El arte de contar

Combinatoria y enumeración

Juanjo Rué

El mundo es matemático

El arte de contar

Combinatoria y enumeración

Juanjo Rué

El mundo es matemático

A mis padres
y a mi abuela Antonia.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí

ISBN: 978-84-473-7437-3
Depósito legal: NA-2693-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio

Durante una tarde soleada me hallaba paseando, junto con una buena amiga, por los jardines de Luxemburgo. Todo era bullicio: jugadores de petanca del más alto nivel, niños tramando futuras fechorías y parejas de enamorados proclamando a los cuatro vientos su pasión. El simple hecho de pensar que nos hallábamos en el Barrio Latino de París y que la historia precedía nuestros pasos me llenaba de una sensación de júbilo. Un lugar como éste incita a la discusión, a la reflexión y al diálogo. Y así fue que nos pusimos a hablar. Y no nos entendíamos: yo hablaba de matemáticas; más bien, yo hablaba con lenguaje matemático, y no sobre las ideas que se hallaban detrás de estos tecnicismos. Entendí que había un problema y me puse a intentar encontrar cuál era.

Las matemáticas son técnica (¡y mucha!) pero en el fondo son ideas. Y las ideas deben poder expresarse de manera sencilla, aunque sea un duro ejercicio de simplificación por parte del locutor. Es en este aspecto en el que muchas veces los propios trabajadores del ramo nos equivocamos y damos una imagen incorrecta y alejada de la realidad. A mi modo de ver, el experimentado investigador (y el no tan experimentado) tiene el compromiso, más bien la obligación moral, con la sociedad para devolverle la esencia de su trabajo: las buenas ideas y los bellos resultados. Ésta es mi modesta intención con este modesto libro.

Este libro se dedica a la combinatoria, una disciplina con la que únicamente necesitamos saber dibujar y contar para deducir resultados muy ingeniosos, sorprendentes e inesperados. Una disciplina con problemas de enunciado sencillo (fácil de entender incluso para nuestros sobrinos), pero de solución imposible. Y en todos los casos, problemas y nociones que nos permiten entender mejor la realidad.

Para realizar la exploración de esta área empezaremos de manera sencilla: contando con los dedos. Dichas cuentas nos permitirán entender por qué en algunas situaciones es provechoso apostar en los juegos de azar, aun sabiendo que nada tenemos a nuestro favor para ganar. Seguidamente pasaremos a ver que la combinatoria va más allá de las cuentas, y que abarca también el estudio de modelos discretos que simplifican la realidad. Con ello entenderemos que cuando hay que diseñar una red de carreteras, el uso de puentes vendrá condicionado por la manera que han de conectarse las localidades, y no por la pericia del ingeniero jefe.

Todas estas nociones que introduciremos serán utilizadas de manera muy particular por un personaje que marcará un antes y un después en lo que entendemos por combinatoria hoy en día: el genial y prolífico Paul Erdös. Será él quien nos guíe en la combinatoria actual: la de contar sin usar los dedos y en la de la exploración de objetos caóticos en los que podremos encontrar estructuras escondidas, allí donde el azar y el determinismo se mezclan; la de jugar a los dados con los grafos y la de hallar viejas amistades en reuniones de sociedad. Porque Dios no sólo juega a los dados con el universo, sino que lo hace en mayor medida con muchísimas otras cosas.

Finalmente mostraremos que en la aritmética de las cifras también hay una combinatoria subyacente, casi se podría decir que mágica, y explicaremos uno de los teoremas matemáticos más importantes de los últimos años: el teorema de Green-Tao, resultado cumbre de las matemáticas de todos los tiempos.

Me gustaría aprovechar la oportunidad para agradecer a Guillermo Navarro por todas las sugerencias que he recibido a lo largo de este largo proceso de escritura, y a Javier Fresán por haber confiado en mis dotes de divulgador. También quiero dar las gracias a Marta Benages y a Jose Miguel No por haber leído parte del material preliminar que ha conformado el presente libro.

Capítulo 1

¡Contemos!

Cuando se viaja por el mundo se debe intentar degustar las delicias culinarias que la región visitada ofrece. Un viaje, para que se considere como tal, en algún momento se debe sustentar en el descubrimiento culinario. Así es, ya que la cocina típica del lugar permite al paladar acompañar al viajero en el periplo. Junto con el descanso del caminante, la degustación de los manjares autóctonos es necesaria para entender la cultura y las costumbres de los parajes que se están descubriendo.

Desgraciadamente, muchas veces el gusto está demasiado habituado a los sabores de la tierra de origen y no soporta un festín gastronómico como el que se le presenta. Como reacción a este hecho, y como una tregua temporal, se acostumbra a entrar, siempre con un cierto sentimiento de culpa, en alguno de los restaurantes italianos que se hallan esparcidos a lo largo y ancho de la geografía mundial. Y en todo restaurante italiano que se precie el plato estrella es la pizza. Llegados a este punto del viaje surge el dilema fundamental de la existencia humana: ¿tomaremos una cuatro quesos o una cuatro estaciones? ¿Saborearemos la pizza de tamaño mediano o la de tamaño pequeño? ¿La pediremos con o sin cebolla? ¿Tomaremos un ingrediente adicional? Dudar es inevitable ante tal variedad, ya que mucho más allá de las pizzas que se ofrecen en la carta del restaurante se abre ante el viajero un universo de combinaciones posibles.

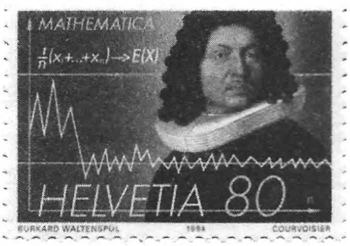
Con esta diversidad resulta natural preguntarse cuántas pizzas distintas se podrían llegar a pedir con los medios que el restaurante ofrece. Se observa que la cuenta es complicada por diversas razones: por ejemplo, porque existen ingredientes que son incompatibles entre ellos.

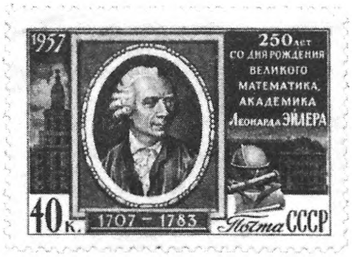
El arte de contar

Pero lo importante de este asunto es que cuestiones parecidas surgen en la vida cotidiana: cómo y de cuántas maneras podemos combinar las corbatas y las americanas de nuestro armario de tal manera que no se repita conjunto y, lo más importante, que exista una cierta armonía de colores; o de cuántas maneras podemos realizar recorridos campestres por los pequeños pueblos de nuestra provincia. Todas estas cuestiones forman parte, en mayor o menor grado, de lo que se conoce como *combinatoria enumerativa*. Esta disciplina es el arte de contar, porque contar es un arte y requiere de unas técnicas propias.

El arte de contar no es una disciplina nueva; al contrario, es precisamente una de las cuestiones más naturales y fundamentales que aparecen en matemáticas. Como en muchas áreas científicas, su origen no es claro: en Occidente su estudio sistemático se inició como consecuencia de su íntima relación con el cálculo de probabilidades. Ya en el siglo XVII, Blaise Pascal (Clermond-Ferrand, 1623-París, 1662) y Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 1601-Castres, 1665) se preguntaron sobre cuestiones probabilísticas ligadas a los juegos de azar, que les fueron planteadas por un jugador ávido de respuestas: el Chevalier de Méré. En estas cuestiones el cálculo de los casos favorables dividido entre los casos posibles (lo que más adelante se pasaría a llamar en probabilidades *regla de Laplace*) era el elemento clave para dar explicaciones precisas de la fenomenología observada. Más tarde, grandes científicos como Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1646-Hannover, 1716) y Jakob Bernoulli (Basilea, 1654-1705) consiguieron establecer la combinatoria como una disciplina independiente de las ya existentes. Con posterioridad, y con la evolución del lenguaje matemático y de sus técnicas, se observó que la combinatoria también estaba íntimamente ligada a otro tipo de problemas, más allá de la probabilidad y de las cuentas: Leonhard Euler (Basilea, 1707-San Petersburgo, 1783) introdujo por primera vez la noción de grafo con el fin de estudiar la problemática de los puentes de Königsberg, y Arthur Cayley (Richmond, Surrey, 1821-Cambridge, 1895), motivado por el estudio de isómeros en hidrocarburos saturados, obtuvo múltiples resultados en enumeración de grafos. En la actualidad, la combinatoria es un área de intensa actividad científica, tanto a nivel teórico como en términos prácticos.

Más allá de saber contar con los dedos (usándolos, en muchas ocasiones, con mucha astucia), la combinatoria enumerativa nos permite acceder a una información mucho más cualitativa y estructural de los objetos bajo estudio. Así es que, a pesar de que la combinatoria enumerativa es una disciplina con derecho propio en el Olimpo de las matemáticas, muchas otras áreas beben de sus técnicas para sacar conclusiones: en probabilidad, saber contar es fundamental para conocer la proporción de casos favorables con respecto a los casos posibles, y en algorítmica es fundamental saber cuántos pasos necesita cierto proceso para decidir si éste es mejor o peor que otros métodos ya existentes. Mucho más allá de estas disciplinas, el saber contar bien tiene ramificaciones profundas en áreas más heterogéneas como son por ejemplo la mecánica estadística y la geometría enumerativa.





Jakob Bernoulli (arriba a la izquierda), Leonhard Euler (izquierda) y Gottfried Wilhelm Leibniz, precursores de la combinatoria, inmortalizados en estos sellos de correos.

RAMON LLULL, OTRO PRECURSOR DE LA COMBINATORIA

Ramon Llull (Palma, ca. 1232-en travesía marítima, cerca de Palma, 1315) nació en el seno de una familia de la burguesía local de Mallorca poco después de que Jaime I conquistase la isla. A lo largo de su vida se dedicó a múltiples y muy distintas labores. En su juventud fue miembro de la corte de Jaime I y vivió en un ambiente que se podría catalogar de un tanto hedonista. Años más tarde, y como consecuencia de varias visiones de Jesucristo en la cruz, abandonó a su familia para dedicarse a la contemplación. Fue misionero, franciscano y asceta, y viajó por todo el Mediterráneo predicando el cristianismo y la conversión. Su obra abarca tanto la filosofía como la teología, pasando por la astronomía y por la alquimia. De hecho, se le considera el padre de muchas de las grandes disciplinas actuales, como, por ejemplo, la combinatoria. En su obra cumbre, *Ars Magna* (1305), Llull construye un método consistente en combinar atributos, tanto religiosos como filosóficos, seleccionados de una lista. Esta idea de *combinar* le fue inspirada, en mayor o menor grado, por los utensilios árabes que se utilizaban en astronomía y en navegación, y que se basaban en la combinación de distintas posiciones con el fin de llegar a la conclusión deseada. Mediante este intento, Llull pretendía descubrir en cualquier área los conceptos adecuados para crear juicios y silogismos, y construir razonamientos lógicos mediante unos principios matemáticos. En cierta manera su objetivo era el de mecanizar y *matematizar* el conocimiento partiendo de una premisa combinatoria. De manera muy ligada a la combinatoria, Llull también se considera uno de los precursores de la computación y de la inteligencia artificial.

Contando con los dedos

Para empezar este paseo por el mundo de la combinatoria vamos a utilizar los dedos y algún que otro argumento de sentido común. Eso sí, ¡es posible que necesitemos n dedos para llegar a nuestro objetivo! Como veremos, existen objetos que se pueden enumerar directamente, otros los podremos contar indirectamente e incluso habrán algunos que los podremos contar de distintas formas. En cualquiera de los casos, mostraremos que los argumentos usados no están faltos de ingenio.

El primer paso para entender con precisión los principios combinatorios básicos es saber traducir el lenguaje corriente a afirmaciones genéricas y universales. Iniciaremos este proceso traduciendo al mundo matemático las nociones del «y» y también el «o». Veamos un ejemplo sencillo para clarificar este punto: supongamos que vamos a nuestro restaurante favorito a tomar el almuerzo matutino. Debido a que hemos desayunado muy temprano, nuestro estómago nos pide a gritos un festín culinario en forma de entrante y de plato principal. Por contra, si debido a los excesos de los meses anteriores nuestro bien amado médico de cabecera nos ha recomendado realizar un régimen estricto, entonces elegiremos la opción de tomar un único plato, bien un entrante o bien uno de los platos principales.

Consideremos la primera de las situaciones. En este caso, el «y» se traduce en que debemos escoger dos platos, el correspondiente al entrante y el plato principal. Para realizar la elección, podemos seguir el siguiente procedimiento: primero escogemos el entrante que más nos apetezca y, una vez hecho esto, elegimos el plato que prefiramos. Esto no es más que una pareja de la forma (entrante, plato) que nos define de manera única nuestro almuerzo.

La construcción matemática abstracta asociada a esta situación es la siguiente: dados dos conjuntos A y B, definimos el concepto de «producto cartesiano de A y de B» como un nuevo conjunto C que se escribe como $A \times B$, cuyos elementos son *parejas*, donde la primera componente del par pertenece a A, mientras que la segunda pertenece a B. Para el caso de nuestro ejemplo, el conjunto A es el de entrantes, B, el de platos principales, y C es la cantidad total de combinaciones posibles de entrante y plato principal que podamos escoger. Cada una de estas combinaciones de entrante y plato principal son, en consecuencia, parejas (a, b) donde a es un elemento de A, *y* b es un elemento de B. ¿Cuántas de estas parejas existen o, lo que es lo mismo, cómo se calcula el número de elementos de C? La respuesta es obvia: multiplicando el número de elementos contenidos en A por el número de elementos contenidos en B: según el ejemplo anterior, por cada elección distinta de un entrante puedo escoger cualquiera de los platos principales. Este argumento es del todo general y abarca lo que en combinatoria se conoce como *principio multiplicativo*:

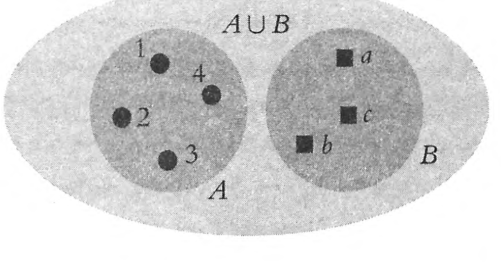
«Sean A y B dos conjuntos finitos. Entonces el número de elementos del producto cartesiano de A con B es igual al número de elementos de A multiplicado por el número de elementos de B».

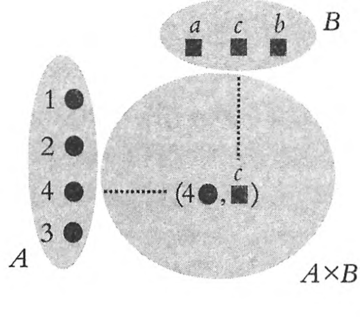
Consideremos ahora la segunda situación, en la que nuestro régimen espartano nos permite únicamente un plato. ¿De cuántas maneras podemos realizar esta elección? El número de posibilidades será precisamente el número total de entrantes ofrecidos más el número de platos, ya que no se ofrece ningún entrante que sea a la vez plato principal. Este hecho se traduce matemáticamente de la siguiente manera: consideramos dos conjuntos *disjuntos* A y B; en nuestro caso son los entrantes y los platos principales que el restaurante ofrece, pues por hipótesis no existe una opción que sea a la vez un entrante y un plato principal. Queremos escoger un elemento de uno de los conjuntos, es decir, queremos escoger un elemento de A o bien de B. Este argumento equivale a unir los conjuntos A y B y elegir un elemento de la unión.

En definitiva, el «o» del lenguaje coloquial se traduce en una unión disyunta en el lenguaje matemático. Todo este argumento se resume en el principio combinatorio denominado *principio aditivo*:

«Sean A y B dos conjuntos finitos, sin ningún elemento en común. Entonces el número de elementos de la unión de A y de B es igual a la suma del número de elementos de A y del número de elementos de B».

En las figuras siguientes mostramos de manera gráfica lo que significan las operaciones de unión y de producto cartesiano de conjuntos, y de ellas se deducen los dos principios que hemos introducido aquí.





NOTACIÓN MATEMÁTICA PARA DESCRIBIR LOS PRINCIPIOS BÁSICOS Y EL PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

El principio multiplicativo y el principio aditivo pueden traducirse usando la notación matemática. Denotando mediante $|A|$ el número de elementos de A, el principio multiplicativo se escribe de la siguiente forma:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Si recordamos que la unión de A y de B se escribe como $A \cup B$, el principio aditivo nos dice que si A y B son disjuntos, entonces se cumple que:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

El principio aditivo puede refinarse para obtener más información cuando los conjuntos A y B tienen algún elemento en común. Supongamos que A y B no son disjuntos, con lo que la intersección de A y de B contiene algún elemento (matemáticamente este hecho se denota escribiendo que $A \cap B \neq \varnothing$). Teniendo en cuenta que al sumar el cardinal de A y el de B estamos sumando dos veces el número de elementos comunes a los dos conjuntos, deducimos fácilmente la fórmula:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Utilizando los mismos argumentos, se generaliza esta fórmula para tres conjuntos: sean A, B, C conjuntos finitos. Entonces se cumple la siguiente relación entre los cardinales:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Este argumento puede generalizarse a familias arbitrarias de conjuntos, obteniendo lo que se conoce en combinatoria como el principio de inclusión-exclusión. Dicho principio tiene numerosas aplicaciones en combinatoria y en teoría de números cuando, por ejemplo, se desea estimar el tamaño de la unión de una serie de conjuntos de los que conocemos estimaciones de los tamaños de las intersecciones mutuas.

El principio aditivo y el multiplicativo son el primer escalón para adentrarnos en el mundo del contar, también llamado del conteo. Estos principios elementales dan lugar a construcciones elementales como las que siguen.

Tomemos un conjunto A de n elementos y consideremos el producto cartesiano de A con él mismo un determinado número de veces (digamos r veces). Este nuevo conjunto está formado por secuencias de la forma $(a_1, a_2,..., a_r)$ (a las que en jerga matemática se denominan *r-tuplas* o *vectores* de longitud r), donde cada uno de los componentes es un elemento de A. Entonces, ¿cuántas r-tuplas existen? Si r fuera igual a 2 estaríamos directamente en el caso del principio multiplicativo, dando lugar a $n \cdot n = n^2$. Si r es distinto de 2, basta aplicar sucesivamente el principio multiplicativo para deducir que el número de r-tuplas es igual a $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^r$. Esta construcción es lo que se conoce como *variación con repetición*.

Supongamos ahora que complicamos un poco más el problema, y que queremos contar r-tuplas pero con la condición de que todas las componentes sean distintas. La primera observación importante con el fin de resolver esta cuestión es que el valor de r, la longitud de la secuencia, debe ser menor o igual que n, el número de elementos de A, ya que de otra manera existirían coordenadas repetidas. Para obtener esta cuenta hay que observar que todo vector $(a_1, a_2,..., a_r)$ con componentes distintas puede construirse de la siguiente manera: elegimos entre todas las posibilidades el elemento correspondiente a la primera componente: a_1. Seguidamente elegimos el segundo elemento de entre todos los posibles, pero sin poder escoger el a_1, que ya hemos elegido en la primera opción. Para la tercera componente podemos aplicar el mismo argumento, prohibiendo la elección de a_1 y de a_2. Y así de manera sucesiva hasta llegar a r. ¿Cuál es entonces la cuenta? Bien, la elección de a_1 es libre, con lo que tenemos n posibilidades. Para a_2 ya no existe tanta libertad, ya que éste no puede ser el elemento que se ha escogido para la primera componente. Por lo tanto, tenemos $n-1$ posibilidades para a_2. Y así de manera sucesiva. Si lo desarrollamos, obtenemos lo que se denominan *variaciones sin repetición de longitud r*, cuya fórmula es:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-r+1).$$

En el caso particular de tomar el valor de r igual al de n, obtenemos lo que se conoce como *permutación de n elementos*. La fórmula de las variaciones sin repetición se escribe en este caso como:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

Esta expresión se suele escribir de manera compacta como $n!$, también llamada *factorial de n*. El factorial nos indica el número de maneras de ordenar un conjunto dado. Esta fórmula es de gran interés y es muy utilizada en matemáticas: por ejemplo, mediante el uso de factoriales las variaciones sin repetición pueden escribirse como:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

El factorial puede definirse únicamente para números naturales positivos, y para el 0 se elije el convenio de definir $0! = 1$. (Existe una razón de fondo para tomar esta definición, relacionada con unas fórmulas más generales que el factorial y que proceden de la denominada *función gamma*, elemento imprescindible en diversas áreas de la matemática, como la probabilidad y la teoría analítica de los números.)

El paso natural a seguir ahora es continuar con las estructuras desordenadas: hasta el momento hemos estado manejando cuentas en las que el orden importa, ya que estábamos considerando en toda la discusión r-tuplas ordenadas de elementos en un cierto conjunto A. Sin embargo, existen infinidad de ejemplos en los que el orden no nos importa: supongamos que se desea ir de excursión a la sierra, y para ello se necesita tomar el coche (con una capacidad de cinco personas), pero existen diez interesados en la excursión. Lo importante es saber quiénes son las personas seleccionadas, y no en el orden en que hayan sido escogidas. ¿Cómo podemos contar objetos no ordenados a partir de otros ordenados? De hecho, no existirá demasiado problema: un objeto no ordenado es un objeto ordenado en el que hemos olvidado el orden.

Vamos a poner rigor estos últimos comentarios. Un subconjunto de r elementos de A es una agrupación de r elementos (de los n que tiene A) en la que no importa el orden. Dado un conjunto A con n elementos, deseamos saber cuántos subconjuntos de A existen que tengan r elementos. Este valor se conoce como el número de *combinaciones sin repetición* de tamaño r en un conjunto de tamaño n. Así pues, para cada subconjunto de tamaño r podemos definir un total de $r!$ r-tuplas distintas, donde el $r!$ se obtiene como resultado de permutar el orden de los elementos (recuérdense las permutaciones que acabamos de definir). Puesto que hemos obtenido previamente el número de variaciones sin repetición, deducimos que el número de combinaciones sin repetición es igual al número de variaciones sin repetición de r elementos, dividido por el número de permutaciones. Es decir, obtenemos la siguiente fórmula para el número de combinaciones:

$$\frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}.$$

En matemáticas se suele utilizar una notación y un nombre propio para esta fórmula. Surge de este modo el denominado *coeficiente binomial,* que se denota de la siguiente manera:

$$\binom{n}{r}.$$

Estos números binomiales también enumeran las denominadas *permutaciones con repetición*. Consideremos un conjunto A con dos elementos. Por comodidad digamos que éstos son 0 y 1. ¿Cuál es entonces el número de secuencias ordenadas de longitud n con exactamente r ceros y $n-r$ unos? Por ejemplo, si tomamos $n=4$ y $r=2$, tenemos las seis 4-tuplas siguientes:

$$(0,0,1,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (1,1,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0).$$

En lugar de contar directamente cuántas permutaciones con repetición existen, lo que haremos será aprovechar que sabemos contar las combinaciones sin repetición y asociar de manera única a cada permutación con repetición un subconjunto de $B=\{1,2,\ldots,n\}$ que tenga tamaño r. De esta manera estamos emparejando perfectamente una permutación con repetición con un subconjunto de r elementos. Cada secuencia de longitud n define un subconjunto de $\{1,2,\ldots, n\}$ de la siguiente manera: si la cifra en la posición m de la r-tupla es igual a 1, entonces m pertenece al subconjunto; en caso contrario, no pertenecerá al conjunto. En el ejemplo que hemos considerado obtenemos las siguientes correspondencias:

$$\begin{gathered}(0,0,1,1)\to\{3,4\}\\(0,1,1,0)\to\{2,3\}\\(0,1,0,1)\to\{2,4\}\\(1,1,0,0)\to\{1,2\}\\(1,0,0,1)\to\{1,4\}\\(1,0,1,0)\to\{1,3\}\end{gathered}$$

Es un simple ejercicio para el lector comprobar que esta operación es invertible, y que para cada subconjunto de r elementos podemos construir una secuencia con ceros y unos que tenga exactamente r unos. Este método que hemos utilizado aquí se denomina *método biyectivo,* y será de gran importancia en el futuro para contar objetos que aparentemente son muy distintos, pero que en realidad son esencialmente lo mismo.

Una combinación de las ideas precedentes da lugar al siguiente resultado, conocido como el *problema del comité*. Imaginemos que deseamos constituir un comité de representantes en un grupo de n personas, con la condición de que el número de miembros del mismo pueda ser arbitrario; incluso el comité puede quedar vacante. La cuestión consiste en encontrar de cuántas maneras podemos constituir dicho comité. Para responder a esta cuestión vamos a ver el problema de dos modos distintos.

Por un lado, podemos razonar que cierto comité estará constituido por r personas, donde r puede oscilar entre 0 (en el caso de que el comité haya quedado vacante) y n (todo el grupo forma parte del comité). Fijado este valor r, ¿cuántos comités de r miembros pueden formarse dentro de un grupo de n personas? Esto es precisamente el número de subconjuntos de tamaño r en un conjunto inicial de tamaño n, o según hemos dicho anteriormente dicha cuenta viene dada por el binomial

$$\binom{n}{r}.$$

Puesto que el número de comités es el total para todas las elecciones de r, por el principio aditivo resulta que el número buscado es igual a a la suma:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}.$$

Los puntos suspensivos en esta fórmula nos indican que el índice inferior de los binomiales oscila entre 0 y n. Veamos cómo podemos obtener el mismo resultado de otra manera. Empecemos etiquetando a las personas, de 1 hasta n. Cada una de ellas viene identificada por un número distinto. Consideremos ahora un vector de longitud n en el que cada componente es o bien un 0 o bien un 1. Cada uno de estos vectores nos da la siguiente información: si en la posición i hemos escrito un 1, entonces la persona cuya etiqueta es i formará parte del comité. De manera opuesta, si en la posición i hemos escrito un 0, dicha persona no formará parte del comité. A modo de ejemplo, para $n=4$ uno de estos vectores sería el $(0,0,1,1)$, y éste nos dice que las personas con etiquetas 3 y 4 son las que conforman el comité. Podemos aplicar ahora lo que hemos estudiado previamente para hallar el número de vectores de longitud n cuyos coeficientes son 0 o bien 1: es simplemente el número de variaciones con repetición de un conjunto de tamaño 2 (el 0 y el 1) tantas veces como n. Es decir, obtenemos que dicho valor es igual a 2^n.

Los dos valores que hemos obtenido (la suma de binomiales y la exponencial) cuentan el mismo número de maneras en las que se puede formar un comité en una población de n miembros. Resumiendo, hemos demostrado la siguiente propiedad combinatoria:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

EL TEOREMA DEL BINOMIO Y SUS CONSECUENCIAS ENUMERATIVAS

Una consecuencia de saber contar objetos no ordenados es el siguiente resultado algebraico, conocido como teorema del binomio de Newton, en honor de la primera persona que lo utilizó de manera sistemática, el genial físico y matemático Isaac Newton (Lincolnshire, 1642-Kensington, 1727). Tomemos el binomio $1+x$. Entonces el polinomio $(1+x)^n$ se escribe como un polinomio de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Para calcular los coeficientes podemos aplicar un argumento combinatorio. Escribamos $(1+x)^n$ como n productos del binomio $1+x$:

$$(1+x)\cdot(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x).$$

La observación clave es la siguiente: cada uno de los sumandos que aparecen al desarrollar este producto surge de escoger de cada paréntesis un 1 o bien una x de todas las maneras posibles. Así, para calcular el coeficiente del término x^i (es decir, a_i) procedemos de la siguiente forma: elegimos i monomios de los n que hay en el producto, de donde tomaremos la x correspondiente, y del resto de monomios tomaremos el 1. Si realizamos esto para todo valor de i, resulta el teorema del binomio de la forma siguiente:

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n.$$

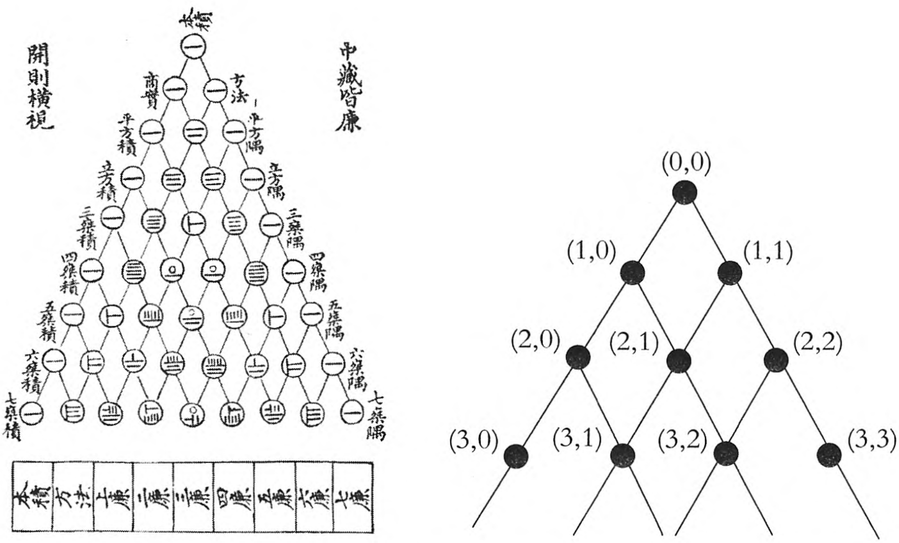
De esta relación podemos obtener otras interesantes: si sustituimos la variable x por un valor igual a 1, obtenemos la fórmula del problema del comité:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n,$$

y si escribimos $x=-1$, deducimos la siguiente igualdad:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0.$$

Existen múltiples relaciones que involucran a los números binomiales. Una de ellas es el denominado *triángulo de Pascal*, también conocido como triángulo de Tartaglia. Más allá de ser una mera curiosidad matemática, el triángulo de Pascal puede utilizarse para demostrar múltiples propiedades combinatorias, de la misma manera que un ábaco se utiliza como instrumento para realizar cálculos aritméticos de manera veloz. Esta construcción ya era conocida en las civilizaciones antiguas: en países orientales como China, India o Persia este diagrama ya fue estudiado cinco siglos antes de que Pascal expusiera sus aplicaciones. En China es conocido como triángulo de Yang Hui, en honor al matemático Yang Hui, quien ya lo describió en el año 1303. En la figura siguiente se muestra una versión oriental del triángulo de Pascal y la simplificación que tomaremos para explicar nuestros argumentos:



El triángulo de Yang Hui y los primeros vértices de un modelo simplificado del triángulo de Pascal.

El punto fundamental para usar el diagrama es la siguiente observación: el número de caminos que parten del punto (0,0), al que llamaremos *origen*, y que llegan hasta el punto (n,m), con la condición de que en cada paso se desciende una unidad (a la derecha o a la izquierda) es igual al binomial:

$$\binom{n}{m}.$$

Obsérvese, en efecto, que para llegar al punto (n,m) debemos realizar n pasos en total, ya que cada uno de ellos nos permite descender una unidad, o de manera equivalente, aumentar una unidad la primera coordenada. Además de ello, necesitamos realizar exactamente m pasos a la izquierda conforme bajamos por el triángulo, ya que los pasos a la derecha no contribuyen a aumentar la segunda componente. Por lo tanto, el número de maneras de descender desde el origen hasta el punto (n,m) se corresponde con el número de permutaciones con repetición, donde el paso a la izquierda se repite m veces y el paso a la derecha aparece en $n-r$ ocasiones.

Mediante el triángulo de Pascal y su interpretación geométrica podemos deducir relaciones combinatorias de manera directa, sin necesidad de realizar ningún cálculo. La primera de ellas es el valor del binomial:

$$\binom{n}{0}.$$

Dicho coeficiente binomial cuenta el número de maneras de partir del origen y llegar al punto $(n,0)$. Puesto que a este destino podemos llegar de un único modo, resulta que el valor de dicho binomial debe ser igual a uno.

Vamos a complicar un poco el argumento para obtener alguna relación más interesante. Para llegar al nivel horizontal n debemos primero cruzar el nivel horizontal $n-1$. De hecho, para llegar al punto (n,m) debemos haber pasado antes por el punto $(n-1,m-1)$ o bien por el punto $(n-1,m)$.

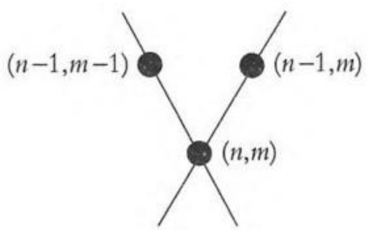


Diagrama local del triángulo de Pascal de los caminos precedentes al punto (n,m).

Mediante el principio aditivo, concluimos que el número de maneras de llegar al punto (n,m) es igual al número de formas de llegar al punto $(n-1,m-1)$ más el número de maneras de llegar al punto $(n-1,m)$, o expresado en el lenguaje de los binomiales:

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}.$$

JUGANDO CON LA SIMETRÍA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

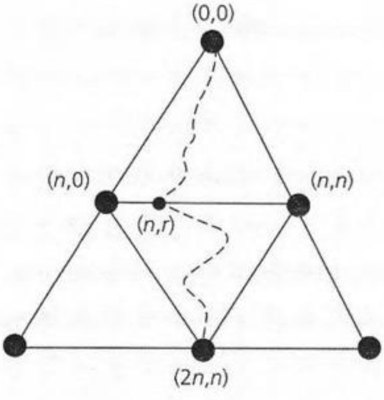
En los casos precedentes hemos explotado la estructura de los caminos en el triángulo de Pascal, pero también podemos utilizar la simetría del triángulo. Aplicando una simetría al triángulo con respecto a su eje central, los caminos que parten del origen y llegan al punto (n,r) se traducen en caminos que parten del origen y llegan al punto $(n,n-r)$. Por lo tanto, se cumple la relación de simetría siguiente:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}.$$

Este argumento también se aplica para demostrar propiedades más complicadas, como la siguiente:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

Para demostrarla usaremos la siguiente propiedad: necesitamos pasar por algún punto de la forma (n,r) para llegar del origen al punto $(2n,n)$. Como el número de caminos del punto (n,r) al punto $(2n,n)$ es igual al número de caminos del origen al punto (n,r) (obsérvese la simetría de la figura), la fórmula precedente se cumple por una simple aplicación del principio multiplicativo y del principio aditivo:



Un camino que parte del origen y llega al punto $(2n,n)$ *, con su paso por el nivel* n.

El lector está invitado a intentar demostrar esta fórmula utilizando el teorema del binomio, descrito anteriormente en este mismo capítulo.

Con esta sección introductoria hemos aprendido las primeras ideas en el arte del conteo. Todo lo mostrado nos será muy útil en los capítulos posteriores, en los que estudiaremos objetos más complicados, como los grafos, los mapas y los árboles, y será fundamental para resolver paradojas y enigmas que proceden de inocentes juegos de dados. En definitiva, para entender con más profundidad la noción de aleatoriedad.

Probabilidad y combinatoria: dos disciplinas que se pasean de la mano

La combinatoria es una disciplina de la que se nutren muchas otras. El cálculo de probabilidades en juegos de azar resulta ser una de las vías idóneas para adentrarnos en los conceptos enumerativos básicos. Los principios multiplicativos y aditivos que hemos introducido, junto con las construcciones asociadas, como los números binomiales, nos serán de gran utilidad para entender mejor algunas de las curiosas paradojas que los juegos azar nos deparan. Porque muchas veces, es mejor saber contar bien que confiar en el instinto del experimentado jugador...

Los orígenes de la probabilidad como disciplina fueron consecuencia de unos fructíferos intercambios de cartas entre Antoine Gombaud (Poitou, 1607-1684), que se hacía llamar «Chevalier de Méré», y los matemáticos Pierre de Fermat y Blaise Pascal. Aunque Gombaud no pertenecía a la nobleza, adoptó el título de caballero (de Méré, en reconocimiento a la villa donde realizó sus estudios) para firmar sus obras. Además de ser un ferviente defensor del diálogo social frente al hereditarismo monárquico, uno de sus grandes intereses eran los juegos de azar. Gombaud observó ciertos problemas paradójicos que surgían como consecuencia de apuestas en juegos de dados. Es por ello que escribió estas dudas al gran filosofo y matemático francés Blaise Pascal, con el fin de que un «profesional» pudiera esclarecer sus dilemas. Esta carta fue la primera de una correspondencia cruzada entre el jugador con olfato perspicaz, el filósofo y, posteriormente, el abogado y matemático aficionado Pierre de Fermat. Resulta curioso el siguiente comentario que hizo Pascal a Fermat en una carta fechada el 29 de julio de 1654: «...El caballero de Méré tiene mucho talento, pero no es geómetra; esto es, como sabéis, un gran defecto...».

A pesar de que nosotros tampoco somos geómetras, intentaremos entender qué es la probabilidad y qué es un fenómeno aleatorio. Discutiremos sobre loterías, juegos de azar en general y apuestas. Por lo tanto, sería interesante utilizar una notación abstracta que abarque todos estos conceptos para abordar la problemática

FERMAT Y PASCAL: EL ABOGADO Y EL FILÓSOFO QUE CAMBIARON LAS MATEMÁTICAS

El trabajo de Pierre de Fermat como jurista en el Parlamento de Toulousse no le impidió convertirse en uno de los matemáticos más influyentes de la primera mitad del siglo XVII. Entre sus aportaciones más importantes se incluyen las primeras ideas para la algebrización de la geometría y la construcción del cálculo de probabilidades. Sin embargo, es en teoría de números donde se forjó el sobrenombre de «príncipe de los matemáticos aficionados». Posiblemente la anécdota más conocida cuenta que en su edición de *La Aritmética* de Diofanto escribió en uno de los márgenes: «...Es imposible encontrar la manera de escribir un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado en la suma de dos potencias de la misma clase; para este hecho he encontrado una demostración excelente. El margen es demasiado pequeño para que la demostración quepa en él...». Este problema sería resuelto más de 400 años después utilizando técnicas muy alejadas del alcance del abogado, y dando lugar al denominado «último teorema de Fermat».

La obra de Blaise Pascal abarca un amplio abanico de disciplinas, partiendo de las matemáticas, pasando por la filosofía y sin olvidar la física. Además de su contribución a los fundamentos de la probabilidad, Pascal realizó aportaciones importantes al estudio de la hidrostática. A raíz de una visión religiosa en el año 1654, como consecuencia de una experiencia próxima a la muerte, Pascal aumentó su creencia y dedicación religiosa, hasta tal punto que años más tarde acabaría dedicándose casi íntegramente a la filosofía y a la religión. En este contexto de religiosidad y de matemáticas es en el que Pascal introdujo la denominada «apuesta de Pascal» en su obra *Pensées*: supongamos que la existencia de Dios no es conocida. Si apostásemos por su existencia o su no existencia, Pascal razona que la apuesta ganadora sería la de la existencia. Así es, ya que aún siendo la probabilidad de ésta ínfima, tal pequeñez sería compensada por la gran ganancia que se obtendría al conseguir la gloria eterna.

con generalidad. Cuando se tira un dado, por ejemplo, existe una infinidad de factores que influyen en el hecho de que el resultado de la jugada sea un valor u otro: el ángulo de salida del dado, su velocidad y su momento de inercia, la altura respecto de la mesa, la fricción con el aire... Existe, por lo tanto, una dificultad inherente al experimento que imposibilita su modelado mediante los factores que acontecen durante su desarrollo. Toda esta complejidad se encapsula dentro de la noción de *aleatoriedad*.

Cada una de las realizaciones del experimento cuenta con factores iniciales distintos y, por lo tanto, con resultados completamente imprevisibles debido a la complejidad del sistema bajo estudio. ¿Cómo podemos medir lo imprevisible que es un resultado en un experimento? Podemos repetirlo un número elevado de veces y anotar los resultados que se van obteniendo, y observar la proporción de veces que aparece el resultado deseado. Mediante este método experimental podemos controlar la *frecuencia* teórica con la que se da cierto resultado. Cuando hacemos tender a infinito el número de repeticiones, la proporción que obtenemos se acerca a un valor teórico, abstracto, que denominamos *probabilidad* de que el experimento dé lugar al resultado que estamos considerando. La probabilidad es, en definitiva, un ente abstracto que modela en cierto modo un paso al límite en procesos de conteo de frecuencias.

Y ¿cómo podemos calcular esas probabilidades? La combinatoria del conteo entra en escena para dar lugar a la siguiente regla, conocida popularmente como *regla de Laplace*:

«La probabilidad de un determinado evento se calcula dividiendo el número de casos favorables para el evento entre el número de casos posibles resultantes del experimento».

La regla de Laplace nos permite cruzar la barrera existente entre el mundo de la aleatoriedad y el de la combinatoria. Con esta herramienta ya podemos plantear la cuestión seminal del Chevalier de Méré expuesta a Pascal. El jugador estudió la frecuencia con la que aparecían sucesos relacionados con los juegos de dados. En concreto, tenía una duda que no conseguía desvelar: había observado que era provechoso apostar a favor de obtener al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado, mientras que apostar por al menos un doble 6 al lanzar veinticuatro veces dos dados no lo era. A priori, esta observación contradice la aritmética elemental, ya que seis (resultados posibles al lanzar un dado) es proporcional a cuatro (veces que se lanza un dado) como treinta y seis (resultados posibles en lanzar dos dados) es proporcional a veinticuatro (veces que se lanzan dos dados).

Pascal le dio la respuesta al enigma usando las técnicas combinatorias que hemos desarrollado anteriormente. Analicemos las dos situaciones propuestas mediante el uso de la regla de Laplace. En la primera de ellas, el número de casos posibles es igual a $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.296$. El número de casos favorables se asocia con aquellas tiradas en las que se obtiene al menos un 6. Obsérvese que este valor es igual a 1.296 menos el número de casos en los que no se obtiene ningún 6. Este segundo valor es más sencillo de contar e igual a $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ (obsérvese que hemos aplicado nuevamente el principio multiplicativo). Por lo tanto, la probabilidad de obtener al menos un 6 en cuatro tiradas de un dado es igual a:

$$\frac{1.296 - 625}{1.296} = 0{,}5177.$$

En la segunda situación el argumento es similar. El número de casos posibles es, nuevamente por el principio multiplicativo, igual a 36^{24}, y el número de casos favorables, igual a $36^{24} - 35^{24}$. Por lo tanto, la probabilidad de éxito en esta situación es:

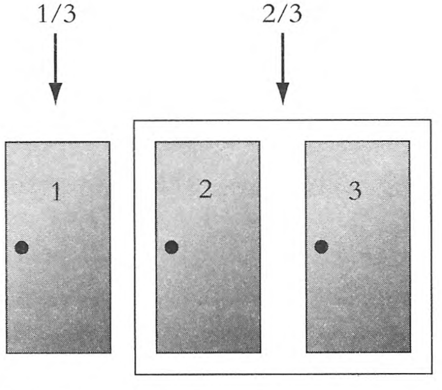
$$\frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 0{,}4914.$$

Estos cálculos demuestran que en la primera situación es provechoso apostar, mientras que no lo es en el segundo de los juegos: la sutil diferencia de probabilidades alrededor del juego justo (cincuenta por ciento de posibilidades de ganar o de perder) fue intuida por el astuto jugador ¡a pesar de las cifras astronómicas que se deben manejar!

Mediante el uso de técnicas combinatorias podemos explicar la siguiente paradoja que aparece en probabilidad y que se conoce como «paradoja de Monty Hall». Esta cuestión puede resultar familiar al lector amante de los concursos televisivos: dicho dilema apareció por primera en el año 1963 en el programa americano *Let's make a deal*, presentado por Monty Hall. Supongamos que somos invitados a participar en el siguiente juego: se nos muestran tres puertas cerradas. Sabemos que detrás de una de ellas existe un premio suculento (como un coche), mientras que detrás de las otras dos no hay nada. Con estas premisas y siguiendo nuestro instinto, realizamos una elección. Monty Hall, el presentador, nos abre posteriormente una de las puertas que no ha sido escogida y que no contiene el premio. Además, nos invita, bajo nuestro criterio, a cambiar la elección realizada. ¿Cuál es la mejor opción en este caso, mantener firmemente la elección inicial o cambiarla por la puerta que queda?

La intuición dice que la probabilidad de ganar o de perder el premio no varía, ya que después de que se abra una de las puertas sin premio quedan otras dos cerradas y, por lo tanto, el premio puede estar de manera equiprobable detrás de una de ellas. Sin embargo, este argumento es incorrecto, ya que la puerta que Monty Hall nos ha abierto no contiene nunca el premio; en este punto está la clave para entender que el argumento de equiprobabilidad no puede ser correcto.

Analicemos este problema usando la combinatoria. Denotemos las puertas mediante etiquetas: la etiqueta 1, la etiqueta 2 y la etiqueta 3. Obsérvese que podemos elegir la puerta y acertar el premio de 3 maneras distintas, mientras que existen 6 maneras distintas de no acertarlo. Dicho de otro modo, por la regla de Laplace, 1/3 de las veces acertaremos el premio, mientras que habitualmente (con una probabilidad de 2/3) tendremos mala suerte y no lo habremos acertado.



En la paradoja de Monty Hall, la probabilidad de adivinar en qué puerta se esconde el premio es de 1/3, mientras que la de no hacerlo es de 2/3.

Por lo tanto, en 6 de cada 9 ocasiones es provechoso cambiar la elección después de recibir la información que nos da Monty Hall, mientras que en 3 de cada 9 no deberemos cambiar dicha elección. La clave es que Monty Hall nos abre una puerta sin premio, y debemos aprovechar esa información de algún modo. En términos probabilísticos, ¡siempre nos será provechoso cambiar de puerta para ganar el premio!

Como el lector puede apreciar, en este juego existe un cuestión subyacente interesante y que va más allá de los concursos televisivos: imaginemos que deseamos conocer la probabilidad de que llueva hoy y, además, sabemos que estamos en época lluviosa. Existe un conocimiento a priori que nos da información sobre el suceso y que está condicionando al primero. Esto mismo se puede extrapolar al caso del concurso de Monty Hall.

Toda esta teoría probabilística del condicionamiento de probabilidades es el cimiento de la denominada *probabilidad bayesiana*, llamada así en honor del párroco presbiteriano Thomas Bayes (Londres, 1702- Tunbridge Wells, 1761), quien realizó los primeros estudios en la materia. Dichas ideas son los puntos de partida de las áreas de la *inferencia bayesiana* o la *teoría de la estimación,* en las que se intenta, a partir de un conjunto de datos conocidos a priori, estimar qué valor será el siguiente en aparecer con una probabilidad mayor. Estas ideas se aplican en campos tan distintos como las finanzas (en la estimación del precio de una acción conociendo su evolución durante las últimas semanas), el procesado de la señal (en la recuperación de señales digitales mediante el uso de filtros) o la dinámica de poblaciones (en la estimación de cierta población conociendo su evolución histórica).

El concurso de Monty Hall puede considerarse con todo derecho un juego de azar. Y, como hemos visto, saber contar bien nos puede dar un poco más de ventaja para tomar decisiones inteligentes. Existen en el folclore popular distintas creencias acerca de los juegos de azar que mediante argumentos matemáticos pasan a ser simples supersticiones.

Consideremos una lotería semanal. Es habitual la creencia de que no es posible que en dos semanas consecutivas pueda aparecer el mismo resultado, y que si eso sucede, es algo verdaderamente extraño. Nada más lejos de la realidad; de hecho, ¡que eso ocurra o que aparezca cualquier otro número prefijado es igual de probable! Veámoslo con un simple ejemplo: supongamos que jugamos a una lotería en la que se debe elegir un número entre 00000 y 99.999. Para centrar ideas supongamos que elegimos el 45.567 ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio? Aplicando nuevamente la regla de Laplace la probabilidad es igual a

$$\frac{1}{100.000},$$

ya que el número de casos favorables se corresponde con la elección que hemos hecho, mientras que el número de casos posibles se corresponde con la cantidad de números comprendidos entre el 00000 y el 99.999, ambos inclusive. ¿Cuál será ahora la probabilidad de ganar el juego la semana siguiente si apostamos al mismo valor? ¡El número de casos favorables y el de casos posibles sigue siendo el mismo, así que la probabilidad será la misma! Dicho de otro modo, el juego no tiene memoria.

En probabilidad, esta noción se denomina *independencia*, y viene a decir que dos realizaciones distintas del mismo juego no influyen la una sobre la otra. Éste es el caso de muchos de los juegos de azar comerciales que existen. Más allá de la independencia que se muestra en ellos, los argumentos precedentes permiten mostrar que no existen combinaciones más agraciadas para ser premiadas que otras. En la lotería anterior, un número como el 00001 es igual de probable de ser el premiado que otro más atractivo, como podría ser el 48.756. ¡La probabilidad no entiende de estética numérica!

LA RULETA, O CÓMO HACER SALTAR LA BANCA DEL CASINO

La ruleta es uno de los juegos de azar más populares y con más historia en los casinos de apuestas. Consta de una rueda que gira horizontalmente sobre su eje, cuyo perímetro se divide en 37 espacios numerados de 0 a 36, sin orden alguno, y pintados de color rojo y negro. El *crupier* tira una bola en dirección contraria al sentido del movimiento de la ruleta y después de dar varias vueltas, cae en uno de los números, que resultará ser el ganador. La ruleta tiene múltiples tipos de apuestas y combinaciones (sólo números pares, sólo rojos...). Resulta, por tanto, imposible poder predecir a priori el resultado de una realización del experimento. De hecho, el casino ganará en la mayoría de situaciones.

Existe, sin embargo, una familia española, el denominado clan de los Pelayo, que se hizo famosa mundialmente por conseguir ganar cantidades nada irrisorias de dinero jugando a la ruleta de distintos casinos de todo el mundo. Su estrategia estaba basada en la siguiente idea: puesto que la ruleta es un objeto físico, debe tener alguna imperfección (un eje de giro imperfecto, una alineación de la ruleta un tanto desequilibrada...). Así es que si empíricamente se pueden detectar esas imperfecciones, entonces se podrán detectar posiciones cuya probabilidad de aparición sea ligeramente mayor que la probabilidad teórica. Explotando estas ideas consiguieron ser la pesadilla de todas las casas de apuestas. Por desgracia para los jugadores actuales, las mesas de ruletas se cambian de manera periódica, por lo que estas estrategias estadísticas no resultan efectivas.

El impulso natural para jugar a un determinado juego de azar es el premio económico que se recibirá si se consigue ganar. Antes de apostar nuestro apreciado dinero, ganado a base de sudor y de lágrimas, debemos sopesar si el capital gastado es acorde con la probabilidad de ganar, y si la incertidumbre de no conseguir el premio compensa la pérdida económica. Hablando claro: apostamos porque existe la posibilidad de ganar. Hay casos en los que es más recomendable apostar que en otros, y para distinguirlos necesitamos más información que las probabilidades: necesitaremos lo que se denomina *esperanza matemática.*

Consideremos el siguiente juego que, lejos de ser apasionante y entretenido, nos permitirá introducir la noción de esperanza matemática de manera sencilla. Supongamos que tenemos dos dados perfectamente equilibrados, es decir, la probabilidad de que en una tirada salga un determinado valor es igual a 1/6. Vamos a recibir 4 euros si al tirar los dados obtenemos el mismo valor, mientras que vamos a perder 1 euro si los valores obtenidos son distintos. No parece claro si el proponente del juego nos está engañando para apropiarse de nuestros bienes económicos, ya que cuando ganamos recibimos mucho dinero, mientras que cuando perdemos debemos cederle únicamente una pequeña parte. Para ello, veamos que de las 36 combinaciones posibles que se obtienen al tirar dos dados (6 combinaciones para el primer dado y 6 combinaciones para el segundo dan un total de $6 \cdot 6 = 36$ resultados posibles), sólo 6 de ellas dan lugar a dos valores iguales, mientras que el resto dan lugar a valores distintos: en 6 de cada 36 ocasiones vamos a ganar 4 euros, mientras que en el resto vamos a perder 1 euro. Así es que el valor esperado de euros que ganaremos se obtiene *ponderando* el resultado por su probabilidad. En nuestro caso será igual a:

$$4 \cdot \frac{6}{36} + (-1) \cdot \frac{30}{36} = -\frac{1}{6} = -0{,}16666,$$

y, por lo tanto, nos conviene no jugar, ya que el valor obtenido es negativo. En cambio, si en lugar de ganar 4 euros, ganásemos 30, el valor de la esperanza sería igual a:

$$30 \cdot \frac{6}{36} + (-1) \cdot \frac{30}{36} = \frac{150}{36} = 4{,}1666,$$

y en esta situación es interesante jugar, ya que el elevado premio por ganar compensa la menor probabilidad de que surjan dos valores iguales en las tiradas de los dados.

Una consecuencia de todas estas ideas se muestra en el siguiente ejemplo usando las reglas clásicas del juego del EuroMillones. En esta lotería (donde la apuesta vale 2 euros) es necesario acertar 5 números entre 50 posibilidades, además de 2 números entre 9 posibilidades adicionales (las denominadas estrellas). En cualquier caso, se trata de elecciones sin orden (importan los conjuntos, pero no el orden en que se han elegido), con lo que aplicando los resultados relativos a la enumeración de estructuras sin orden, tenemos que el número de posibilidades es igual a:

$$\binom{50}{5}\cdot\binom{9}{2}=76.275.360.$$

La probabilidad de ganar un primer premio será, por lo tanto, de 1 entre 76.275.360; realmente pequeña. No existen fórmulas mágicas para ganar en las loterías y, de hecho, las probabilidades de ganar en este tipo de juegos son la mayoría de veces mínimas (tal y como muestran las cifras). A pesar de ello, existen ocasiones en las que vale la pena jugarse unos euros por la posibilidad de mejorar nuestro nivel económico.

En noviembre del año 2006 el EuroMillones consiguió un bote acumulado de 180 millones de euros. La probabilidad de conseguir un primer premio era muy pequeña, pero el bote acumulado invitaba al jugador a realizar una apuesta. Para ello vamos a calcular la esperanza matemática en este juego con esos valores. Teniendo en cuenta el número de casos posibles (76.275.360) y el número de casos favorables (1), resulta que la cantidad de euros esperada es igual a:

$$180.000.000\cdot\frac{1}{76.275.360}-2\cdot\frac{76.275.359}{76.275.360}=0{,}3598708941,$$

que es un valor positivo. Debido a la cantidad astronómica de euros del premio, en esa situación valía la pena gastarse 2 euros para probar suerte. A pesar de que los matemáticos tienen las ideas muy claras con referencia a las apuestas, y popularmente se oye la máxima de que «la lotería es un impuesto voluntario para los que no saben matemáticas», en esta ocasión había cierta ventaja para los que sabían hacer cuentas con ingenio...

La esperanza matemática es una herramienta de descripción parcial, pero que en muchas ocasiones da una información lo suficientemente interesante para comprender la fenomenología del suceso estudiado. De hecho, como mostraremos en capítulos posteriores, los promedios y los argumentos probabilísticos nos van a dar mucha más información de la que aparentemente nos muestran. Nos abrirán las puertas de la íntima relación que existe entre la combinatoria y la probabilidad. Y este hecho nos permitirá demostrar resultados sorprendentes con sutiles técnicas y con ideas geniales.

DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE LA ESPERANZA

Volvamos otra vez a las matemáticas y al lenguaje. Supongamos que en un determinado experimento aleatorio podemos obtener N resultados numéricos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_N$, donde la probabilidad de que obtengamos el resultado x_1 va a ser p_1; la de que obtengamos el resultado x_2 va a ser p_2, y así de manera sucesiva hasta N.

El valor esperado de nuestro experimento (o esperanza matemática) se obtiene promediando cada uno de los valores posibles por la probabilidad de obtener dicho valor. En otras palabras, la esperanza matemática es la siguiente suma:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} p_ix_i.$$

Obsérvese que si todos los casos tienen la misma probabilidad de que ocurran, entonces $p_1 = p_2 = \ldots = p_N = 1/N$, y el valor esperado será la media aritmética de los valores obtenidos. Resumiendo, debemos entender la esperanza matemática como una media aritmética (que da información parcialmente representativa de cierto experimento) en la que damos pesos a los distintos valores según la probabilidad que tengan de aparecer.

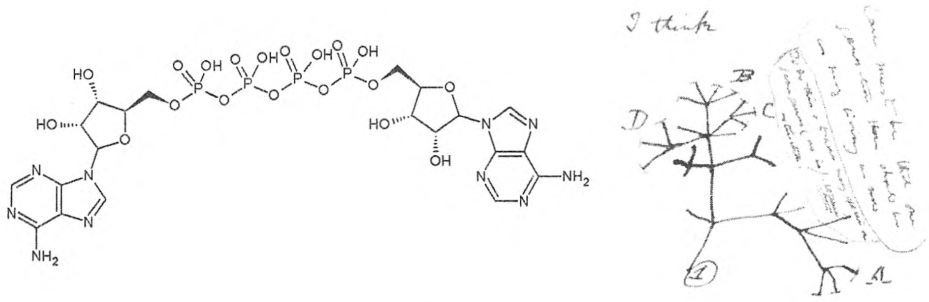
Capítulo 2

Grafos y mapas

El elemento químico fundamental para la vida es el carbono. Todo ser vivo contiene carbono, desde las bacterias más elementales hasta los más colosales mamíferos. Dada su notoriedad, toda una subdisciplina de la química, la química orgánica, se preocupa de saber cómo pueden combinarse esos átomos entre ellos y con otros elementos químicos con el propósito de formar compuestos muchísimo más complejos. Su estudio resulta una pieza fundamental en farmacología, en bioquímica y en múltiples aplicaciones industriales. Por ejemplo, a raíz de la destilación fraccionada del petróleo se obtienen múltiples compuestos de vital importancia para la sociedad moderna, tales como la gasolina o el gas butano. Una familia especialmente importante de los compuestos orgánicos son los hidrocarburos alifáticos, en los que átomos de hidrógeno y carbono se unen mediante enlaces (simples, dobles o triples), formando una estructura de tipo arbóreo, sin ciclos.

Cambiemos diametralmente de tema. Todo el mundo ha oído hablar de la teoría de la evolución de las especies, desarrollada por Charles Darwin a partir de las observaciones que realizó a lo largo y ancho de la esfera terrestre en sus expediciones con el *Beagle*. Dicho análisis se traduciría años más tarde en *El origen de las especies*, obra no exenta de polémica por sus tesis, devastadoras para la época. En dicho estudio existe un objeto que será interesante para nuestro cometido: el árbol de las especies, también conocido como *árbol de la vida*. La construcción de este complejo árbol se realiza de la siguiente manera: observamos un conjunto de especies distintas y formamos grupos con las parejas más parecidas (bajo ciertos criterios de semejanza), y repetimos el proceso de manera sucesiva hasta agotar todas las especies posibles. Mediante este proceso construimos un *árbol filogenético* o *cladograma taxonómico* de las especies en cuestión. Este árbol filogenético resume el grado de parentesco (o de métrica) entre especies más o menos parecidas. Dichas técnicas filogenéticas pueden aplicarse, por ejemplo, para estudiar el grado de parentesco de múltiples especies animales en una determinada región geográfica, o para mostrar los distintos pasos evolutivos que han llevado al *Homo sapiens* a ser como es.

El lector puede sentirse un tanto confuso por el hecho de que en un libro de matemáticas como el presente se esté hablando de moléculas orgánicas y de filogénesis. Y más todavía si estos temas proceden de dominios tan dispares como la química y la teoría de la evolución. Para darle un poco de tranquilidad, lo que mostraremos es que estos dos ámbitos (así como muchos otros) y el de la combinatoria tienen en común más de lo que se podría pensar en un principio. Las matemáticas no dejan de ser, en muchos casos, abstracciones de objetos reales, y es lo que sucede en las dos situaciones descritas, puesto que las estructuras que definen las moléculas de los hidrocarburos saturados y de los cladogramas taxonómicos son esencialmente las mismas.



Estructura de una molécula orgánica y dibujo realizado por Charles Darwin de un árbol filogenético. Ambos objetos tienen un aspecto muy parecido.

De la observación de las figuras anteriores se llega a la conclusión de que las estructuras consideradas tienen una estructura lineal *ramificada*. Ésta es la noción básica para entender qué es un árbol en combinatoria. Para un combinatorialista, un árbol no es ni una molécula ni una planta, sino una estructura abstracta con múltiples aplicaciones en la vida real (química, taxonomía, etc.), en la informática teórica (procesos de decisión algorítmicos y bases de datos) y con propiedades matemáticas interesantes de por sí.

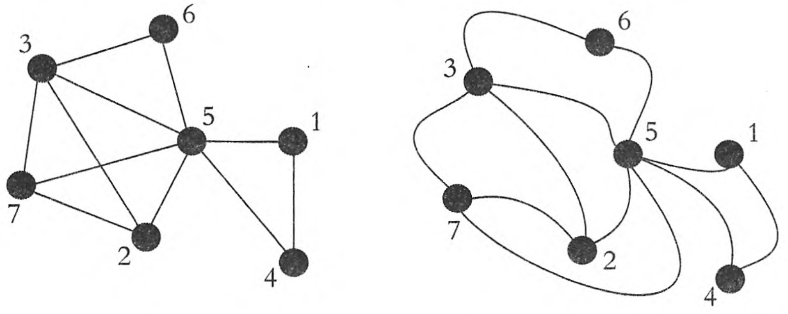
A partir de una noción intuitiva del fenómeno, basada en hechos experimentales y en argumentos razonados, construimos modelos abstractos que explican, al menos, una parte de la problemática. Lo curioso de este asunto es que en numerosas ocasiones problemáticas que emergen de áreas completamente desconectadas dan lugar a modelos matemáticos idénticos. Y éste es el caso de lo que está ocurriendo en los ejemplos que estamos mostrando. Este fenómeno ocurre especialmente en la combinatoria, y en particular en la teoría de grafos: relaciones entre individuos, redes sociales, propagación de epidemias, moléculas químicas, redes de abastecimiento, etc. pueden modelarse utilizando las estructuras discretas que estudiaremos a continuación. Empezaremos con la definición de *grafo*, concepto fundamental en el campo de la matemática discreta y de la combinatoria; como veremos, dicho concepto es puramente conjuntístico. Más tarde veremos qué propiedades aparecen cuando dibujamos un grafo en un papel, obteniendo una estructura más rígida denominada *mapa,* y que ya fue introducida por uno de los más grandes especialistas en combinatoria del siglo XX, William Tutte. El hecho de definir estos objetos de manera formal tenía como finalidad estudiar con más rigor uno de los problemas más importantes del siglo XX, el problema de los cuatro colores. Más tarde, una vez comprendida la noción de grafo y de mapa, pasaremos a definir y estudiar los árboles, y veremos que estos objetos son en realidad piezas clave para entender mejor los objetos combinatorios más complicados. En este camino descubriremos viejos juegos tibetanos, problemas sobre triángulos y números escondidos en la naturaleza. Las matemáticas gobiernan el mundo.

Los grafos y los mapas

Las nociones fundamentales en este capítulo serán la de grafo y la de mapa. Antes de pasar a definirlos con precisión daremos una idea esencial de su concepto. Imaginemos nuestra zona de residencia: con independencia de que habitemos en la gran ciudad o en la campiña, es más que probable que en nuestra región exista un gran número de pequeñas ciudades. Y como consecuencia del progreso industrial y de la comodidad del transporte, existen carreteras habilitadas para el tráfico rodado que las unen. Es posible que para ir de una ciudad a otra podamos ir directamente, o que necesitemos cruzar alguna otra, o incluso necesitemos cruzar algún puente por encima de otra vía. Existe, por tanto, una noción de conectividad entre las poblaciones (si es que podemos desplazarnos directamente de una a otra) y una noción de planaridad (si el sistema de carreteras no introduce puentes, debido a inevitables cruces de las vías).

Los grafos condensan la idea de conexión que hemos estado comentando: un grafo etiquetado es una estructura conjuntística formada por *vértices* (o puntos) que llevan una etiqueta que permite diferenciarlos. Además, existen las relaciones de incidencia entre estos vértices. La manera habitual de representar los grafos es dibujando el conjunto de vértices en el plano (con su etiqueta correspondiente) y diseñando una línea o *arista* que una dos vértices si y sólo si éstos son incidentes. Es por ello que un grafo G se acostumbra a escribir como $G=(V,A)$, donde V es el conjunto de vértices del grafo y A es el conjunto de aristas. Obsérvese que la forma en que se dibujen las aristas no importa, sino que únicamente nos interesa qué vértices están conectados.

Es también habitual hablar de grafos *no etiquetados*, que se obtienen a partir de grafos etiquetados, olvidando o eliminando las etiquetas y quedándonos con el esqueleto de vértices y aristas. Según el contexto en el que nos encontremos, el lector entenderá si estamos hablando de grafos etiquetados o bien de grafos no etiquetados.

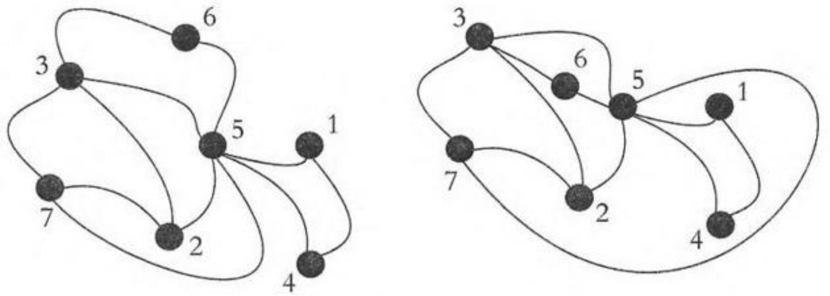


El mismo grafo representado de dos maneras distintas.
Nótese que la incidencia entre vértices es la misma en ambos casos.

Obsérvese que en la figura anterior estamos representando un mismo grafo de maneras cualitativamente distintas: en la primera ilustración estamos utilizando líneas rectas, mientras que en la segunda empleamos líneas curvas. Es importante observar también que en la primera figura, la arista definida por los vértices 5 y 7 se cruza con la arista definida por los vértices 2 y 3, mientras que en la segunda, el mismo grafo se representa sin cortes entre aristas. De este modo, si el primer grafo modelase un sistema de carreteras, entonces deberíamos utilizar un puente, obra que en realidad no sería necesaria, ya que existe una misma representación que excluye el cruce.

Estas representaciones sin cruces de grafos en el plano son interesantes de por sí, y reciben un nombre propio: un *mapa* es una representación de un grafo (etiquetado o no, según el contexto) en el plano, de tal manera que no existen cortes entre las aristas. El hecho de dibujar el grafo es lo que en matemáticas se conoce como *inmersión*, idea que modela la noción de dibujar un objeto dentro de otro. El primer dibujo de la figura anterior no define un mapa, mientras que el segundo sí lo hace. De hecho, un mismo grafo puede representar diversos mapas, correspondientes a distintas inmersiones del grafo en el plano. Ello es debido a que los grafos se constituyen de vértices y de incidencias entre ellos (las aristas), mientras que los mapas tienen, además, la estructura adicional de regiones en las que el plano queda subdividido. Dichas regiones son lo que denominamos *caras* del mapa. Por lo tanto, los mapas son estructuras más rígidas que los grafos, aspecto que hace que su estudio sea muchas veces más versátil.

Mostremos un ejemplo para aclarar estas nociones. En la figura siguiente se muestra un mismo grafo inmerso en el plano de dos maneras distintas. De hecho, las dos inmersiones dan lugar a dos mapas distintos: en el primero de ellos, la cara externa (o también denominada cara no acotada) viene definida por los vértices 6,3,7,5,4,1,5,6 (en orden antihorario) y, por lo tanto, se trata de una cara de longitud 7 (está definida por 7 aristas); en la segunda inmersión, en cambio, no existe ninguna cara con dicha longitud.

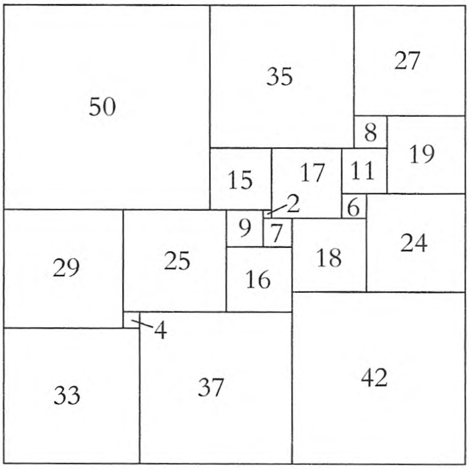


El mismo grafo, pero con dos inmersiones diferentes en el plano; por lo tanto, se trata de mapas distintos para un mismo grafo.

El origen de la noción de grafo está bien documentado: apareció a raíz del célebre problema de los puentes de Königsberg, resuelto el año 1736 por Leohnard Euler. Pero el origen de la noción de grafo dibujado, o de mapa, es más reciente y a la vez menos conocida. A pesar de que la primera definición formal de mapa se debe al matemático Jack Edmonds, la primera persona que realizó un enfoque enumerativo a la teoría de los mapas fue un químico seducido por la belleza de las matemáticas que durante la Segunda Guerra Mundial tuvo un papel muy importante como criptoanalista para las fuerzas aliadas; estamos hablando de Bill Tutte.

William Tutte nació en Newmarket, Inglaterra, en el año 1917, hijo de un jardinero y de un ama de casa. Ya en sus estudios primarios demostró cierto brillo en las ciencias, y especialmente en el área de la química; después de sus estudios secundarios cursó estudios superiores en la Universidad de Cambridge en esa disciplina. A pesar de ello, su interés por las matemáticas no hacía más que aumentar, y era muy habitual que asistiera a las numerosas reuniones matemáticas del célebre Trinity College de Cambridge. Fue en aquella época y en esas acaloradas discusiones donde Tutte, junto con otros tres prometedores matemáticos, Roland Brooks, Arthur Stone y Cedric Smith, resolvieron el denominado problema de la *cuadratura del cuadrado.*

Dicho problema es el siguiente: ¿Qué longitudes enteras puede tener el lado de un cuadrado de tal forma que se pueda subdividir en cuadrados distintos? A pesar de que los cuatro del Trinity eran todavía estudiantes, consiguieron resolver la cuestión usando argumentos relacionados con las redes eléctricas; más tarde estas ideas evolucionarían en lo que se conoce como *teoría de flujos* en grafos. Más allá de esta colaboración puntual, los cuatro investigadores continuaron trabajando juntos en la resolución de problemas, y firmaron sus trabajos bajo el seudónimo de *Blanche Descartes.*



Una cuadratura del cuadrado válida: todos los pequeños cuadrados son distintos.

En este punto de la narración, la Segunda Guerra Mundial ya se había iniciado, y Bill Tutte se encontraba en plena investigación en el campo de la química. Su tutor observó que sus capacidades matemáticas lo convertían en una persona de gran valía para la abstracción, y su potencial podría ser aprovechado por las fuerzas militares británicas en el desciframiento de códigos secretos. Fue en Bletchley Park, también conocida como Estación X, donde Tutte fue destinado, junto con algunos de los más grandes matemáticos británicos de su generación, con el fin de interceptar y resolver los enigmas codificados de las fuerzas alemanas. Fue en dicho centro donde se consiguió romper el código *Enigma*, posiblemente el método de codificación de la Segunda Guerra Mundial más famoso y sobre el que más se ha escrito. Y así fue como en enero de 1941 Bill Tutte empezó a trabajar como criptoanalista al servicio de las fuerzas aliadas. Su trabajo como descifrador fue impresionante. En su *laudatio* para ser nombrado oficial de la Orden del Canadá, en el año 2001, se decía:

> «...Como joven matemático y descifrador de códigos, resolvió el cifrado de una serie de códigos criptográficos del ejército alemán conocidos como FISH. Este hecho ha sido considerado como uno de los más grandes hitos intelectuales de la Segunda Guerra Mundial...».

Existen todavía hoy muchos puntos que no son públicos a propósito de dichos códigos, como consecuencia del secreto militar que los envuelve. Los primeros mensajes de tipo FISH estuvieron a disposición de los investigadores de Bletchley Park gracias a que fueron interceptados en transmisiones realizadas entre Atenas y Viena en el año 1941. Fue más concretamente el 30 de agosto de dicho año cuando una transmisión duplicada de un mismo mensaje dio los datos necesarios para empezar la tarea de análisis y descodificación. Usando estos dos mensajes, Tutte inició la búsqueda de patrones para romper el código. Tras examinar pautas en los símbolos, dedujo que la máquina codificadora tenía una rueda de marcaje con 41 dientes y otra con 31 dientes. En colaboración con otros investigadores, finalmente llegaron a la conclusión de que la máquina de cifrado contenía un total de 12 ruedas, y poco a poco se desveló el método completo de cifrado. ¡Tarea de titanes teniendo en cuenta que realizaron el análisis a partir de unos cuantos mensajes cifrados!


Bill Tutte y la puerta de entrada de Bletchley Park.

Además del estudio de la estructura interna de los codificadores FISH, Tutte escribió algoritmos para descodificar estos códigos; estas rutinas se implementarían años más tarde, con éxito, en el Colossus, computadora de la época diseñada especialmente para romper los enigmáticos códigos del enemigo. Obsérvese que nos encontramos en la década de 1940 y que, por lo tanto, Colossus era el bisabuelo de las computadoras tal y como las entendemos hoy. Todo ello llevó a que la actividad intelectual que se gestó en Bletchley Park fuera realmente asombrosa, ya que se realizaron aportaciones que posteriormente serían de vital importancia en el cifrado, en la algoritmia y en el diseño de computadoras. A pesar de que muchos investigadores recibieron honores y reconocimiento por su trabajo en dicho centro (como es el caso de Alan Turing), Tutte nunca recibió un reconocimiento público por su tarea como descifrador.

Fue años más tarde, ya en Canadá, cuando se especializó en la teoría de grafos y en la combinatoria. En este contexto, intentaría atacar el problema de los cuatro colores desde un punto de vista puramente enumerativo. Recordemos que dicho problema consiste en lo siguiente: dado un mapa, ¿qué cantidad de colores bastan para colorear sus vértices de tal forma que vértices adyacentes no tengan el mismo color?

EL ORIGEN DE LOS GRAFOS: PASEANDO POR KÖNIGSBERG

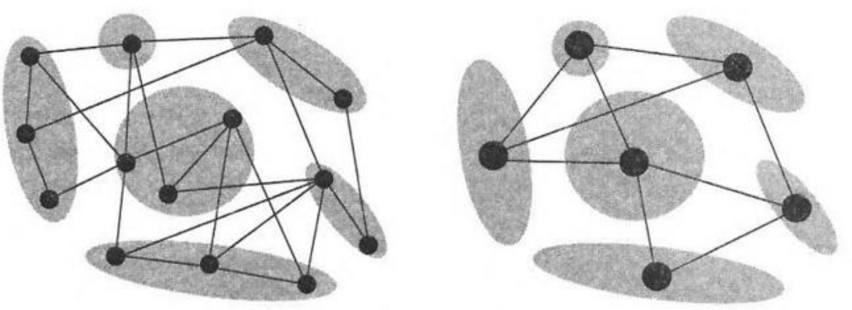
La mayoría de veces es imposible determinar el momento en que una disciplina del saber es creada. En el caso de la teoría de grafos no es así: esta área de las matemáticas tiene una fecha de nacimiento muy concreta. En 1736 existía en Königsberg (actualmente Kaliningrado) una cuestión para la que parecía no existir respuesta: nadie había sido capaz de realizar un paseo a lo largo de la ciudad partiendo de su casa y regresando a ella cruzando una sola vez cada uno de los puentes sobre el río Pregolya. Fue Leohnard Euler quien propuso un modelo simplificado de la ciudad mediante vértices y aristas, donde las aristas eran los puentes que conectaban cada una de las partes de la villa. Mediante argumentos sencillos sobre el grafo que había definido consiguió explicar la inexistencia de un paseo como el que se quería realizar y, de paso, inició toda una nueva rama dentro del universo matemático.

La ciudad de Königsberg, con sus siete puentes, en 1652.

La demostración de que con cinco colores siempre se puede es elemental, pero decidir si son cuatro o bien cinco es un problema extremadamente complejo, que no se resolvió hasta el año 1976 a raíz de los trabajos computacionales de Kenneth Appel y Wolfgang Haken. Aunque no halló la solución del enigma, Tutte intentó contar cuántos mapas se pueden colorear con cuatro y con cino colores para decidir si dichas cuentas son iguales o bien distintas. Con estos trabajos Tutte se convirtió en el pionero en el uso de las técnicas enumerativas en el contexto de los mapas.

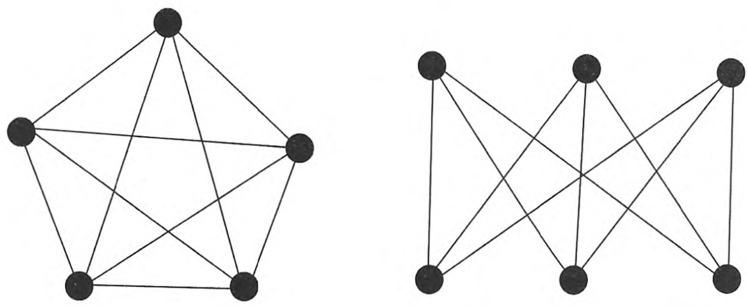
Pasemos a analizar con más detalle la íntima relación existente entre grafos y mapas. Una cuestión bien natural referente a esa relación es saber cuándo un grafo dado admite una representación como mapa, es decir, cuándo un grafo puede dibujarse en el plano sin necesidad de cortes. Si esto ocurre, diremos que el grafo en cuestión es *planar.* Hemos visto que en el primer ejemplo descrito se ha empezado mostrando una representación del grafo en cuestión poco acertada, con cortes, pero en el segundo hemos podido redibujar el grafo en el plano sin corte alguno. Por lo tanto, el grafo considerado es planar, pues admite una realización sin cortes. Es natural preguntarse lo siguiente: ¿existen condiciones *intrínsecas* sobre el grafo que nos permitan decidir sobre esta cuestión? Lejos de ser trivial, la cuestión constituye uno de los primeros problemas de la teoría topológica de grafos. La respuesta es que sí, y depende de estructuras subyacentes dentro del grafo en cuestión denominadas *menores* del grafo.

Un menor de un grafo se construye de la siguiente forma: dividamos los vértices considerados en grupos de ellos que estén conectados entre sí, y consideremos las incidencias entre distintas agrupaciones (véase la figura siguiente). El menor se define entonces como un grafo cuyos vértices son las agrupaciones (las manchas grises que contienen los vértices) y las aristas son las incidencias entre éstas. En la figura adjunta se muestra la construcción de un menor del modo descrito.



Un grafo y uno de sus menores.

En el mundo de la teoría de grafos existen unos grafos especiales, personajes con solera que tienen nombre propio debido a su importancia. Esto es lo que ocurre en el problema que nos concierne. Nuestros grafos estrella en esta cuestión son los dos que se muestran en la figura siguiente: el grafo con cinco vértices y todas las aristas posibles (grafo que se denota por K_5 y que se denomina *grafo completo con cinco vértices*) y el grafo con seis vértices y nueve aristas (denominado $K_{3,3}$). El lector puede intentar dibujar estos grafos en el plano sin cortes y comprobará que la tarea es imposible. Puede intentar, asimismo, probar que si en cualquiera de ellos elimina una de las aristas, entonces sí que conseguirá dibujarlos. De hecho, estos dos grafos son los más pequeños (en cuanto a número de vértices) con la propiedad de no planaridad. En este sentido son maximales, ya que al eliminar cualquier arista vuelven a tener la buena propiedad de poder dibujarse sin cortes.



El grafo completo con 5 vértices, K_5, y el grafo bipartito $K_{3,3}$.

Utilizando argumentos elementales se puede demostrar que estos dos grafos no son planares. Pero lo realmente sorprendente es que el resultado recíproco es similar: si un grafo no tiene como menor a ninguno de los dos grafos mencionados, entonces es planar. Este resultado ya clásico se debe al matemático polaco Kazimierz Kuratowski (Varsovia, 1896-1980), máximo exponente de la escuela matemática polaca de principios del siglo XX. El *teormea de Kuratowski* afirma:

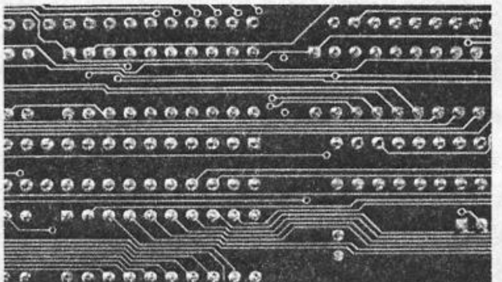
«Un grafo es planar si y sólo si no contiene a $K_{3,3}$ o a K_5 como menor».

Resulta muy interesante observar lo siguiente: una condición topológica como es la planaridad (es decir, que depende de la superficie donde estemos dibujando el grafo) puede definirse únicamente en términos conjuntísticos (puesto que la condición de menor es una mera relación de incidencias) y, por lo tanto, dicha propiedad es *intrínseca* al grafo, y no a como se dibuja éste en el plano. El segundo punto que se debe remarcar es que una condición tan complicada como podría ser el diseño sin cortes de un grafo sumamente complejo se traduce en buscar únicamente dos subestructuras bien definidas en su interior. El teorema de Kuratowski es, de hecho, la punta del iceberg de una construcción matemática extremadamente compleja y rica, y que está centrando la atención de la mayor parte de la comunidad de los especialistas en combinatoria y del estudio de algoritmos dentro de la denominada *teoría de menores.*

La familia de los grafos planares se dice que es cerrada por menores, lo que significa que todo menor de un grafo planar es también planar. Esta observación surge directamente de la definición de menor que hemos dado previamente. En este caso el teorema de Kuratowski nos garantiza que los grafos de dicha familia se caracterizan por los dos grafos que obstruyen la condición de planaridad, y no más. ¿Es cierto que, en general, toda familia de grafos cerrada por menores viene caracteri-

UNA APLICACIÓN INDUSTRIAL DE LA PLANARIDAD

Conocer si cierto grafo admite o no una representación plana es un problema de gran importancia en el ámbito industrial. En el dominio de la electrónica es necesario saber implementar un determinado modelo eléctrico de la manera más simple posible. Así es, ya que complejidades mayores dan lugar a métodos de producción más costosos. En particular, una vez que se conoce el modelo de circuito que se desea implementar es necesario saber si éste puede representarse sobre un circuito impreso de manera plana. Si representar el circuito sin cortes es imposible, el proceso industrial de implementación será más caro, ya que las placas de silicio necesitarán más de una capa para colocar las distintas conexiones de cobre. Teniendo en cuenta que el proceso de producción de dichos circuitos es de millones de unidades, el estudio de la planaridad resulta un factor clave para la optimización de costes. De hecho, existen diversos programas de software dedicados exclusivamente a detectar si un modelo eléctrico admite una representación plana y, si es así, optimiza su representación en un circuito impreso.



zada por un conjunto *finito* de grafos prohibidos? Esta cuestión, denominada conjetura de Wagner, es un problema difícil, y su respuesta es que sí, que toda familia cerrada por menores viene caracterizada por un conjunto *finito* de menores excluidos. Dicho trabajo ha ocupado buena parte de la teoría de grafos de la segunda mitad del siglo XX. En su titánica serie de más de veinte trabajos científicos (titulados todos ellos *Graph Minors* y enumerados consecutivamente con letras latinas) Neil Robertson y Paul Seymour colocan los cimientos estructurales de esta teoría matemática. Sus implicaciones son de vital importancia en la teoría de grafos actual y, de hecho, gran parte de la investigación en esta disciplina hoy en día está motivada por esa monumental obra. Como consecuencia de su trabajo existe el sorprendente resultado siguiente, el *teorema de Robertson-Seymour*:

«Consideremos un conjunto *infinito* de grafos. Entonces existen dos grafos en dicho conjunto tales que uno de ellos es menor que el otro».

Existen implicaciones muy profundas de toda esta teoría en el estudio estructural de los grafos; en realidad, es uno de las temas más activos de investigación en el área combinatoria y de la algorítmica de la teoría de grafos.

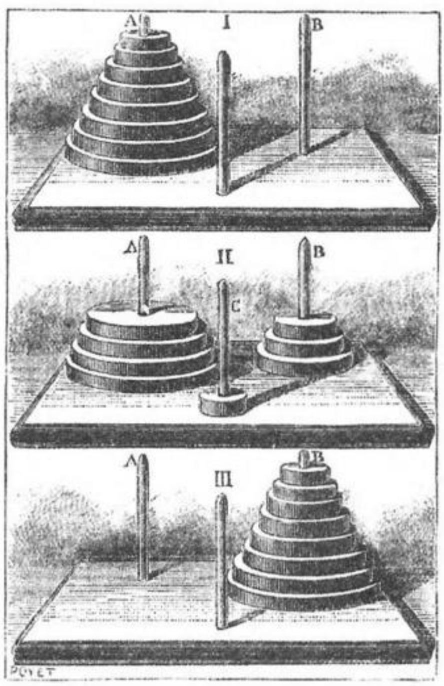
Unas cuentas más complicadas

Para poder entender más y mejor la enumeración de ciertas familias de grafos y de mapas deberemos hacer una pausa para introducir unas nuevas técnicas enumerativas que nos permitirán tratar situaciones combinatorias más complejas que las estudiadas hasta ahora. Para ello nos valdremos de un ejemplo muy sencillo, pero que a la vez resulta extremadamente representativo.

Recuérdese que hemos introducido la noción de permutación, y hemos aprendido a calcular el número de permutaciones de un conjunto de n elementos. Dicho valor es igual a $n!$, que se define como el producto de los enteros menores que n, partiendo de n hasta 1. Imaginemos que queremos calcular el valor de $120!$ y, por lo tanto, debemos realizar el producto de todos los naturales entre 1 y 120. De la misma manera, si deseásemos calcular el valor de $119!$ deberíamos realizar un producto similar, pero prescindiendo ahora del término 120. Obsérvese que se cumple la relación $120! = 120 \cdot 119!$. ¿Qué significa esto? Si hemos calculado ya el valor de $119!$ y lo tenemos escrito, entonces el valor de $120!$ puede calcularse fácilmente aprovechando esta circunsatancia. Es decir, podemos explotar la esencia *recursiva* de la fórmula del factorial para realizar el cálculo utilizando otros cálculos parciales más pequeños, sin necesidad de calcular cada vez la fórmula hasta el final.

Esta misma situación aparece en múltiples ocasiones en combinatoria de manera más o menos complicada. Veamos otro ejemplo para aclarar estas ideas. Vamos a contar el número de palabras que se pueden escribir utilizando las letras a y b, y que tengan longitud n. Denotemos este número por P_n. Dicha cuenta viene definida por las variaciones con repetición, y el número de palabras de longitud n es igual a 2^n. Escribamos $P_n = 2^n$. Observemos ahora que toda palabra de longitud n se construye a partir de una palabra de longitud $n-1$ concatenando al final la letra a o bien la b. Esto nos da la relación recursiva $P_n = 2 \cdot P_{n-1}$, que da a entender la combinatoria subyacente en el problema. Estos argumentos nos llevan a un nuevo tipo de ecuaciones, las denominadas *ecuaciones recursivas* o recurrentes. En el caso expuesto no hubiera sido necesario plantear la ecuación recursiva para resolver el problema, pero en otros problemas será absolutamente necesario.

Veamos un caso más complejo. El juego de las torres de Hanoi (también conocido como el juego de las torres de Brahma o el rompecabezas del fin del mundo) fue inventado el año 1883 por el matemático francés Édouard Lucas (Amiens, 1842-París, 1891). El juego se basa en una antigua leyenda oriental relacionada con el fin del mundo. Para poner a prueba la fortaleza mental de los nuevos sacerdotes de un templo sagrado, los más ancianos les proponían la siguiente tarea: se colocan 64 anillos de tamaño decreciente apilados en orden, tal y como se muestra en la ilustración adjunta. El objetivo del juego consiste en pasar todos los anillos a un nuevo destino, con la condición de que en cada movimiento que se realice únicamente pueda moverse un anillo. Además, no es posible colocar un anillo sobre otro de tamaño inferior. Con tal fin se permite el uso de una posición auxiliar para realizar movimientos intermedios.



Posición inicial del juego de las torres de Hanoi, con ocho anillos, una posición parcial y la posición final.

La cuestión consiste en hallar cuál es el número de movimientos mínimos que necesitamos para completar la tarea. Con un argumento sencillo podemos responder a esta cuestión: sea T_n el número de movimientos necesarios cuando consideramos n anillos. La clave es la siguiente observación: para trasladar los n anillos de la posición inicial a la posición final, lo que debemos hacer es mover primero los $n-1$ anillos superiores a la posición intermedia, mover seguidamente el anillo más grande a la posición final y, para acabar, mover los $n-1$ anillos que se encuentran en la posición parcial. Así, el número de movimientos que hay que realizar es igual a $T_{n-1} + 1 + T_{n-1}$: necesitamos T_{n-1} movimientos para desplazar los $n-1$ anillos superiores a la posición intermedia (en estos pasos dejamos fijo el anillo más grande), un movimiento para poner el anillo mayor en su posición final y, por último, T_{n-1} para mover los $n-1$ anillos superiores a la posición final. Obsérvese que la clave es olvidarse del anillo grande, que no estorba en ningún caso, ya que siempre podemos colocar anillos más pequeños encima de él.

Hemos obtenido la recurrencia $T_n = 2T_{n-1} + 1$, con la condición inicial $T_1 = 1$ (el juego para un anillo es trivial, y se basa en un único movimiento). Vamos a buscar una fórmula para el valor de T_n. Aplicándola obtenemos la secuencia de valores 1, 3, 7, 15,... La inspección de los primeros valores obtenidos nos hace conjeturar que $T_n = 2^n - 1$. Así es, ya que esta fórmula es cierta para $n = 1$, y además se cumple que:

$$2^n - 1 = 2\,(2^{n-1} - 1) + 1,$$

dando lugar, por lo tanto, a la fórmula recursiva propuesta: $T_n = 2\,T_{n-1} + 1$.

Aplicando esta fórmula para un valor n igual a 64 obtenemos que los jóvenes monjes deben realizar un total de $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ movimientos... ¡una tarea más que desmoralizadora!

Para finalizar este paseo por el mundo combinatorio de la recursividad recordaremos un problema clásico ya estudiado en tiempos del Renacimiento. Partamos de los elementos 1,1 y construyamos una sucesión numérica sumando los dos últimos elementos que hayamos podido obtener mediante este proceso. En este caso, el tercer elemento de la sucesión será 1 + 1, igual a 2; el cuarto elemento se corresponderá con 1 + 2, igual a 3; el quinto sería 2 + 3, igual a 5. Y así sucesivamente. Los primeros términos que se obtienen mediante esta regla son los siguientes:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...$$

Dicha sucesión es célebre en el mundo matemático y se conoce con el nombre de *sucesión de Fibonacci*, en honor de la primera persona que la estudió, Leonardo de Pisa, hijo de Bonaccio (de ahí su nombre, Fibonacci), pensador y estudioso italiano de la Edad Media. La especificación de esta sucesión mediante una recurrencia es la siguiente: designemos por F_n el n-ésimo término de la sucesión. Entonces se cumple la relación recursiva siguiente:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Resulta curioso indagar en qué contexto se inspiró Fibonacci para llegar a esta sucesión numérica. La cuestión clave surge del siguiente problema de dinámica de poblaciones: una pareja de conejos, a partir del segundo mes de vida tiene mensualmente una pareja de conejos, la cual a partir del segundo mes tiene también mensualmente una pareja de conejos, y así sucesivamente. ¿Cuál será el número estima-

ÉDOUARD LUCAS Y LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Édouard Lucas (Amiens, 1842-París, 1891), fue un matemático francés que desarrolló gran parte de su carrera científica en París, primero en el observatorio de la capital y más tarde en dos institutos: el Liceo San Luis y el Liceo Carlomagno. Sus trabajos matemáticos más conocidos están relacionados con el estudio de una familia de recurrencias muy ligadas a la sucesión de Fibonacci. Lucas observó que muchas de las propiedades de esta sucesión se mantenían si se cambiaban las condiciones iniciales (recuérdese que en la sucesión de Fibonacci tomábamos 1, 1 como primeros valores de la sucesión). Existe, de hecho, una sucesión numérica en su honor, los números de Lucas, que se definen del mismo modo que los números de Fibonacci, pero empezando con las condiciones iniciales 2, 1.

La importancia de los números de Fibonacci y de sus generalizaciones trasciende lo anecdótico y, de hecho, existe una revista científica, *The Fibonacci Quarterly*, especializada en resultados relativos a esta distinguida sucesión.

do de parejas al cabo de un tiempo? Este problema es modelado por la sucesión de Fibonacci. Más importante que la sucesión en sí es que crece de manera indefinida (ya que la sucesión se define en términos de una suma de números enteros positivos), y el cociente de dos términos consecutivos no es nunca el mismo valor, pero sí tiende a un valor límite:

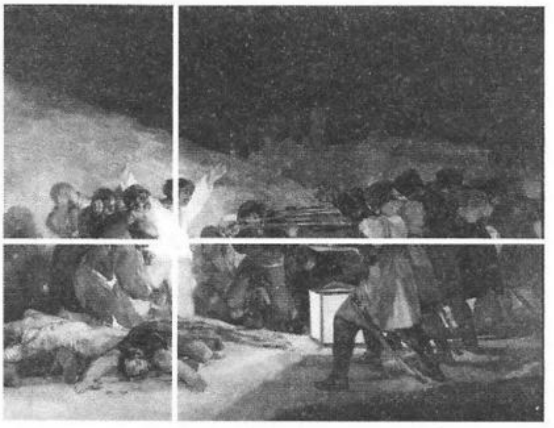
$$\frac{13}{8}=1{,}625,\ \frac{21}{13}=1{,}615384615,\ \frac{34}{21}=1{,}619047619.$$

Los cocientes sucesivos de los términos de esta sucesión se aproximan a un número con solera, el denominado *número de oro*, *sección áurea* o *divina proporción*, cuyo valor es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618033988...$$

Es este factor de crecimiento el que regula el crecimiento de la familia de lagomorfos con la que Leonardo de Pisa inició el estudio de las propiedades de esta sucesión numérica. De hecho, dicha proporción aparece de manera sorprendente en múltiples contextos: en la manera en que las plantas desarrollan los tallos, en la proporción con la que se expanden las espirales de las caracolas o en el crecimiento de ciertas poblaciones. La naturaleza se comporta según ciertas reglas, y una de ellas es el crecimiento de las estructuras biológicas bajo pautas bien definidas. Se podría decir que la naturaleza ha elegido este número por su armonía y su perfección, aunque hay razones más prosaicas y complicadas, de índole geométrica y de las que no vamos a ocuparnos aquí.

Es por esa armonía y equilibrio por lo que infinidad de artistas, arquitectos y músicos utilizan la denominada divina proporción en sus composiciones. Podríamos enumerar una gran cantidad de obras arquitectónicas (como el Partenón de Atenas), de útiles de uso cotidiano (las tarjetas de identificación personales y las tarjetas de crédito) y de otras creaciones del ser humano donde se explota dicha armonía estética, pero aquí únicamente mostraremos el cuadro *Los fusilamientos del 3 de mayo*, del maestro Francisco de Goya. En ella el personaje principal, el hombre que se halla a punto de ser fusilado, se halla en un punto de la composición pictórica que define cuatro regiones rectangulares cuyos lados siguen proporciones ligadas a la divina proporción.



Los cánones estéticos están muchas veces regidos por la divina proporción.
Un ejemplo lo constituye el célebre cuadro de Goya
Los fusilamientos del 3 de mayo.

Una aplicación: contando doble

Si una cosa caracteriza el mundo de la combinatoria es que es habitual que ideas muy sencillas puedan dar lugar a resultados increíbles e inesperados. Éste es el caso de la denominada *técnica del doble conteo*. Esencialmente, con esta técnica lo que se busca es enumerar un mismo conjunto de dos maneras distintas. A partir de este principio podremos resolver una cuestión en mapas bastante curiosa.

Empecemos explicando el método mediante un ejemplo: imaginemos que queremos organizar una cena en nuestro apartamento con nuestros amigos más íntimos: María, Pedro, Juan y Ana. Para ello pedimos que cada uno lleve a cabo una contribución al festín. Puesto que somos personas muy ordenadas, hemos preparado una tabla donde se muestra qué productos debe de aportar cada uno de nuestros amigos:

	Queso	Embutido	Tortilla	Vino
Yo		X	X	X
María	X			X
Pedro		X	X	
Juan	X	X		X
Ana		X	X	

Así, por ejemplo, María llevará queso y vino, mientras que Pedro llevará embutido y tortilla. El punto importante de esta tabla es que puede ser leída de dos formas distintas: por un lado, si la leemos en horizontal, María verá qué productos debe aportar a la celebración (queso y vino), y por otro, si la leemos en vertical, veremos quiénes son los encargados de llevar el queso (María y Juan). En definitiva, podemos contar de dos maneras distintas con la finalidad de saber *cuántos* productos en total serán aportados: bien sabiendo los que debe llevar cada persona, bien qué personas llevarán cada uno de los productos.

Vamos a generalizar el problema para poder plantear el principio del doble conteo. Supongamos un subconjunto del producto cartesiano $C = A \times B$ y recordemos que el producto cartesiano de A y B es el conjunto de parejas ordenadas (a,b) en el que se cumple que a y b pertenecen a los conjuntos A y B, respectivamente. Consideraremos únicamente algunos de los elementos del producto cartesiano: en nuestro ejemplo anterior, el elemento (María,queso) es válido, mientras que el elemento (María,embutido) no lo es, ya que María aporta queso pero no embutido.

Para abstraer esta cuestión, escribamos $A = \{a_1, a_2,..., a_r\}$ y $B = \{b_1, b_2,..., b_s\}$. Imaginemos ahora que tenemos una tabla genérica similar a la que habíamos diseñado para la preparación de la cena, con la salvedad de que en este caso los conjuntos son abstractos:

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_s
a_1	X		X	X		X
a_2		X				
a_3		X	X			X
a_4				X		
a_5	X					X
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$
a_r		X	X		$\cdots$	X

En dicho diagrama dibujamos una cruz para dar a entender que tomamos en cuenta la pareja considerada, mientras que no la dibujamos si la pareja en cuestión no forma parte de nuestro conjunto. El problema surge de saber contar el número total de cruces en una tabla como la anterior. La filosofía del método del doble conteo es que dicha cuenta puede realizarse de dos formas distintas y obtener en los dos casos el mismo valor.

La primera forma de sumar es contando por filas: fijamos un elemento a_i (donde el subíndice i varía entre 1 y r) y miramos cuántas cruces aparecen en su fila. Si realizamos esta operación para cada uno de los subíndices posibles y sumamos, obtendremos el número total de cruces. Veamos otra manera de obtener el mismo conteo: en lugar de sumar por filas vamos a hacerlo por columnas. Es decir, para cada elemento b_j (donde ahora el subíndice j se mueve entre 1 y s) miramos cuántas cruces se encuentran en la columna asociada y finalmente sumamos sobre todas las columnas.

Esta doble manera de ver la misma suma se denomina *método del doble conteo*. De manera notacional y utilizando las hipótesis anteriores, el método del doble conteo se condensa en la siguiente fórmula matemática:

$$\sum_{a\in A}\left|\left\{(a,b): b\in B\right\}\right| = \sum_{b\in B}\left|\left\{(a,b): a\in A\right\}\right|.$$

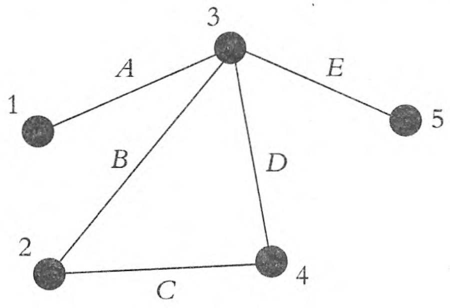
Veamos cómo debemos entender esta fórmula: el símbolo Σ (la letra griega sigma) significa «suma»; los dos puntos : se leen «tal que»; $\in$ significa «es un elemento de»; la barra vertical | indica «cardinal» o «número de elementos», y las llaves $\{\}$ denotan un conjunto. El primer sumando nos dice que estamos sumando por filas (para cada elemento de A contamos cuántos existen en su fila correspondiente), mientras que el segundo indica que la suma se realiza por columnas.

Vamos a ver una aplicación de este método en el contexto de la teoría de grafos. Para iniciar el razonamiento, consideremos un grafo G cuyo conjunto de vértices y aristas denotamos con V y A, respectivamente. Consideremos ahora el conjunto siguiente:

$$C=\{(v,e): v\in V,\ e\in A,\ e \text{ es incidente con } v\}.$$

Obsérvese que éste es un subconjunto propio del producto cartesiano $V\times A$, ya que para cada vértice consideramos únicamente las aristas que son incidentes con él. Vamos a aplicar la técnica del doble conteo sobre este conjunto para poder deducir algún tipo de información de interés. La observación clave en este asunto es la siguiente: cada arista es incidente *exactamente* con dos vértices, puesto que una arista viene definida por sus dos extremos. En el ejemplo siguiente, el conjunto de parejas involucradas es:

$$(1,A), (3,A), (2,B), (3,B), (2,C), (4,C), (3,D), (4,D), (3,E), (5,E)$$



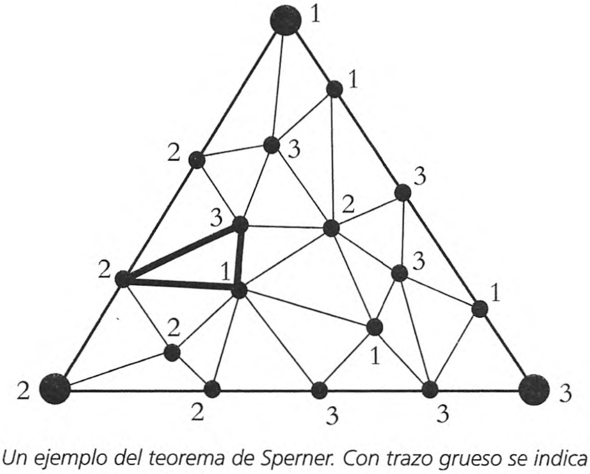
Un grafo con cinco vértices que muestra el conjunto sobre el que aplicaremos el razonamiento del doble conteo.

Introduzcamos un poco de notación para facilitar los razonamientos matemáticos que surgirán en lo que prosigue. Dado un vértice v decimos que el *grado* de v es el número de aristas que son incidentes con él. Denotaremos este valor mediante $d(v)$. Pasemos ya a aplicar el argumento enumerativo. El cardinal del conjunto C puede calcularse de dos maneras distintas: por un lado, sumando con respecto a las aristas (y considerando qué vértices son incidentes con cada una de ellas), o bien sumando con respecto a los vértices (y considerando cuántas aristas son incidentes con cada uno de ellos). Sumando de la primera manera obtenemos dos veces el número de aristas, ya que, como hemos dicho, cada arista es incidente con dos vértices exactamente. Del mismo modo, un vértice arbitrario v es incidente, por definición, con $d(v)$ aristas. En definitiva, obtenemos que la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces el número de aristas. El segundo término puede escribirse de manera condensada utilizando un sumatorio matemático de la siguiente manera:

$$2|A| = \sum_{v \in V} d(v),$$

donde explicitamos que se suman los grados sobre todos los vértices v posibles. Obsérvese que esta relación es válida para cualquier grafo y también para cualquier mapa, ya que sólo depende del esqueleto de éste. Más allá de ser una fórmula general y sin una aplicación clara, de ella podemos extraer información estructural muy interesante: cabe recordar que la suma de dos números pares o impares es un número par, mientras que la suma de dos números con distinta paridad da lugar a un número impar. Como en la igualdad anterior el término de la izquierda es un número par, resulta que *el número de vértices cuyo grado es un número impar debe ser par.* Efectivamente, en caso contrario resultaría que la suma de la derecha sería un número impar, algo imposible por razones de paridad. Esta observación ya parece menos obvia y, de hecho, cuando se progresa en su estudio se termina en algo tan poco trivial como el llamado *lema de Sperner*, una de las auténticas «joyas de la corona» de la combinatoria; eso sí, combinatoria elemental.

Supongamos que un triángulo con vértices etiquetados con marcas 1, 2 y 3 se subdivide en pequeños triángulos. Es decir, partiendo del triángulo inicial dibujamos un conjunto adicional de vértices sobre las aristas y en el interior. Posteriormente dibujamos aristas adicionales de tal manera que cada cara sea incidente con tres aristas exactamente. A partir de esta configuración pasamos a etiquetar el resto de vértices utilizando las etiquetas iniciales: 1, 2 y 3. La única condición que imponemos es que los vértices que se encuentren sobre la arista determinada por 1 y 2 puedan etiquetarse tan sólo con la etiqueta de 1 o bien con la de 2 (y de la misma manera para las otras dos aristas del triángulo). El teorema de Sperner afirma que bajo estas hipótesis existirá un triángulo con los tres vértices de etiquetas distintas. En la figura siguiente se muestra un ejemplo de este etiquetaje, y con un trazo más grueso se detalla un triángulo que cumple la propiedad deseada.



Un ejemplo del teorema de Sperner. Con trazo grueso se indica el pequeño triángulo que cumple la propiedad.

La demostración de este resultado se basa en una aplicación muy ingeniosa del principio de doble conteo: para demostrar el lema lo que se hace es probar que el número de triángulos buenos (es decir, aquellos cuyos vértices tienen tres etiquetas

EMANUEL SPERNER, SUS TEOREMAS Y SUS CONSECUENCIAS

Existen múltiples y asombrosas aplicaciones del lema de Sperner. Una consecuencia es el denominado *teorema del punto fijo de Brouwer*, en el que se demuestra la existencia de puntos fijos para ciertas funciones. Lo extraordinario es que todas las demostraciones que se conocían de este resultado antes de saber aplicar el lema de Sperner utilizaban herramientas mucho más sofisticadas que los argumentos combinatorios que hemos expuesto. Por esa razón el lema de Sperner es considerado como uno de los primeros resultados de la denominada *topología combinatoria*.

Emanuel Sperner (Waltdorf, 1905-Sulzburg 1980) realizó sus estudios de matemáticas en la Universidad de Hamburgo. Sus contribuciones más importantes se dan en el contexto de la combinatoria, y más particularmente en el resultado que hemos mostrado (denominado comúnmente *lema de Sperner*) y en el teorema de Sperner relativo a conjuntos de un tamaño fijado sin intersección mutua: dado el conjunto $A=\{1, 2, ..., n\}$, una *familia de Sperner* es una familia de subconjuntos de modo que no existe un par de ellos en los que uno esté contenido en el otro. Por ejemplo, la familia $\{\{1\}, \{2\}\}$ es de Sperner, mientras que la familia $\{\{1\}, \{1,2\}\}$ no lo es porque $\{1\}$ es un subconjunto de $\{1,2\}$. En este contexto, ¿cuál es el cardinal máximo que puede tener una familia de Sperner? El teorema de Sperner afirma que no puede tener más de

$$\binom{n}{n/2}$$

elementos si n es par, o más de

$$\binom{n}{(n-1)/2}$$

si n es impar. Estos binomiales son, de hecho, el cardinal de la familia de subconjuntos de $\{1, 2, ..., n\}$ con $n/2$ elementos si n es par y $(n-1)/2$ elementos si n es impar. Por ejemplo, para dicha familia será:

$$\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}.$$

Éste es uno de los resultados fundamentales de la teoría combinatoria de retículos y de conjuntos parcialmente ordenados, y un caso muy particular de un teorema más general, denominado *teorema de Dilworth*.

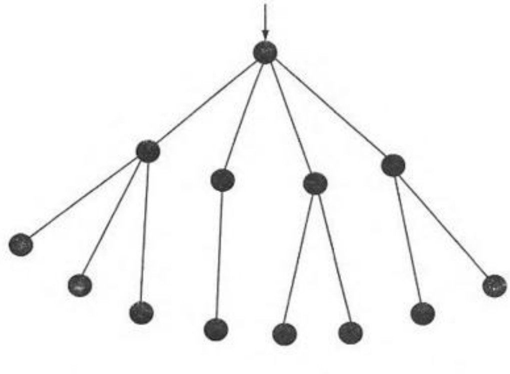
diferentes) debe ser distinto de cero. De hecho, no se encuentra el número de triángulos con esa propiedad, sino que se demuestra que debe ser un número impar. ¡Todo número impar es distinto de cero; por lo tanto, existirá algún triángulo con dicha propiedad! El lector interesado en profundizar en este resultado puede hallar los detalles en el anexo del presente volumen.

Los árboles: personajes clave en la teoría de grafos

Volvamos a los mapas y a las cuentas. Hasta el momento hemos mostrado que existe una gran diferencia entre considerar grafos y mapas, y que poder dibujar un grafo de tal manera que las aristas no se corten no depende de nuestra pericia, sino de condiciones intrínsecas del objeto combinatorio.

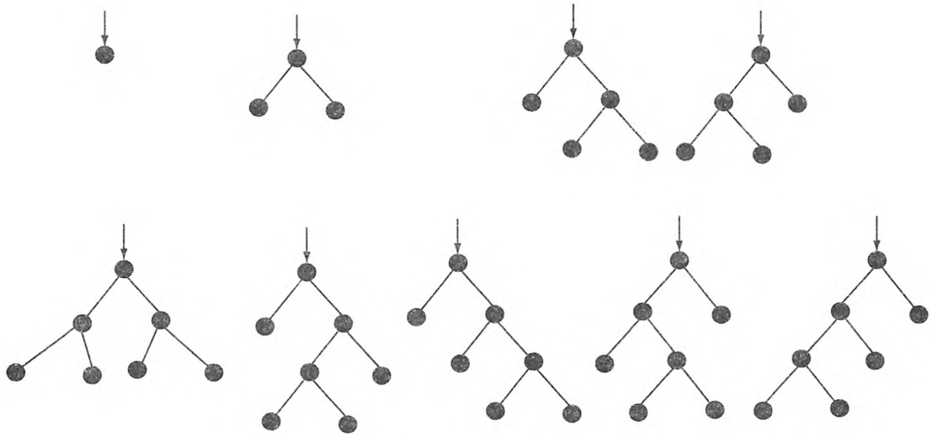
Vamos a estudiar con un poco más de detalle los grafos que no tienen ciclos, es decir, los grafos sin caminos cerrados entre pares de vértices. Estos grafos tan especiales se conocen en el mundo de las matemáticas como *árboles*. Dichas estructuras son de vital importancia en computación, en almacenamiento de datos y en otras ramas más alejadas, como la química y la biología. El nombre que reciben proviene de la forma que los caracteriza.

Un árbol dibujado en el plano define únicamente una cara, ya que al no tener ningún ciclo no existe una *cara interna* y una *cara externa*. Para nuestro propósito consideraremos que los árboles llevan una *raíz,* esto es, el vértice que se encuentra marcado con una flecha y, por lo tanto, es privilegiado con respecto a los demás. Este artificio consistente en enraizar un árbol es de hecho lícito, y se traduce en que el vértice marcado es el estado inicial del sistema que el árbol modela.



Un árbol con raíz. El mapa únicamente tiene una cara (la externa) y no contiene ciclos.

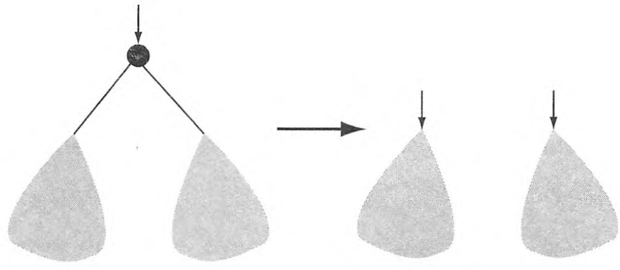
Consideremos una subfamilia de árboles de suma importancia: los árboles binarios. Son aquellos cuyos vértices son incidentes con tres aristas o bien con una sola arista. En el primero de los casos decimos que los vértices son *internos*, mientras que un vértice de grado uno suele denominarse *hoja* del árbol. El vértice que acarrea la raíz se considera también un vértice interno, ya que la raíz hace aumentar en una unidad el grado del vértice privilegiado. Con estas hipótesis, ¿cuántos árboles binarios se pueden dibujar con un número fijado de vértices internos? Veamos los primeros árboles binarios:



Árboles binarios con 0, 1, 2 y 3 vértices internos.

Veamos que, por ejemplo, los dos árboles binarios dibujados con tres vértices internos son distintos, aun teniendo el mismo grafo subyacente. La secuencia numérica que obtenemos es la 1, 1, 2, 5, y parece complicado deducir qué valor será el siguiente de la secuencia. De hecho, adivinar el número de árboles binarios con cuatro vértices internos es complicado si queremos realizar el cálculo de manera directa.

Con la combinatoria que ya hemos aprendido podremos deducirlo sin necesidad de dibujarlos. Para ello debemos explotar la estructura recursiva de los árboles: obsérvese que los objetos que se encuentran unidos al vértice raíz son de nuevo árboles, con un determinado número de vértices internos. Esta idea es la que se muestra en la figura siguiente, en la que descomponemos un árbol binario en otros dos más pequeños. La operación inversa es también sencilla, y consiste en pegar las dos raíces a un nuevo vértice.



Descomposición de un árbol binario en otros dos árboles binarios más pequeños. El número total de vértices internos se reduce en una unidad.

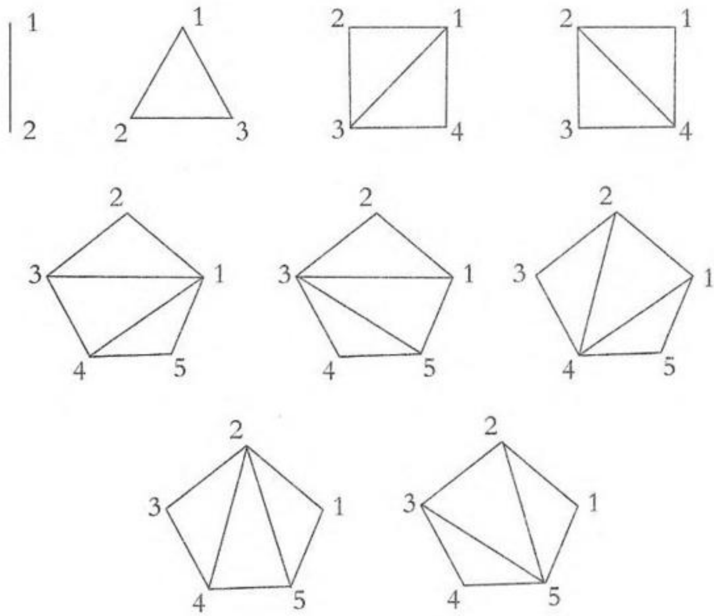
Esta condición estructural se traduce de la siguiente forma utilizando el lenguaje de las ecuaciones recursivas: denotemos con C_n el número de árboles binarios con raíz y con n vértices internos. En particular, de los cálculos que hemos realizado anteriormente tenemos que $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$ y $C_3 = 5$. Puesto que un árbol con n vértices internos se descompone en dos subárboles con a y b vértices internos, de tal forma que la suma de a y de b es igual a $n-1$ (ya que hemos eliminado un único vértice interno, el que carga la raíz, de un total de n), resulta que el número total de árboles con n vértices internos será igual a la suma de todas las posibles parejas de subárboles cuya suma de vértices internos es igual a $n-1$. Esta condición combinatoria se traduce en la siguiente ecuación recurrente:

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0,$$

que nos viene a decir que el número de elementos de tamaño n es igual a la suma de todas las maneras posibles de escoger un par ordenado de elementos que sumen $n-1$. Sustituyendo valores en esta fórmula deducimos que la sucesión numérica para los árboles binarios es la siguiente:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1.430, 4.862, 16.796, 58.786, 208.012, 742.900, 2.674.440,...

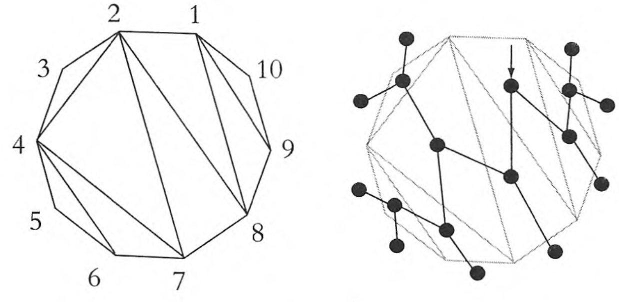
Lo realmente curioso de esta sucesión no es su fórmula, sino que existen otros objetos combinatorios que también son enumerados por la misma secuencia. Vamos a definir otra familia de objetos que a priori nada tienen que ver con los árboles binarios. Consideremos un polígono regular de n lados, con los vértices marcados con las etiquetas $1, 2, ..., n$ en sentido antihorario. Consideremos el número de descomposiciones del interior del polígono en triángulos. Cada una de estas descomposiciones se denomina *triangulación de un polígono de n lados.* En la figura siguiente se muestran las posibles triangulaciones para la arista (se trata de un caso degenerado que añadimos por conveniencia), el triángulo, el cuadrado y el pentágono.



Triangulaciones de los polígonos de tres, cuatro y cinco lados.

Es curioso que en esta familia se repita la misma secuencia numérica: 1, 1, 2, 5. ¿Será que dichas familias, aun siendo distintas, son contadas por la misma secuencia numérica? Así es. Veamos por qué.

Para comprobar que a cada triangulación le podemos asociar un único árbol binario utilizaremos el *mapa dual* de un mapa dado. Este mapa se construye de la siguiente manera a partir de un mapa inicial: sus vértices se dibujan en el interior de cada una de las caras del mapa primitivo y dos vértices se unen mediante una arista si las caras a las que se asocian son incidentes. Esta construcción se traduce en las triangulaciones de la siguiente manera: dibujamos un vértice en cada una de las caras de nuestra triangulación. De manera adicional, dibujamos un vértice de grado uno (es decir, una hoja) por cada arista del polígono que no sea la definida por los vértices 1 y 2. A esta última arista le asociaremos la raíz del árbol binario. Obsérvese el ejemplo de la figura siguiente, en la que se muestra la construcción para el caso de un decágono.



Triangulación de un polígono de diez lados y la construcción dual asociada.

Obsérvese que dicho mapa dual no contiene ciclos: de ser así, la triangulación debería tener un punto interior, y eso, por definición, no es posible. Además, dicho mapa únicamente tiene vértices de grado tres (los asociados a los triángulos) y de grado uno (los asociados a las aristas del polígono). Por lo tanto, el mapa dual es, en efecto, un árbol binario, cuyos vértices internos son los asociados a los triángulos de la triangulación. Recíprocamente, podemos mostrar que para cada árbol binario con n vértices internos podemos construir una triángulación de un polígono de $n+2$ lados cuyo mapa dual es precisamente el árbol binario inicial. De este modo existe una relación biyectiva entre triangulaciones y árboles y, por lo tanto, hay tantos de una cierta talla como de los otros; por cierto, la talla es el número de vértices del polígono y el número de vértices internos, respectivamente.

Puede resultar curioso para el lector que la anterior ecuación, mágica y misteriosa, aparezca en distintos problemas enumerativos. La solución de esta ecuación recursiva es bien conocida y da lugar a los llamados *números de Catalan*, nombre que recibe en honor de su descubridor, el matemático belga Eugène Catalan, y cuya expresión es la siguiente:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Más allá de las combinaciones y de los números binomiales, los números de Catalan emergen en la combinatoria enumerativa como las primeras expresiones que no pueden obtenerse mediante cuentas directas. De hecho, los números de Catalan aparecen en un variopinto abanico de problemas y de contextos. Es por ello que Richard Stanley, uno de los investigadores más importantes en el dominio de la combinatoria enumerativa, en el problema 6.19 de su libro de referencia *Enumerative Combinatorics* muestra ¡más de sesenta familias combinatorias distintas que son enumeradas por los números de Catalan! Nuestra aportación ha sido de dos familias, nada mal para un libro introductorio a la combinatoria.

Porque incluso en objetos muy complicados podemos encontrar en su interior objetos bien conocidos, como árboles dentro de triangulaciones. Esta filosofía fue habitual en la combinatoria de todo el siglo XX, pero adquirió especial importancia a raíz de los trabajos de un personaje que haría temblar los cimientos de las matemáticas discretas. Un hombre sin domicilio fijo, sin posesiones materiales, pero con una pasión y abnegación por las matemáticas como no se había conocido antes. Un eterno nómada dispuesto a difundir las matemáticas y los grandes enigmas del saber.

PERDIDOS EN UN DICCIONARIO DE SECUENCIAS NUMÉRICAS

Del mismo modo que el escritor utiliza el diccionario de sinónimos y antónimos para enriquecer su prosa, el matemático necesita recursos para refinar su investigación. Imaginemos que nos encontramos enumerando cierta familia pero que no sabemos cómo hallar el término general. No hay problema. Si existe alguna persona que haya estudiado la misma secuencia lo podremos saber consultando la *The On-Line Encyclopedia of Integers Sequences*, alojada en la página web http://oeis.org/. Dicho proyecto se mantiene activo gracias al trabajo del investigador Neil Sloane, del laboratorio de investigación de la compañía AT&T.

Cada secuencia que se descubre es anotada y catalogada. De esta manera, cuando un investigador necesita saber si la secuencia que ha obtenido ha aparecido previamente, o si también cuenta otra cosa, únicamente necesita introducir los primeros términos en el buscador y observar las coincidencias.

Como curiosidad, el lector puede intentar introducir la secuencia numérica más famosa y enigmática de la televisión, la de la serie americana *Perdidos*: 4, 8, 15, 16, 23, 42. Observará que la secuencia está catalogada, y que incluso tiene referencia en esta enciclopedia numérica: la A104101.

Capítulo 3

El eterno nómada

Si los números no son bellos, entonces no sé qué cosa lo es.
Paul Erdős

«Debido a las inclemencias climáticas, el vuelo procedente de Waterloo llegará con un retraso aproximado de treinta minutos.» El mensaje lanzado por los megáfonos del aeropuerto no hace más que aumentar las ansias de un nutrido grupo de matemáticos que esperan con nerviosismo la llegada del avión. La imagen recuerda más a la de un grupo de incondicionales de la estrella del rock del momento que a la de una congregación de científicos. El estrés está más que justificado, ya que no se recibe todos los días, en persona, a un mito viviente.

Con un retraso más largo de lo esperado, la aeronave aterriza y en pocos minutos la tripulación comienza a descender. Uno de ellos destaca por su singular figura: canoso, frágil, entrado en años y con una pose un tanto somnolienta y dubitativa. El personaje viste una vieja americana de color oscuro y acarrea, en una mano, una pequeña maleta de tela, y en la otra, un manojo de papeles arrugados. Muchos de sus compañeros de viaje podrían pensar que el harapiento anciano es un vagabundo, incluso un loco; pocos podrían imaginar que han compartido un desplazamiento con una de las mentes coetáneas más lúcidas y privilegiadas.

La visión del individuo de peculiar apariencia causa un revuelo entre el grupo de doctos matemáticos que lo esperan. Caras iluminadas, ilusión, nerviosismo desencadenado por doquier; excitación en definitiva. El anciano pierde su imperturbable y tántrica concentración. Gira la mirada hacia la manada de pensadores y con una sonrisa perfilándose en los labios les dice: «¡Mi mente se abre a vosotros!». Empieza una nueva visita del tío Paul, y con ella, nuevos y excitantes retos matemáticos, conjeturas no resueltas y teoremas por descubrir.

¡Mi mente se abre a vosotros!

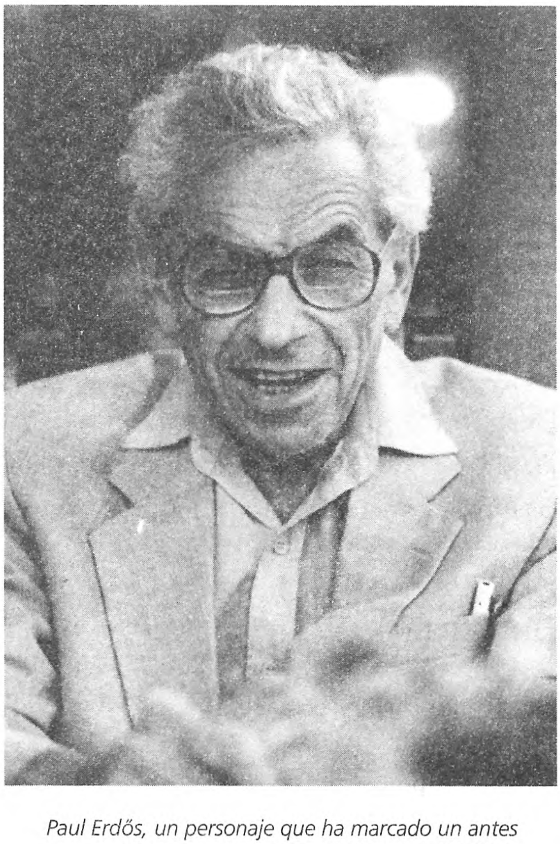
En toda disciplina del saber han existido, existen y existirán personajes que definen puntos de inflexión dentro de su campo. Paul Erdős era una de esas personas. Durante la segunda mitad del siglo XX la imagen descrita se repitió en numerosas ocasiones y a lo largo y ancho de la geografía mundial. La razón de los viajes fue siempre la misma: las matemáticas y la intensa pasión de Paul Erdős por ellas. Su obra matemática podría recibir calificativos distintos según quien los diga. Sin entrar en juicios científicos, la característica más sobresaliente de su legado es su extensión y su variedad; de hecho, su obra es muchísimo más amplia que la de cualquier matemático. Si deseásemos realizar una clasificación de los matemáticos a lo largo de la historia en función de la cantidad de trabajos escritos, el campeón por goleada sería Leonhard Euler. El gran científico de Basilea es hasta el día de hoy el matemático con un mayor número de páginas escritas. Euler sería el campeón en peso, pero Erdős lo sería en cuanto al número de publicaciones: un total de más de 1.500 artículos avalan su producción científica. En estos trabajos, Erdős husmeó en un abanico muy variado de campos de las ciencias puras, que van desde el análisis matemático al álgebra, pasando por la geometría. Sin embargo, a pesar de toda esa ingente producción matemática, Erdős es particularmente reconocido por su devoción a un tipo de cuestiones de sabor discreto. Es en ese mundo, en el campo de las geometrías finitas, de los grafos, de las cuentas astutas con los dedos y de las propiedades aditivas de los números enteros, donde nuestro protagonista ha realizado aportaciones clave.

Más allá de sus trabajos, Paul Erdős consiguió por primera vez que la combinatoria fuese considerada como una disciplina con derecho propio en el Olimpo de las matemáticas. Previamente a sus contribuciones, los problemas de naturaleza discreta eran considerados como cuestiones particulares e incluso meras curiosidades o juegos de ingenio que se encontraban subordinados a hermanos mayores de la jerarquía del saber. Las contribuciones de Erdős, junto con los problemas (y las ramas que de ellos se dedujeron) dieron consistencia a la noción de combinatoria tal y como la entendemos hoy, con unos problemas y unas técnicas bien propias de la disciplina.

Sin tener en cuenta (cosa ya difícil de por sí) las aportaciones científicas del genio, esta leyenda científica consiguió que las matemáticas se convirtieran en una actividad social, si por ello entendemos una actividad creativa en la que toma parte más de un individuo. Si hiciésemos un estudio bibliográfico de los trabajos científicos anteriores al segundo cuarto del siglo XX, observaríamos una pauta general: la mayoría de ellos son escritos por un único autor. Erdős intentó romper esa norma no escrita creando una amplia red de colaboradores. Esta filosofía le llevó a contar con más de 500 colegas... ¡un número mayor que la cantidad de conocidos que tienen la mayoría de las personas! Esta red de contactos se consolidó gracias a la vida nómada que llevó a lo largo de la mayor parte de su vida; una vida de viajes de una universidad a otra, de instituto en instituto, de continente en continente, acompañado siempre de todas sus (pocas) posesiones materiales.

Es más que justificado que Paul Erdős sea nuestro *cicerone* a lo largo de esta senda que nos adentrará en el apasionante mundo de la combinatoria moderna, una disciplina en la que el tío Paul (como gustaba que le llamasen) realizó aportaciones clave, mediante la formulación de rompecabezas, conjeturando y probando. Muchos de estos enigmas han sido resueltos, pero algunos de ellos no, y no ha sido porque no lo hayan intentado las mentes más privilegiadas del siglo XX.

Pero antes de empezar la expedición hacia estos enigmas vamos a conocer un poco más la dimensión del científico, del hombre y del mito, porque es mucho mejor conocer antes a nuestro guía para disfrutar más y mejor del camino.



Paul Erdős, un personaje que ha marcado un antes y un después en el mundo de la combinatoria.

Infancia

El bullicio intelectual, artístico y científico en el Budapest del periodo de entreguerras era más que patente. El Danubio no era una frontera natural entre la ciudad de Buda y la villa de Pest, sino que más bien era un nexo de unión entre distintas comunidades para formar un crisol singular de culturas. En los cafés, los bulevares y los parques de la capital de Hungría se respiraba un ambiente de creación artística comparable al de otras ciudades occidentales como París o Londres. Una parte de la causa de esa explosión cultural se debía a la comunidad judía local, que desde décadas coexistía en la villa en total armonía y libertad con el resto de culturas. La situación política del país trataba con derecho propio al pueblo hebreo, y permitía que dicha comunidad ejerciera labores civiles y políticas, derechos que ya empezaron en la segunda mitad del siglo XIX con una monarquía dual entre Austria y Hungría. Era tal su influencia económica y su contribución cultural en el Budapest de la época que algunos empezaron a llamar a la ciudad, con aire absolutamente despectivo, «Judapest» en lugar de Budapest.

Ese sentimiento antisemítico desencadenaría años más tarde la atroz locura del confinamiento de la comunidad judía en el gueto de la ciudad y el desplazamiento posterior de la población a distintos campos de refugiados, a cuál más atroz. Pero toda esta barbarie para el género humano estaba todavía por llegar y nadie podía presagiar esos eventos en el periodo comprendido entre la Primera y la Segunda Guerra Mundial.

En dicho contexto histórico y en aquella ciudad nació Paul Erdős el año 1913, hijo de los matemáticos judíos Anna y Lajos Erdős. El pequeño Paul no llegó a conocer a sus dos hermanas mayores, Magda y Klára, ya que éstas murieron en un brote de escarlatina que azotó la ciudad. Después de aquella tragedia familiar, la joven pareja de matemáticos concentró todas sus fuerzas en educar al pequeño Paul, dándole todo su afecto y amor, e incluso siendo demasiado protectores con él. Los tiempos eran complicados para una joven pareja de judíos en un Budapest donde el antisemitismo empezaba a emerger de manera escalofriante. Sin embargo, no fue esa la primera mala noticia del matrimonio: un año después del nacimiento del pequeño Paul estalló la Primera Gran Guerra, que tuvo como detonante el asesinato de Francisco Fernando de Austria, archiduque de Austria en Sarajevo. Como reacción a aquella provocación y como síntoma de una situación política muy tensa, el Imperio austrohúngaro declaró la guerra a Serbia. Lajos, el padre de Paul, fue movilizado.

UNA SOCIEDAD EN PLENA EBULLICIÓN INTELECTUAL

No es de extrañar que al enumerar a todos los intelectuales que se formaron en el Budapest del periodo de entreguerras, anotemos muchas de las grandes mentes científicas y artísticas del siglo XX. En matemáticas, además de Paul Erdős, muchos jóvenes (y no tan jóvenes) se erigirían como padres de nuevas teorías y exploradores de nuevos caminos. Es el caso del que años más tarde sería el director de la tesis doctoral de Paul Erdős, Leopold Fejér, uno de los padres del análisis matemático moderno. Bajo su seno conformó una escuela de jóvenes y brillantes matemáticos en la que destacan Paul Turán, George Pólya y Tibor Radó, entre otros. Cabe recordar asimismo a uno de sus estudiantes más conocidos, John von Neumann, quien pondría los cimientos formales de la física cuántica actual, además de ser uno de los padres de la teoría de juegos y de la computación. Años más tarde, ya en Estados Unidos, sería uno de los primeros miembros civiles del famoso Proyecto Manhattan, cuya finalidad sería el desarrollo de la bomba atómica por parte del gobierno estadounidense.

El legado húngaro a la humanidad no se basa únicamente en las matemáticas: el ingeniero aeronáutico Theodor von Kármán fue el precursor del vuelo supersónico, y el premio Nobel George Hevesy aportó nuevas aplicaciones de la radiactividad a múltiples áreas. Y, por supuesto, es preciso mencionar el legado artístico, empezando por la música (Georg Solti, Béla Bartók, entre otros), la pintura (László Moholy-Nagy), el cine (Alexander Korda) y el teatro (Erik Weisz, conocido mundialmente como Harry Houdini).

Una imagen de Budapest en 1910.

La tragedia llegó temprano a la familia: tropas soviéticas apresaron a Lajos y lo llevaron cautivo a la temida y gélida Siberia durante seis largos años. Al no tener la certeza de volver a ver a su marido, Anna volcó todos sus esfuerzos y cariño en su pequeño bebé, de manera que su sobreprotección la llevó a apartar al pequeño Paul de la enseñanza tradicional en la escuela, y fue educado en casa por ella misma y por un tutor particular. Durante aquellos años se estableció un vínculo realmente intenso entre Paul y su madre; años más tarde, ya en su papel de nómada, Anna sería la compañera infatigable de los infinitos viajes de su hijo.

El talento de Paul no pasó desapercibido a su madre: se podría decir que aprendió a contar antes que a caminar. Con tres años ya era capaz de sumar, y con cuatro, realizaba mentalmente cuentas complicadas, como calcular largos productos o el número de minutos que una persona había vivido. El descubrimiento de los números negativos en su más tierna infancia abrió la mente del genio hasta límites insospechados, y esto le mostró que en las matemáticas no existen barreras a la razón. Las cualidades de Paul Erdős se vieron favorecidas por un ambiente absolutamente propicio a la creación intelectual. La Hungría en la que estaba creciendo se caracterizaba por tener un sistema educativo muy sólido y basado en la detección y aprovechamiento de las cualidades individuales, de manera que maestros y profesores de secundaria eran miembros socialmente muy reconocidos debido a su labor formativa, que iba más allá de las meras lecciones magistrales y daba paso a una verdadera implicación moral con los jóvenes estudiantes. En consecuencia, era habitual que grandes y prestigiosos investigadores dedicasen su tiempo a proponer y discutir problemas con los jóvenes talentos.

Una de las múltiples formas con las que se conseguía este diálogo intergeneracional era mediante revistas de problemas matemáticos, como la popular revista *KöMaL* de la época, boletín fundado el año 1894 por el profesor Dániel Arany, y que según sus palabras servía «...para proporcionar a los profesores y estudiantes una amplia fuente de problemas...». (La revista continúa vigente y puede consultarse en su página web: www.komal.hu.) Los estudiantes de secundaria eran invitados a resolver problemas que aparecían en un boletín de publicación mensual y que servían para detectar el talento innato por las ciencias. No era cosa de niños, ya que los propios investigadores también dedicaban su tiempo a pensar en problemas de esta índole y a resolverlos. Porque, en definitiva, un matemático se dedica a esta disciplina por la excitación y por la curiosidad de hallar soluciones a enigmas.

Esta filosofía llevaría años más tarde en Hungría a la creación de competiciones matemáticas a nivel local y estatal, embrión de lo que actualmente son las olimpiadas internacionales de matemáticas (pero también de física, química e incluso de informática), competiciones de máximo nivel para estudiantes de secundaria. Del mismo modo que las olimpiadas deportivas exigen una preparación intensa, estos concursos científicos requieren diversas fases de selección, mucho trabajo y también mucho ingenio. De hecho es en estas competiciones donde muchos de los grandes científicos de la segunda mitad del siglo xx han empezado su andadura matemática.

Pero volvamos a Budapest y a la vida del joven Erdős. La situación en Hungría no hacía más que empeorar con el final de la Primera Guerra Mundial. El antisemitismo y el anticomunismo tomaron una magnitud insospechada en el año 1920, cuando Miklós Horthy Nagybánya, nacionalista de derechas y comandante del ejército austrohúngaro, asumió el control del país. Con Horthy en el poder, se introdujeron leyes muy excluyentes en contra de la comunidad judía, similares a las que Hitler introduciría en Alemania trece años más tarde y que llevarían a la situación de barbarie de la Alemania nazi. Todo no fueron penas, ya que Lajos regresó a casa después de su cautiverio en Siberia. En aquel contexto histórico la curiosidad y el potencial del joven Erdős no hacía más que crecer, estimulada sin duda por la tradición cultural que existía en la villa. Fue en Budapest donde ya en la adolescencia encontró algunos de sus mejores compañeros de viaje por el mundo de las matemáticas, como Paul Turán, George Szkeres y Esther Klein, todos ellos entusiastas solucionadores de problemas para las revistas de estudiantes. Esta amistad llevaría a la pequeña comunidad de jóvenes matemáticos a reflexiones conjuntas que años más tarde serían las piedras angulares de la creación de nuevas y bellas teorías.

Y con el paso del tiempo y en un ambiente cada vez más enrarecido debido al odio que aumentaba día tras día, Erdős creció y empezó su andadura como matemático profesional, primero estudiando matemáticas, después realizando su tesis y finalmente partiendo de su amada Budapest.

Adolescencia y exilio

El interés y la capacidad de Erdős por los problemas de matemáticas era cada vez más patente, de tal manera que ese potencial fue reconocido internacionalmente siendo aún muy joven. Uno de los primeros grandes resultados que obtuvo, con tan sólo diecinueve años, fue una demostración alternativa del denominado *postulado de Bertrand*. Para entender este teorema es necesario recordar el concepto de *número* *primo.* Decimos que un número es primo si sus únicos divisores son el 1 y él mismo. Así, por ejemplo, 2, 7 u 11 son números primos, mientras que el 6 no lo es, ya que es divisible entre 2. El postulado de Bertrand afirma lo siguiente:

«Entre un número y su doble siempre existe un número primo».

Por ejemplo, entre el 4 y el 8 hay el número primo 5, o entre el 13 y el 26 está el 17, que también es un número primo. La primera demostración de este resultado fue realizada el año 1850 por Tchebychev utilizando argumentos un tanto sofisticados. Años más tarde, el genio autodidacta Srinivanasa Ramanujan halló una demostración más simple, pero que todavía incluía ciertos tecnicismos. Finalmente, en el año 1932, Paul Erdős concibió una demostración extremadamente elegante y elemental basándose en el uso de los binomiales, de los que ya hemos hablado extensamente.

Fue en aquella época en la que se forjaron las estrechas colaboraciones de Erdős con sus coetáneos húngaros. Al igual que éste, muchos habían participado en las revistas matemáticas de la época, y eso permitió que talentos con gran potencial se encontrasen años más tarde, ya en la adolescencia, para discutir acaloradamente de matemáticas. El lugar de reunión era fijo: la tumba del escritor desconocido en el Parque de la Ciudad (Városliget) de Budapest, justo delante del castillo Vajdahunyad. Dicha escultura fue erigida en honor de un escribano anónimo del Gloriosísimo Rey Béla (*Gloriossissimus Belae Regis*). Dicho escritor sin identidad es reconocido como uno de los primeros cronistas de la historia de Hungría, allá por el siglo XII. Cuenta la superstición lugareña que tocar la pluma del escribano da suerte, y ésa es la razón de que el bronce que la recubre esté siempre brillante. La estrella del cálamo del escritor sin nombre daría buena suerte a Erdős y sus compañeros en el camino del descubrimiento del conocimiento.

El paso de Erdős por la universidad fue fugaz. Las restricciones de los judíos a ingresar en ella no fueron un problema para él, ya que se erigió como ganador del examen nacional de ingreso; eso le aseguró la plaza. De esta manera ingresó en el año 1930 en la Universidad Pázmány Péter de Budapest. Fue allí donde obtuvo su doctorado en el año 1934 bajo la dirección del gran matemático húngaro Leopold Fejér. En este aspecto el genio también sobresalió, puesto que dicho título lo obtuvo a la temprana edad de 21 años (obsérvese que su ingreso en la universidad lo llevó a cabo con diecisiete años, de manera que obtuvo su licenciatura y su doctorado ¡en tan sólo cuatro años!).

Tumba del escritor desconocido, lugar de encuentro de Erdős y de sus colegas matemáticos.

La situación para el pueblo hebreo en Hungría era más cruda día tras día, y la comunidad judía empezaba a presagiar lo peor, razón por la que Erdős decidió partir: la situación de un científico judío era, cuanto menos, difícil. Su destino fue Inglaterra, y más concretamente la Universidad de Manchester, gracias a una invitación del gran matemático judío de origen americano Louis Mordell. Existe una anécdota que el propio Erdős explica en referencia a su llegada a un lugar completamente desconocido como era Manchester; Erdős dice:

> «Llegué a media tarde a casa de Mordell y no había comido nada en todo el día. A las cinco sirvieron el té y yo tenía tanta hambre, y me avergonzó tanto confesar que nunca había untado mantequilla en una tostada, que me puse a imitar a los demás y descubrí que no era una tarea tan difícil como aparentaba ser...».

Este hecho ilustra claramente la fuerte sobreprotección que Erdős había recibido por parte de su madre durante toda su adolescencia. Éste fue el primer momento de su vida en el que se debía valer por sí mismo. Y así fue. A partir de esta primera visita a Inglaterra, Erdős empezó a viajar asiduamente, hábito que años más tarde se convertiría en su modo de vida. Conoció al gran investigador Godfrey Harold Hardy en Cambridge el mismo 1934, y a Stanislaw Ulam un año más tarde. Este segundo encuentro fue clave para abrirle años después las puertas del Nuevo Mundo.

Mientras Erdős realizaba todo este periplo a lo largo y ancho de la isla británica, la situación en el Viejo Continente era crítica, lo que no impidió a Erdős regresar a su querida Budapest tres veces al año durante su estancia en Manchester. Pero la situación empeoró, y en 1938 Hitler tomó el control de Austria. Debido al recrudecimiento de las actividades nazis (y, más en concreto, a los hechos acontecidos el 3 de septiembre en la región de los Sudestes, en la antigua Checoslovaquia) Erdős tomó la decisión de abandonar Europa y emigrar a Estados Unidos, para instalarse en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, institución del más alto nivel intelectual y científico. Erdős partió por última vez de Budapest dejando atrás a muchas de sus amistades y a sus padres, y con la incertidumbre de la próxima visita; no volvería

UN INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DEL MÁS ALTO NIVEL

El Instituto de Estudios Avanzados de Princeton es una institución fundada el año 1930 con el fin de proporcionar a los investigadores punteros en su materia un marco de trabajo incomparable, sin necesidad de dar clases. Se trata de un órgano independiente y no forma parte de la Universidad de Princeton, aunque existen lazos informales y múltiples colaboraciones entre ambos centros.

Su *modus operandi* es muy distinto a lo que normalmente se entiende por universidad: existe un número reducido de profesores que se complementan con miembros visitantes que son seleccionados año tras año, y se da libertad total a los investigadores para desarrollar sus proyectos científicos: la investigación no se lleva a cabo mediante contrato o dirección externa, sino según el propio criterio del científico, y se financia mediante donaciones y ayudas, ya que no se cobra matrícula a los asistentes.

Tal como muestran los estatutos de la época de su fundación, entre sus objetivos comprendía albergar a los investigadores judíos que no podían acceder a puestos de investigación en Princeton debido a su antisemitismo institucionalizado. De esta manera, grandes investigadores del siglo xx, como Albert Einstein, Robert Oppenheimer («el padre de la bomba atómica») o John Von Neumann, ocuparon posiciones en este centro. Kurt Gödel, a pesar de no ser judío, realizó la tesis a verlos hasta después de diez años. El día 18 de septiembre, alejándose de Londres y rumbo a Nueva York, Erdős se despedía de la vieja Europa... por el momento.

Estados Unidos, Israel... La vida como nómada

La vida de Erdős en Estados Unidos empezó en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Sin embargo, su estancia fue más corta de lo que esperaba: después de un año de estar en aquel prestigioso centro no se le concedió una renovación de la beca. Los motivos oficiales eran que no había fondos, pero se rumoreaba que la verdadera razón era que el espíritu colaborador de Erdős estaba molestando a las grandes mentes pensantes que se hallaban por aquellas fechas en el centro. En cualquier caso, Oswald Veblen, a la sazón director del departamento de matemáticas del Instituto, consiguió una financiación para Erdős que se elevaba a 750 dólares mensuales, cantidad suficiente para asegurarle el siguiente año académico.

Después de mudarse el año 1941 a la Universidad de Pennsylvania, un evento sin importancia aparente aconteció en Long Island: Erdős y otros dos investigadores se hallaban discutiendo fervorosamente y, sin razón alguna, fueron detenidos por la

con Hans Hahn, que sí lo era, y también uno de los miembros ilustres del Instituto en sus primeros años. A pesar de este ambiente idílico para la investigación, muchas voces eminentes criticaron el modelo. Es el caso del polémico y mítico físico Richard Feynmann, que dice lo siguiente de la institución en su conocido libro *¿Está usted de broma, Sr. Feynman?*:

> «... Cuando estuve en Princeton en los años 40 pude ver qué les pasa a esas grandes mentes en el Instituto de Estudios Avanzados, quienes habían sido especialmente seleccionados por su tremenda capacidad y para tener la oportunidad de sentarse en su magnífica casa en medio del bosque, sin obligación de docencia y, de hecho, sin ninguna obligación. Estos pobres bastardos pueden sentarse y pensar por ellos mismos, ¿no? Pues, de hecho, no tenían nuevas ideas: tienen la oportunidad y no lo consiguen. Creo que en esta situación un sentimiento de culpabilidad o de depresión te invade, y uno se empieza a preocupar por no tener ideas. Y nada ocurre, las ideas no vienen. Nada ocurre porque no hay suficiente actividad real ni retos: no se está en contacto con los jóvenes. No tienes que pensar en responder preguntas de los estudiantes. ¡Nada!...».

policía. Lo que los despistados matemáticos no habían advertido era que durante su discusión habían traspasado una línea que prohibía el paso, lo que provocó que a Erdős le abrieran una ficha de antecedentes en el FBI. Un hecho tan banal como éste sería suficiente durante la época del macartismo para ocasionarle a Erdős problemas con la justicia.

La mente de Erdős se hallaba en el mundo de las matemáticas, pero su corazón se encontraba al otro lado del Atlántico. En 1943 la situación de su familia y la de su país le preocupaban en exceso: no tenía noticias de los suyos desde 1941, y no las tuvo hasta la liberación de la ciudad, en 1945. La noticia de la muerte de su padre unos años antes, en 1942, lo conmocionó. Y eso no fue todo: la represalia nazi sobre los judíos se cebó especialmente en la comunidad de Budapest, y muchos de ellos pasaron sus últimos días en el temido campo de concentración de Auschwitz. La familia de Erdős no fue una excepción, y varios de sus parientes fallecieron en el holocausto. Su madre, su querida Anna, había sobrevivido. Fue a finales del año 1948 cuando Erdős pudo retornar a su país para visitar a sus seres queridos y reconstruir los vínculos perdidos durante su larga estancia en Estados Unidos. A partir de ese año retomó los viajes entre el Viejo Continente y el Nuevo Mundo, donde ejercía como profesor investigador temporal en la Universidad de Notre Dame, en Indiana.

El año 1954 fue un punto de inflexión para nuestro personaje: el Congreso Internacional de Matemáticos se celebraba en Ámsterdam, y Erdős fue invitado a dar una charla. Como extranjero debía pedir un visado de regreso a Estados Unidos, pero su extensa correspondencia con multitud de matemáticos, incluyendo algunos del otro lado del telón de acero, planteó sospechas a los funcionarios de inmigración. Además de este hecho, Erdős ya tenía una ficha en el FBI debido al desliz en Long Island. Dichas sospechas se vieron reforzadas por la política de «caza de brujas comunista» en la época macartista. Al intentar volver de su viaje, los funcionarios de aduanas le impidieron la entrada. Erdős recuerda que «...los funcionarios de inmigración me realizaron todo tipo de preguntas tontas...». La situación fue a peor cuando los funcionarios le preguntaron por Marx, a lo que él respondió: «...Yo no soy competente para juzgar, pero sin duda fue un gran hombre...». Todo ello le llevó a alejarse de Estados Unidos y a ser una persona condenada a no poder retornar al «país de las oportunidades» hasta el año 1958, en el que recibió un visado especial para asistir a una conferencia. A propósito de todo esto, Erdős decía: «...La política exterior de Estados Unidos insiste en dos puntos: la no admisión de la China Roja en la ONU y la no admisión de Paul Erdős en Estados Unidos...». De este modo

Erdős emigró al Instituto Technion de Israel, en el que estuvo más de diez años. Fue en este periodo cuando se empezó a forjar verdaderamente su espíritu nómada, que ya se había manifestado tanto en Inglaterra como en Estados Unidos.

La relación con su madre se volvió a fortalecer a raíz del retorno de Erdős procedente de Norteamérica: cuando no viajaba vivía con ella, que se responsabilizaba de él y de todos los detalles de su vida, para que pudiera concentrarse únicamente en pensar y en crear matemáticas. Su relación era tan fuerte que a partir de 1964 Anna empezó a viajar con él, a la avanzada edad de 84 años. Su madre era su gestora, su mentora y su consejera.

Paul Erdős y su madre.

Después de la muerte de Anna, en 1971, las excentricidades de Erdős empezaron a ser cada vez más evidentes. Se negaba a entrar en el antiguo apartamento de sus padres en Budapest, pero, en cambio, pedía cobijo a sus amigos cuando se encontraba en la ciudad. Podía aparecer en medio de la noche, sin criterio horario alguno, para anunciar a sus colegas que estaba preparado para discutir de matemáticas. Empezó con un ritmo frenético de trabajo, rozando las diecinueve horas diarias y ayudado de cafés muy cargados y de anfetaminas.

Los achaques propios de la edad empezaron a hacer mella en él, pero ello no le impidió continuar con la febril creación: se negó a que le practicasen una operación de cataratas, ya que eso le impediría trabajar por un tiempo. Su corazón era débil y necesitaba un marcapasos, operación quirúrgica no muy complicada pero que requiere hospitalización. Erdős se negó a pasar la noche en el hospital, ya que esto le impedía asistir a parte de las charlas de las conferencias del congreso al que estaba asistiendo. Finalmente, la operación se llevó a cabo, y él y sus dos cardiólogos fueron juntos a la conferencia de matemáticas.

Llevó este ritmo frenético y sin descanso lo que le restaba de vida. Ya con las facultades mermadas, sin la rapidez mental de su juventud, seguía viajando y hospedándose, cual nómada, donde se lo permitieran, discutiendo y proponiendo nuevos enigmas. En 1996, durante una conferencia en Varsovia, y a la edad de 83 años, su corazón se paró, dejando huérfana a la gran familia de investigadores de la combinatoria.

La personalidad del genio: conjetura y prueba

El camino nada convencional que Erdős tomó forjó decididamente su carácter. Se puede decir que su interés básico eran las matemáticas. Como persona, y debido a su fijación extrema por el mundo abstracto, quizá lo más interesante fue su desapego por las cuestiones materiales: dinero, posición y honores. Nunca se preocupó por tener una casa o un puesto, y empleaba el dinero de los premios que recibía en ayudar a jóvenes con talento profesional. Un ejemplo de este hecho es el siguiente: en 1984 ganó el Premio Wolf, uno de los más prestigiosos en matemáticas y de categoría intelectual similar al actual Premio Abel. La distinción comportaba una recompensa en metálico de 50.000 dólares. De éstos, Erdős guardó para él únicamente 720. La mayor parte del premio la regaló al Instituto Technion en señal de gratitud por haberlo acogido después de que las autoridades de Estados Unidos le negaran la entrada en el país. Parte de ese capital se dirigió a financiar una posición postdoctoral en honor de sus padres. El resto se lo dio a amigos, parientes, estudiantes y colegas.

Otra gran parte del dinero que ganaba lo ofrecía como premio a las personas que consiguieran resolver conjeturas que él no había conseguido descifrar: estos

FRASES CÉLEBRES PARA DEFINIR UN CARÁCTER

La filosofía de vida de Paul Erdős se resume de manera sencilla en su máxima «*conjetura y prueba*», pero más allá de las matemáticas, los intereses de Erdős también abarcaban la política, la filosofía y la teología. Valgan de ejemplo las siguientes cuotas, en las que se puede vislumbrar un poco más su carácter:

«No tienes que creer en Dios, pero deberías creer en El Libro» (en referencia al libro de las demostraciones).

«En la tumba habrá mucho tiempo para descansar.»

«Dios es el supremo fascista.»

«La televisión es un invento ruso para destruir la educación americana.»

«Los problemas dignos de atacar demuestran su valía luchando.»

«Dios puede que no juegue a los dados con el universo, pero algo extraño está pasando con los números primos.»

«Espero que podamos resolver estos problemas antes de salir de casa.»

«Un socialista francés dijo que la propiedad privada es un robo y yo digo que la propiedad privada es un fastidio.»

«Pasarán millones de años hasta que lleguemos a alguna comprensión, y aun entonces no será completa, porque nos enfrentamos al infinito.»

premios oscilaban entre 1 dólar (para problemas que a su modo de ver eran muy simples) hasta 10.000 dólares (para aquellos de extrema dificultad, en los que él no preveía un avance significativo en los años venideros). Estos premios no eran más que excusas para ponerse a trabajar y conseguir resolver uno de los difíciles problemas del tío Erdős, ya que frecuentemente se pagaban a partir de cheques sin fondo. Cuando esta situación se empezó a generalizar, su consejero y amigo Ronald Graham (que hacía el papel de Anna desde el momento en que ésta faltó) empezó a ingresar sus honorarios en una única cuenta. Lo curioso del asunto es que todos aquellos que resolvían un problema querían obtener el dinero... y ¡enmarcar el cheque con la firma del mito viviente!

Existe, sin embargo, una inmensidad de conjeturas de las que todavía no se conoce la respuesta, y, de hecho, se está lejos de obtener algo al respecto. Una de ellas pertenece al siguiente problema, ideado junto con su amigo de la adolescencia Paul Turán, y por el que ofreció una de sus mayores recompensas, 3.000 dólares:

«Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ un conjunto infinito de números naturales. Si la suma

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots$$

es divergente (es decir, infinita), entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas».

Si queremos entender la conjetura debemos aclarar algunos puntos de su enunciado. Existen varios conceptos que pueden resultar confusos para el lector. Para empezar, ¿qué es una suma infinita, y qué significa que sea divergente? Está claro que si tenemos un número finito de números podemos sumarlos (el primero con el segundo, el resultado que obtengamos con el tercero, y así sucesivamente), y su suma siempre será otro número. Ahora bien, si tenemos un conjunto infinito de números no podemos proceder del mismo modo, ya que deberíamos hacer un número infinito de sumas, algo irrealizable. Por suma infinita entendemos el *límite* de este procedimiento: empezamos a sumar el primero con el segundo, su resultado con el tercero, y así de manera sucesiva. Si estas sumas se van aproximando cada vez más a cierto número, diremos que éste es la suma de la serie.

Estas sumas infinitas pueden tener la curiosa propiedad siguiente: si a medida que vamos sumando términos, la suma total crece de manera descontrolada (lo que en matemáticas se conoce como *no acotada*), entonces se dice que la suma infinita es *divergente*. Por ejemplo, la suma de los inversos de los números naturales (también conocida como *suma armónica*) cumple esta propiedad: basta con tomar una calculadora y empezar a sumar para ver que resultan las siguientes sumas:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=2{,}928968254;$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}=5{,}187377518;$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}=7{,}485470861.$$

Cuantos más términos consideramos, mayor es la suma, y ésta se hace tan grande como nosotros queramos.

El otro punto que hay que aclarar es el de las progresiones aritméticas. Decimos que un conjunto de n números es una progresión aritmética de longitud $n+1$ y razón k si todos ellos pueden escribirse de la forma $a+bk$ donde la k toma valores entre 0 y n. La conjetura de Erdős-Turán nos dice, por lo tanto, que bajo condiciones débiles (no sabemos nada sobre el conjunto en cuestión, únicamente que la suma infinita diverge) el conjunto debe tener unas subestructuras bien definidas (las progresiones aritméticas con una longitud arbitrariamente larga).

Como tendremos ocasión de ver más adelante, esta inocente cuestión, que fue formulada por un anciano, ha resultado ser realmente profunda y ha sido asimismo el motor de desarrollo de algunas de las teorías matemáticas más importantes y complejas de la última mitad del siglo XX. Pero no adelantemos ahora acontecimientos futuros.

UNA DEMOSTRACIÓN DE DIVERGENCIA

Veamos con más detalle cómo podemos demostrar que la suma armónica diverge. El primer punto que hay que tener en cuenta es que si $a<b$, entonces

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}.$$

Partiendo de este hecho, lo que podemos observar ahora es que se cumplen las desigualdades:

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{4};\quad \frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}>\frac{1}{8};\quad \frac{1}{9},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{1}{12},\frac{1}{13},\frac{1}{14},\frac{1}{15}>\frac{1}{16};\ldots$$

Teniendo en cuenta estas desigualdades, obtenemos la siguiente cota para la suma armónica:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots>\\
&>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots=\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\ldots=\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots
\end{aligned}$$

Y esta última suma es claramente divergente.

La filosofía del *conjetura y prueba* se tradujo en la búsqueda incansable de colaboradores a lo largo y ancho del planeta, sin que importara la etnia, la nacionalidad o el pensamiento político. Ese afán de unión y de creación conjunta llevó a Erdős a convertirse en el matemático más prolífico de la historia, con más de 1.500 artículos escritos y más de 500 coautorías. Este hecho llevó a crear el curioso concepto de *número de Erdős*. Cada persona tiene asociado un determinado número de Erdős; Paul Erdős, como protagonista de esta «función teatral», es el único con número de Erdős 0. Todo aquel que haya realizado una colaboración científica con Erdős tiene número de Erdős 1. De manera similar, una persona que haya trabajado, codo con codo, con un científico con número de Erdős 1, tiene número de Erdős 2. Y así sucesivamente. Por último, si un individuo no tiene ningún tipo de conexión con Erdős (es decir, no ha realizado ninguna colaboración científica con un investigador que posea un determinado número de Erdős), entonces decimos que no posee número de Erdős, o que su número de Erdős es indeterminado (algunos dicen que es infinito).

Mucho se ha hablado de los números de Erdős en el mundo matemático, e incluso se ha creado un proyecto de estudio que se puede consultar en la dirección http://www.oakland.edu/enp/. Lo primero que se observa al estudiar de manera empírica estos números es que son asombrosamente pequeños: se ha comprobado que entre todos los matemáticos activos en el último cuarto del siglo XX que tienen un número Erdős definido, el rango de los valores no supera el 15 (casi todas las personas tienen un número de Erdős inferior a 8), y, de hecho, el valor medio de todos ellos es aproximadamente 5. Este valor sobrepasa las fronteras de las matemáticas debido a la naturaleza interdisciplinaria del saber. Así, por ejemplo, el lingüista Noam Chomksy y el astrónomo y también escritor Carl Sagan tienen número de Erdős igual a 4 y, por lo tanto, sus colaboradores no matemáticos tienen un número de Erdős bien definido.

Lo más extraordinario en este sentido es que el hecho de que el número de Erdős de un científico al azar tenga un valor pequeño no es un fenómeno aislado, sino que se repite en numerosos contextos que a priori no tienen nada en común. Fenómenos similares se observan también en grandes redes sociales, en el comportamiento de la transmisión de algunas enfermedades o en la jerarquía de la *world wide web*. Dichos fenómenos se enmarcan en lo que se conoce como *efecto pequeño mundo* (traducido del inglés *small world effect*) o en la expresión coloquial «el mundo es un pañuelo». Esta noción fue estudiada de manera rigurosa por primera vez en el año 1967 por el psicólogo Stanley Milgram, aunque a lo largo de la primera mitad del siglo XX varios autores ya empezaron a gestar las ideas de su existencia.

La idea es muy simple: supongamos que tenemos 100 conocidos, y que cada uno de ellos tiene también un número parecido de allegados. Decimos que estos desconocidos se encuentran a distancia 2 de nosotros, mientras que nuestros conocidos se encuentran a distancia 1. El número de conocidos de nuestros conocidos es, por el principio multiplicativo, aproximadamente igual (habría que tener en cuenta los amigos comunes, pero aquí, para simplificar, no lo hemos hecho) a $100 \cdot 100 = 10.000$ personas (cada uno de nuestros amigos aporta 100 conocidos de nivel 2). Si ahora generalizamos el argumento, el número de personas que se encuentra a distancia n de nosotros debería ser del orden de 100^n. Existe así un crecimiento exponencial (y por lo tanto muy rápido) de los individuos según la distancia a la que se encuentren; de esta manera, con muy pocos saltos se puede llegar a cubrir un gran espectro de personas. El lector puede comprobar como ejercicio el número de saltos que necesita para estar conectado con el presidente de Estados Unidos, con Robert de Niro o con Carl Lewis... ¡Le aseguramos que el grado de separación será muy bajo, más de lo que cabría esperar en un principio!

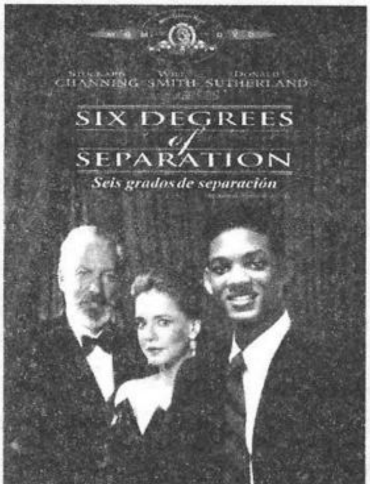
Para estudiar de manera empírica esta cuestión, Stanley Milgram realizó el siguiente experimento: pidió a unas cuantas personas de la costa oeste de Estados Unidos que enviasen un paquete a otra persona que se encontraba en Massachusetts. La dificultad de esta propuesta era que los participantes del experimento no conocían la dirección de la persona que debía recibir la carta, pero sí conocían su nombre, su profesión y que habitaba en Massachusetts. Milgram les indicó que el procedimiento que debían seguir era el de enviar el paquete a una persona que ellos conocieran y que fuera, según su criterio, la que más probabilidades tendría de conocer directamente al destinatario. Esta persona tendría que hacer lo mismo, de manera sucesiva, hasta que el paquete fuera entregado personalmente a su destinatario. A pesar de que los participantes esperaban que este menester ocupase a un gran número de personas, los paquetes que fueron entregados al destinatario correcto tomaron, de promedio, entre cinco y seis intermediarios.

Los descubrimientos de Milgram fueron publicados en *Psychology Today* e inspiraron la popular máxima de los «seis grados de separación» entre cualquier persona del planeta. De hecho, este concepto ha inspirado un largometraje y una serie de televisión con el mismo nombre, y permanece anclado a la cultura popular actual, junto con la máxima de Andy Warhol «todos tendremos nuestros cinco minutos de gloria». Un mundo globalizado y conectado, del mismo modo que lo está un grafo.

FRAGMENTO DEL LARGOMETRAJE *SEIS GRADOS DE SEPARACIÓN*

Seis grados de separación, película del año 1993 dirigida por Fred Schepisi, introduce de manera sutil la noción del pequeño mundo. En ella Paul (interpretado por un joven Will Smith) logra introducirse en el mundo de Ouisa y Flan Kittredge, marchantes de arte de Nueva York, haciéndose pasar por el hijo del actor Sidney Poitier. Cuando Ouisa descubre que Paul no es quien dice ser, comenta:

> «He leído en algún sitio que cada habitante del planeta está separado de cualquier otro por tan sólo otras seis personas. Seis grados de separación entre nosotros y todo el resto del planeta: el presidente de Estados Unidos, un gondolero en Venecia, cualquiera de nosotros. Me resulta de lo más reconfortante que estemos tan próximos, aunque al mismo tiempo es como una tortura china porque estás obligado a encontrar a esas seis personas para lograr la conexión. Y no son sólo los grandes personajes: un nativo del Amazonas, alguien de la Tierra del Fuego, un esquimal. Tú y yo estamos unidos al resto del planeta siguiendo la huella de seis personas. Es un pensamiento profundo. Cómo nos encontró Paul. Cómo encontrar al hombre cuyo hijo dice ser, aunque lo dudo. Cada ser humano es una nueva puerta abriéndose hacia otros mundos. Seis grados de separación entre nosotros y el resto del planeta. Pero hay que encontrar a las personas adecuadas».



Carátula de la versión inglesa de Seis grados de separación.

Erdős tenía un diccionario propio para referirse a determinados aspectos; por ejemplo, una demostración pertenecía al Libro si era especialmente ingeniosa y bella. El Libro era así el lugar donde las divinidades recogían todo el saber. Otra noción ampliamente utilizada por él era la de «épsilon» cuando se refería a los niños pequeños: en matemáticas es habitual usar esta letra para denotar una cantidad ínfima, insignificante. Y lo más importante, «morir» significaba dejar de hacer matemáticas, mientras que «partir» significa la muerte física. La vida únicamente la podía entender creando matemáticas.

Como veremos en los siguientes capítulos, Erdős no ha muerto, simplemente ha partido: su legado a las matemáticas contemporáneas todavía es inconcluso.

Capítulo 4

Contando (sin usar los dedos)

¿Cómo osamos hablar de leyes del azar?
¿No es, acaso, el azar la antítesis de cualquier ley?
Bertrand Russell

De la misma manera que existen anécdotas graciosas que involucran distintas procedencias y nacionalidades, el mundo de los matemáticos no puede salvarse de estereotipos y de comparaciones con otras ramas del conocimiento. Una de estas bromas, extendida a lo largo y ancho de las geografías y con diversas variantes, es la siguiente:

> Un ingeniero, un matemático y un físico se quedan en un hotel a pasar la noche. El ingeniero observa que su cafetera está echando humo, así que se levanta de la cama, la desconecta, la pone en la ducha y la enfría; luego vuelve tranquilamente a la cama.
>
> Un poco más tarde, el físico huele a humo. Se levanta y ve que una colilla ha caído en una papelera y algunos papeles que allí se encontraban han prendido. Empieza a pensar: «Esto podría ser peligroso si el fuego se extendiera, las altas temperaturas podrían matar a alguien. Debería apagar este fuego. ¿Cómo puedo hacerlo? Vamos a ver... Podría hacer descender la temperatura de la papelera por debajo del punto de ignición del papel, o quizás aislar el combustible del oxígeno... Podría conseguir esto echando agua». Así que coge la papelera, se va a la ducha, y la llena de agua. Luego se va a dormir tranquilamente.
>
> El matemático se da cuenta de que su cama está ardiendo porque unas cenizas de su pipa han prendido en el colchón. El asunto no le sorprende: «No importa, existe una solución para este problema», y se va tranquilamente a la cama, que está completamente envuelta en llamas.

La actitud del matemático ante la inminente tragedia revela algo que va más allá de la simple anécdota. A pesar del tono humorístico de este hecho, la historia muestra una manera de pensar y de trabajar que va más allá de la extinción de incendios.

De lo que vemos... y de lo que no vemos

En el mundo de las matemáticas es usual estar interesado en encontrar ciertas construcciones matemáticas (un grafo con unas propiedades interesantes, un conjunto de números naturales con cierta característica especial...), o bien demostrar que un objeto con esas propiedades no puede existir. En el primer caso, con exhibir un ejemplo particular tenemos más que suficiente. Pero ¿qué ocurre si no somos lo suficientemente hábiles para hallar una manera de construirlo? Entonces, desgraciadamente, nos debemos conformar con demostrar que un objeto con esas características existe, aun sin mostrar un ejemplo.

Pongamos un ejemplo sencillo para ilustrar este hecho. Supongamos que en el aula donde estudia nuestro hijo se realiza una encuesta, de la que se obtiene que la altura media de los alumnos es igual a un metro y sesenta centímetros. A partir del conocimiento de este dato no podremos establecer la altura de nuestro hijo (al menos no podremos afirmar que su altura sea de un metro y sesenta centímetros). Pero, a pesar de ello, podremos realizar la siguiente afirmación categórica: *existe* al menos un alumno cuya altura es mayor o igual a un metro y sesenta centímetros. No sabemos quién cumple esta propiedad, pero sabemos que alguien la cumple. Este hecho está claro, ya que de no ser así, el valor medio debería ser inferior al valor que realmente hemos obtenido.

En este capítulo veremos aplicaciones de estas ideas para poder descubrir estructuras escondidas en estructuras que aparentemente no tienen ningún orden. Descubriremos que «el desorden absoluto no puede existir», o más bien que en sistemas lo suficientemente grandes siempre existen otros pequeños con estructura, con orden. Estos sistemas serán relativos a los grafos, a los puntos del plano e incluso a conjuntos numéricos. Y para entender bien todas estas ideas hablaremos de palomas, de reuniones de sociedad y de globos elásticos.

El reparto del desayuno

A continuación describiremos un principio elemental que puede dar lugar a implicaciones más profundas de lo que inicialmente se podría esperar. Supongamos que en un arrebato de generosidad hemos comprado repostería recién horneada para cada uno de los compañeros de trabajo; una unidad por persona. Con ello nos aseguraremos de que nuestros compañeros están de buen humor durante la hora del desayuno. Por desgracia para nuestros planes no hemos contado con que uno de ellos se ha puesto enfermo y no ha venido a trabajar. Existe, por lo tanto, un problema grave, ya que tenemos una ensaimada que sobra. Si todas las ensaimadas deben comerse durante la hora del desayuno, será necesario que alguien haga un esfuerzo y se coma dos.

Éste es un ejemplo del denominado *principio de Dirichlet*, también conocido como *principio de las casillas* o *principio del palomar.* El término «palomar» proviene del inglés *pigeon-hole*, que se utiliza para referirse a las casillas de un mueble subdividido en celdas con la finalidad de colocar cartas, documentos u otros objetos. El principio se basa en la siguiente observación: si N palomas quieren entrar en un palomar con $N-1$ entradas, entonces existirán dos palomas que entrarán por el mismo agujero. Este ejemplo con palomas no es más que nuestro ejemplo inicial con ensaimadas, donde cambiamos la bollería por aves y los compañeros de trabajo, por puertas de entrada al nido.

Sintetizando las ideas y olvidándonos de palomas, ensaimadas y agujeros, el principio de Dirichlet nos dice lo siguiente:

«Si tenemos N bolas y las queremos guardar en M cajas, siendo $N>M$, existirá entonces una caja que contendrá como mínimo 2 bolas.»

Más adelante, en este mismo capítulo, obtendremos resultados más complejos que esta propiedad elemental, pero es importante hacer notar que el principio de Dirichlet es un resultado existencial. Dicho de otra manera, nos asegura la *existencia* de una cierta pauta pero no nos dice qué elementos la cumplen. Volviendo al contexto animal, sabemos que habrán dos palomas que se habrán escurrido dentro del palomar por el mismo agujero, pero no sabremos cuáles habrán compartido puerta de entrada. Es decir, dentro de una estructura estamos afirmando la *existencia* de otra estructura más pequeña de la que conocemos su forma. Esta idea será clave más adelante para poder entender la filosofía de la denominada *teoría de Ramsey* y de sus implicaciones en la geometría, en combinatoria y en la teoría de los números.

Existen múltiples y variadas aplicaciones del principio de Dirichlet. Para utilizarlo tan sólo es necesario saber identificar quiénes son las palomas y quiénes son los agujeros del palomar. Veamos algún ejemplo donde podamos usar esta metodología. Un caso curioso es la observación que ahora mostraremos. Extraemos un fragmento de la obra *Curso de geometría métrica, tomo I – Fundamentos, introducción (experiencia, intuición y lógica en la génesis de la ciencia)*, del maestro Pere Puig i Adam.

Esta obra sirvió como referencia fundamental en la mayoría de estudios de ingeniería en la España de la segunda mitad del siglo XX. Transcribimos literalmente de dicha obra el siguiente fragmento:

«Numerosísimos son los ejemplos y curiosidades que muestran la insuficiencia o los engaños de la intuición. Por su brevedad y elementalidad nos contentaremos con los dos siguientes:

1. Supongamos que un interlocutor de mediana cultura, que sepa que España tiene más de 20 millones de habitantes y que nuestro cuero cabelludo tiene bastante menos de 5 cabellos por milímetro cuadrado, y preguntémosle si es seguro que existen dos españoles con el mismo número de cabellos. La imposibilidad de imaginar la experiencia com-

DIRICHLET Y LOS ALBORES DE LA TEORÍA ANALÍTICA DE LOS NÚMEROS

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 1805-Gotinga 1859) es recordado por sus aportaciones a la teoría de los números. Nacido en el seno de una familia belga procedente de Richelet (de ahí sus apellidos, Lejeune Dirichlet: *le jeune de Richelet,* «el joven de Richelet»), llevó a cabo sus estudios primero en Alemania y más tarde en Francia, de la mano de los más grandes matemáticos de la época. Después de un periplo por las universidades de Breslavia y Berlín, pasó a ocupar la cátedra en Gotinga que Gauss había dejado vacante tras su muerte. Se casó con Rebecka Mendelssohn, hermana del famoso compositor Felix Mendelssohn.

Además de poner nombre al principio combinatorio que estamos estudiando en este capítulo, Dirichlet realizó contribuciones clave en el campo del análisis; en particular, fue el primero que utilizó técnicas analíticas en problemas de teoría de los números. De este modo, en el año 1837 resolvió una conjetura de Gauss: el teorema de Dirichlet para progresiones aritméticas. Este resultado, del que hablaremos más adelante, es considerado el primero de la teoría analítica de los números.

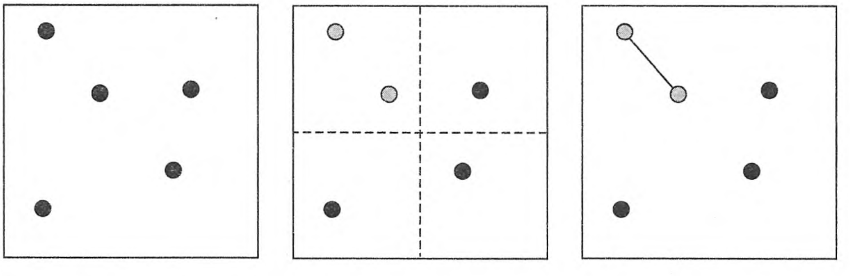
parativa le hará sin duda declarar al pronto que la pregunta no tiene contestación posible.

Sin embargo, un sencillísimo razonamiento permite llegar adonde la intuición no llega, y contestar afirmativamente, pues si todos los españoles tuviesen distinto número de cabellos, habría alguno con más de 20 millones de cabellos, para lo cual necesitaría una superficie de cabeza mayor de 4 metros cuadrados.

2. ...»

Pere Puig i Adam utiliza el principio de Dirichlet de manera indirecta: en esta situación las palomas son los ciudadanos españoles, mientras que los agujeros del palomar son el número de cabellos de la cabeza. Resulta que una cuestión que a priori podría parecer imposible de decidir es cierta como consecuencia de un principio matemático bien elemental.

Veamos otra aplicación del principio de Dirichlet en un contexto más geométrico. Supongamos que dibujamos cinco puntos en el interior de un cuadrado de lado unidad. Observamos que siempre existen dos de estos puntos que distan como mucho $\sqrt{2}/2$. Para demostrar este hecho, dividimos el cuadrado de lado unidad en cuatro cuadrados iguales de lado 1/2.



Cinco puntos en el interior de un cuadrado de lado unidad. Por el principio del palomar, dos de ellos pertenecen a un subcuadrado de lado 1/2. Estos dos puntos nos dan el resultado del enunciado.

Ya tenemos el escenario para definir nuestras palomas y nuestros agujeros. Puesto que tenemos cinco puntos y cuatro cuadrados donde ubicarlos, según el principio de Dirichlet dos de los puntos deben dibujarse dentro del mismo cuadrado. Dado que el segmento de longitud máxima que puede dibujarse dentro de un cuadrado cualquiera es una de sus dos hipotenusas, resulta que dichos puntos que se encuentran dentro de un mismo cuadrado de lado $1/2$ distan como mucho la longitud de su hipotenusa, cuyo valor es:

$$\sqrt{(1/2)^2+(1/2)^2}=\sqrt{2}/2.$$

El lector ávido de problemas y de enigmas matemáticos puede generalizar el argumento anterior para demostrar que si dibujamos diez puntos en el interior de un cuadrado de lado unidad, entonces existen dos puntos cuya distancia es, como mucho, $\sqrt{2}/3$. Como en el caso de las palomas, no sabemos qué puntos van a cumplir esta propiedad, pero ¡el principio nos asegura que tal pareja de puntos existe!

Finalmente, vamos a mostrar una aplicación del mismo principio en un contexto más aritmético. De hecho, vamos a mostrar uno de los problemas más utilizados por Erdős para detectar el talento matemático de jóvenes especialmente dotados. Una de las muchas cualidades en las que Erdős sobresalía era la de saber asignar los problemas adecuados a las personas adecuadas. Su interés por detectar potencial matemático le llevaba en numerosas ocasiones a relacionarse con jóvenes estudiantes excepcionalmente dotados para las ciencias. Así fue como, durante un almuerzo con el joven Lajos Pósa, Erdős planteó la siguiente cuestión: consideramos el conjunto $A=\{1,2,...,2n\}$, y sea B un subconjunto cualquiera de A con $n+1$ elementos. Entonces en B existen dos elementos a y b tal que a divide a b. Antes de acabar el almuerzo, el joven Pósa ¡ya tenía la solución! Años más tarde se convirtió en un frecuente colaborador de Erdős y un distinguido profesor de matemáticas en su Hungría natal.

Veamos cómo resolver el problema. Para entenderlo, mostremos primero un ejemplo que nos aclare las ideas. Tomemos $n=7$. Un subconjunto B podría ser (entre muchos otros) el $\{2,3,5,6,7,8,11,13\}$. Este subconjunto contiene el 2 y el 8, y 8 es múltiplo de 2. Invitamos al lector a que intente encontrar un subconjunto de 8 elementos que no cumpla la propiedad indicada... Como verá, el intento será absolutamente descorazonador.

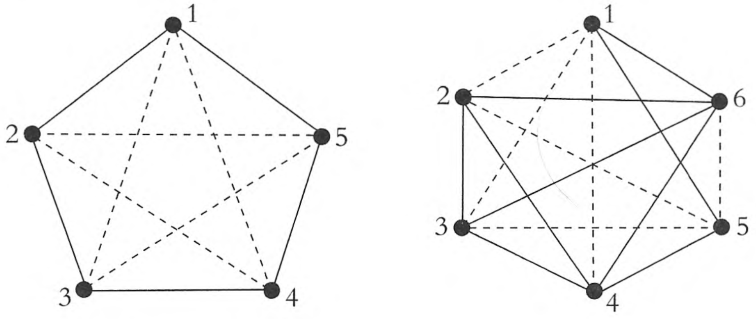
Para demostrar el resultado, escribamos cada elemento del conjunto A de la forma $2^k m$, donde m es un número natural impar y k es mayor o igual que 0 (será 0 únicamente si el número inicial es impar). Puesto que todo número es inferior o igual a $2n$, resulta que el número m siempre pertenece al conjunto $\{1, 3, 5, 7, ..., 2n-1\}$. Obsérvese que dicho conjunto tiene n elementos, y que, por lo tanto, m puede ser escogido dentro de un total de n elementos. Puesto que ahora nuestro conjunto B tiene $n+1$ elementos, por el principio de Dirichlet existen dos elementos de B cuyo valor de m asociado es igual. El más pequeño de ellos será de la forma $2^r m$, y el más grande, $2^s m$, con $r<s$. Está claro entonces que el primero divide al segundo, tal y como queríamos demostrar.

El principio de Dirichlet nos permite resolver un amplio abanico de problemas relativos a la existencia de cierto patrón o pauta en una superestructura de la que conocemos únicamente una información parcial. Como veremos en la próxima sección, podemos aplicar el método en situaciones más complejas, y estas ideas desembocarán en un resultado espectacular, que dará origen a una rama extremadamente bella de las matemáticas, cuyas ramificaciones abarcan múltiples campos: la lógica, la combinatoria, el análisis... Estamos hablando de la teoría de Ramsey.

De las reuniones de sociedad

La situación que vamos a describir puede resultar familiar al lector: cierto día recibimos, de manera totalmente imprevista, noticias de un antiguo compañero de la escuela primaria. El camino por el que la vida le ha llevado al antes cómplice de perrerías infantiles es, la mayoría de las veces, distinto al que nosotros hemos seguido. Pero al rememorar conjuntamente los viejos tiempos, los compañeros de juego en las largas tardes de verano y los amores platónicos de la infancia, surge la natural idea de realizar una reunión con todos los amigos de antaño con los que se compartieron esos momentos inolvidables. Ante esta idea suelen surgir dos posturas diametralmente opuestas: por un lado, puede resultar excitante debido a la carga emocional de la infancia y de los tiempos pasados, pero, por otro, puede resultar una propuesta nada apetecible, ya que recordar viejos tiempos puede abrir antiguas heridas, cicatrizadas a base de tiempo y de paciencia. Supongamos que, independientemente de lo que pensemos, nos decidimos a asistir al evento. Y nos sorprendemos de ver la cantidad de gente que ha venido, e intentamos asociar niños pecosos de nuestros recuerdos con los hombretones entrados en quilos que nos encontramos al ir a buscar canapés. Lo que se podría pensar, y es lo que estudiaremos seguidamente, es que en esta reunión puede ocurrir cualquier cosa: que todo el mundo haya hecho sus deberes y se haya mantenido el contacto, o bien que nadie sepa identificar a los antiguos camaradas de juegos. Y, de hecho, no es así.

De la misma manera que el teorema de Dirichlet nos da condiciones de existencia, en situaciones como la descrita también podremos asegurar la existencia de ciertas pautas en conjuntos totalmente desordenados. En nuestro caso, en la reunión de sociedad, podemos afirmar que si se han reunido más de seis personas, entonces existirán *siempre* tres de ellas que han mantenido el contacto, o *bien* tres que no lo han mantenido. Para explicar este hecho vamos a utilizar nuevamente el lenguaje de la teoría de grafos, que nos permite abstraer la cuestión y quedarnos tan sólo con la parte realmente importante del problema. Cada persona de la reunión tendrá asociado un vértice con una etiqueta (por ejemplo, las etiquetas podrían ser los números naturales). Entre dos vértices cualesquiera vamos a dibujar una arista. El grafo que se obtiene (cada par de vértices se une por una única arista) se denomina *grafo completo.* La diferencia ahora con respecto a lo que hemos hablado sobre grafos en capítulos anteriores es que las aristas van a estar etiquetadas o coloreadas de dos maneras distintas: la arista será continua o bien discontinua en función de que las personas asociadas a los vértices correspondientes hayan mantenido o no contacto durante estos años. Nótese que mantener contacto es una relación simétrica: si Juan ha mantenido contacto con Pedro, entonces Pedro ha mantenido contacto con Juan; es decir, la definición de la etiquetación anterior no es ambigua. En la figura siguiente se muestra una configuración para un total de cinco y de seis personas etiquetadas desde 1 hasta 5, y desde 1 hasta 6, respectivamente.



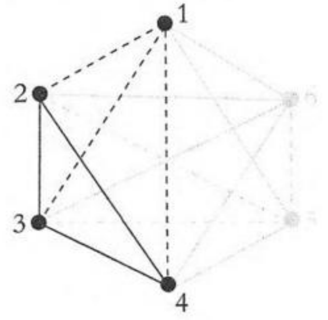
A la izquierda, una distribución de aristas coloreadas en el grafo completo con cinco vértices sin triángulos monocromos. A la derecha, una distribución de aristas coloreadas en el grafo completo de seis vértices. Obsérvese que en este segundo caso el triángulo con vértices 246 es monocromo.

Tras haber traducido la reunión de sociedad a un grafo etiquetado, la propiedad que queremos demostrar es la siguiente: dado un grafo completo con más de seis vértices y con las aristas etiquetadas mediante dos etiquetas (aristas continuas y discontinuas), existe siempre un triángulo monocromo (es decir, tres aristas que definen un triángulo con el mismo color o etiqueta). Eso es así porque si existen tres personas que han mantenido el contacto mutuamente, éstas definirán tres aristas continuas formando un triángulo, y de manera similar mediante aristas discontinuas si éstas no han mantenido el contacto.

Pasemos a demostrar este hecho. Para empezar, vamos a simplificar el problema, demostrando, por ejemplo, que la propiedad es cierta para un conjunto de seis personas. Observemos que si sabemos demostrar el resultado para el caso concreto de seis vértices, dado que en un grafo completo con más de seis vértices siempre podemos extraer esta estructura, el resultado general quedará resuelto.

Para demostrar el resultado, supongamos que fijamos nuestra atención en el vértice que tiene la etiqueta número 1. Dicho vértice es incidente mediante aristas (de distintos colores) con cinco vecinos. La observación clave en este punto del argumento es la siguiente: como tenemos cinco aristas y dos colores o etiquetas distintos, existe un color que aparece como mínimo tres veces. Esta afirmación surge observando directamente todas las posibilidades o, de manera más astuta, aplicando el principio del palomar. Supongamos que el color predominante es el discontinuo, y consideremos los vértices que se unen al vértice 1 mediante aristas discontinuas. Por hipótesis existen al menos tres vértices con esta propiedad. Supongamos, para reducir el argumento, que estos vértices son aquellos con etiquetas 2, 3 y 4 (y posiblemente algunos de los otros, pero no nos hará falta considerarlos); si no fuera así, basta con cambiar las etiquetas de los vértices para obtener esa configuración.

Bajo estas hipótesis pueden ocurrir dos cosas: o bien alguna de las aristas entre los vértices 2, 3 y 4 es discontinua, o bien las tres son continuas. En cualquiera de los dos casos alcanzamos nuestro objetivo: en el primero tomamos la arista discontinua; ésta, junto con las que unen los vértices con el vértice 1, forman un triángulo de aristas discontinuas. En el segundo, como todas las aristas que se forman con los vértices 2, 3 y 4 son continuas, en el triángulo con vértices 2, 3 y 4 las aristas son del mismo color.



Consideramos las aristas discontinuas. En esta situación concreta, el triángulo monocromo se obtiene como resultado del triángulo con vértices 2, 3 y 4.

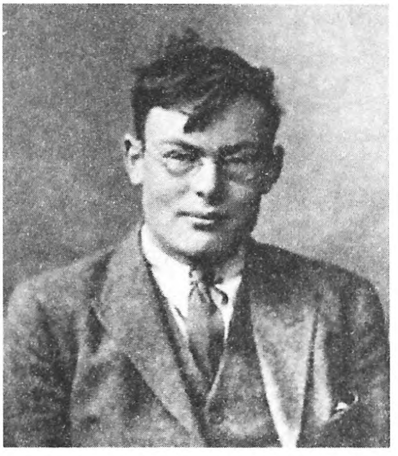
Hemos demostrado, pues, que en un grafo completo con un número de vértices mayor o igual que seis y con las aristas coloreadas de dos colores distintos, siempre existe un triángulo monocromo. Obsérvese nuevamente que la argumentación es existencial, y que en general no podremos decir qué triángulo será el monocromo.

Vamos a complicar un poco el problema. Con este resultado hemos demostrado que si en nuestra reunión de antiguos compañeros asisten más de seis personas, entonces existirán tres de ellas que habrán mantenido el contacto mutuamente o bien que no lo habrán mantenido. ¿Podemos decir algo parecido para grupos de cuatro personas (que han mantenido la relación a lo largo de los años o bien que no la han mantenido), cinco personas o, en general, para un número de personas determinado? Traduciendo este problema al contexto de la teoría de grafos, la cuestión que tenemos es la siguiente: fijamos un valor k. ¿Existe un valor N para el que todo grafo completo con más de N vértices y con las aristas etiquetadas mediante dos colores contiene un grafo monocromo completo de k vértices? Este problema, en el caso de $k=3$ es el que hemos resuelto: todo grafo completo con más de seis vértices contiene un triángulo monocromo. Pero ¿el resultado es cierto para un valor de k cualquiera?

Como veremos en la última sección de este capítulo, ¡podremos decir mucho sobre este resultado de una manera totalmente inesperada, sin construir ninguna coloración! A pesar de que los métodos elementales no sirven para un sistema tan complejo, veremos que las ideas fundamentales todavía pueden reciclarse de una manera lo suficientemente astuta. La respuesta general, lejos de ser una mera aplicación del principio de Dirichlet, resulta ser la puerta de entrada a un nuevo mundo dentro del universo matemático. En el año 1930 Frank P. Ramsey (Cambridge, 1903-Londres, 1930) encontró un razonamiento para explicar esta cuestión. Desde entonces, este resultado se conoce como *teorema de Ramsey*:

«Sea k un número entero. Existe un valor N de tal manera que todo grafo completo con más de N vértices y cuyas aristas están coloreadas de dos colores distintos contiene un grafo completo con k vértices que es monocromo».

Ramsey nació en el seno de una familia influyente en la Inglaterra de principios del siglo XX. Su padre era presidente del Magdalene College (*college* de la Universidad de Cambridge), y su hermano, Michael Ramsey, llegó a ser arzobispo de Canterbury. Durante la adolescencia, Ramsey demostró un interés y una capacidad sobresalientes para las ciencias, y no sólo para las matemáticas, sino también para otras disciplinas, como la economía, el psicoanálisis y la teoría de la decisión. Ramsey se educó en Cambridge y trabajó desde 1924 hasta su muerte en el King's College, donde fue aceptado por mediación del gran economista inglés John Keynes.



Frank P. Ramsey.

La obra científica de Ramsey es corta debido a su prematura muerte como consecuencia de los problemas de salud que acarreó toda su vida. A pesar de ello fue realmente rompedora. En el ámbito económico escribió únicamente tres artículos, en los que incluía el uso del cálculo de variaciones (técnica que procede de la física matemática) y en los que desarrolló ideas revolucionarias en las teorías de tributación y de ahorro óptimo. De hecho, Paul Samuelson, Premio Nobel de Economía en 1970, dice que los trabajos de Ramsey son «tres grandes legados, legados que fueron simples consecuencias de su extrema pasión por los fundamentos de las matemáticas y del saber». En el artículo *Truth and Probability* desarrolló su propia teoría de la probabilidad, en la que estableció los principios de las modernas teorías de la probabilidad subjetiva, de la utilidad y de la decisión.

Ramsey mantuvo también una intensa y fructífera relación con el filosofo y padre del positivismo lógico Ludwig Wittgenstein, del que tradujo el *Tractatus Logico-Philosophicus*. De hecho, fue Ramsey quien logró que Wittgenstein obtuviese una posición en Cambridge gracias a la aceptación del libro de Wittgenstein como tesis doctoral.

KEYNES, RAMSEY Y LA ESCUELA ECONÓMICA KEYNESIANA

A pesar de la corta vida de Frank Ramsey, su legado, tanto en matemáticas puras como en otras disciplinas, es más que extraordinario. Lo es en particular en la teoría económica.

John Maynard Keynes, barón Keynes de Tilton (Cambridge, 1883- Sussex, 1946) es el padre de la escuela económica keynesiana. Dicha doctrina aboga, entre otros asuntos, por una política intervencionista del Estado (tanto de carácter fiscal como monetaria) con el fin de poder controlar los problemas que surgen como consecuencia de los cambios de los ciclos económicos. Su legado es tan importante que es considerado por muchos como el padre de la macroeconomía moderna. Keynes era conocedor de la capacidad intelectual de Frank Ramsey, y dijo de él:

John Maynard Keynes.

> «Ya en una edad muy temprana, hacia los dieciséis si no recuerdo mal, su precoz mente estaba interesada en problemas económicos».

De hecho, el joven Ramsey, con tan sólo diecinueve años, publicó *Mr. Keynes on Probability*, una revisión muy crítica del *A Treatise on Probability* de Keynes. Sus críticas eran tan demoledoras que Keynes tubo que replantear algunos de sus argumentos anteriores.

Sus aportaciones a las matemáticas, y en particular a la lógica matemática, también fueron de gran trascendencia: en su obra *The Foundations of Mathematics* reconstruyó ciertas teorías lógicas desarrolladas en los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead. Su interés por los fundamentos le llevó a intentar buscar la solución al denominado *Entscheidungsproblem*, cuestión consistente en encontrar un método mecánico para decidir si una proposición matemática arbitraria (perteneciente a la denominada lógica de primer orden) puede ser probada o no dentro de una teoría. De hecho, en el trabajo *On a Problem of Formal Logic* resolvió un caso particular de este problema, dando lugar al teorema de Ramsey tal y como lo conocemos.

Dibujo a lápiz de Ludwig Wittgenstein, padre del positivismo lógico y gran estudioso del lenguaje (fuente: Christiaan Tonnis).

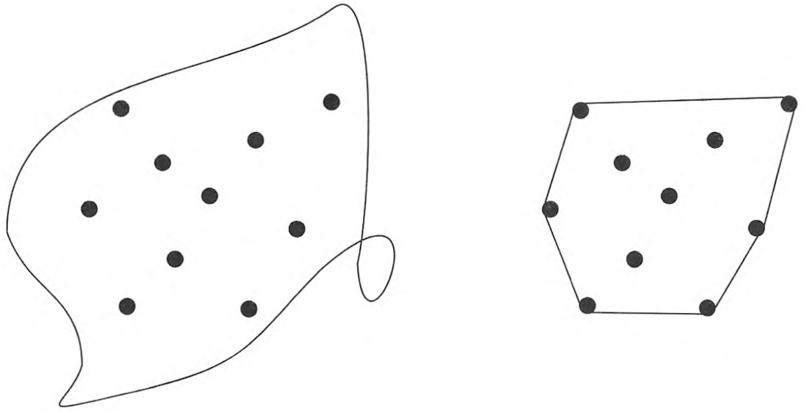
Con este resultado se inició una nueva área de las matemáticas, la teoría de Ramsey, en la que se estudia el orden dentro del desorden. Este hecho da lugar a un nuevo paradigma, a un nuevo «objeto del deseo»: entender por qué en ciertas estructuras matemáticas absolutamente desordenadas, sin ninguna pauta visible al ojo convencional, existen de hecho subestructuras bien definidas y ordenadas. El teorema de Ramsey, por ejemplo, nos dice que no importa cómo coloreemos las aristas de nuestro grafo (he aquí nuestra estructura desordenada), ya que siempre hallaremos un subgrafo completo monocromo (y he aquí nuestra porción de orden en el desorden). Curiosamente, de forma independiente y sin conocimiento del teorema de Ramsey, se encontraron resultados existenciales de la misma naturaleza, pero en un contexto completamente distinto. Dicho de otro modo, el descubrimiento del paradigma se realizó de manera simultánea pero independiente. Orden en el desorden en objetos totalmente desvinculados de los grafos completos.

Fue de nuevo la intuición y la perspicacia de Paul Erdős las que descubrieron resultados estructurales en objetos por completo desordenados. Viajemos ahora al año 1933, de nuevo en compañía de Erdős, al Budapest de de la década de 1930. A un pequeño apartamento donde una adolescente, después de dibujar puntos al azar en un folio, realiza una observación que le cambiará la vida, profesional, personal y amorosa...

El teorema del final feliz

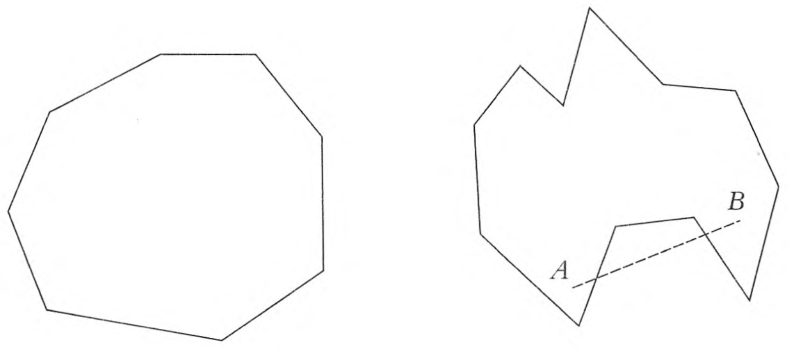
Bajo la estatua del escribano anónimo del Gloriosísimo Rey Béla, en el pequeño *Bois de Boulogne* de Budapest, un nutrido grupo de jóvenes discuten enérgicamente de matemáticas. El intercambio de ideas ha surgido de manera casual, como consecuencia de las palabras de una joven estudiante. En un momento dado del encuentro, ésta realiza una inocente aportación, una observación aparentemente inocua, pero que, sin saberlo, cambiaría por completo su porvenir. Tanto es así que dicho resultado pasaría a llamarse *teorema del final feliz*.

Era el año 1933 y la joven Esther Klein había realizado de manera casi fortuita un descubrimiento interesante con más consecuencias de las que ella podía imaginar. Para entender el problema debemos definir primero lo que en geometría se conoce como *envolvente convexa* de un conjunto de puntos. Para entender esta idea vamos a utilizar una goma elástica. Consideremos un conjunto de puntos que se encuentran dibujados en el plano envueltos por una cinta elástica. Imaginemos que los puntos se encuentran anclados al plano y que no los podemos mover. Por el contrario, la goma elástica es flexible y permite deformaciones, siempre que no pasemos por encima de uno de los puntos. Se podría decir que los puntos son las bases de unos postes. Supongamos ahora que empezamos a tensar la goma elástica; llegará un momento en que ésta tocará una serie de vértices del conjunto inicial. Cuando la goma ya no pueda tensarse más, su interior nos definirá la envolvente convexa del conjunto de puntos inicial.



Una goma elástica con un conjunto de puntos en su interior, antes y después de tensarla.

La envolvente convexa de un conjunto de puntos cumple propiedades muy interesantes. Por ejemplo, siempre es un polígono convexo, es decir, es un polígono con la propiedad de que para cualquier par de puntos del conjunto, la línea que los une está íntegramente contenida en él. De manera equivalente, un polígono es convexo si cada uno de los ángulos de sus lados es menor de 180 grados.

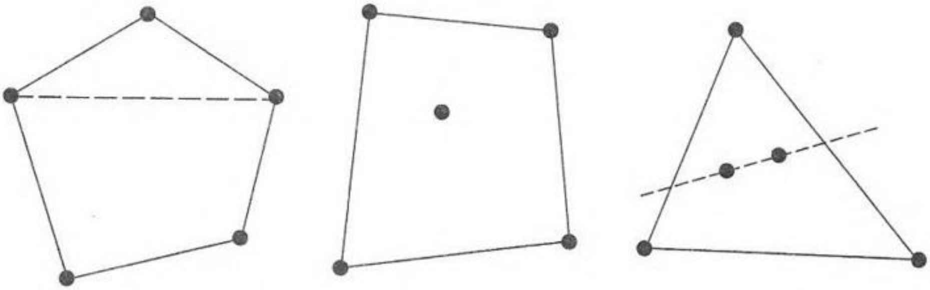


Un polígono convexo y un polígono no convexo.

La observación clave que Esther Klein realizó fue la siguiente: tomemos cinco puntos del plano en posición general. Esto significa que no admitimos que haya tres puntos alineados. Pero salvo esta condición, cualquier distribución es válida. Demostraremos que siempre existe un subconjunto de cuatro puntos que definen un cuadrilátero *convexo*. Para demostrar esta afirmación vamos a utilizar la envolvente convexa de este conjunto de puntos; dicha envolvente puede tener tres, cuatro o cinco lados. Vamos a estudiar cada uno de los casos por separado:

1. Supongamos inicialmente que la envolvente convexa tiene cinco puntos. Por la convexidad del pentágono, basta tomar cualquier subconjunto de cuatro puntos para obtener un cuadrilatero convexo.
2. Veamos ahora el caso en el que la envolvente convexa tiene cuatro puntos. En esta situación no necesitamos argumentar demasiado, ya que los vértices del cuadrilátero son de nuestro conjunto inicial, y ya nos definen un polígono convexo.
3. Finalmente, estudiemos el caso en que la envolvente convexa es un triángulo. Ésta es la situación más complicada y necesitará más trabajo. Como consecuencia de la hipótesis que asumimos, los dos puntos que no pertenecen a la goma

elástica deben encontrarse en el interior del triángulo. Si consideramos la recta que los une, entonces dos de los puntos del triángulo inicial se hallan en uno de los lados de esa recta (así es, puesto que asumimos la condición de que los puntos se encuentran en posición general). Si ahora unimos estos dos puntos con los puntos que se encuentran en el interior del triángulo, obtenemos un cuadrilátero convexo.



Las tres situaciones distintas que pueden darse en el resultado de Esther Klein.

De este modo hemos demostrado el resultado, conocido popularmente como *teorema del final feliz:*

«En un conjunto de cinco puntos del plano, siempre existen cuatro de ellos que definen un cuadrilátero convexo».

Dado que el lector podría verse confundido por el nombre del teorema, ya que el resultado no sugiere ningún final feliz, vamos a continuar con el relato. El resultado de Esther Klein fue generalizado fácilmente a pentágonos por las mentes rápidas e ingeniosas de los jóvenes maestros húngaros en la resolución de acertijos matemáticos. Pero ¿es cierto que dado un valor n existe otro valor $f(n)$ para el que todo conjunto de más de $f(n)$ puntos en posición general contiene un n-ágono convexo? La respuesta a esta cuestión no estaba nada clara.

Vislumbrando los nuevos parajes que la observación de Esther Klein había abierto, en los que se combina la geometría y la combinatoria, Erdős se puso a trabajar en la cuestión junto con su amigo Georges Szekeres. Erdős vaticinó, en cierta manera, que ese resultado era simplemente un caso muy particular de una teoría mucho más general y rica, que años más tarde se convertiría en la teoría de Ramsey, la de la búsqueda del orden en el completo desorden. Después de algún que otro esfuerzo, Erdős y Szekeres consiguieron resolver el problema, obteniendo en el año 1933 el famoso teorema de Erdős-Szekeres:

«Sea n un número entero. Entonces existe un valor $f(n)$ con la propiedad

$$2^{n-2}+1\leq f(n)\leq\binom{2n-4}{n-2}+1,$$

que cumple que si tomamos $N\geq f(n)$ puntos en el plano en posición general, entonces existe siempre un subconjunto de n puntos que define un n-ágono convexo».

Erdős, junto con Szekeres, encontró un resultado que se hallaba en el dominio de la geometría, pero que intentaba buscar pautas dentro del caos. Toda una nueva galaxia para ser explorada en el universo matemático. Años más tarde, Erdős descubriría que la filosofía de su teorema ya había sido previamente descubierta por el joven Ramsey, y de ahí el nombre de la teoría para conmemorar el resultado seminal de la disciplina.

UNA CUESTIÓN MÁS COMPLICADA

La pregunta natural es saber si en el teorema de Erdős-Szekeres el valor de $f(n)$ se encuentra más cerca de $2^{n-2}+1$ o bien de

$$\binom{2n-4}{n-2}+1.$$

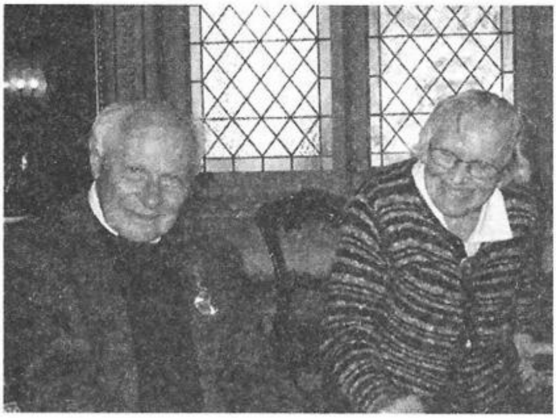
Se trata de una cuestión abierta de la que no se sabe la respuesta. De hecho, en el mismo trabajo, la pareja de colaboradores también realizó la conjetura siguiente:

«Todo conjunto de $2^{n-2}+1$ puntos en el plano en posición general contiene un subconjunto de n puntos que forman un n-ágono convexo».

Hasta el momento se sabe que la conjetura es cierta para valores de n menores o iguales a 6, pero para el resto de valores únicamente se sabe que $f(n)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$2^{n-2}+1\leq f(n)\leq\binom{2n-5}{n-3}+1.$$

Es natural que el lector continúe preguntándose por el nombre del teorema de Esther Klein. A raíz de la colaboración de Erdős y Szekeres, este último y Esther Klein acabaron casándose y compartieron el resto de sus vidas juntos. Ésa es la razón de que Erdős, que era un poco trotaconventos, catalogara el teorema como el del «final feliz».



La pareja George Szekeres y Esther Klein, muchos años después del «final feliz». Ya unidos en matrimonio, ambos fallecieron con sólo una hora de diferencia.

Revisitando la probabilidad: el método probabilístico

Hasta el momento hemos visto que para obtener la probabilidad de ganar en una apuesta debemos utilizar las técnicas procedentes de la combinatoria para calcular el número de casos favorables. Necesitamos contar para poder decir si una determinada jugada debe realizarse o, por el contrario, si es mejor abstenerse. La probabilidad se nutre de la combinatoria y de sus técnicas para poder sacar conclusiones. En esta sección veremos que de manera sorprendente podemos llegar a conclusiones en el dominio de la combinatoria... ¡usando la probabilidad! Nuestra máxima en esta sección será que «un suceso probable es un suceso posible»: si demostramos que una situación o evento tiene cierta probabilidad de que ocurra, entonces existe. Por ejemplo, es poco probable que llueva en el desierto del Sahara, pero existe dicha posibilidad, así es que puede llegar a llover.

Vamos a refinar esta idea. Lo más importante es recordar que toda probabilidad es un valor numérico comprendido entre 0 y 1, donde la probabilidad 0 viene asociada a un evento imposible, mientras que 1 se identifica con la absoluta certeza metafísica. De manera similar, si existe un evento cuya probabilidad es un cierto valor p comprendido entre 0 y 1, entonces el suceso opuesto tendrá probabilidad $1-p$. Por ejemplo, si la probabilidad de que llueva mañana en nuestra ciudad es igual a p, la de que *no* llueva será $1-p$, ya que con certeza absoluta podemos afirmar que «va a llover mañana o bien no va a llover mañana».

Visto esto, observemos que si demostramos que cierto evento ocurre con una probabilidad estrictamente inferior a 1, entonces su complementario (es decir, que no ocurra el evento considerado) también tendrá una probabilidad que será distinta de 0. En particular, dicho evento complementario será *probable* que ocurra y, por lo tanto, será *posible* (ya que existe cierta probabilidad, por pequeña que sea, de que el fenómeno suceda). Resumiendo, demostrar que algo tiene una probabilidad estrictamente inferior a 1 nos asegura que es posible que suceda el evento contrario (y que, por lo tanto, existe). Ésta será la idea que nos permitirá asegurar la existencia de un objeto determinado con propiedades interesantes sin hallar una construcción explícita de él.

Nuestro objetivo será ahora combinar las técnicas enumerativas que hemos aprendido al principio del texto con esta idea con el fin de obtener ciertas estimaciones relacionadas con el teorema de Ramsey. Supongamos que tomamos un grafo completo con N vértices, y que coloreamos sus aristas con dos colores, pero lo hacemos de la siguiente manera: para cada arista que consideramos lanzamos una moneda equilibrada (con probabilidad $1/2$ de obtener cara o cruz). Según el resultado obtenido, la arista será continua o discontinua, respectivamente (es decir, según el resultado que obtengamos en la moneda, pintamos la arista de una manera o de otra). La primera cuestión es: mediante este proceso de coloración *aleatorio*, ¿cuál es la probabilidad de colorear el grafo de un modo prefijado? Obsérvese que el grafo completo con N vértices tiene tantas aristas como parejas no ordenadas de vértices distintos. Esto corresponde a subconjuntos de dos vértices, y es igual a las combinaciones de tamaño 2 en un conjunto de tamaño N; dicho de otro modo, es igual al número combinatorio

$$\binom{N}{2}.$$

Cada una de estas aristas se pinta de uno de los dos colores con probabilidad $1/2$, de manera que, por la regla de Laplace, la probabilidad total de obtener una coloración predeterminada es igual a

$$\frac{1}{2^{\binom{N}{2}}}.$$

Expresado de otra manera: ¡todas las coloraciones tienen la misma probabilidad de aparecer mediante este proceso! (Por otro lado, esto no debería sorprender al lector, puesto que este fenómeno es el mismo que hemos comentado para los juegos de lotería).

Realizaremos ahora una cuenta un poco más complicada: vamos a calcular estimaciones para que una coloración aleatoria del grafo completo con N vértices tenga un grafo completo monocromo con k vértices. Nótese que obtenemos una estimación mediante el siguiente argumento: de los N vértices del grafo inicial elegimos k de ellos, que conformarán el grafo completo con k vértices monocromos. Esta elección la podemos hacer de

$$2\cdot\binom{N}{k}$$

maneras distintas, donde el binomial indica las maneras de escoger k vértices (no ordenados) en un conjunto total de N vértices, y el 2 surge del hecho de que la coloración puede darse usando dos colores distintos (continuo y discontinuo). La probabilidad de que elijamos el mismo en cada una de las

$$\binom{k}{2}$$

aristas que definen estos vértices será igual a $2^{-\binom{k}{2}}$. El resto de las aristas, que son

$$\binom{N}{2}-\binom{k}{2},$$

pueden estar coloreadas como nos plazca y, por lo tanto, no tiene mayor importancia el resultado que obtengamos al tirar la moneda con el fin de pintarlas.

Para ello, la probabilidad de que en una coloración aleatoria del grafo completo con N vértices tengamos un grafo completo con k vértices monocromos es menor o igual al número

LOS GRAFOS ALEATORIOS

Existen fenómenos del mundo real en los que un análisis probabilístico resulta ser el método más eficaz para obtener conclusiones: el dinamismo de las redes sociales, la creación casi repentina de millares de páginas web... sólo puede explicarse en términos aleatorios.

Éste es el punto de partida de los denominados *grafos aleatorios*. Existen múltiples formas de construir un grafo aleatorio, pero una bien extendida, el denominado modelo $G(n,p)$, introducido por Edgar Gilbert en 1957, se basa en lo siguiente: consideramos n vértices, y entre cada pareja de ellos dibujamos una arista con probabilidad p, o bien no la dibujamos con probabilidad $1-p$. Este modelo que podría parecer tan ingenuo ha centrado durante décadas el estudio de grandes problemas aleatorios relacionados con los grafos.

Existen modelos muy parecidos, como el introducido por Erdős y su colaborador húngaro Alfréd Rényi en el año 1959. Lo más curioso de todo es que estos autores no se imaginaban las implicaciones que tendrían sus ideas seminales en el estudio de fenómenos complejos como las redes de ordenadores o la transmisión de epidemias, ¡entre otras! En palabras del propio Erdős:

> «La manera de evolucionar de los grafos aleatorios modela (de manera simplificada) la evolución de ciertas redes reales de comunicación, como por ejemplo la red del ferrocarril o la red eléctrica de un país o de otra unidad geográfica, o el crecimiento de estructuras de materia inorgánica u orgánica, o incluso el desarrollo de relaciones sociales. Por supuesto, si uno pretende describir una situación real, nuestro modelo de grafo aleatorio debe reemplazarse por un modelo más complicado, pero más realista».

$$2\cdot\binom{N}{k}\cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Obsérvese que debemos utilizar el menor o igual, ya que estamos contando de más (podría ocurrir que en una misma coloración tengamos varios grafos completos con k vértices monocromos). Vamos a estudiar con más detalle esta expresión. ¿Qué propiedad se cumple mientras este valor sea inferior a 1? Mientras este número sea menor que 1, estamos afirmando que el suceso opuesto (es decir, *obtener una coloración donde no existen grafos completos monocromos con k vértices*) tiene cierta probabilidad de ocurrir, y que, por lo tanto, existe como posibilidad (podemos tirar la moneda, colorear las aristas y obtener este resultado). Mientras se cumpla que la anterior expresión sea menor que 1, existirán coloraciones del grafo inicial sin grafos completos monocromos.

No es muy difícil comprobar que el primer valor de N para el cual la fórmula es mayor que 1 (por lo tanto, ya no podemos llevar a cabo el argumento existencial anterior) es $N=2^{k/2}$. Este hecho demuestra la llamada cota inferior para el teorema de Ramsey:

«Necesitamos como mínimo $N=2^{k/2}$ vértices para asegurar que en una coloración con dos colores de las aristas del grafo completo con N vértices existe siempre un grafo completo monocromo con k vértices».

Este resultado fue descubierto por Erdős en 1947, inaugurando así lo que serían los métodos probabilísticos en combinatoria. De hecho, el valor crítico para el que se empieza a cumplir el teorema de Ramsey se denomina *número de Ramsey*, y se denota habitualmente con $R(k)$ (ya hemos visto en este mismo capítulo que $R(3)=5$).

El primer método que hemos desarrollado aquí es el primer paso hacia una serie de técnicas en las que se pretende obtener construcciones, tanto en combinatoria como en geometría o en teoría de números, en las que la pieza fundamental es la probabilidad. Por eso estas construcciones existenciales se basan en el denominado *método probabilístico*. Es tal su importancia, tanto teórica como en las aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas, que existen dos revistas de alto nivel científico especializadas en estas ideas: *Combinatorics, Probability and Computing* y *Random Structures and Algorithms.*

Un resultado en el que se utiliza este método probabilístico, sin pasar por una construcción explícita, aparece también en el contexto de la teoría de grafos. Sus detalles técnicos son más complicados, y nos conformamos con explicar el resultado. Veamos antes algunas definiciones. El *número cromático* de un grafo es el número mínimo de colores que se necesitan para colorear los vértices del grafo, de tal manera que aquellos que estén unidos por una arista tengan color distinto. El *cuello* de un grafo es la longitud del ciclo más corto. Por ejemplo, el grafo completo con n vértices tiene número cromático n (ya que todos los vértices están unidos con todos los demás y, por lo tanto, necesitamos n colores para pintar los puntos) y tiene cuello 3 (tres vértices cualesquiera definen un triángulo, y éste es un ciclo de longitud mínima).

¿...Y EL CÁLCULO EXACTO DEL NÚMERO DE RAMSEY?

Junto con la cota obtenida por Erdős se sabe que

$$2^{k/2} \leq R(k) \leq \binom{2k}{k}.$$

Calcular el valor exacto de $R(k)$ es un problema que no resulta en absoluto fácil debido a la enorme cantidad de cálculos que deben realizarse. Sin ir más lejos, la cota anterior nos da, para $k=5$:

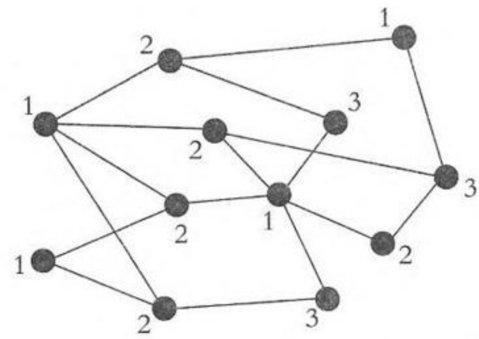
$$4 \leq 2^{5/2} \leq R(5) \leq \binom{10}{5} = 252.$$

Supongamos que queremos probar si un determinado entero n que se encuentre en este rango es igual al número de Ramsey $R(5)$. Deberíamos comprobar que cualquier coloración de las aristas del grafo completo con n vértices tiene un grafo completo monocromo con 5 vértices, y que existe al menos una coloración de las aristas del grafo completo con $n-1$ vértices sin grafo completo monocromo con 5 vértices. El número de cálculos que deben realizarse en el grafo con n vértices será del orden de

$$2^{\binom{n}{2}},$$

ya que éste es el número de coloraciones posibles. Dicho número es, para valores de n no demasiado grandes, astronómico (para $n=100$ ya vale aproximadamente $2^{10000/2}$), por lo que el problema no admite una solución algorítmica directa (el número de operaciones necesarias es absolutamente inabarcable para un ordenador). El propio Erdős ya intuía la dificultad del problema: en cierta ocasión realizó el siguiente comentario mostrando su incredulidad ante el hallazgo de una solución:

> «Supongamos que los extraterrestres invaden la Tierra y amenazan a la humanidad con arrasar el planeta si en un año los seres humanos no pueden decirles el valor del número de Ramsey $R(5)$. La humanidad podría aglutinar entonces a las mejores mentes y a los ordenadores más rápidos, y probablemente en un año se podría encontrar el valor exacto de $R(5)$. Ahora bien, si los extraterrestres pidieran el valor de $R(6)$, no habría más remedio que autorizar un ataque preventivo contra ellos».



Un grafo con número cromático 3 (véanse las etiquetas, que indican la coloración) y cuello igual a 4 (no tiene triángulos, pero sí un ciclo de longitud 4).

Obsérvese que si un grafo tiene muchas aristas, entonces muchos vértices estarán conectados entre sí y, por lo tanto, el número cromático del grafo será elevado. En cambio, al tener muchas aristas será muy sencillo encontrar ciclos muy cortos que nos den un valor para el cuello muy pequeño (tal y como pasaba en el grafo completo). Recíprocamente, si el grafo tiene muy pocas aristas, el número cromático debería de ser pequeño, ya que pocos vértices se encuentran unidos a los otros. Y, tal como hemos razonado antes, el cuello del grafo será elevado. Existe pues una dicotomía que involucra el cuello de un grafo y su número cromático: números cromáticos altos dan lugar a cuellos pequeños, y números cromáticos pequeños dan lugar a cuellos grandes. La pregunta natural es si podemos construir grafos con cuello y número cromático grande.

Este resultado fue demostrado por Erdős en 1959 usando métodos probabilísticos más avanzados, pero con las mismas ideas seminales: para probar que un objeto existe, basta con demostrar que puede ocurrir con una probabilidad positiva. Así el teorema del número cromático de Erdős afirma que:

«Fijados dos valores cualesquiera r y s, existe un grafo cuyo número cromático es mayor que r y cuyo cuello es mayor que s».

La dificultad de construir explícitamente un grafo que reúna las dos propiedades mencionadas (número cromático elevado y cuello elevado) todavía es un problema abierto a día de hoy. Como vemos, en muchas ocasiones nos tenemos que conformar con saber que existe una solución y podernos ir a dormir tranquilos, aunque se esté quemando toda la casa.

Capítulo 5

La combinatoria de las cifras

El orden es el más hermoso ornamento de una casa.
Pitágoras

Existe otro tipo de combinatoria asociada a los enteros y a sus propiedades, una combinatoria que podría considerarse también elemental, puesto que los problemas que en ella se formulan surgen directamente de las definiciones más básicas. Esta rama de las matemáticas, que se encuentra a medio camino entre la teoría de números y la combinatoria, suele denominarse *teoría combinatoria de números* o *teoría aditiva de números*, y fue nuevamente el polifacético Paul Erdős quien puso la primera piedra en esta disciplina. Se trata de un área de gran actividad científica, en buena medida gracias a los resultados y enigmas que explicaremos en este capítulo.

Empezaremos hablando de los números primos, objetos que sin duda conforman los ladrillos de la aritmética. Continuaremos con las funciones de representación, que serán, en cierto modo, los objetos combinatorios básicos que nos codificarán mucha información combinatoria. Relacionaremos este concepto con enigmas antiguos y todavía sin descifrar, como la conocida conjetura de Erdős-Turán. Más tarde nos introduciremos de nuevo en la teoría de Ramsey, con el fin de atacar otros problemas combinatorios dentro de la disciplina de la teoría aditiva de los números. En particular, veremos que ya en el año 1927, Van der Waerden obtuvo un resultado en teoría de Ramsey, pero en el contexto de las cifras. Sorprende que los primeros resultados en teoría de Ramsey se desarrollaran de manera independiente por diversos autores y en diversas áreas, pero en un marco histórico común. El teorema de Van der Waerden no es más que la punta visible de un iceberg mucho más grande y profundo. Explicaremos qué es la densidad de un conjunto numérico y veremos que a partir de ciertas condiciones muy generales podemos conocer mucho sobre la estructura interna de nuestro conjunto. Veremos el denominado teorema de Szemerédi, resultado cumbre de la combinatoria de la segunda mitad del siglo XX, y finalizaremos mostrando el teorema de Green-Tao, demostrado en el año 2003 por Ben Green y Terence Tao, y que le valió a este último la Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en el año 2006. Pero antes de llegar al Olimpo de las medallas Fields y de los grandes resultados asociados a la actualidad matemática, debemos empezar por las catacumbas, esto es, recordando nuevamente quiénes son los ladrillos de la aritmética.

Las piezas fundamentales de la aritmética

Sin miedo a equivocarnos, podemos afirmar que los objetos más deseados y más estudiados de las matemáticas son los números primos. Son simples y naturales, muy sencillos de definir, pero guardan en su interior sorprendentes misterios del paradigma matemático. Según el alemán Leopold Kronecker, «Dios creó los números naturales; el resto es cosa del hombre». Por lo tanto, los números primos encapsulan toda la esencia de las matemáticas, como la respuesta a un jeroglífico egipcio.

LA PELÍCULA *CUBE* Y LOS CÁLCULOS «ASTRONÓMICOS»

En la claustrofóbica película *Cube* (dirigida por Vincenzo Natali, Canadá, 1997), un grupo de desconocidos se despierta en una futurista sala cúbica. Para salvar su vida deben encontrar una salida, moviéndose a salas contiguas que resultan ser idénticas a la inicial. A medida que transcurre el tiempo, descubren que algunas salas contienen trampas mortales. Es Leaven, una estudiante de matemáticas, quien descifra la pauta para saber qué salas están libres de peligros: en cada puerta descubre tres números de tres cifras. Si alguno de ellos es una potencia de un número primo, entonces la sala contiene un peligro que deben evitar a toda costa. Así pues, detectar si una sala es segura o no depende de la búsqueda de algún factor primo de cada uno de los números que se hallan en la puerta de la sala. Desgraciadamente, Leaven afirma que los supervivientes lo tienen muy complicado para tomar la decisión:

> «...Nadie en todo el mundo podría hacerlo mentalmente. Fíjate en los números: 567, 898, 545. Es imposible calcular los factores, ni siquiera conseguiría hacerlo con el 567... ¡Es astronómico!»

Obsérvese que todo número de tres cifras es menor que 1.000 y que $\sqrt{1.000} = 31,62...$ Así pues, para saber si un número de tres cifras es primo o no, basta con conocer si es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 o bien 31. ¡Mentalmente, la tarea es ardua y requiere práctica, pero en ningún caso es astronómica! Más aún en nuestro caso, donde fácilmente se comprueba que 567 es divisible por 3; 898 es divisible por 2 y 545 es divisible por 5.

Como el lector recordará, un número natural es primo si tiene como únicos divisores el 1 y él mismo. Es una condición bien sencilla y natural. Los primos son los ladrillos de la aritmética y, por lo tanto, su comprensión es fundamental. La primera cuestión que surge es saber detectar números primos. Es decir, dado un entero n, ¿tenemos criterios para decidir si es primo o no? A efectos teóricos esta cuestión es trivial, ya que únicamente debemos comprobar cuáles son los divisores de n, y esto puede llevarse a cabo simplemente realizando todas las divisiones posibles y comprobando que los restos son siempre distintos de cero. Sin embargo, a efectos prácticos, decidir si un determinado número es primo o no es un problema computacional complicado: imaginemos que debemos calcular los divisores de un número de, por ejemplo, un millón de cifras. ¡Los equipos informáticos actuales no tienen capacidad para realizar esos cómputos! De hecho, los problemas de esta ín-

Carátula de Cube. *El Festival de Cine Fantástico de Sitges de 1998 distinguió a este filme con dos premios, el de Mejor Película y el de Mejor Guión.*

dole acostumbran a ser complejos debido a que la capacidad de cálculo de las computadoras es limitada cuando la aritmética que se necesita es para enteros gigantescos. Dichas dificultades se aprovechan, por ejemplo, en sistemas de criptografía que permiten realizar transacciones por Internet de modo muy seguro.

La siguiente cuestión en este estudio es preguntarse por fórmulas generales que nos generen todos los números primos, o al menos algunos de ellos. Del mismo modo que las expresiones n^2 y $7n$ generan (al sustituir la variable n por cualquier número natural), todos los números que son cuadrados y múltiplos de siete, respectivamente, ¿existe una fórmula matemática que para cada entrada de n nos dé lugar a un número primo? La respuesta es que no, y eso es debido a que los números primos se comportan de manera muy misteriosa; se podría decir que se comportan incluso de modo aleatorio.

Puesto que encontrar una fórmula general para los primos es inviable, la siguiente cuestión natural es saber cuántos números primos existen menores que un número n dado. Del mismo modo que antes, no existe una fórmula general para este problema. Pero, curiosamente, lo que sí se conoce son resultados aproximados, y estos logros han sido precisamente el caballo de batalla de muchos de los matemáticos más grandes de la historia.

Cuenta la leyenda que en el año 1792, y con sólo quince años, el príncipe de las matemáticas, Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777-Gotinga, 1855) realizó unas observaciones sorprendentes: a pesar de que la cantidad de números primos inferiores a un número dado parecía no seguir ninguna fórmula matemática concreta, su orden de crecimiento era de la forma

$$\frac{n}{\ln(n)}$$

Por orden de crecimiento entendemos que la diferencia entre el valor real y el que dicha fórmula predice es mucho menor que el valor n (se podría decir que es una muy buena aproximación). Así es que dicha función es una muy buena aproximación de la función real. ¡Resulta asombroso que un joven de quince años llegase a esta conclusión tan sólo con cálculos numéricos realizados a mano! De hecho, este problema pasó a su desván de problemas no resueltos por la dificultad del asunto. Años más tarde, cuando la cuestión ya era de dominio público en el mundo matemático, Gauss volvió a sorprender a la comunidad científica con su historia de adolescencia: él ya lo había previsto hacía muchos años.

Dichas evidencias que el príncipe de las matemáticas vislumbró se convirtieron en conjetura el año 1798 de manos de Adrien-Marie Legendre (París, 1752- Auteuil, 1833), quien, a base de evidencias numéricas, llegó a las mismas conclusiones que el joven Gauss siete años antes. Numerosos matemáticos trabajaron incesantemente en dicho problema, pero la solución evitaba ser encontrada. Fue en este contexto, en el estudio del número de primos menores que una cantidad dada, en el que se enmarca el único trabajo de teoría de los números de Bernhard Riemann (Breselenz, 1826-Selasca, 1866). Riemann, estudiante de Gauss, escribió en 1859 su célebre memoria *Sobre el número de primos menores que una cierta magnitud* en un intento de mostrar una técnica analítica para resolver la conjetura. Riemann no consiguió hallar una respuesta para el problema, pero, por contra, su trabajo sería uno de los más importantes de la teoría de los números del siglo XIX, al introducir la función posiblemente más famosa de la teoría de los números (la función zeta de Riemann) y enunciar la conjetura matemática más importante de del siglo XX: la hipótesis de Riemann.

Tuvieron que pasar unos años hasta que en en 1898 y de manera independiente tanto Jacques Hadamard como Charles Jean La Vallée-Poussin hallaron una solución al problema utilizando ambos complicadas técnicas analíticas que refinaban el profundo trabajo de Riemann. La conjetura de Legendre se convirtió en el *teorema del número primo*, según la forma siguiente:

«El número de números primos menores que n es del orden de $\dfrac{n}{\ln(n)}$ ».

La demostración que se conocía del teorema del número primo durante la primera mitad del siglo XX utilizaba técnicas analíticas muy sofisticadas y vinculadas a la célebre función zeta de Riemann. La dificultad se vinculaba directamente con las dificultades analíticas de la técnica. Por lo tanto, se creía que dicho teorema era, de hecho, equivalente a condiciones analíticas bien complejas, inherentes a las funciones con las que se estaba trabajando. Dicha filosofía fue magistralmente plasmada por el maestro Godfrey Harold Hardy en una conferencia impartida en el año 1921 en el seno de la Sociedad Matemática de Copenhague:

> «No se conoce una prueba elemental del teorema del número primo, y es natural preguntarse si es razonable que exista una... Si alguien genera una demostración elemental de ese resultado, entonces mostrará que todos los puntos de vista existentes son incorrectos, que la materia no subyace sobre los cimientos que se suponen y será la hora de reescribir la teoría existente».

De arriba abajo y de izquierda a derecha, Gauss, Legendre y Riemann: un camino a lo largo de todo un siglo para encontrar la distribución de los números primos.

En el año 1948 el mundo matemático enmudeció cuando Paul Erdős anunció que él y otro gran matemático, Atle Selberg (1917-2007), habían encontrado una demostración realmente elemental del teorema del número primo, en la que únicamente se utilizaban propiedades básicas de los logaritmos. Por desgracia, sucesos alejados del mundo matemático eclipsaron este importante descubrimiento. Porque si existe una cosa que un científico desea más que resolver un enigma imposible es saber que su nombre perdurará por los tiempos de los tiempos al lado de un inmortal teorema. De manera que el teorema del número primo dio más de un quebradero de cabeza a nuestro amigo Paul Erdős, y le llevó a protagonizar una de las controversias más intensas del siglo XX en la teoría de los números.

Toda la engorrosa situación tuvo lugar por un resultado que Selberg había obtenido y que no había publicado. En dicho teorema, el genio escandinavo obtenía una demostración elemental y alternativa del teorema de Dirichlet (conocido como el teorema de las progresiones aritméticas, y del que hablaremos más adelante). A pesar de que sus resultados no habían sido públicos, Selberg explicó los detalles de la prueba al matemático húngaro Paul Turán, que por aquellas fechas se hallaba en Princeton como visitante.

Fue después de este hecho cuando Selberg partió de Princeton con rumbo a Canadá por motivos laborales. Durante aquel periodo en el que Selberg se hallaba ausente del Instituto, Turán se tomó la libertad de ofrecer un seminario público en el Instituto de Estudios Avanzados explicando las novedades que Selberg le había relatado. La casualidad del destino llevó a que Erdős se encontrase en la audiencia ese día y, por lo tanto, asistiese a la charla de su amigo Turán. El perspicaz matemático húngaro intuyó que con ese nuevo y elemental enfoque se podría atacar de una manera completamente novedosa el teorema del número primo, y con esta idea en la mente se puso a trabajar enérgicamente en el problema.

Selberg retornó de Canadá y halló a un Erdős por completo enfrascado en la resolución del enigma. Fue Erdős quien le comentó a Selberg que, según su fina intuición, existía un camino, todavía por descubrir, que llevaba al paraíso del teorema del número primo. Selberg, consciente de esa posibilidad, le contestó a Erdős que su intuición era demasiado optimista. Pero nada más lejos de la realidad: Selberg intuía también que se hallaba en el buen camino para hallar la prueba elemental del teorema del número primo. Éste compartía con Erdős la intuición para ver más allá del método y vislumbrar soluciones elegantes y elementales para problemas difíciles. Selberg era un investigador solitario, sin apenas colaboradores, mientras que Erdős era el campeón en cuanto a colegas científicos. No pasaron muchos días hasta que Erdős encontró la manera de refinar el resultado de Selberg y, de manera adicional, hallar el método para demostrar el teorema del número primo mediante técnicas elementales. Finalmente Erdős lo consiguió, después de más de doscientos años de investigación en la materia.

Atle Selberg, padre del «lema fundamental» que llevó a la demostración elemental del teorema del número primo.

Al César lo que es del César: Erdős contactó nuevamente con Selberg para darle la buena noticia. Los acontecimientos no alegraron al matemático noruego, sino todo lo contrario: Erdős había hecho público su resultado y el teorema ya se consideraba de su autoría. Eso no gustó nada al tímido matemático, de modo que cuando Erdős le propuso la publicación de un artículo conjunto, Selberg se negó rotundamente. Tenían visiones de trabajo completamente opuestas, y ello se reflejó en el hecho de que cada uno publicara su demostración del teorema (Selberg consiguió adaptar su método de manera independiente a la de Erdős para resolver también el enigma).

Fue su demostración del número primo (además de sus críticas contribuciones a la teoría analítica de números) por la que Selberg recibió la Medalla Fields en 1950. Erdős no llegó a recibir nunca esa distinción, si bien posteriormente también recibió un premio distinguido en el mundo matemático: el premio Frank Nelson Cole Prize de la American Mathematical Society del año 1951, importante galardón en el área de la teoría de números.

Las funciones de representación

Nos preocuparemos ahora de un tipo de problema combinatorio bien diferente de los que hemos visto hasta el momento. Aparentemente el problema que empezaremos a discutir es más sencillo que los que hemos estado estudiando en los capítulos anteriores, pero el combinatorialista experto está curtido frente a problemas de fácil enunciado y de solución imposible.

Empezaremos con un problema muy elemental, que podemos explicar a los más pequeños de la casa ¡y del que sin duda sabrán encontrar la solución! Dado el conjunto de números naturales $A = \{0, 1, 3, 4, 5, 8\}$, ¿de cuántas maneras podemos escribir un determinado número natural como suma de dos elementos (posiblemente iguales) del conjunto A? Por ejemplo, 0 puede escribirse de manera única como $0+0$; 1 se puede escribir como $1+0$, o bien $0+1$ (obsérvese que no importa el *orden* de los sumandos); 2 puede escribirse únicamente como $1+1$; y 8 puede obtenerse como $3+5$, $5+3$, $8+0$, $0+8$, o bien como $4+4$. Utilizando un lenguaje matemático más sofisticado, decimos que el número de maneras de representar un natural n como suma de dos elementos del conjunto A es el *número de representaciones* de dicho natural con respecto a A, o también la *función de representación* asociada a A. En nuestro ejemplo se cumple que el número de maneras de representar el 0 y el 2 es igual a 1 ($0+0$ y $1+1$, respectivamente), el número de maneras de representar el 5 es igual a 4 ($5+0$, $0+5$, $1+4$ y $4+1$), mientras que el 15 no admite ninguna representación y, por lo tanto, su función de representación es igual a 0.

El problema que hemos planteado es sencillo, ya que el conjunto A es finito: puesto que A contiene un número de elementos que podemos contar con los dedos, entonces tiene un elemento máximo, y todo valor mayor que el doble de ese máximo no se podrá representar como suma de dos elementos. En nuestro ejemplo, el número de representaciones de 16 es igual a 1 ($8+8$), pero para valores de n mayores de 16, la función de representación será igual a 0, ya que los elementos de A son demasiado pequeños para conseguir representarlos. Así pues, el problema interesante surge de estudiar la función de representación cuando A es un conjunto *infinito*. Y precisamente esta consideración, que exista un número infinito de elementos, transforma en nuestro caso un problema trivial en un problema endiabladamente difícil.

Empezaremos con una simplificación muy drástica del problema. ¿Existe algún conjunto de números enteros A, infinito, de tal manera que todo número se escriba como suma tan sólo de dos elementos? Claramente no: si así fuera, el elemento 0 debería pertenecer al conjunto para poder representar el 0. Del mismo modo, 1 debe ser un elemento del conjunto para poder representar el 1, y entonces $1+0$ y $0+1$ son dos representaciones distintas de 1. Por lo tanto, hemos demostrado que un conjunto A con esta propiedad no puede existir. De la misma forma, un razonamiento similar demuestra que no puede existir un conjunto infinito A según el cual el número de representaciones sea el mismo para todos los números naturales (es decir, en lugar de 1 que sea otro número cualquiera).

Esto nos sugiere que intentemos poner condiciones más ligeras al enunciado para poder entender mucho mejor la naturaleza de las funciones de representación de conjuntos infinitos. Consideremos entonces el siguiente problema: ¿existe un conjunto infinito A de tal manera que la función de representación sea constante desde un lugar determinado hacia delante? En este caso damos libertad para que en valores pequeños el número de representaciones tome valores cualesquiera, pero que desde un lugar hacia delante y hasta el infinito el número de representaciones sea constante.

Dicho problema deja ya de ser trivial y necesita un poco de ingenio. La primera solución a esta cuestión data del año 1941 y se debe a Erdős y a uno de sus más fervientes colaboradores, Paul Turán. Sorprendentemente, su razonamiento utiliza técnicas muy sofisticadas, el denominado *teorema de Fabry* para funciones definidas en el disco. Lo curioso es que existe una demostración absolutamente sencilla que confirma que esta situación no puede ocurrir.

La clave del problema consiste en observar que para un elemento a del conjunto A, el número de representaciones de $2a$ es un número impar, mientras que el número de representaciones de $2a+1$ es un número par. Dado que existen infinitos elementos en el conjunto, concluimos que la función de representación toma valores pares e impares un número infinito de veces y, por lo tanto, no puede ser constante de un lugar hacia delante.

¿Y cómo demostramos este hecho? ¡Utilizando la combinatoria, por supuesto! Estudiemos primero el número de representaciones del natural $2a$. Nótese que a es un elemento del conjunto, y $a+a$ es una representación válida. La observación crucial es la siguiente: si existe alguna otra representación de $2a$, los sumandos que la componen deben ser necesariamente distintos. Así, si por ejemplo $b+c=2a$, con b distinto de c, entonces la representación $c+b$ es distinta de la representación $b+c$, de modo que el número de maneras de representar el doble de a debe ser un número impar: la única representación en la que los dos sumandos son iguales, más un número par de representaciones en las que los sumandos son distintos. De manera opuesta, no obtenemos un término donde se repiten los sumandos al considerar las representaciones de $2a+1$, ya que este número es impar. Por lo tanto, toda representación de este número debe realizarse utilizando números distintos y, en definitiva, el número de representaciones será un número par.

LOS CONJUNTOS DE SIDON, O CÓMO ERDŐS DESCUBRIÓ LA TEORÍA ADITIVA DE LOS NÚMEROS

La probablidad nutre la combinatoria, la combinatoria nutre la teoría de grafos... El saber está interconectado por caminos completamente insospechados. Y lo mismo ocurre con la teoría combinatoria de los números. En este caso, uno de los problemas clave de la teoría surge de una rama tan aparentemente alejada de ella como es el análisis armónico.

Cuenta la historia que en el año 1932 el analista húngaro Simon Sidon le preguntó al joven Erdős sobre la aritmética de las frecuencias de ciertas funciones periódicas. Lo interesante del problema era que con independencia de su origen, el fondo del enigma provenía de una cuestión que mezclaba aritmética y combinatoria. La propiedad que el excéntrico profesor le propuso al joven estudiante entusiasmó al genio debido al sabor combinatorio del problema, que se convirtió en uno de los favoritos de Paul Erdős, hasta el extremo de que su estudio sería un punto de retorno constante en la obra de Paul Erdős.

Un conjunto de enteros se dice que es de *Sidon* si cualquier pareja de elementos del conjunto (sin importar el orden) da lugar a sumas distintas. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 4, 7, 10\}$ no es de Sidon, ya que $4+7=1+10$. Existen infinidad de cuestiones relativas a estos conjuntos, como saber buenas estimaciones para el número de elementos de un conjunto de Sidon con todos los elementos menores que un entero dado. Curiosamente, el estudio de los conjuntos de Sidon se puede destinar a áreas tan técnicas como el diseño de radares y de sistemas de comunicaciones. Aplicaciones inesperadas para teorías multidisciplinares.

Visto el resultado que acabamos de demostrar, el lector se podría preguntar cómo llevar esta cuestión a un contexto más general: si en lugar de pedir que el número de representaciones sea siempre el mismo imponemos que pueda variar pero dentro de un margen preestablecido (digamos, por ejemplo, que el número de representaciones sólo puede ser 1, 2 y 5), el problema deja de ser un ejercicio de ingenio para convertirse en una de las cuestiones abiertas más importantes de la teoría combinatoria de los números. Es de nuevo una conjetura del tío Paul y de Turán, llevada a cabo en 1941, y cuya resolución conllevaba un premio de 500 dólares; se trata de la *conjetura de Erdős-Turán:*

«Sea A una secuencia infinita de números naturales. Si la función de representación es distinta de 0 de un lugar en adelante, entonces la función de representación no puede ser acotada».

Entendamos qué nos dice esta conjetura: consideremos un conjunto A infinito de tal manera que todo número natural lo suficientemente grande pueda escribirse

UNA CONJETURA CON MUCHA HISTORIA

En el año 1742 el matemático Christian Goldbach escribió al gran científico de Basilea, Leonhard Euler, con el fin de aclarar una pauta que había observado: parecía que todos los números pares podían escribirse como suma de dos primos. Euler fue incapaz de resolver dicho enigma, y con el paso de los años esta humilde observación se convirtió en un problema clave en la teoría de números.

La conjetura de Goldbach no es más que otro problema en el mundo de las funciones de representación. Pocos avances se han realizado hacia la demostración completa de este resultado: con potentes ordenadores y con métodos computacionales avanzados se ha conseguido verificar que la conjetura es cierta para valores muy grandes pero, en cualquier caso, no existe hasta la fecha un argumento que permita resolver el problema en su totalidad.

Existen cuestiones muy interesantes relacionadas con la conjetura de Goldbach y de las que se conoce la respuesta, entre ellas el teorema de Vinográdov y el teorema de Chen. En el primero se demuestra que existe un lugar hacia delante en que todo número impar se puede escribir como suma de tres números primos. En el segundo, Chen consigue mejorar el resultado y demostrar que todo número par lo suficientemente grande puede escribirse como suma de dos números primos, o bien como la suma de un primo más un número semiprimo (esto es, el producto de dos números primos impares); en este segundo resultado no es posible precisar cuándo sucede cada caso.

Desgraciadamente, los métodos analíticos utilizados para demostrar estos dos resultados no conllevan una demostración satisfactoria del enigma que Goldbach planteó y que es motivo en la actualidad de una intensa investigación por muchos de los grandes matemáticos contemporáneos.

al menos como suma de dos elementos de A. Dicho de otro modo, todo número natural lo suficientemente grande admite una representación como suma de dos elementos de A. Entonces la conjetura nos afirma que bajo estas hipótesis, la función de representación no puede mantenerse siempre por debajo de 100, o de 1.000, o de 10.000: siempre existirá un valor (puede ser inmenso) para el cual el número de representaciones será superior al valor prefijado.

Más allá de la inocencia de este problema existe una cuestión de intereses contrapuestos. De la misma manera que habíamos visto que un grafo con un número cromático elevado debe dar lugar a un cuello pequeño y viceversa, en el contexto numérico en el que nos encontramos ocurre un problema similar, pero más complicado. El método probabílistico permitía encontrar un margen en el que los dos

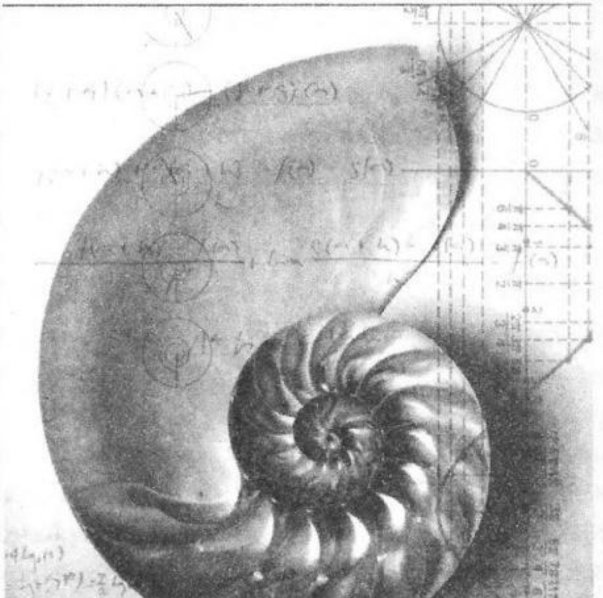


Ilustración de la portada de algunas ediciones de la novela del escritor griego Apostolos Doxiadis El tío Petros y la conjetura de Goldbach, *en la cual un matemático jubliado propone a su sobrino que resuelva el famoso problema.*

valores (número cromático y cuello) podían ser tan elevados como deseásemos. En nuestra situación, la dicotomía es la siguiente: si el conjunto A tiene muchos elementos, entonces podrá representar a la mayoría de los números naturales, aun a costa de tener muchas representaciones de un mismo número. Recíprocamente, si queremos tener pocas representaciones (o mejor, un número acotado de representaciones) deberemos elegir conjuntos A sin demasiados elementos, con el riesgo de que existan valores grandes que no se puedan representar.

Poco se ha avanzado desde que Erdős y Turán formulasen esta conjetura en el año 1941. Todo lo más que se sabe por el momento es que si una secuencia A cumple las hipótesis de la conjetura de Erdős-Turán, entonces la función de representación debe tomar algún valor superior a 7. ¡Queda un largo camino para llegar al infinito!

El peso es importante

Continuemos estudiando las secuencias infinitas de números naturales, pero ahora desde un punto de vista un tanto distinto y retornando a la teoría de Ramsey. Recuérdese que el principio del palomar nos decía que si en un palomar existen más palomas que puertas de entrada, entonces deben existir dos animales que han entrado a su guarida por la misma puerta. En esta sección exploraremos una cuestión similar, pero con un problema añadido: ¡el número de palomas será ahora infinito! Supongamos que tomamos el conjunto de los números naturales y pintamos cada elemento (es decir, cada número) de un color. Eso sí, nuestra paleta de colores se compone de un número finito de tonalidades. Así pues, coloreamos un conjunto infinito de elementos mediante un conjunto finito.

Podríamos ser muy afortunados y observar que la proporción de números de un color determinado es similar a la de otro color, o bien podría suceder todo lo contrario. Ahora bien, lo primero que el lector debe observar es que al menos existirá un color predominante (pueden existir más de uno, eso sí), es decir, debe existir un color cuya proporción sobre el total sea grande. De no ser así, todos los colores aparecerían pocas veces, ¡y esto no puede ocurrir si deseamos colorear todos los números enteros! Según esta observación tenemos que al colorear los números naturales con un número finito de colores existe uno de ellos que es muy parecido al conjunto inicial (es decir, que tiene una proporción elevada con respecto al inicial). Para refinar esta idea utilizaremos unos objetos muy disciplinados y que nos darán la idea del tipo de estructura que estamos estudiando: las progresiones aritméticas.

Recordemos el concepto: una progresión aritmética de longitud r y de diferencia b es una secuencia de números de la forma $a+bk$, donde k toma valores entre 0 y $r-1$. Dichos objetos, las progresiones aritméticas, son a la aritmética lo que los grafos completos monocromáticos son a la teoría de grafos: las subestructuras subyacentes e inevitables de los objetos completamente desordenados que estamos estudiando. En los números naturales existen muchísimas progresiones aritméticas y de todas las longitudes posibles. De modo que si queremos precisar más la idea de que al colorear con un número finito de colores siempre exista un color cuya estructura se asemeje mucho a la del conjunto inicial, lo que deberemos hacer es mostrar alguna propiedad que se transfiera del uno al otro.

En este sentido se mueve el siguiente resultado, obra del algebrista neerlandés Bartel Leendert van der Waerden (Ámsterdam, 1903-Zúrich, 1996), y que resulta ser una piedra clave en la teoría de Ramsey aplicada a la combinatoria de los conjuntos de números. Según el teorema de Van der Waerden,

«Si coloreamos los números naturales con un número finito de colores, habrá un conjunto monocromático con progresiones aritméticas arbitrariamente largas».

Fotografía de juventud Van der Waerden, descubridor del teorema que lleva su nombre.

Obsérvese que este teorema afirma que existe un color (no sabemos a priori cuál, pues el teorema tan sólo nos garantiza su existencia) que estará muy estructurado: contendrá progresiones aritméticas tan largas como deseemos (de longitud 5, 50...). Este teorema es, de hecho, un caso muy particular de un resultado muchísimo más general que involucra números naturales y progresiones aritméticas. La condición clave en el teorema de Van der Waerden es que en la coloración utilicemos un conjunto *finito* de colores y, de hecho, esta suposición es demasiado fuerte en muchísimos casos. Esto tiene como consecuencia que existe al menos un color cuya proporción con respecto al total de los números enteros es elevada. Es lo que llamaremos *densidad* del conjunto, y es de lo que pasaremos a hablar ahora.

La clave es que en secuencias de números con muchos elementos podremos encontrar subestructuras escondidas muy especiales. Con la filosofía del capítulo 4, en el que hemos conseguido cazar subestructuras escondidas en objetos completamente desordenados, vamos a definir la noción que nos permitirá dar rigor a la idea de proporción dentro de un conjunto infinito. Para ello deberemos volver a la probabilidad y recordar la regla de Laplace. Pero aquí existe una dificultad adicional: deberemos tratar con un número infinito de casos favorables y de casos posibles.

Empecemos por el caso más sencillo. Supongamos que queremos ver la proporción de un conjunto finito de números naturales en relación con todo el conjunto de los números enteros positivos. En esta situación es obvio que el conjunto inicial tendrá un peso despreciable, ya que el conjunto total es infinito (aquí, y en analogía al símil probabilístico, los casos favorables son el número de elementos de este conjunto finito, mientras que el número de casos posibles es infinito). Se podría decir entonces que el peso de un conjunto finito es 0 con respecto al total, puesto que su tamaño con relación al conjunto completo de números es despreciable (¡una finitud de objetos no son nada comparables con una infinitud de ellos!).

Compliquemos un poco el problema, tomando un conjunto con una infinidad de elementos, y más concretamente tomando una progresión aritmética infinita, por ejemplo, la progresión aritmética 0, 5, 10, 15, 20 y así sucesivamente hasta el infinito. Si tomamos un número al azar entre los infinitos posibles, ¿qué probabilidad tenemos de que pertenezca a ese conjunto? Dicha progresión aritmética es infinita y, por lo tanto, no podemos aplicar el método clásico de la regla de Laplace, que es la única manera que conocemos para calcular probabilidades.

Nuestra intuición, sin embargo, nos dice lo siguiente: todo número es múltiplo de 5 o bien cuando intentamos dividirlo entre 5 genera un resto igual a 1, 2, 3, o bien 4 (o 0 en el caso de que sea múltiplo de 5). Por tanto, los residuos que se obtienen al dividir entre 5 dan, en cierto modo, una clasificación de los enteros. De manera que al elegir un número al azar, una vez de cada cinco obtendremos un número que es múltiplo de 5. La intuición nos dice entonces que una quinta parte de los números naturales son de esta forma y que, por lo tanto, la densidad de este conjunto es igual a 1/5 (dicho de otro modo, la quinta parte de los naturales son múltiplos de 5).

¿Cómo formalizamos esta idea? La regla de Laplace no se aplica en nuestro caso por la infinitud de los casos favorables y de los casos posibles, pero lo que podemos hacer es tomar todos los elementos desde 1 hasta N (con N muy grande) y realizar la cuenta. Sea así N un número entero grande. El número de casos posibles ahora sí que es $N/5$, con lo que al dividirlo entre N obtenemos la deseada densidad. Este valor no depende de la N que tomemos (el cociente siempre es 1/5) con lo que en este caso la densidad está bien definida. El mismo argumento sirve para demostrar que la densidad de una progresión aritmética de diferencia igual a m es igual a $1/m$.

Ésta es la filosofía que debe utilizarse cuando se desea calcular la densidad de un conjunto infinito más complicado. Puesto que, en general, no podemos aplicar la regla de Laplace, ya que los casos favorables y los casos posibles son infinitos (y no tenemos buena práctica con la aritmética de los infinitos), la mejor manera para trabajar genéricamente con los pesos es truncando nuestros conjuntos (o, dicho de otro modo, escogiendo un valor de N y realizando el cálculo únicamente para los enteros inferiores a ese N). La densidad será, precisamente, el valor que obtengamos cuando hagamos el valor de N infinitamente grande.

Ya tenemos la idea clave para entender el enunciado del siguiente resultado, el teorema de Szemerédi, bautizado en honor de su descubridor:

«Sea A una secuencia de números naturales de densidad positiva. Entonces existen progresiones aritméticas arbitrariamente largas formadas por elementos de A».

Este maravilloso resultado nos dice lo siguiente: si nuestro conjunto numérico infinito es lo suficientemente pesado con respecto al total (técnicamente, si el conjunto considerado tiene densidad positiva), entonces siempre encontraremos m elementos en nuestro conjunto A (donde la m puede ser tan grande como nuestra imaginación nos permita) que se encontrarán formando una progresión aritmética. De nuevo la filosofía de las estructuras ocultas en objetos caóticos vuelve a aparecer con fuerza.

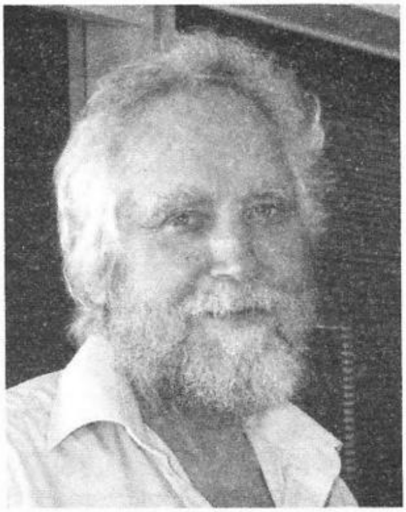
El camino que se ha seguido para llegar a este resultado es una de las hazañas matemáticas más importantes de la segunda mitad del siglo XX, y en él se demuestra nuevamente que las matemáticas son un ente único, sin que existan compartimentos estancos.

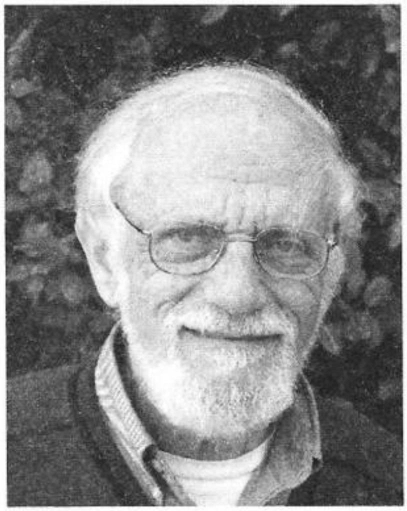
El primer paso para resolver el problema fue dado por el matemático británico Klaus Roth en el año 1956, quien consiguió resolver el problema para el caso de progresiones aritméticas de longitud 3 (es decir, si A es una secuencia de números naturales con densidad positiva, entonces contiene infinitas progresiones aritméticas de longitud 3).

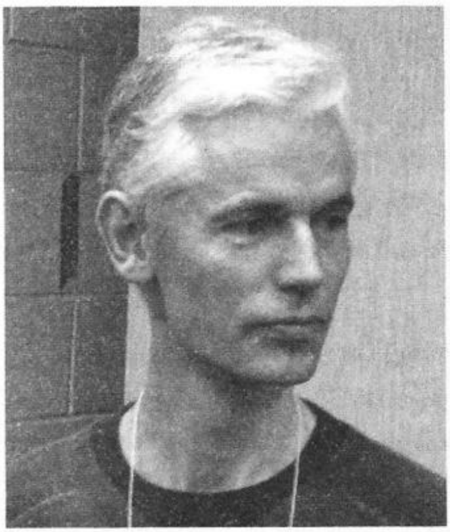
Años más tarde, y utilizando métodos puramente combinatorios, el húngaro Endre Szemerédi consiguió demostrar el resultado para progresiones aritméticas de longitud 4. El problema general fue resuelto por él mismo en el año 1975 usando técnicas combinatorias avanzadas y mucho ingenio. Después de esta demostración, el matemático israelí Hillel Furstenberg halló en 1977 un nuevo argumento para explicar el problema, pero esta vez utilizando técnicas completamente distintas procedentes de los denominados *sistemas dinámicos* y que se enmarcan en el campo de lo que se conoce como *teoría ergódica*. Finalmente, en el año 2001, el británico Timothy Gowers encontró una tercera demostración del resultado utilizando técnicas propias del análisis.

Lo sorprendente de esta historia es que en muchas ocasiones demostraciones de un mismo resultado mediante técnicas distintas no implican que la problemática subyacente sea diferente. Dicho de otro modo, es posible que las mismas ideas se expresen mediante un lenguaje distinto según el dominio de la especialidad del investigador. En el teorema de Szemerédi ocurre totalmente lo contrario: las tres demostraciones utilizan ideas completamente distintas y explican el mismo fenómeno de maneras absolutamente diferentes. Es decir, no existe un camino directo para traducir las conclusiones de los resultados combinatorios de Szemerédi a los argumentos analíticos de Gowers.

Como explicaremos más adelante, lejos de ser un problema, esta variedad de argumentos fue precisamente lo que Ben Green y Terence Tao explotaron para conseguir demostrar su teorema, ya conocido como teorema de Green-Tao de las progresiones aritméticas. Un teorema que involucra nuevamente las personalidades más importantes en el reino de las matemáticas: los números primos.







De arriba abajo y de izquierda a derecha, Szemerédi, Furstenberg y Gowers, tres demostraciones para un mismo teorema.

...Y a pesar de todo, existen progresiones aritméticas

Los números primos siempre han sido fuente de problemas muy interesantes, bien por ser los pilares básicos en los que la aritmética se sustenta, bien por ser unos objetos con propiedades muy enigmáticas. Existen problemas relativos a los números primos en muchísimas áreas de las matemáticas. En esta última sección relacionaremos los números primos con la combinatoria.

Volvamos a la disputa entre Erdős y Selberg. Como ya hemos comentado, el resultado que dio lugar a la carrera que enfrentaría a estos dos colosos fue el denominado teorema de Dirichlet de las progresiones aritméticas. Este resultado fue conjeturado por Gauss, pero hasta el año 1837 Dirichlet no halló su explicación. El enunciado del *teorema de Dirichlet de las progresiones aritméticas* es muy simple:

«Sean a y b números enteros sin ningún divisor común no trivial. Entonces existen infinitos primos de la forma $a+bk$».

Obsérvese que para que el teorema sea cierto, es necesario que a y b no tengan ningún divisor común; de lo contrario, a y b serían múltiplos de un cierto entero m y, por lo tanto, sacando factor común, todos los elementos de la forma $a+bk$ también serían múltiplos de m.

Existe una cuestión más profunda y complicada que lo que nos dice el teorema de Dirichlet. Este resultado nos explica que dentro de una cierta progresión aritmética pueden existir infinidad de números primos, pero no nos dice si se hallan muy cerca o muy alejados entre ellos. Dicho de otro modo, sería interesante saber qué estructura siguen los primos *dentro* de una progresión aritmética dada.

La idea con la que el lector podría pensar en atacar el problema es el uso del teorema de Van der Waerden: es un resultado que nos asegura la existencia de progresiones aritméticas y se aplica sobre familias generales de sucesiones numéricas en las que la densidad debe ser positiva. Existe, sin embargo, un problema grave al calcular la densidad de los números primos. En nuestro caso no tenemos una fórmula exacta, pero podemos aplicar la buena aproximación que nos ofrece el teorema del número primo. Dicho de otro modo, para n muy grande (que es cuando la fórmula del teorema del número primo funciona) la proporción de números primos con respecto al total es del orden siguiente:

$$\frac{\frac{n}{\ln(n)}}{n}=\frac{1}{\ln(n)}.$$

Puesto que el logaritmo neperiano es una función que crece con n, resulta que al hacer mover la n hacia el infinito, ¡obtenemos que la proporción es cada vez más pequeña! En el límite tenemos que la proporción es 0, ya que para n lo suficientemente grande, el inverso del logaritmo es insignificante. En definitiva, la densidad de los números primos es igual a 0.

Tenemos entonces un problema muy grave, puesto que no nos encontramos bajo las hipótesis del teorema de Szemerédi y, por lo tanto, no podemos afirmar que existan progresiones aritméticas arbitrariamente largas en los números primos. Pero, a pesar de todo... ¿es de esperar que los primos contengan progresiones aritméticas arbitrariamente largas? Existen evidencias numéricas de que así es: en el año 2008 se halló la primera progresión aritmética de 25 primos, dada por la fórmula general

$$6.171.054.912.832.631 + 366.384 \cdot 223.092.870 \cdot k,$$

donde el valor de k oscila entre 0 y 24 (y los valores resultantes son todos números primos). Dos años más tarde, en 2010, el resultado se consiguió mejorar hasta 26 primos en progresión aritmética mediante la siguiente fórmula:

$$43.142.746.595.714.191 + 23.681.770 \cdot 223.092.870 \cdot k,$$

donde ahora el valor de k varía entre 0 y 25. Todos estos resultados muestran que hay que empezar con números muy grandes con el fin de hallar progresiones aritméticas de primos.

Lo curioso de todo este asunto es que, a pesar de que los números primos no satisfagan las condiciones del teorema de Szemerédi, se siguen satisfaciendo sus conclusiones; dicho de otro modo: las hipótesis del teorema de Szemerédi no se cumplen para los números primos, ¡pero la conclusión sí que es cierta! Recientemente el problema se ha resuelto de manos de dos grandes matemáticos: Ben Green y Terence Tao. Sin lugar a dudas, estos dos investigadores marcarán muchos de los caminos de lo que será la investigación en matemáticas en el siglo XXI. Según el *teorema de Green-Tao*:

«Existen progresiones aritméticas de números primos arbitrariamente largas».

En las propias palabras de los autores, la estrategia seguida para llegar al resultado se ha basado en el hecho de que las tres pruebas existentes del teorema de Szemerédi son completamente distintas (ya hemos comentado que una no se puede obtener a partir de la otra por reducción, sino que se trata de argumentos completamente disjuntos). Es por ello que cuando Ben Green y Terence Tao hallaban una dificultad en sus argumentos mediante una determinada técnica, ¡pasaban a utilizar las herramientas de otro de los trabajos para poder continuar! De este modo, combinando los tres mundos (aparentemente muy alejados) Ben Green (Bristol, n. 1977) y Terence Tao (Adelaida, n. 1975) consiguieron, en el año 2003, resolver este gran enigma, sin duda uno de los más importantes de la matemática moderna.

Es interesante dedicar unas palabras finales a dar una pincelada biográfica de uno de los descubridores de este resultado, Terence Tao. Se podría decir que este investigador cumple todos los requisitos para encarnar la figura de genio precoz de las matemáticas. Tao es un reputado profesor de la Universidad de California, en Los Ángeles (UCLA) que ha trabajado en un amplio abanico de temas, empezando por las ecuaciones diferenciales y llegando a la teoría de números, pasando por la combinatoria, la teoría ergódica y tocando temas más aplicados como la teoría de la señal. El lector podría estar tentado a pensar que un autor tan prolífico debe encontrarse en el final de su carrera. Nada más lejos de la realidad: Terence Tao ya demostró a una edad muy temprana su capacidad para las matemáticas. De hecho, ingresó en el instituto a los siete años, y a los nueve ya empezó a asistir a clases universitarias como oyente.

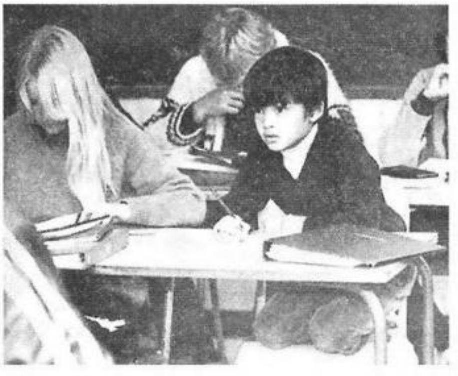
Su paso por la Olimpiada Internacional de Matemáticas fue realmente asombroso: en 1986, y con diez años de edad, se convirtió en el estudiante más joven que competía en este concurso. Más allá de ese récord, consiguió una medalla de bronce a una edad en la que la mayoría de niños empiezan a aprender los principios más elementales de la aritmética. En los dos años siguientes consiguió una medalla de plata y otra de oro, máxima distinción en esta competición. Más mérito todavía si se tiene en cuenta que la olimpiada se dirige a estudiantes de instituto que no están matriculados en centros universitarios y que, por lo tanto, tienen una media de diecisiete o dieciocho años.

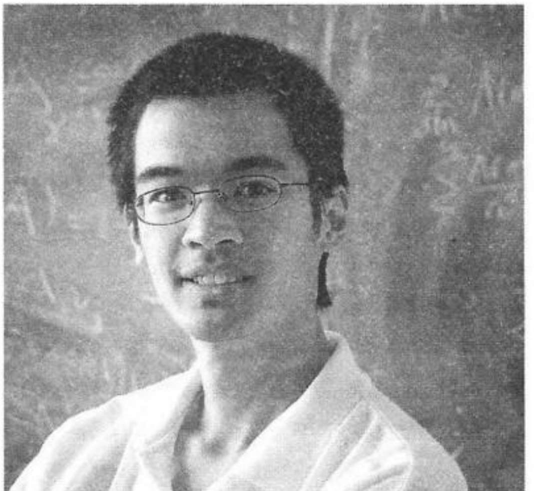
Después del periplo olímpico, Terence ingresó en la universidad de su ciudad natal con dieciséis años y finalizó el máster en matemáticas con diecisiete. Después de esto emigró a Estados Unidos para realizar sus estudios doctorales. Recibió su tesis doctoral con veintiún años en la Universidad de Princeton bajo la dirección de Elias Stein, y a los veinticuatro se convirtió en el catedrático más joven de la Universidad de California, en Los Ángeles. Años más tarde, y después de recibir múltiples distinciones por sus contribuciones científicas, recibió la Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en el año 2006, la máxima aspiración de todo matemático joven.

Su capacidad para resolver problemas difíciles es ya, a fecha de hoy, legendaria. De hecho, Charles Fefferman (Silver Spring, n. 1949), que fue otro niño prodigio de las matemáticas y también Medalla Fields, dice de él:

«Es tal la reputación de Tao que los matemáticos compiten por atraer su interés hacia sus problemas, y se está convirtiendo en una especie de "míster arreglalotodo" de matemáticos frustrados. Si estás anclado en un problema, entonces una solución es atraer la atención de Terence Tao».

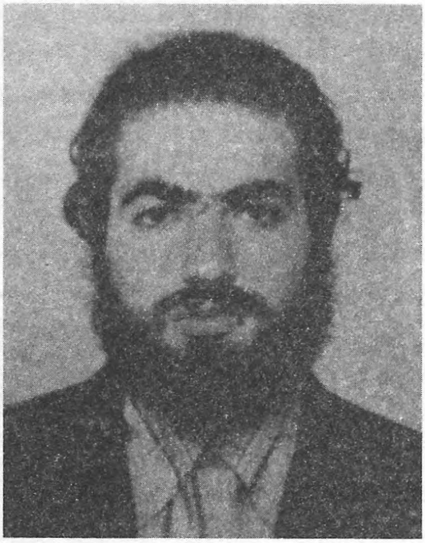
Terence Tao y sus colaboradores (incluyendo a Ben Green) están poniendo los cimientos de nuevas teorías matemáticas en las que se mezclan por igual la combinatoria, la teoría de números y el análisis. Será sólo en los años venideros cuando se verá realmente los resultados que se pueden demostrar con toda esta potente maquinaria.





Terence Tao a los siete años de edad (arriba) y en la actualidad.

LA AUSENCIA MÁS NOTABLE DEL CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS



Grigori Perelman.

Gritos de júbilo se oyeron en el anfiteatro después de que el conferenciante dijese «¡La conjetura de Poincaré ha sido resuelta!». La excitación no era para menos, teniendo en cuenta que el enigma resistía más de cien años de intentos fallidos. La conjetura de Poincaré, problema cumbre de las matemáticas del siglo xx, había sido por fin resuelto, y los centenares de asistentes a la sesión que inauguraba el Congreso Internacional de Matemáticos del año 2006, en Madrid, habían sido testigos de este hecho. La demostración se basaba en un arduo y difícil programa diseñado por el matemático norteamericano Richard Hamilton. Sin embargo, la estrategia no estaba falta de dificultades, y el propio Hamilton no fue capaz de resolverlas completamente. Tuvieron que pasar algunos años hasta que un matemático ruso, Grigori Perelman, consiguiera resolver estas dificultades y desvelara la solución a un enigma que había puesto en jaque a toda la comunidad matemática durante un centenar de años. Dicha proeza le valió al genio ruso la Medalla Fields, la máxima distinción matemática. Pero Perelman no la aceptó. Junto a Terence Tao, Andrei Okounkov y Wendelin Werner, la silla del enigmático ruso se mantuvo desierta. Perelman ni acudió a recibir el premio ni aceptó la recompensa pecuniaria que se le ofrecía. De hecho lo rechazó, según él, como protesta por la manera de proceder de la sociedad investigadora. Muchos lo consideran un loco, otros, un revolucionario, pero en cualquier caso su contribución a las matemáticas ha sido inconmensurable.

Fine

En este libro hemos pretendido dar un paseo por distintas áreas de la combinatoria tal y como la entendemos hoy, y bajo la batuta de un director de orquesta bien especial. Como el lector habrá advertido, esta disciplina no es un área aislada de las matemáticas ni un conglomerado de problemas estancos. Más lejos de la realidad: la combinatoria emerge como una disciplina con derecho propio y de la que la mayoría de las disciplinas del arte de las ciencias exactas se nutren. En todo libro de combinatoria que se precie debe existir la sección de «Problemas abiertos», al menos para que el lector, si tiene suficiente motivación, dedique parte de sus ratos libres a intentar hallar la respuesta a enigmas matemáticos no resueltos.

Volvamos a una conjetura de Erdős que hemos introducido en el capítulo 3. Recordemos que Erdős conjeturó el siguiente resultado, conocido como *la conjetura de Erdős-Turán*:

«Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ un conjunto infinito de números naturales. Si la suma

$$\sum_{i>0} \frac{1}{a_i}$$

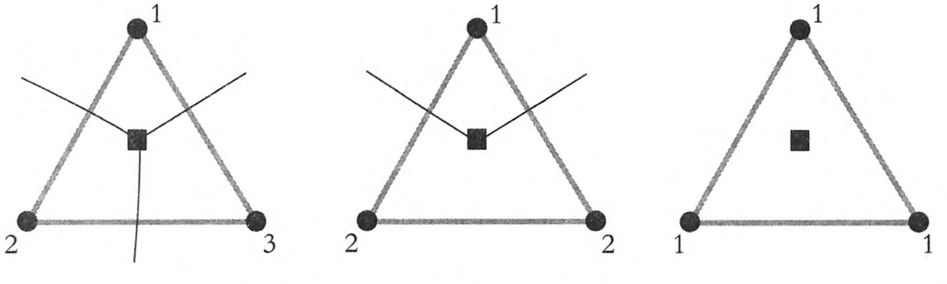
es divergente (es decir, infinita), entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas».

Fue por esta conjetura por la que Erdős ofreció una mayor cantidad de dinero, un total de 3.000 dólares. Este hecho ya da a entender que Erdős consideraba el problema sumamente difícil, de tal manera que hasta la fecha el enigma no ha sido resuelto. Muy poco se sabe de este problema y, con total seguridad, marcará, tal y como sucedió con los veintitrés problemas de Hilbert, las líneas de investigación del siglo XXI. Porque todavía queda mucho camino por recorrer para entender el caos de los sistemas complejos. Y a día de hoy, Dios no sólo juega a los dados con el universo, sino que también lo hace con los grafos, con las secuencias numéricas y con los nuevos caminos que el futuro nos depara.

Anexo

Demostración del lema de Sperner

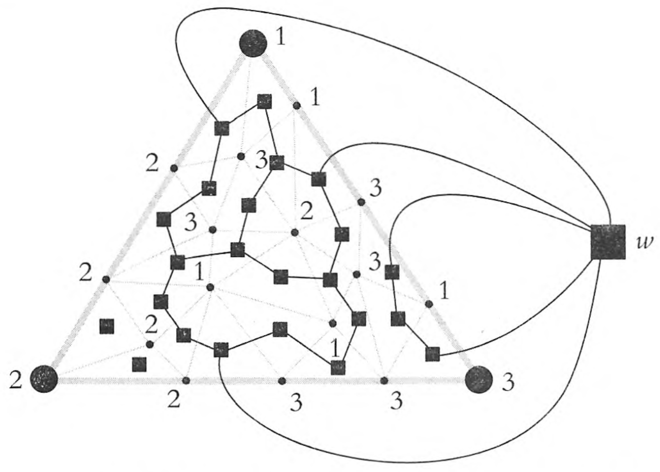
En este anexo demostraremos con todo detalle el teorema de Sperner enunciado en el capítulo 2. Con este fin utilizaremos la noción de mapa dual introducida en dicho capítulo, así como el pricipio del doble conteo. Empezamos recordando la noción de mapa dual asociado a un mapa dado. Para construirlo debemos definir el conjunto de vértices y el conjunto de aristas de este mapa. El conjunto de vértices es el conjunto de triángulos de nuestra triangulación. Gráficamente podemos representarlos como pequeños cuadrados en cada uno de los pequeños triángulos del mapa inicial. En particular, también asociamos un vértice a la cara no acotada. Una vez dibujados los vértices, dibujaremos una arista entre dos de ellos si y sólo si los triángulos iniciales son incidentes (es decir, si tienen una arista en común) y si en la triangulación dicha arista tiene extremos de etiquetas distintas. Esto da lugar a tres configuraciones diferentes: nuevos vértices de grado tres, de grado dos y de grado cero. Cada uno de estos casos se asocia con la naturaleza de los triángulos en cuestión, tal y como se muestra en la figura siguiente:



La construcción dual propuesta para cada tipo de triángulo.

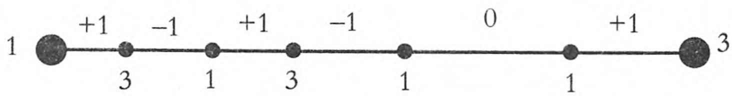
Después de construir este nuevo mapa, observamos que existen cuatro tipos de vértices: aislados, los que son incidentes con dos aristas, los que son incidentes con tres aristas y el vértice externo, que es especial y en el que pondremos un poco más de atención.

En el primero de los casos, el de los vértices aislados, éstos provienen de triángulos cuyos vértices tienen todos la misma etiqueta. De la misma manera, los vértices de grado dos y de grado tres se corresponden con triángulos cuyos vértices han sido etiquetados con dos y tres etiquetas, respectivamente. En la figura siguiente se pueden apreciar mejor estos comentarios:



Construcción del grafo dual asociado a la triangulación etiquetada, según las especificaciones realizadas previamente.

Ahora prestemos un poco más de atención al grado del vértice externo (al que llamaremos w), que, como hemos dicho, es un poco especial. Vamos a demostrar que el grado de este vértice es siempre impar (obsérvese en la figura anterior que dicho vértice tiene grado 5). Para ello, centremos nuestra atención únicamente en los vértices que se hallan sobre las aristas del triángulo grande, y en particular en aquellos que se encuentran sobre la arista determinada por los vértices 1 y 3. Cabe recordar que dichos vértices, por hipótesis, tan sólo pueden etiquetarse usando dos etiquetas: la 1 y la 3. Observamos lo siguiente: si nos colocamos en el vértice del triángulo inicial, cuya etiqueta es 1, y nos dirigimos hacia el vértice del triángulo inicial, cuya etiqueta es 3, entonces iremos cruzando distintos vértices con etiquetas 1 y 3. Asociamos un valor +1 a una transición que vaya de la etiqueta 1 a la 3 (es decir, a la arista correspondiente) y, recíprocamente, un valor de −1 si la transición se realiza desde la etiqueta 3 hasta la 1. Si no existe cambio de etiqueta, asociamos un valor de 0 a la arista correspondiente. Véase el ejemplo siguiente para aclarar este punto:



Un ejemplo concreto de la construcción cuando se pasa del vértice 1 al vértice 3.

Puesto que el vértice inicial tiene etiqueta 1 y el vértice final, etiqueta 3, resulta que debe existir una unidad más de aristas que carguen un +1 que de aristas que carguen un −1. El número de aristas con extremos distintos (aquellas que cargan un +1 o bien un −1) es un número impar, ya que es la suma de dos números consecutivos. Estas aristas son precisamente las que contribuyen al grado final del vértice w. Finalmente, aplicando el mismo argumento sobre las otras dos aristas del triángulo inicial, llegamos a la conclusión de que el grado de w es la suma de tres valores impares y, en consecuencia, su grado es impar.

Con estas observaciones ya tenemos todos los ingredientes para demostrar nuestro resultado. Para ello vamos a utilizar la fórmula del doble conteo aplicada en grafos, que nos decía que para todo grafo $G=(V,A)$ se cumple que el doble del número de aristas es igual a la suma de los grados de los vértices. Como ya hemos dicho, lo importante en esta fórmula es observar que el doble de un número es siempre un número par. ¡Por lo tanto, la suma de los grados de los vértices también será un número par!

Vamos a analizar ahora la suma correspondiente a la suma de los grados, y para ello veamos la aportación de cada vértice al total. En consecuencia, partimos la suma anterior según la clasificación que hemos hecho antes:

$$d(w)+\sum_{v \text{ tiene grado } 0} d(v)+\sum_{v \text{ tiene grado } 2} d(v)+\sum_{v \text{ tiene grado } 3} d(v).$$

Por un lado, si un vértice tiene grado 0, entonces $d(v)=0$, con lo que en la suma anterior podemos olvidarnos de la suma referente a los vértices aislados. En definitiva, tenemos la siguiente relación:

$$d(w)+\sum_{v \text{ tiene grado } 2} d(v)+\sum_{v \text{ tiene grado } 3} d(v).$$

Por otro lado, la suma asociada a los vértices de grado 2 es siempre un número par, ya que cada uno de los sumandos es múltiplo de 2. En resumen, la suma

$$d(w)+\sum_{v \text{ tiene grado } 3} d(v)$$

debe ser un número par. Como hemos visto anteriormente que $d(w)$ es un número impar, concluimos que la suma

$$\sum_{v \text{ tiene grado } 3} d(v)$$

debe ser también un número impar y, en consecuencia, ¡distinto de 0! Por consiguiente, existe algún triángulo con los vértices etiquetados con distintas etiquetas, que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Bibliografía

ALSINA, C., *Mapas del metro y redes neuronales. La teoría de grafos.* Biblioteca *El mundo es matemático*, Barcelona, RBA, 2010.

ARNOLD, V., ATIYAH M. ET AL. (editores), *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* International Mathematical Union, 2000.

FEYNMAN, R., *Surely You're Joking, Mr. Feynman!*, Nueva York, W.W. Norton and Company, 1997.

GOWERS, T. ET AL. (editores), *The Princeton Companion to Mathematics*, Nueva Jersey-Oxford, Princeton University Press, 2008.

GRACIÁN, E., *Los números primos. Un largo camino al infinito,* Biblioteca *El mundo es matemático*, Barcelona, RBA, 2010.

HOFFMAN, P., *The Man Who Loved Only Numbers. The story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*, Nueva York, Hyperion Books, 1998.

SCHECHTER, B., *My Brain Is Open. The Mathematical Journeys of Paul Erdős,* Oxford University Press, 1998.

TUTTE, W., *Graph Theory as I Have Known.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 1998.

Índice analítico

El arte de contar

Combinatoria y enumeración

Muchas de las preguntas más importantes de las matemáticas modernas requieren dominar un arte muy especial: el de contar. La rama de las matemáticas que ha hecho del enumerar un arte se llama combinatoria, y de la mano de figuras legendarias como Paul Erdös ha sido el marco de algunos de los resultados matemáticos más asombrosos del nuevo milenio.