se pueden obtener k_1, k_2 y k_3, al menos cuando los tres son positivos. Éste es un fenómeno que ocurre para una variedad de dimensión 3 en un espacio tetradimensional, pero no en dimensiones superiores.

Matemáticamente, la curvatura extrínseca es un fenómeno unidimensional: aparece cuando recorremos un camino y notamos (con la fuerza centrífuga) cómo éste se curva. La curvatura intrínseca es, de hecho, un fenómeno bidimensional: aparece cuando trazamos un pequeño trozo plano, y calculamos su curvatura, por ejemplo, dibujando un triángulo y sumando sus ángulos, o trazando una circunferencia y midiendo su longitud (triángulos y circunferencias, incluso dibujadas en 3-variedades, son objetos bidimensionales).

Geometrías homogéneas en tres dimensiones

En una 3-variedad en general, la curvatura puede ser variable, cambiante de punto a punto. Los espacios geométricos que nos interesan son aquellos en los que hay cier-

ta simetría. Por un lado, las propiedades de homogeneidad e isotropía, comentadas en el capítulo 4, parecen ser las más adecuadas para el problema de la forma del universo. Por otro lado, tal como comentamos al final de dicho capítulo, la terminología «geometría de un espacio» se suele referir a geometrías homogéneas, pues en ellas se pueden trasladar figuras «isométricamente». Recordemos estas nociones:

— Una 3-variedad es homogénea cuando dados dos puntos P y Q, tienen entornos que son isométricos (geométricamente equivalentes).
— Una 3-variedad es isotrópica cuando, dado cualquier punto, podemos encontrar isometrías de un entorno suyo que lleven una dirección u en otra dirección v cualquiera. Es decir, cualquier figura geométrica puede ser girada desde P para que se vea en cualquier dirección, manteniendo intactas sus propiedades geométricas.

Si una variedad es isotrópica, entonces, dado un punto P, podemos llevar (con una isometría) cualquier plano en P a cualquier otro plano en P. Por tanto, la curvatura de todos los planos en P coincide. También vimos en la figura superior de la pág. 102 que una variedad isotrópica es homogénea. Por tanto, la curvatura de los planos en un punto P y en otro punto Q también coinciden. Luego la curvatura de todos los puntos y todos los planos es una constante. Lo escribimos de la siguiente forma

$$\text{isotrópico} = \text{curvatura constante } k_0.$$

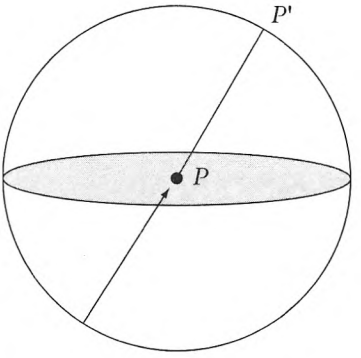
Si una variedad es homogénea pero no isotrópica, entonces, dado un punto P, planos distintos (en P) tienen distinta curvatura. Luego la curvatura es «variable» en P. Sin embargo, lo que sí ocurre es que dados dos puntos P y Q, toda la colección de curvaturas en P coincide con toda la colección de curvaturas en Q. Luego basta con conocer la colección de curvaturas en un solo punto.

Vamos a hablar un poco sobre las geometrías de las 3-variedades, comenzando por las isotrópicas. Cuando estuvimos analizando las geometrías de curvatura constante en dimensión 2, comenzamos con unos modelos, uno para cada caso:

Curvatura	Modelo	Geometría
$K>0$	Esfera	Elíptica
$K=0$	Plano euclideo	Euclidea
$K<0$	Disco de Poincaré	Hiperbólica

Los modelos están caracterizados por ser simplemente conexos (esto quiere decir que todos sus lazos son triviales). Fijada la curvatura K, sólo hay un modelo. Las demás superficies con geometrías de curvatura constante aparecían cuando sus puntos tenían entornos isométricos con uno de estos modelos. Alternativamente, aparecían teselando uno de esos modelos. En dimensión 3, también empezamos con tres modelos, que son 3-variedades simplemente conexas con curvatura constante. Las demás 3-variedades isotrópicas se obtienen a partir de ellos. A estos modelos se les conoce con el nombre de *formas espaciales*:

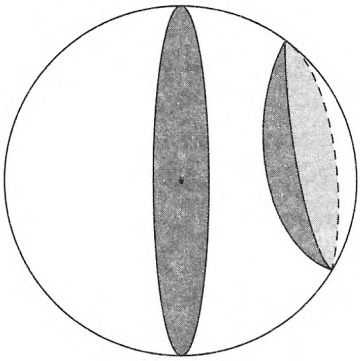
— La 3-esfera. Es simplemente conexa y tiene curvatura $K>0$. En el modelo de la figura siguiente, vemos que todas las rectas tienen una longitud fija. De hecho, si nos colocamos en el punto central y trazamos un «trozo plano», obtenemos una 2-esfera de curvatura $K=1$. Y esto pasa independientemente del plano, con lo que la curvatura es constante. La 3-esfera es compacta; de hecho, es la única forma espacial compacta.



Un viaje geodésico desde P. *Tras pasar por la antípoda, regresamos al punto de partida. La superficie de color gris es una 2-esfera dentro de la 3-esfera.*

— El espacio tridimensional euclideo. Es el espacio al que estamos acostumbrados. Las rectas y los planos son los usuales. Los planos son euclideos y tienen curvatura cero. La curvatura del espacio es, por tanto, $K=0$.
— El espacio hiperbólico. Su modelo es una bola con una métrica distorsionada, en la que el borde de la bola está de hecho a distancia infinita. Los planos del espacio hiperbólico son o bien discos que pasan por el centro de la bola (con lo cual son en realidad planos hiperbólicos), o bien trozos de esfera que cortan perpendicularmente el borde de la bola. Trazando los planos por el ori-

gen, vemos que todos tienen curvatura $K=-1$. Por tanto, la curvatura del espacio hiperbólico es constante, $K<0$.



Dos planos dentro del espacio hiperbólico. Hay muchos planos «paralelos».

Las geometrías homogéneas en dimensión 3 son ocho, como demostró William Thurston en 1982. Tres de ellas son las isotrópicas. Las otras cinco son:

— Geometría $S^2\times\mathbb{R}$. Esta geometría es elíptica en las dos primeras direcciones y euclidea en la tercera. Por tanto, $k_1=1$, $k_2=1$ y $k_3=0$. Luego las curvaturas seccionales son $K_1=0$, $K_2=0$ y $K_3=1$.

— Geometría $H^2\times\mathbb{R}$. Esta geometría es hiperbólica en las dos primeras direcciones y euclidea en la tercera. Por tanto, $k_1=1$, $k_2=-1$ y $k_3=0$. Luego las curvaturas seccionales son $K_1=0$, $K_2=0$ y $K_3=-1$.

— Otras tres geometrías, con descripciones matemáticas más complicadas, y que reciben los nombres de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, Nil y Sol. Las dos primeras son versiones torcidas de $E\times\mathbb{R}$ y $H^2\times\mathbb{R}$, donde E es el plano euclideo. La última geometría, Sol, necesita una descripción independiente.

Geometrías isotrópicas en variedades compactas

Nos interesan especialmente las 3-variedades compactas y sin borde. Desde el punto de vista físico, se corresponden con espacios finitos pero ilimitados. Desde el punto de vista matemático, la compacidad es una buena propiedad que limita posibles patologías que ocurren con variedades no compactas (por ejemplo, tener una cantidad infinita de agujeros según nos alejamos en una dirección, etc.).

En el capítulo 4 nos centramos en el estudio de las geometrías isotrópicas de las 2-variedades, y vimos que incluso ése no era un problema sencillo. La clave reside en:

— Construir un polígono fundamental con una identificación de sus caras que nos dé una 3-variedad.
— Comprobar que las aristas y los vértices del polígono fundamental «encajan» bien, para que la geometría dé puntos lisos a lo largo de aristas y vértices (al fin y al cabo, toda variedad está formada «exclusivamente» por puntos lisos). Para ello, a veces el polígono fundamental no puede ser euclideo. Entonces, ajustamos la curvatura K (que podrá ser $K<0$, $K=0$ o $K>0$) para obtener esto (para superficies siempre se podía hacer).

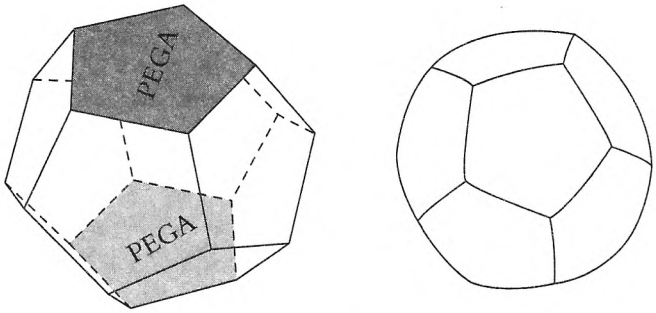
La alternativa a estos dos pasos es:

— Teselar el modelo (esfera, plano euclideo o plano hiperbólico) con polígonos fundamentales.

En dimensión 3 debemos hacer lo mismo. Sin embargo, el problema se torna realmente complicado, y a día de hoy está sin resolver, aunque se conocen muchas cosas al respecto:

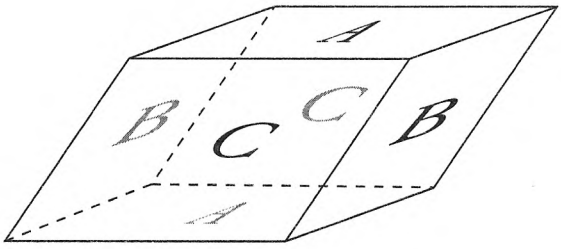
1. No todas las 3-variedades admiten geometrías isotrópicas. De hecho, ni siquiera todas las 3-variedades admiten geometrías homogéneas. Lo mejor en este sentido es la conjetura de geometrización de Thurston (probada por Perelman recientemente), que dice que toda 3-variedad se divide en pedazos que admiten geometrías homogéneas.
2. De las 3-variedades homogéneas, la mayoría de ellas son hiperbólicas (esto cuadra con lo que ocurría para superficies, donde la mayoría de ellas eran hiperbólicas).
3. Las 3-variedades elípticas se consiguen teselando la 3-esfera con poliedros regulares de la geometría esférica (que tienen sus ángulos abultados, de forma que suman más de lo euclideamente habitual). No se conocen todas las 3-variedades elípticas. Aparte de la 3-esfera, una de ellas es el espacio proyectivo, que se consigue teselando la 3-esfera con sus dos «hemisferios».
   Otra 3-variedad elíptica muy famosa es la variedad de Poincaré. Tomamos un dodecaedro y pegamos sus caras de la siguiente forma: cada cara se pega con

la opuesta girándola 36°. Si intentamos teselar el espacio tridimensional con dodecaedros pegados siguiendo esta regla, vemos que no es posible, porque los ángulos en los vértices no «llenan», es decir, nos quedan huecos entre los distintos dodecaedros. La solución pasa por usar dodecaedros en la geometría esférica, en la que los ángulos crecen y, por tanto, tenemos poliedros ligeramente «abultados». De esta manera podemos teselar la 3-esfera con 120 tetraedros de este tipo, lo que nos permite poner en este espacio una geometría de curvatura $K=1$.



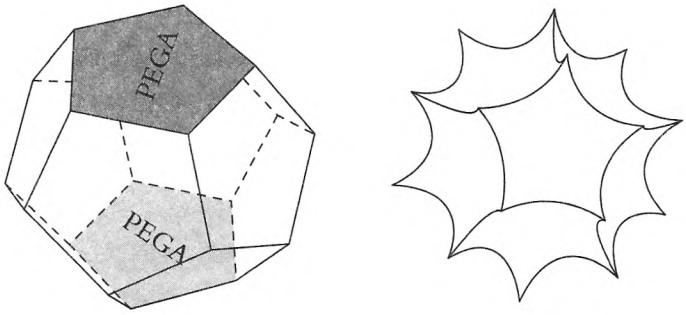
El espacio de Poincaré se obtiene pegando las caras de un dodecaedro ¡esférico!

4. Las 3-variedades euclideas se consiguen teselando el espacio tridimensional euclideo. Se puede hacer con cubos, aunque también lo podemos hacer con paralelepípedos (forma tridimensional con seis caras, que son paralelogramos, y cuyas caras opuestas son paralelas). El resultado es topológicamente equivalente a un 3-toro. Sin embargo, la geometría es distinta. Los ángulos entre las caras del paralelepípedo y sus lados se pueden determinar con la métrica, con lo que el 3-toro obtenido con cubos y el obtenido con el paralelepípedo de la figura siguiente no son isométricos.



Polígono fundamental de una 3-variedad euclidea.

5. Se conocen muchas 3-variedades hiperbólicas, aunque no todas. No es sencillo conseguir teselaciones del espacio hiperbólico. Un ejemplo es la variedad de Seifert-Weber, que se obtiene con un dodecaedro en el que pegamos cada cara con la opuesta girándola 108°. Si intentamos teselar el espacio tridimensional con dodecaedros pegados siguiendo esta regla, vemos que no es posible, porque los ángulos son muy grandes. Para encajarlos necesitamos usar dodecaedros hiperbólicos, que tienen los ángulos más «finitos» que los de un dodecaedro euclideo. Esto nos produce una geometría de curvatura $K=-1$.



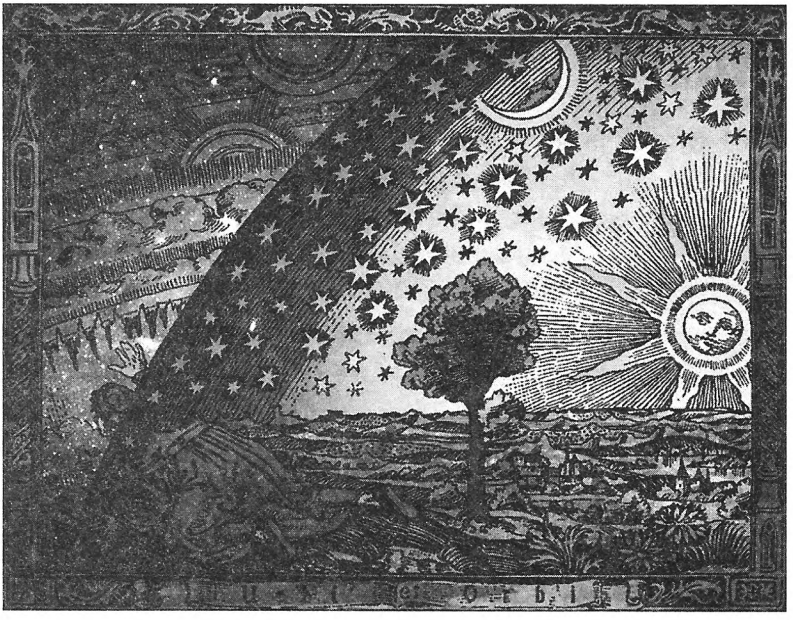
La 3-variedad de Seifert-Weber con una geometría hiperbólica.

Capítulo 6

¿Qué forma tiene nuestro universo?

Un largo viaje nos ha llevado hasta aquí con una pregunta en mente: ¿podemos averiguar cuál es la forma de nuestro universo? Ésta es una pregunta para la que no tenemos respuesta a día de hoy, pero que a nosotros nos ha servido de excusa para aprender un poco de geometría y topología por el camino. De todas formas, me gustaría retomar la pregunta inicial, y así cerrar el círculo.

En la Grecia clásica había variedad de opiniones sobre la naturaleza del espacio. Demócrito, fundador de la escuela atomista, creía en un universo infinito que se extendía en tres direcciones (largo, alto y ancho) de manera indefinida, tal como el plano euclideo se extendía en dos dimensiones. Sin embargo, Aristóteles imaginaba un universo como una gran bola, con la Tierra en su centro y un borde esférico.



Universum *(1888), grabado de Camille Flammarion.*

La concepción que prevaleció durante muchos años fue la aristotélica, principalmente por el miedo humano al infinito. La invención del telescopio en 1608 y las subsiguientes observaciones astronómicas desmontaron la visión geocentrista y, con ello, la idea aristotélica.

La idea de un espacio infinito (lo que nosotros hemos venido llamando *espacio tridimensional euclideo*) era asumida sin planteamientos. El mismo Kant decía que el espacio euclideo era «la (única) forma de la razón de entender la percepción de los objetos existentes en el espacio».

Riemann fue el primero que, en 1854, se planteó que el universo podría no ser euclideo: desarrolló la teoría de las geometrías curvas de los espacios y propuso la idea de que el universo fuera una 3-esfera. Esta propuesta no estaba sustentada en ningún dato empírico, pero por primera vez abandonaba la idea preconcebida del espacio euclideo y abría un nuevo planteamiento: el universo, al ser una 3-variedad, puede en principio tener una forma distinta de la euclidea. Algo que nos recuerda a lo ocurrido con la idea de la Tierra plana y la Tierra esférica con la que comenzábamos el capítulo 1.

Se puede decir que en la época de Riemann las matemáticas ya estaban maduras para plantear esta cuestión. La noción de variedad, de espacio geométrico, estaba siendo desarrollada. Trabajos previos de matemáticos tales como Gauss, Bolyai y Lobachevski llevaron al descubrimiento de la geometría hiperbólica, lo que puso de manifiesto que no había un único tipo de espacio (el euclideo, hasta el momento), y, por tanto, produjo la necesidad de «definir» el concepto de espacio (lo que acabó denominándose *variedad*).

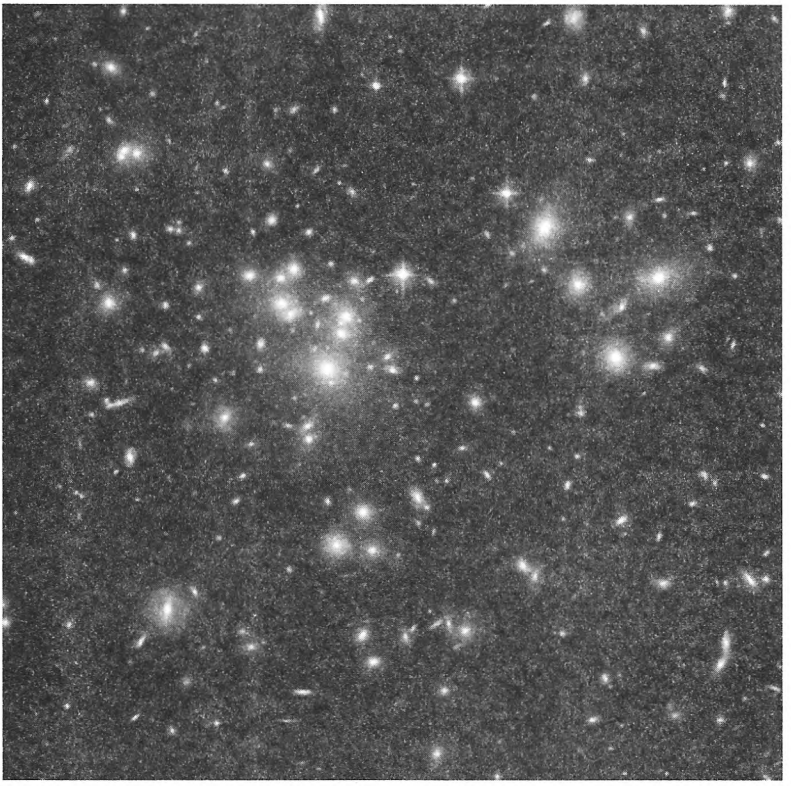
En esta ocasión, como en muchas otras, son las matemáticas las que guían la manera en que entendemos el mundo. Pero también son las matemáticas las que nos ayudan a contestar estos grandes interrogantes.

Todas las cuestiones a las que hemos dedicado los capítulos anteriores sobre la topología y la geometría de las variedades de dimensiones 2 y 3 nos han mostrado el significado de la pregunta «¿qué forma tiene nuestro universo?», y nos dan pistas de por dónde buscar la respuesta.

El universo

El universo es la totalidad del espacio y del tiempo, de todas las formas de la materia y la energía. El universo está repleto de miles de millones de galaxias, cada una de ellas con miles de millones de estrellas. Nosotros vivimos en un pequeño plane-

ta que orbita en un sistema solar situado en uno de los brazos de una de esas galaxias, la Vía Láctea.



Las galaxias se agrupan formando cúmulos y supercúmulos.

En cualquier punto del universo podemos colocar tres ejes coordenados (imaginarios, eso sí) con los que localizar otro punto cercano. Si el universo fuera un espacio tridimensional euclideo podríamos extender esos tres ejes de forma indefinida para cubrir todos los puntos del espacio. Las nociones del espacio curvo que hemos revisado en los capítulos anteriores nos indican que no debemos esperar algo de ese estilo. Este paso consistiría en una inducción del tipo «de lo finito a lo infinito», similar al postulado de las paralelas, y que suele llevar a error.

Por tanto, lo que podemos defender es que, «localmente» podremos colocar tres ejes coordenados. Decir que localmente nos encontramos en un mundo tridimensional es lo mismo que decir que «el universo es una 3-variedad».

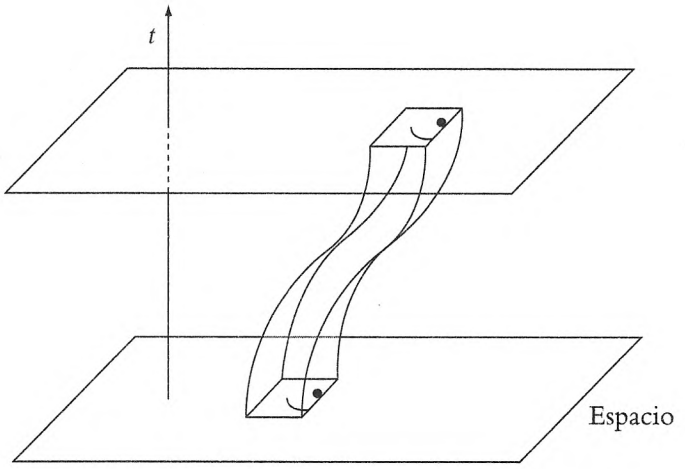
LOBACHEVSKI Y LA GEOMETRÍA DEL UNIVERSO

La primera persona que propuso un test de la geometría del espacio fue, al parecer, Nikolái Lobachevski (1792-1856), sugiriendo calcular la suma de los ángulos de un triángulo estelar. El triángulo propuesto tenía un vértice en Sirio, la estrella más brillante del cielo nocturno, y los otros dos vértices serían dos posiciones de la Tierra separadas por un intervalo de seis meses. Con ello, Lobachevski pretendía calcular la desviación de la geometría del espacio de la euclidea, suponiendo que el espacio tenía geometría hiperbólica (en términos modernos, calcular la constante de la curvatura). Partiendo del paralaje máximo de Sirio, que es de 1,24 segundos de arco, se deducía que la curvatura (supuestamente negativa) debía ser menor (en valor absoluto) de 1/166.000 UA (UA significa «unidad astronómica» y es igual a la distancia entre la Tierra y el Sol). Por tanto, de ser no nula, era muy pequeña, con lo que el análisis no concluía nada al respecto.

Lobachevski presentó su primer artículo sobre «la nueva geometría» en Kasan en 1826. Su aproximación de la curvatura apareció en publicaciones posteriores basadas en paralajes de estrellas hasta 1855, poco antes de su muerte.

Anteriormente, Gauss había realizado una medición similar calculando los ángulos de un triángulo formado por los picos de los montes alemanes Hohenhagen, Inselsberg y Brocken. Sin embargo, es muy posible que Gauss no estuviese analizando la geometría del universo, sino haciendo un cálculo de la curvatura de la Tierra.

La teoría de la relatividad de Einstein parte de la base de que el espacio físico es una variedad, y de que su forma viene dada por su geometría (es decir, una métrica). El nuevo ingrediente de la teoría de la relatividad estriba en considerar como variedad el espacio y el tiempo simultáneamente. Así aparece una variedad de dimensión 4, con coordenadas x, y, z, t, donde x, y, z son coordenadas espaciales y t denota el tiempo. A esta variedad se la conoce con el nombre de *espacio-tiempo*. Así, todas las ecuaciones físicas pasan a estar formuladas en la variedad espacio-tiempo. No obstante, nos sigue interesando contestar a la pregunta de la forma del universo, refiriéndonos con esto a la parte «espacial» del espacio-tiempo, es decir, a aquella con coordenadas x, y, z. Esta variedad es de dimensión 3.



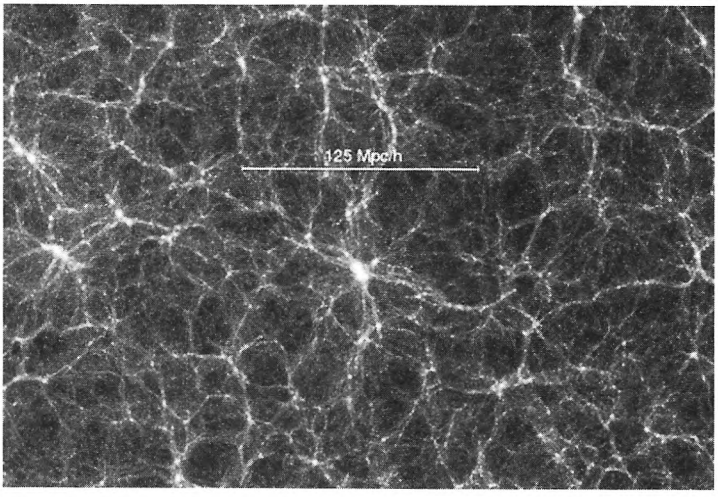
El espacio-tiempo, donde hemos dibujado un espacio bidimensional; el tiempo se marca en el eje vertical. Vemos a Cuadradina moverse hacia la derecha.

Antes de proseguir, planteemos varias hipótesis de base que pueden ser útiles:

— El universo no tiene borde. Suponemos que el universo es una 3-variedad sin borde, es decir, que en cualquier punto del espacio que nos coloquemos veremos una amplia zona con tres direcciones y sin ningún límite, ninguna barrera que marque el «fin» del universo. Es decir, el universo es ilimitado.
— El universo es orientable. En principio no parecería haber motivo para pensar que el universo deba ser orientable: derecha e izquierda son convenciones humanas. Pero en la naturaleza, la orientación es un fenómeno más profundo,

y ocurre a nivel de las partículas. Si, como esperamos, las leyes físicas del universo son las mismas en todas partes, entonces no podría haber manera de hacer un viaje a lo largo del cosmos y volver con la orientación cambiada, ya que en ese caso la estructura de las partículas habría cambiado. Éste es un argumento muy fuerte a favor de la orientabilidad del universo.

— El universo es isotrópico. Es muy esperable que el universo sea homogéneo (se ve igual en puntos distintos) e isotrópico (se ve igual en distintas direcciones). Se cree firmemente que las leyes físicas que determinan la geometría del universo son las mismas en todos los lugares (al menos todos los datos corroboran esta idea, aparte de ser una idea filosóficamente atractiva). Veremos más adelante que la geometría del universo está determinada por la cantidad de materia. Y la cantidad de materia se distribuye homogéneamente, al menos en la parte visible del universo. Sí, es cierto que la materia se concentra en estrellas que forman galaxias, y que hay grandes huecos (zonas del espacio sin materia) entre galaxias. Es más, las galaxias también se agrupan en racimos, llamados cúmulos de galaxias. Pero, a mayor escala, los cúmulos de galaxias se distribuyen de una forma bastante uniforme en todas direcciones. Por eso podemos decir que el universo es «aproximadamente isotrópico», donde las faltas de homogeneidad e isotropía (las anisotropías) se producen a «pequeña» escala.



El universo a gran escala. Los cúmulos de galaxias se distribuyen formando filamentos. De hecho, el comportamiento del universo a esta escala se asemeja más al de un fluido.

— Compacidad. Éste es el punto más discutible. ¿Tiene el universo un volumen finito? No hay ningún dato que apoye una respuesta en una u otra dirección. El motivo a favor de la finitud es de tipo filosófico: si la materia está distribuida uniformemente y las ecuaciones de Einstein dicen que la cantidad de materia y energía en el universo es constante, entonces la cantidad total debería ser finita. Lo que ocurre es que no es cierto que haya contradicción entre la idea de que la cantidad de materia sea constante y de que sea infinita. La aparente problemática es solamente de interpretación del infinito.

LA SIMETRÍA CPT

Las simetrías CPT de las leyes físicas se refieren a la invariancia de las leyes físicas bajo transformaciones que involucran la inversión de la carga eléctrica (positiva por negativa), la paridad (orientación del espacio) y el sentido del tiempo (el tiempo fluye del pasado al futuro). Si cambiamos el signo de la carga (C), sustituimos cada partícula por su correspondiente antipartícula. La inversión de paridad (P) corresponde a cambiar la orientación del espacio. La inversión temporal (T) cambia la dirección en la que fluye el tiempo («del pasado hacia el futuro» se cambia por «del futuro hacia el pasado»). En la década de 1950 se descubrieron fenómenos físicos (concretamente, la desintegración débil beta), en los que la simetría P era violada. Hay también violaciones de las simetrías C y T, con lo cual el universo distingue entre los dos signos de la carga, distingue la orientación y distingue el fluir del tiempo.

A día de hoy, se cree que puede haber una simetría combinada CPT de las leyes físicas, es decir, cambiando simultáneamente C, P y T, las leyes físicas serían las mismas.

Cosmología

La cosmología es la ciencia que estudia el origen, la evolución y el destino del universo, así como de las galaxias, las estrellas y los sistemas planetarios. Por tanto, la pregunta de la forma del universo se enmarca entre la cosmología y la topología. Hay dos tipos de cuestiones principales en relación a la forma del universo:

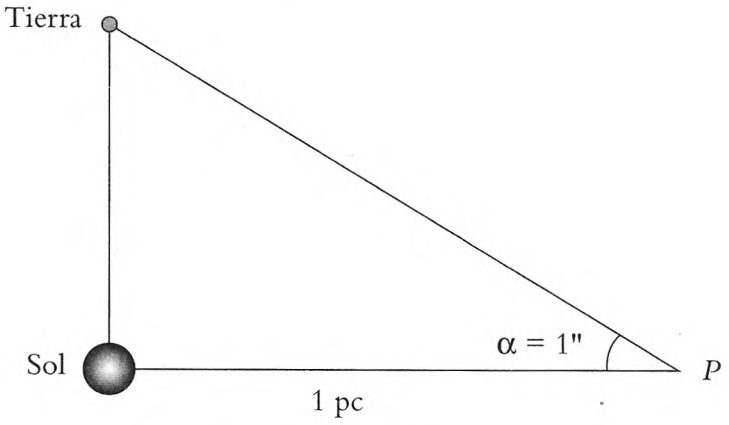
— La forma local, es decir, la geometría del universo visible. Consideramos universo cercano aquel que es accesible por nuestros telescopios y radiotelescopios.

— La forma global, es decir, la topología, que trataría de describir el universo completo.

Las observaciones astronómicas indican que el universo tiene una edad aproximada de 13.500 a 14.000 millones de años, y una extensión de por lo menos 93.000 millones de años luz.

Las distancias en el universo son astronómicas y, por tanto, no se pueden medir en unidades habituales, como los kilómetros. Se suelen medir en *años luz*, que es la distancia que recorre la luz en un año. La velocidad de la luz es de 299.892 km/s (en el vacío), por lo que el año luz equivale a unos 9.467.280.000.000 km. Por ejemplo, la Vía Láctea tiene forma de espiral barrada con un diámetro de unos 100.000 años luz y un grosor de unos 1.000 años luz.

Otra medida muy habitual es el *pársec*. Un pársec es la distancia a la que nos tenemos que situar para ver la distancia entre la Tierra y el Sol con un ángulo de un segundo de arco, 0° 00' 01". Esta distancia es igual a 3,26 años luz. El pársec se denota con las letras pc. También se usa el megapársec, Mpc, que es un millón de pársecs, para distancias aún mayores.



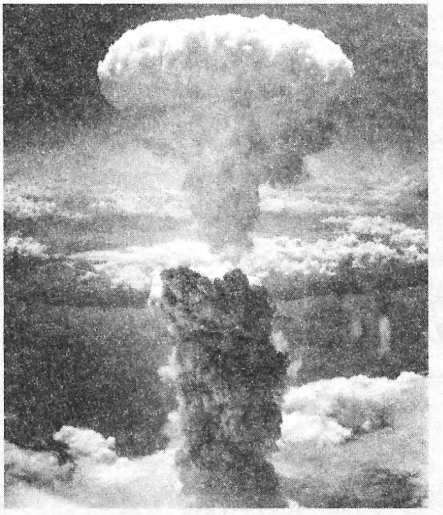
Esquema que ilustra la definición de pársec.

Según la teoría de la relatividad, la velocidad de la luz no puede ser superada por ninguna partícula. De hecho, solamente las ondas electromagnéticas (fotones) pueden alcanzar esa velocidad. Las partículas con masa deben viajar forzosamente a menor velocidad. La velocidad de la luz se denota con la letra *c*.

$E=MC^2$ Y LA BOMBA ATÓMICA

Una de las consecuencias de la teoría de la relatividad es la equivalencia entre la masa y la energía, expresada en la célebre ecuación $E=mc^2$, que indica que una masa m en reposo conlleva una cantidad de energía E dada por la mencionada fórmula. Como c es la velocidad de la luz (un número ciertamente muy grande), tenemos que 1 kg de masa es equivalente a casi 25.000 millones de kWh. Por tanto, en teoría podemos transformar masa en energía en esa proporción. Ciertamente, esto ocurre en la desintegración radiactiva y también en una explosión nuclear.

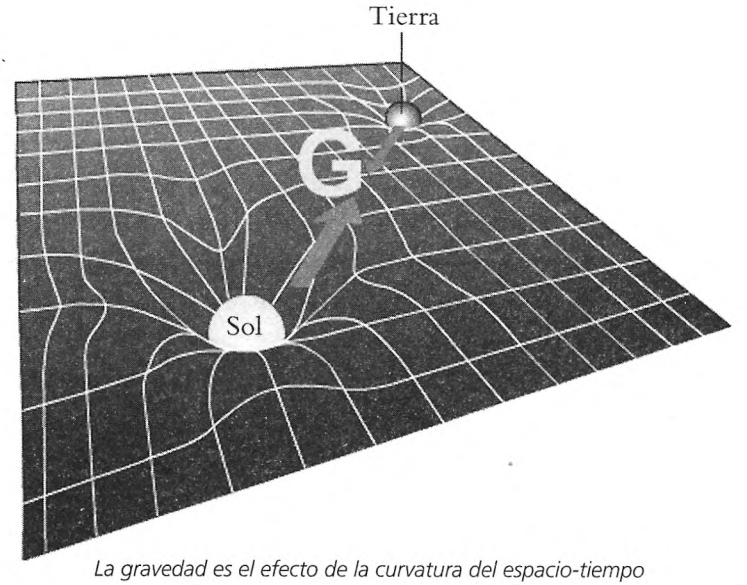
Las bombas atómicas son una consecuencia «práctica» de la teoría de la relatividad. Por esa razón, y por el apoyo que dio durante la Segunda Guerra Mundial al Proyecto Manhattan, destinado a desarrollar las armas nucleares, Albert Einstein es considerado «el padre de la bomba atómica». Sin embargo, Einstein era un pacifista convencido y sólo dio su apoyo por el temor a que los nazis estuvieran desarrollando dicha tecnología y pudieran usarla durante la guerra.



Tras ver las devastadoras consecuencias de esta mortal arma en los lanzamientos de las bombas de Hiroshima y Nagasaki, Einstein, junto con el filósofo y matemático Bertrand Russell, hizo un llamamiento a los científicos para que se unieran en favor de la desaparición de las armas nucleares.

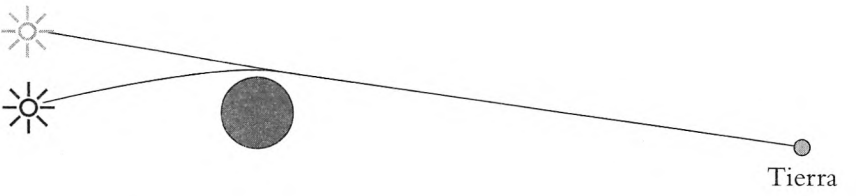
La geometría del universo

La interpretación que hace la teoría de la relatividad del concepto de gravedad no es como una fuerza, en el sentido que le dio Newton, sino como una característica geométrica del espacio-tiempo, es decir, como una curvatura. Las ecuaciones que describen la relación entre la gravedad y la curvatura son las famosas *ecuaciones del campo* de Einstein. En términos coloquiales, vienen a expresar el hecho de que una masa en el espacio (es decir, una fuente de campo gravitatorio) produce una deformación en el mismo que lo «curva».



La gravedad es el efecto de la curvatura del espacio-tiempo producida por un cuerpo con masa.

La gravedad cambia la geometría produciendo curvatura y, por tanto, cambia las «rectas». Las rectas, de nuevo, han de ser interpretadas como las geodésicas, las trayectorias que siguen los cuerpos cuando se desplazan de manera libre (sin estar sometidos a otras fuerzas independientes, como pueda ser un cohete impulsado por su motor). De esta forma, los planetas, cuando orbitan alrededor del Sol en órbitas elípticas, de hecho están siguiendo geodésicas. También la luz se desplaza a lo largo de geodésicas. El lector se preguntará por qué los planetas y la luz no siguen las mismas trayectorias. Se debe a que las geodésicas se han de dibujar en el espacio-tiempo, es decir, dependen tanto del lugar como del tiempo y, por tanto, la trayectoria de la geodésica depende de la velocidad a la que se mueve el objeto.



La luz emitida por una estrella se curva al pasar cerca de un objeto con mucha masa (siguiendo la geodésica). Por tanto, la posición «aparente» de la estrella está desplazada respecto de la posición real.

La ecuación del campo de Einstein tiene un aspecto interesante:

$$Ric - K_p \cdot m + \Lambda m = (8\pi G/c^4)\, T.$$

Cada letra tiene su significado: m es la métrica (la geometría del espacio-tiempo); K_p es la curvatura escalar, que es $K_p = (K_1 + K_2 + K_3)/3$; Ric es el tensor de Ricci, que asocia a cada vector e_1, e_2, e_3 el número $(K_2 + K_3)/2$, $(K_1 + K_3)/2$, $(K_1 + K_2)/2$, respectivamente (véase la figura de la pág. 134); c es la velocidad de la luz; G es la constante de gravitación universal, que vale $G = 6{,}693 \cdot 10^{-11}$ $m^3/kg/s^2$, y T es el tensor de tensión-energía, que codifica las masas existentes en el espacio y el efecto que éstas producen. Finalmente, Λ es una constante, llamada constante cosmológica, que aparece sin motivo físico alguno.

En el vacío, $T = 0$. Si, además, quitamos la constante cosmológica, la ecuación que queda es:

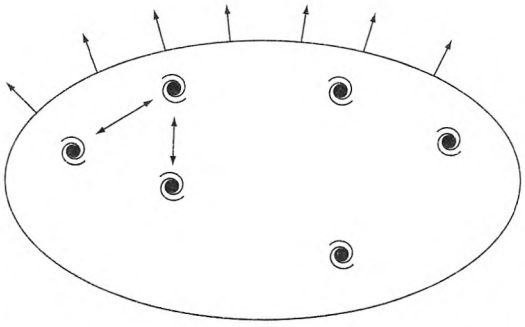
$$Ric - K_p \cdot m = 0.$$

En principio K_p depende del punto p, pero se puede deducir que la curvatura es constante (¡la isotropía se deduce de la ecuación, en vez de suponerla!). Si añadimos la masa en el universo y la suponemos homogéneamente distribuida, entonces T no depende del punto, y de nuevo la curvatura es constante. Por tanto, el único dato relevante para resolver la ecuación del campo de Einstein es la densidad de materia, que denotamos con la letra ρ.

El corrimiento hacia el rojo y el Big Bang

Einstein aplicó la ecuación del campo a todo el universo en el año 1917. Primero supuso que Λ no aparecía (al no tener significado físico). Pero obtuvo algo paradójico: el volumen del universo cambiaba con el tiempo. Un universo cambiante era un concepto que no se podía aceptar, y Einstein reintrodujo la constante Λ, ajustándola para que el universo permaneciese estático. A la constante Λ se la denominó *constante cosmológica.*

En 1922, el matemático y meteorólogo ruso Alexander Friedmann (1888-1925) planteó el modelo del universo en expansión, si bien en principio no fue tomado muy en cuenta. En un universo en expansión, las galaxias deberían estar alejándose unas de otras.

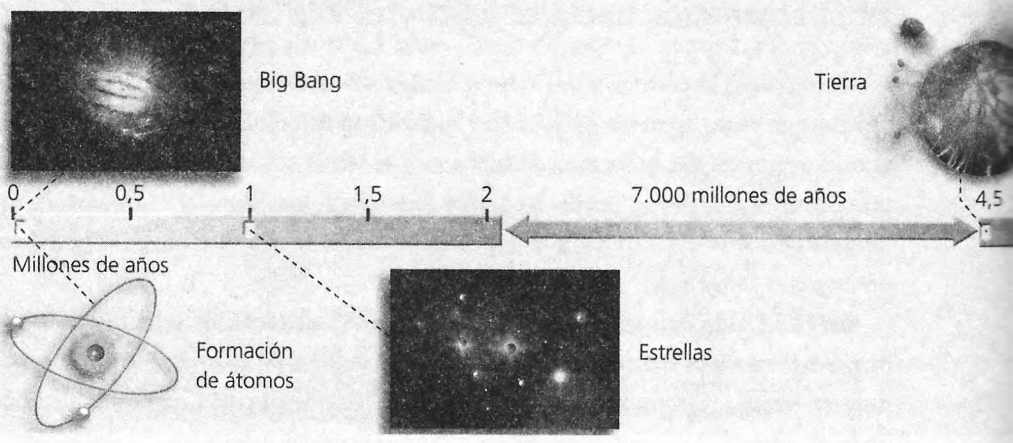


El universo se expande. Las galaxias se alejan entre sí a una velocidad proporcional a la distancia entre ellas. El efecto es algo similar al de tener una colección de puntos en la superficie de un globo que se va inflando continuamente.

La idea de Friedmann se vio pronto corroborada por datos experimentales. Lemaître, en 1927, y Hubble, en 1929, de manera independiente, dedujeron que las galaxias se alejan de nosotros, y que la velocidad con la que lo hacen es tanto mayor cuanto más lejos están. La velocidad de expansión se conoce con el nombre de *constante de Hubble*, y se denota con la letra H. Una estimación de 2011 del HST (Hubble Space Telescope) da un valor de $H = 74$ km/s/Mpc, es decir, una galaxia

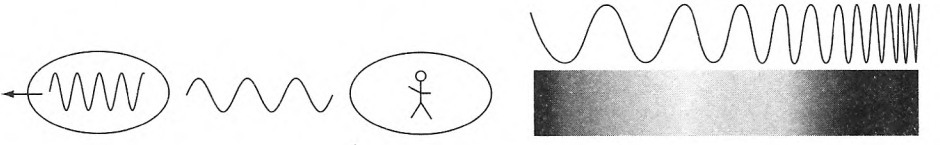
EVENTOS IMPORTANTES EN LA HISTORIA DEL UNIVERSO

La edad del universo es de unos 13.700 millones de años. Tras el Big-Bang, sólo había radiación con una energía altísima. Tras los primeros 100 segundos se comenzaron a formar las partículas (electrones, nucleones, etc.). A partir de los 400.000 años, se formaron los átomos, y las primeras



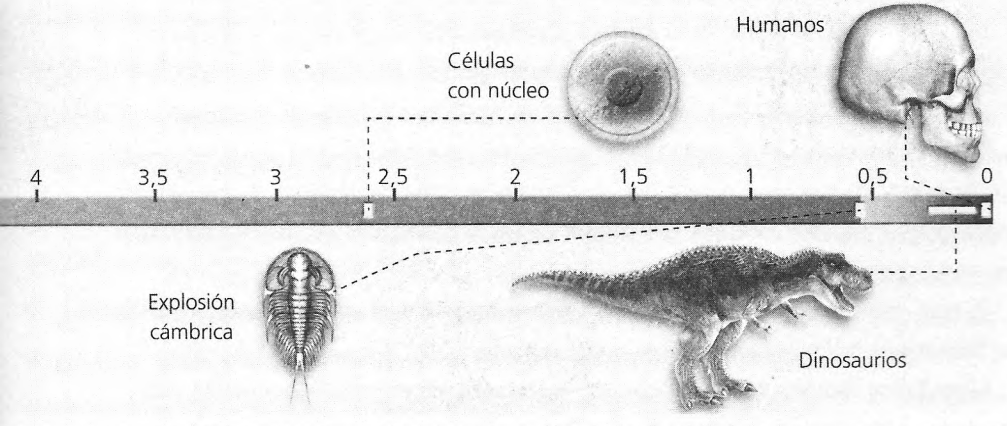
situada a 1 megapársec se aleja de nosotros a 74 km/s; si está situada a 2 Mpc se alejará a 148 km/s, y así sucesivamente. Esto quiere decir que el universo crece un 7,55% cada 1.000 millones de años.

La deducción de este fenómeno y el cálculo del ritmo de expansión vienen dados por lo que se conoce como *corrimiento hacia el rojo* en el espectro de la luz que recibimos de las galaxias distantes. Esto se debe a que cuando un cuerpo se aleja de nosotros, la longitud de onda de la luz que emite se agranda, y esto produce que su luz nos llegue «desplazada hacia el rojo». La longitud de onda de la luz emitida puede ser deducida, ya que conocemos los espectros de todos los elementos químicos de los que está formada cualquier galaxia.



Cuando un objeto se aleja de nosotros, la luz que emite nos llega con una longitud de onda mayor, es decir, su luz nos llega desplazada hacia la parte de color rojo del espectro.

estrellas aparecieron, por aglutinamiento de materia, pasados 1.000 millones de años. La Tierra se formó poco después que nuestro Sol, hace unos 4.500 millones de años. Recordemos que los humanos (*Homo sapiens*) llevamos apenas 200.000 años sobre la faz de la Tierra.



Lemaître se dio cuenta de la siguiente consecuencia: si el universo se encuentra en expansión continua, entonces en algún momento del pasado tuvo que haber tenido un tamaño pequeñísimo. Es decir, toda la masa y la energía deberían haber estado concentradas en un universo de tamaño microscópico, a una densidad y temperaturas inimaginables. Ese instante inicial se conoce con el nombre de *Big Bang*, o Gran Explosión. Un pequeño cálculo, con la regla del 7,55 % cada 1.000 millones de años, nos da una estimación burda de 100/7,55 = 13,2 miles de millones de años para la edad del universo, cercana a la más rigurosa aceptada hoy día, de 13.730 millones de años.

Einstein, tras convencerse de que la teoría del Big Bang era correcta, eliminó de nuevo la constante cosmológica de sus ecuaciones, y la calificó como «el mayor error de mi vida».

Las formas espaciales

La ecuación del campo de Einstein, aplicada al universo globalmente, y suponiendo isotropía, implica que la curvatura sea una constante K_0. El modelo cosmológico resultante se conoce como modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (abreviado FLRW). Aparecen tres posibilidades, dependiendo de si $K_0 > 0$, $K_0 = 0$ o $K_0 < 0$, que se corresponden con los tres tipos de geometrías de curvatura constante.

Ni Einstein ni los físicos de la época se plantearon la posibilidad de que el universo pudiera no ser simplemente conexo. Dieron por sentado que lo era, con lo que dedujeron lo siguiente:

— Si $K_0 > 0$, el universo es una 3-esfera.
— Si $K_0 = 0$, el universo es el espacio euclideo.
— Si $K_0 < 0$, el universo es el espacio hiperbólico.

En el primer caso, el espacio es compacto; en los otros dos, no. La terminología caló hondo y, de hecho, a día de hoy se llama aún universo abierto al caso de curvatura cero o negativa, aunque la mayoría de las 3-variedades compactas de curvatura constante sean hiperbólicas.

A estas tres 3-variedades se las llamó *formas espaciales*, al considerar que eran las tres únicas posibilidades para la forma del espacio.

Uno de los motivos matemáticos que sustentaban esta posible confusión está en una de las definiciones de isotropía, que llamaremos *isotropía global*. Un espacio tie-

ne isotropía global cuando podemos hacer rotaciones «globales» en cualquier punto. Una rotación global no es como las rotaciones locales (las rotaciones en un entorno) que estábamos usando antes. Una rotación global permite «girar» todo el espacio con centro un punto. Las 3-variedades con isotropía global son las tres formas espaciales y el espacio proyectivo.

El futuro del universo

La curvatura K_0 depende de la densidad de materia ρ del universo. Esto se debe a que es la masa la que produce gravedad, es decir, curvatura. Hay una masa crítica ρ_C para la cual tendríamos exactamente $K_0 = 0$; su valor es:

$$\rho_C = 3H^2/(8\pi G)$$

donde G es la constante de gravitación universal, y H, la constante de Hubble.

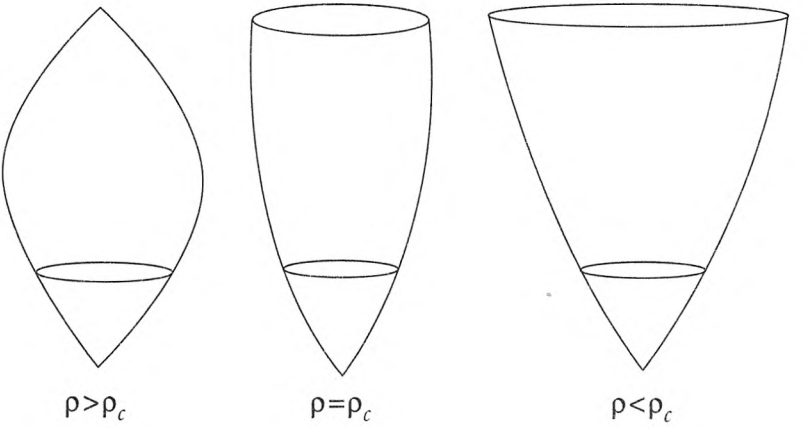
El modelo cosmológico FLRW no sólo da la curvatura del espacio, sino también la evolución del universo a lo largo del tiempo, ya que es la solución al modelo del espacio-tiempo dado por las ecuaciones de Einstein (suponiendo isotropía y sin constante cosmológica). Tenemos la siguiente tricotomía:

— Si $\rho > \rho_C$, entonces $K_0 > 0$. En este caso, la expansión actual del universo acabará frenándose, debido a que la densidad de materia ρ es tan alta que la fuerza gravitatoria acabará compensando la velocidad inicial de expansión provocada por el Big Bang. En algún momento el universo empezará a contraerse, para acabar *implosionando*, en un suceso denominado Big Crunch. El universo tendrá un final en el tiempo.

— Si $\rho < \rho_C$, entonces $K_0 < 0$. En este caso, la expansión actual del universo continuará siempre. La velocidad de expansión es cada vez menor, debido a la acción de la gravedad, pero nunca se frenará. El universo permanecerá eternamente. Hay dos hipótesis sobre el futuro del universo: el Big Rip (Gran Desgarramiento), que predice que después de unos 20.000 millones de años la materia se desgajará y las partículas perderán su cohesión gravitatoria, y el Big Freeze (Gran Enfriamiento), que predice que la temperatura bajará tanto que no habrá energía libre para producir procesos termodinámicos.

— Si $\rho = \rho_C$, entonces $K_0 = 0$. La situación es un caso límite de la anterior. La expansión continuará para siempre, frenándose hasta casi llegar a ser estable,

pero sin colapsar nunca. El final será semejante al del caso $K_0 < 0$. En principio, se considera una situación poco probable, pues la densidad ha de tomar un valor muy específico.



El espacio-tiempo en el modelo FLRW, dependiendo de si $\rho > \rho_c$, $\rho = \rho_c$ *o* $\rho < \rho_c$. *El tiempo fluye hacia arriba en vertical. La singularidad inicial es el Big Bang. La situación actual del universo está marcada a media altura.*

Al universo que acaba con un Big Crunch se le llama *universo cerrado,* ya que está cerrado en el tiempo. Se denomina *universo abierto* a aquel que no acaba en la dirección del futuro.

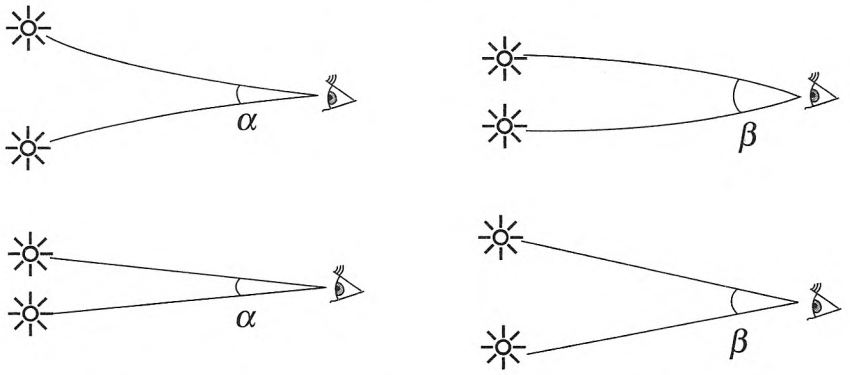
Geometría	Final del universo	Densidad	Tamaño
Elíptica	Big Crunch (cerrado)	$\rho > \rho_c$ (denso)	Compacto
Euclidea	Ritmo de expansión tiende a cero (abierto)	$\rho = \rho_c$	Puede ser compacto o no compacto
Hiperbólica	Expansión eterna (abierto)	$\rho < \rho_c$ (poco denso)	Puede ser compacto o no compacto

La clave del modelo de FLRW es la relación directa entre el final del universo y su curvatura.

Geometría del universo

El estudio de la geometría del universo es el estudio local del universo observable. El principal objetivo consiste en averiguar el tipo de geometría que tiene. Como asumimos que es (aproximadamente) isotrópico, la curvatura es constante. Para averiguar la constante K_0, la clave es conocer la densidad de materia ρ del universo.

Hay consecuencias geométricas interesantes. Por ejemplo, si el universo es hiperbólico, entonces apreciamos que los objetos están más cerca entre ellos de lo que realmente se encuentran; es decir, los objetos «aparentan» estar más apretados de lo que realmente están. De manera recíproca, en un universo elíptico apreciamos los objetos más alejados entre ellos de lo que en realidad están.



Rayos de luz desde estrellas lejanas en un universo hiperbólico (izquierda) y en un universo elíptico (derecha). Situación real (arriba) y situación aparente (abajo) de dos estrellas.

Para calcular la densidad de materia del universo debemos encontrar las posibles fuentes de masa/gravedad/curvatura:

— La materia más fácil de localizar es la de las estrellas, dado que brillan y podemos cuantificar la intensidad de la luz que nos llega. Como, además, sabemos la distancia a la que están (la ley de Hubble nos dice cómo calcular la distancia a partir del corrimiento hacia el rojo de la luz recibida), podemos estimar la masa.

— Más difícil es estimar la materia oscura, dada por los planetas y cuerpos rocosos no brillantes, así como el polvo interestelar. Sabemos de la existencia de planetas grandes por los efectos gravitatorios que producen en estrellas

cercanas y también por la pérdida de brillo de algunas estrellas cuando planetas voluminosos se sitúan frente a ellas. Podemos detectar así planetas grandes, pero no los pequeños. También el polvo interestelar puede producir (o reflejar) brillo o ser oscuro.

— Agujeros negros. Se forman por el colapso de estrellas masivas y contienen una gran cantidad de masa a muy alta densidad. La gravedad es tan grande que la luz no puede salir de ellos, por lo que no podemos verlos. Recientemente han sido detectados (por ejemplo, hay un gran agujero negro en el centro de la Vía Láctea) por los efectos gravitatorios que producen en otros cuerpos visibles, o debido a las radiaciones emitidas por ciertos cuerpos cuando son engullidos por un agujero negro (como en el caso de los quásars). También podría haber muchos agujeros negros de pequeño tamaño.

— Materia oscura no bariónica, es decir, partículas con masa que no forman átomos. Hay partículas subatómicas, como por ejemplo los neutrinos, que tienen una masa muy pequeña y que abundan en el universo. Es difícil detectarlas porque no suelen interaccionar con los cuerpos masivos, aunque producen efectos gravitatorios en la rotación de las galaxias.

LOS AGUJEROS NEGROS

Una de las consecuencias del modelo del Big Bang son los *agujeros negros.* El Big Bang es una singularidad del espacio-tiempo, es decir, un punto en el que el espacio-tiempo no es variedad. La singularidad ocurre porque la densidad de materia es altísima en ese instante inicial. El Big Bang ocurre «hacia el pasado», pero yendo hacia el futuro también es posible que se dé, por aglutinamiento, una alta densidad de materia en un punto del espacio, llegando a producirse una singularidad. La consecuencia es lo que se denomina *agujero negro.* Un agujero negro es una zona del espacio donde la gravedad es tan alta que nada, ni siquiera la luz, puede salir de allí. En términos geométricos, la curvatura es tan alta que las geodésicas están atrapadas.

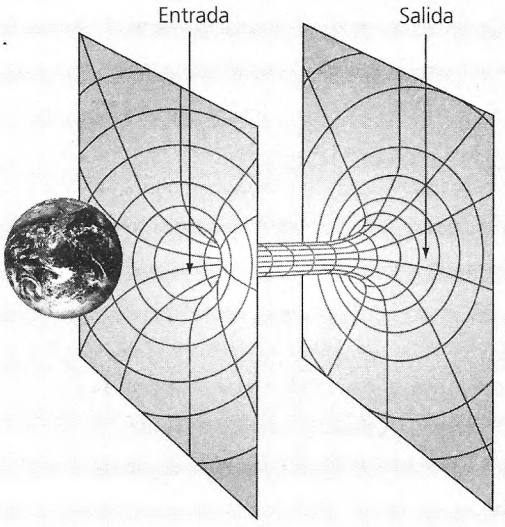
El primero en proponer la posibilidad de la existencia de los agujeros negros fue Pierre Laplace, matemático francés del siglo XVIII, quien sugirió que un objeto muy masivo y pequeño podría tener una gravedad tan elevada que la velocidad de escape sería superior a la velocidad de la luz, con lo que la luz no podría escapar de él. Sin embargo, el modelo matemático correcto usando la teoría de la relatividad se debe al físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild.

Dependiendo de cuánta materia oculta haya, la densidad ρ podrá ser mayor de lo esperado. De hecho, se cree que el 90% de la materia es oscura. Hasta hace poco las estimaciones de ρ eran del orden del 10%-30% del valor de ρ_C, lo que hacía esperar que la geometría fuera hiperbólica.

AGUJEROS DE GUSANO

Un agujero de gusano es una hipotética característica topológica del espacio-tiempo que permite viajar a través del espacio y del tiempo. Un agujero de gusano tiene dos extremos, conectados a través de una «garganta», por la cual la materia puede desplazarse de un extremo a otro. Los agujeros de gusano son una posibilidad teórica compatible con las ecuaciones de la relatividad general. Los hay de varios tipos. Los puentes de Einstein-Rosen están formados por la unión de un agujero negro (que absorbe todo a su alrededor, materia y luz) y un agujero blanco en el otro extremo (que expulsa toda la materia y luz que pasa a través del nexo). La solución fue publicada en 1935, pero posteriormente, en 1962, John Wheeler y Robert Fuller demostraron que este tipo de agujero de gusano es inestable, y se desintegraría instantáneamente tan pronto como se formase.

Hay otros tipos de agujeros de gusano que tienen posibilidad teórica de existencia bajo ciertas hipótesis restrictivas. Sin embargo, la probabilidad de existencia real es, por el momento, muy baja. De existir, podríamos usarlos como puerta interespacial (para viajar a lugares alejados del espacio, o a través del tiempo), aunque fuera sólo en una dirección.



La expansión acelerada

En 1998, observaciones de supernovas muy lejanas llevaron a la conclusión de que el ritmo de expansión del universo se está acelerando, muy al contrario de lo que predice el modelo FLRW. Esto significa que, además de la expansión del universo provocada por el Big Bang y de la gravedad, que intenta frenar la expansión, hay un tercer protagonista que hace que las galaxias se «repelan». Para resolver este misterio, se propuso la *energía oscura*. Es una forma de energía que funcionaría a modo de «presión negativa» que empujaría a las galaxias, alejándolas. A efectos de las ecuaciones del campo de Einstein, la energía oscura se comporta igual que si pusiéramos una constante cosmológica. ¡Al final la constante cosmológica sí que debía aparecer!

Gracias a la ecuación de Einstein, $E = mc^2$, la masa y la energía son intercambiables o, dicho de otra forma, son equivalentes. Por tanto, la energía que se encuentre en el cosmos debe contar como masa. Por tanto, la energía oscura contribuye a aumentar la densidad del universo (haciéndolo de mayor curvatura), mientras que funciona impidiendo el colapso gravitatorio (Big Crunch), al producir una repulsión entre galaxias.

Notemos que hay energía visible (la luz, es decir, las ondas electromagnéticas) en el universo, pero también parece existir energía oscura (no visible), cuya naturaleza, de hecho, no se entiende. Y lo que es aún más sorprendente: esta energía oscura es seguramente muy abundante, y puede llegar a constituir un 70% de la masa-energía total del universo, con lo que la geometría es muy probable que sea euclidea. La explicación de la naturaleza de la energía oscura es considerada por la revista *Science* como el problema más importante de la ciencia en el siglo XXI.

Los parámetros cosmológicos

En el modelo cosmológico actual se tienen las siguientes constantes que describen el espacio-tiempo, denominadas «parámetros cosmológicos».

— Constante de Hubble, H. Mide el ritmo de expansión del universo. De hecho, no es constante, pues cambia con el tiempo.
— Parámetro de densidad de materia, $\Omega_m = \rho / \rho_C$. Si $\Omega_m > 1$, el universo acabará en un Big Crunch, y si $\Omega_m \leq 1$, entonces perdurará por siempre.
— Curvatura, K_0.
— Constante cosmológica, Λ.

La constante de Hubble se infiere de los otros tres parámetros. Éstos tienen una relación sencilla entre sí:

$$\Omega_m + \Lambda - 1 = K_0.$$

Por tanto, en esta situación, la curvatura del universo y su destino final no están forzosamente correlacionados.

La topología del universo

La forma global del universo depende de un dato extra: el grupo fundamental, es decir, los agujeros que se encuentran con lazos no triviales. Los físicos contemporáneos de Einstein ni siquiera tuvieron en cuenta este dato. Una explicación es el hecho de denominar abierto al universo con expansión eterna. Por tanto, el universo abierto en el modelo FLRW es aquel en el que $K_0 < 0$ (hiperbólico) o $K_0 = 0$ (euclideo). Pero «abierto» se aplica al espacio-tiempo para denotar que no es compacto. Sin embargo, la parte espacial puede perfectamente ser compacta. Esta confusión llevó a la idea de que si la curvatura era menor o igual que cero, entonces el universo era no compacto, es decir, un espacio hiperbólico o un espacio euclideo, respectivamente.

A partir de la década de 1990, los cosmólogos retomaron el interés por la pregunta de la forma global del universo. Si la geometría es finalmente hiperbólica, tenemos muchas posibles 3-variedades con esa geometría. De hecho, éste es un motivo filosófico a favor de que la geometría sea hiperbólica: la mayor parte de las 3-variedades compactas con geometría isotrópica tienen $K < 0$, luego el universo tiene más probabilidades de ser hiperbólico.

Para averiguar la topología del universo necesitaríamos recorrerlo de punta a punta. De esta manera podríamos construir un «atlas». Tal como ocurría en Planilandia, ésta es una tarea impracticable. Ni el mejor de los cohetes podría llegar muy lejos. El motivo no es que la tecnología no esté lo suficientemente desarrollada, sino un impedimento físico inherente al universo: según la teoría de la relatividad, el límite máximo para la velocidad de cualquier objeto es la velocidad de la luz.

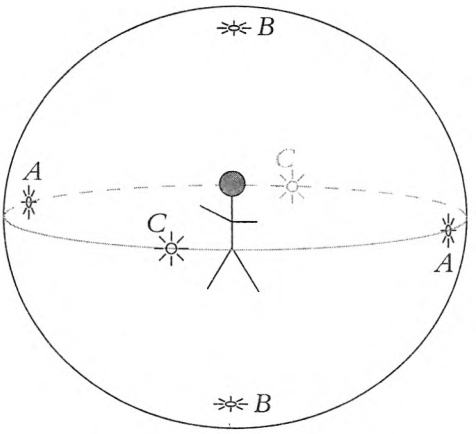
Enviemos entonces fotones como viajeros interestelares. Debemos emitirlos formando un mensaje lo suficientemente complejo como para que no los confundamos con fotones que provengan aleatoriamente del espacio (si sintonizamos nuestro radiotelescopio y recibimos una señal de un programa de televisión de la década de 1950, ¿qué pensaríamos?... ¡Seguramente la señal ha estado viajando por

el espacio hasta retornar a nosotros!). Además, enviaríamos nuestra señal en todas las direcciones esperando a ver por cuál de ellas regresa.

No obstante, el tamaño del universo es muy grande, y no podemos esperar tanto tiempo para que un mensaje emitido por nosotros regrese. Es más ¡el universo está creciendo, y puede que la señal jamás retorne!

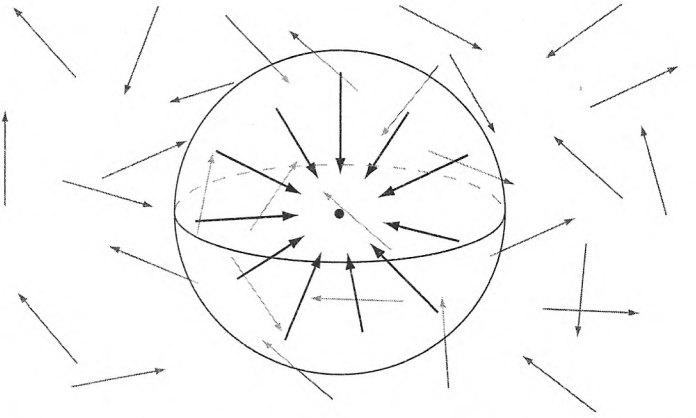
La siguiente idea es usar la luz que «ya» está circulando por el universo. Por ejemplo, podríamos buscar la imagen de nuestra galaxia. La cuestión es que la luz que podríamos recibir de nuestra galaxia probablemente habría estado viajando millones de años por el universo, y la imagen sería de hace millones de años, con lo que no tendríamos manera de identificarla.

También podemos buscar imágenes de galaxias repetidas. Por ejemplo, si el universo fuera un 3-toro, podría llegarnos la luz de una galaxia desde dos lugares distintos, como en la siguiente figura.



En un 3-toro, las imágenes de la derecha y de la izquierda provienen del mismo objeto.

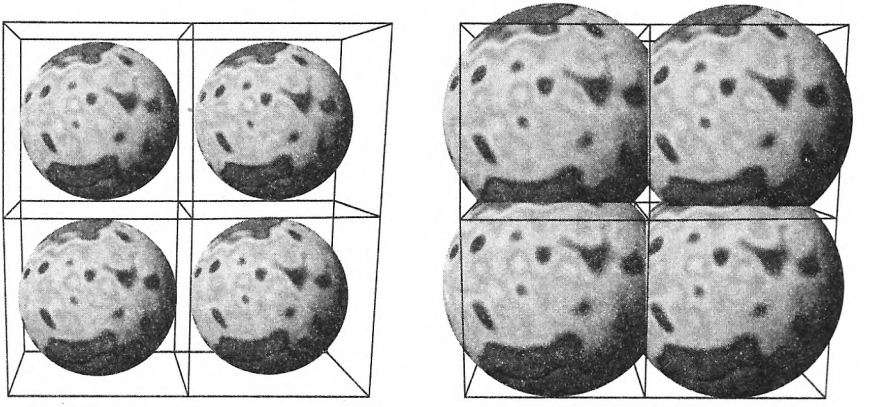
Dado que la edad del universo es de 13.730 millones de años, la luz no puede haber estado viajando más de ese tiempo. Por tanto, sólo podemos ver los objetos que han emitido su luz y que no se encuentran muy lejos. Afortunadamente, y gracias a la expansión continua del universo, esta distancia es sensiblemente mayor de 13.730 millones de años luz. De hecho, vemos una esfera de radio 46.500 millones de años luz. La superficie límite de la región visible se denomina LSS (Last Scattering Surface). Esta superficie crece con el tiempo.



La LSS tiene un diámetro de 93.000 millones de años luz. Lo que está fuera no es visible: es una parte del universo inaccesible para nosotros (fuente: The shape of space, *de J. Weeks).*

Por tanto, si el universo fuera infinito, o mucho más grande que la LSS, no habría manera de averiguar nada sobre su topología global, pues sólo podríamos ver una pequeña parte del mismo.

De hecho, supongamos que el universo es compacto, y que hay una teselación asociada a su topología de uno de los espacios: la 3-esfera, el espacio euclideo o el espacio hiperbólico (dependiendo del valor de la curvatura). Dibujando las copias de las esferas LSS en cada bloque de la teselación, tenemos una de las dos situaciones de la siguiente figura:



En la imagen de la izquierda, el tamaño del universo es mayor que la esfera LSS; en el de la derecha, es menor que la esfera LSS (fuente: The shape of space, *de J. Weeks).*

Si el tamaño del universo es mayor que la esfera LSS, entonces las copias de las esferas LSS no se intersecan. Por tanto, no veremos copias del mismo objeto en dos puntos distintos del espacio, y no podremos averiguar nada del universo mirando a la zona visible. En cambio, si el universo tiene un tamaño menor de 93.000 millones de años luz, entonces las esferas LSS se intersecan, y hay imágenes en el universo que vemos repetidas. Ciertamente, como es posible que el universo, de ser menor que ese tamaño, sea aún así muy grande, entonces las imágenes repetidas deben buscarse entre las imágenes de la luz más antigua.

El fondo de radiación cósmica

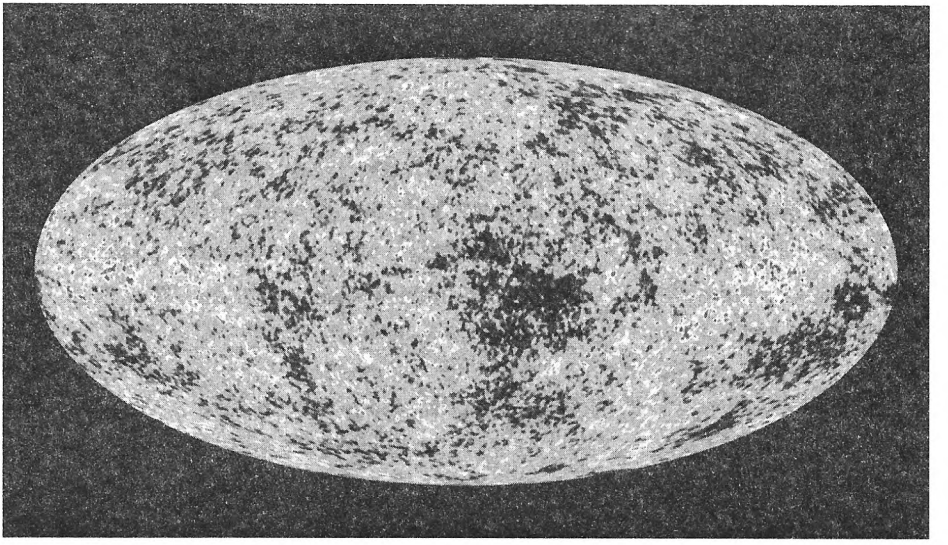
La luz que viene de la LSS es la más antigua. Tras el Big Bang, toda la masa y la energía estaban condensadas en forma de plasma. A los 400.000 años del Big Bang, el universo se había expandido lo suficiente como para que hubiera espacio para la formación de los átomos. En ese momento, la luz se sintió libre para viajar por el espacio. Ésa es la luz más antigua que vemos. En su inicio, la temperatura de dicha luz era de 3.000 °K (3.000 grados Kelvin). Al expandirse el universo, esta luz aumentó su longitud de onda, enfriándose, y hoy es una onda a unos 2,7 °K (2,7 grados por encima del cero absoluto; ésta es la *temperatura del universo*). La onda resultante es la CMB (Cosmic Microwave Background radiation, «radiación cósmica de microondas de fondo»), y llena todo el espacio. Fue descubierta en 1965, por casualidad, por los astrónomos A. Penzias y R. Wilson, ya que producía un ruido de fondo en observaciones astronómicas que no había forma de eliminar.

La radiación de fondo se relaciona directamente con la masa (y, por tanto, con la curvatura) debido al hecho de que las zonas del universo más densas han frenado más los fotones y, por tanto, los han enfriado más. La radiación de fondo es remarcablemente uniforme, dando indicios de que la curvatura es más o menos constante. Obviamente, sólo nos dice esto del universo observable, pero a menos de que éste sea muy pequeño en comparación con el universo global, es lógico inferir que la curvatura es de hecho constante.

Pero la CMB no es exactamente uniforme, sino que tiene pequeñas anisotropías debido a las ligeras variaciones de curvatura. Así que, en vez de buscar imágenes repetidas de galaxias, podemos buscar imágenes repetidas en el mapa de la CMB. De encontrarlas, esto nos indicaría el tipo de teselación que nos da el universo y, por tanto, de qué 3-variedad se trata.

En 2003, las observaciones de la CMB sugirieron que el universo tenía la forma de la variedad de Poincaré. Ésta fue una noticia de gran impacto mediático, aunque las observaciones más exhaustivas de la CMB no han confirmado en absoluto esta teoría (de hecho, para que pudiera darse dicha situación, la curvatura habría de ser positiva).

El proyecto WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, «buscador de anisotropías de microondas Wilkinson») de la NASA, que comenzó en 2001 y recopiló datos durante siete años, seguidos de otros tres años de análisis de los mismos, ha tenido como objetivo analizar las propiedades del universo a través de un mapa de alta resolución de la CMB.



Mapa del fondo cósmico de microondas (CMB) elaborado por el proyecto WMAP, en el que se muestran las anisotropías del universo 400.000 años después del Big Bang. Las distintas tonalidades dependen de la temperatura y, por tanto, de la densidad de materia (fuente: NASA).

Los resultados se hicieron públicos en enero de 2010. La WMAP confirmó la teoría del Big Bang y dató la edad del universo con un error de menos del 1%. Concluyó que la materia oscura (no bariónica) es del 23,3% (± 1,3%), la energía oscura, del 72,1% (± 1,5%), mientras que el resto está formado por átomos (4,6%), incluyendo estrellas, planetas y polvo interestelar.

Teniendo en cuenta que las fluctuaciones de las anisotropías también dan indicios de la curvatura, la WMAP concluyó que la curvatura del espacio se encuentra en un margen de un 1% de ser euclidea.

Sin embargo, no se han detectado coincidencias en diversas zonas del CMB, lo que indica que muy posiblemente el universo es de mayor tamaño que el LSS, es decir, que su tamaño es de, al menos, 93.000 millones de años luz. El inconveniente de este descubrimiento es que no podemos averiguar su topología.

Epílogo

Nos encontramos en un universo en expansión, dominado por una materia oscura de la que no conocemos su naturaleza, y con una cantidad mayoritaria de energía oscura aún más misteriosa, de la que tenemos constancia sólo por su efecto en la aceleración de la expansión del universo. Es más, parece que vivimos en el universo sin poder tener acceso alguno a lo que está fuera de una gran bola (la esfera LSS) que, a pesar de tener 93.000 millones de años luz de diámetro, es sólo una parte del universo.

La pregunta del origen del universo, de su forma, evolución y posible final ha conducido durante los últimos siglos, y especialmente en el siglo XX, a increíbles avances en el terreno de la cosmología. Pero también ha impulsado el avance de la geometría a través del desarrollo de la teoría general de la relatividad. La última invitada a esta reunión ha sido la topología, que ha hecho una aportación nada desdeñable.

Desafortunadamente, por el momento no tenemos una respuesta definitiva a la pregunta de la forma del universo. El camino que hemos recorrido en este libro nos ha enfrentado a algunos de los problemas más difíciles de las matemáticas, pero no parece haber finalizado. Aunque la noticia de la inaccesibilidad a una parte del universo pueda indicarnos que no habrá manera de contestar jamás a esta pregunta, no deberíamos darnos por vencidos. Seguramente harán falta nuevas ideas, pero es posible que alguna vez encontremos una respuesta. ¡Y apuesto a que las matemáticas estarán allí para colaborar!

Bibliografía

ABBOTT, E. A., *Planilandia. Una novela de muchas dimensiones*, Palma de Mallorca, José J. de Olañeta, 1999.

GÓMEZ URGELLES, J., *Cuando las rectas se vuelven curvas*, Barcelona, RBA, 2010.

IBAÑEZ, R., *La cuarta dimensión: Es nuestro universo la sombra de otro*, Barcelona, RBA, 2010.

MOLES VILLAMATE, M., *Claroscuro del Universo*, Madrid, Colección Divulgación CSIC, 2008.

MUÑOZ, V., *Cien años de la Conjetura de Poincaré*, Madrid, La Gaceta de la RSME, vol. 7, N°. 3, 2004, págs. 629-653, http://www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=426.

PROYECTO WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE, http://map.gsfc.nasa.gov/.

WEEKS, J. R., *The Shape of Space*, CRC Press, 2ª edición, 2001.

Índice analítico

agujero 37-39, 42, 65, 68-69
  blanco 161
  de gusano 161
  negro 160-161
ángulo 19, 44, 84, 86, 100, 109, 111
anisotropía 148, 166-168
antípoda 28, 30-36, 82-83, 121
año luz 20, 150, 164-169
área 62-63, 84-86, 95-98, 103-107
asa 41, 69-70, 128-129
atlas 33-35, 78, 119-120, 163
autointersección 60

banda de Möbius 47-49, 55-59, 63
bicoloreable 56-57
bidimensional 31, 62, 88, 104, 127, 135
Big Bang 24, 153-162, 166-167
biyección 54
borde 28-32, 62-64, 68-70, 98, 105, 118
botella de Klein 17, 58-61, 88, 120
  3-botella de Klein 127-128

característica de Euler-Poincaré 65-78, 96-99, 106-107, 120
carta 35, 119-120
cilindro 44, 58-60, 63, 69, 70, 88
circunferencia 14-15, 22, 60-61, 99, 131
cirugía 119, 132
Colón, Cristóbal 14
compacto 76, 156, 158, 163, 165
conjetura de Poincaré 118-119
constante
  cosmológica 153, 156-157, 162
  de Hubble 154, 157, 162-163
continua 54, 97, 156, 164
coordenadas 20-23, 106, 116, 129, 147
corrimiento hacia el rojo 153-156, 159
cosmología 149-151, 169
cúmulos de galaxias 148
curvatura 92-114, 133-141, 151-168
  de Gauss 94, 95, 107
  direccional 92, 107, 134
  media 97-99, 106
  seccional 135

deformación 42, 46, 54, 91, 112, 151
  elástica 52, 72, 91, 98
  rígida 88-89, 91
dirección
  normal 87, 88
  principal 92-93
disco 12, 30-31, 37, 62-64, 69-71
  de Poincaré 102, 104, 112-113, 136
distancia 82-83, 87-91, 107-114, 150
donut 18, 37, 42, 52, 68, 132

ecuaciones del campo 151, 162
Einstein, Albert 11, 20, 23, 76, 147-157, 162-163
Elcano, Sebastián 16
energía oscura 162, 167, 169
entorno 62, 100, 108-112, 115-117, 123-124
esfera 22, 37, 68-69, 73, 102-108, 131
  0-esfera 22, 131
  3-esfera 22, 118, 120-122, 137, 139
  LSS 164-168, 169

espacio
  euclideo 10, 75, 101, 144, 156
  hiperbólico 137-138, 141, 156, 163, 165
  tridimensional 20-22, 54-57, 115-117, 137
espacio-tiempo 147, 151-153, 157, 160-163
Euclides 75, 81

finito 12, 24, 29, 40, 145, 149
fondo de radiación cósmica (CMB) 166-168
forma
  del universo *véase* universo, forma del
  espacial 137
  global 18, 24, 51, 76, 98, 150, 163
  local 7, 19, 24, 76, 98, 149
framing 132-133
futuro del universo *véase* universo, futuro del

género 47, 69-74, 111-114
geodésica 88, 89, 107, 112, 133-134, 152
geometría 7-8, 16-20, 75-153, 159-163
  esférica 82-87, 107, 139-140
  euclidea 86, 99, 108, 114
  extrínseca 87-88, 94, 133-134
  hiperbólica 102-105, 112, 114, 141, 144, 146
  intrínseca 88, 104, 106, 134
  riemanniana 75, 76
geometrías no euclideas 7, 8, 75, 86
global 57, 84, 99, 105, 109, 156-157
gravedad 11, 31, 151-152, 157-162
grupo fundamental 38-39, 65, 163

homeomorfismo 55, 63, 92, 132
homeomorfo 55, 67, 96, 115-116, 123, 124
homogéneo 24, 148
homotecia 86, 101, 104, 114
homótopo 38, 132

identificación 53, 111, 123-125, 128, 139
ilimitado 23-24, 40, 63-64, 138, 147
integral 96-98
isotrópico 136, 148, 159

lazo 36-41, 55, 68, 118, 127-128
Linealandia 28-31
local 19, 99, 159 (*véase también* forma local)
longitud 10, 15, 86, 99, 108, 132, 155

mapa 13, 33-36, 78, 166-167
materia oscura 159, 160, 167, 169
meridiano 132
modelizar 25
modelo del cuadrado (del toro) 42-45

no orientable 55, 58, 59, 61, 126-128
nudo 131-132

objeto 17-19, 64, 66, 152, 155, 163
orientable 56-57, 65, 73, 77, 147
orientación positiva 125-126

paralela 79-80, 83, 84
parámetros cosmológicos 162-163
pársec 150
pegado de asas 69, 70, 128-132

planilandés 27, 87-79, 100, 122
Planilandia 24-49, 75-114, 122, 163
plano proyectivo 61, 88
Poincaré, Henri 118-119, 140
polígono 61, 71, 89, 95-97, 111
  fundamental 71, 111, 113-114, 139-140
postulado de las paralelas 79-83, 101, 103, 107, 114, 115
problema de clasificación 74, 118-119, 132
propiedad
  extrínseca 56
  intrínseca 56
proyecto WMAP 167
puerta interespacial 39-47, 111, 128-130, 161
punto
  liso 116, 124
  regular 112
  singular 116

radianes 85, 86, 95, 97
Riemann, Bernhard 22, 75, 97, 107, 144
rotación 35, 101, 114, 157, 160

semejanza 86, 95, 101, 158
sin borde 63-64, 68-69, 73, 98
singularidad 116, 158, 160
suma conexa 70-73, 130, 133
superficie 51-74, 87-95, 98-107, 111-114

teorema
  de clasificación de superficies 73-74, 76, 77
  de Gauss-Bonnet 94-99, 105, 107
  egregio de Gauss 94
teoría de la relatividad 20, 23, 147, 150-151, 160, 163
teselación 113, 165-166
  hiperbólica 104-105, 112, 141
tetradimensional 115, 120, 122, 133-134
Tierra 11-24, 35, 146, 150-155
  esférica 14, 17, 144
  plana 14, 16, 144
topología 16-19, 51-74, 115-141, 163-168
  algebraica 25, 66
  extrínseca 54-55
  intrínseca 54-55
toro 38-45, 52-54, 68-73, 108-112, 132
  3-toro 122-125, 127, 140, 164
  traslación 101-114
triángulo 19, 80, 84-87, 94-96, 100
  hiperbólico 76, 104-105
tridimensional 56, 59, 82, 88, 123-124, 145

universo 144-169
  edad del 154, 156, 164, 167
  en expansión 153, 169
  forma del 10, 19-24, 33, 135, 143-169
  futuro del 157-158
  observable 159, 166

variedad 23-25, 115-119, 138-141, 144, 147
  3-variedad 24, 116-125, 128-141, 147, 156
  de Poincaré 139, 167

Formas que se deforman

La topología

La topología se ocupa de estudiar las figuras y sus deformaciones, y considera que una forma es igual a otra si puede obtenerse de la primera sin 'romperla'. Es por ello que a menudo se afirma que un topólogo es un matemático que no sabe distinguir un donut de una taza de café.
La topología es una rama de la matemática —y una de las más importantes— pero a ojos de un profano no parece siquiera matemática: sin fórmulas, sin ecuaciones, sin funciones... ¡ni números y ni letras! Hay pocas disciplinas más abstractas y, a la vez, más fascinantes: bienvenido al apasionante mundo de la topología.