NATIONAL GEOGRAPHIC

EDICIÓN ESPECIAL

LOS SECRETOS DEL NÚMERO π

¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?

6,95€ PVP CANARIAS 7,10€
9 772462 337703 00005

Joaquín Navarro

LOS SECRETOS DEL NÚMERO π

¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?

NATIONAL GEOGRAPHIC

NATIONAL GEOGRAPHIC ESPAÑA

EDICIÓN ESPECIAL MATEMÁTICAS

JOAQUÍN NAVARRO
Licenciado en Ciencias Exactas a la temprana edad de 20 años, ha dedicado su vida laboral a la divulgación de las matemáticas y a la edición, campo en el que desempeñó cargos de alta responsabilidad. Tras sufrir una hemiplejia, regresó al mundo de la matemática. Es autor de diversos libros de divulgación traducidos a varios idiomas.

Foto portada:
La particular idiosincrasia del número π ha servido para establecer vínculos con el cálculo de probabilidades en el juego.
Depositphoto.

Foto página derecha:
Recreación abstracta del espacio geométrico. En este caso, se trata de un conjunto de circunferencias de igual tamaño sobre una superficie cambiante.
Shutterstock.

Foto páginas 4-5:
Se puede aventurar que el descubrimiento del número π surgió a partir de la simple observación de una rueda y de la relación entre la superficie de la misma y su diámetro, es decir, entre la longitud de la llanta y la de las barras que la sustentan.
Shutterstock.

RBA REVISTAS

RICARDO RODRIGO, *Presidente*
ENRIQUE IGLESIAS, *Consejero Delegado*
ANA RODRIGO, Mª CARMEN CORONAS, *Directoras Generales*

IGNACIO LÓPEZ, *Director General de Planificación y Control*
AUREA DIAZ, *Directora Editorial*
BERTA CASTELLET, *Directora de Marketing*
JORDINA SALVANY, *Directora Creativa*
JOSÉ ORTEGA, *Director de Circulación*
RICARD ARGILÉS, *Director de Producción*

NATIONAL GEOGRAPHIC MAGAZINE ESPAÑA

PEP CABELLO, *Director*
ANA LLUCH, *Jefa de Redacción*
TERESA ESMATGES, *Directora de Arte*
BÁRBARA ALIBÉS, SERGI ALCALDE, *Redacción*
Mª MAR BOTIJA, *Maquetación*
MIREIA PLANELLES, *Coordinación Editorial*
ENRIC GUBERN, *Cartografía*
JOSÉ LUIS RODRÍGUEZ, *Tratamiento de Imagen*
VÍCTOR LLORET BLACKBURN, *Director Editorial de Área*

WEB
www.nationalgeographic.com.es
JAVIER FLORES, *Director*

ASESORES
JUAN LUIS ARSUAGA, *Paleoantropología*
EUDALD CARBONELL, *Arqueología*
JOSEFINA CASTELLVÍ, *Oceanografía*
RAMON Mª MASALLES, *Botánica*
ALBERT MASÓ, *Entomología y Vertebrados*
JACINT NADAL, *Zoología*
Mª JOSÉ PASCUAL, *Historia de la Ciencia*
MANUEL REGUEIRO, *Geología*
VÍCTOR REVILLA, *Historia Antigua*
JOANDOMÈNEC ROS, *Ecología*

REALIZACIÓN EDITORIAL DE ESTE NÚMERO ESPECIAL
EDITEC
Diagonal 421, 6-2 08008 Barcelona
www.tecam.com

ATENCIÓN AL CLIENTE
Teléfono: 902 392 392 (de lunes a viernes de 10 a 15 horas)
e-mail: suscripciones-ngme@rba.es
Para suscribirse a la revista consulte nuestra web: www.nationalgeographic.com.es

ISSN: 2462-3377
Depósito legal: B-25097-2015

Impresión-Encuadernación:
Rotocayfo, S.L. (Impresia Ibérica)
Printed in Spain - Impreso en España

Difusión controlada por
ARI REVISTAS FIPP

Joaquín Navarro

LOS SECRETOS DEL NÚMERO π

¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?

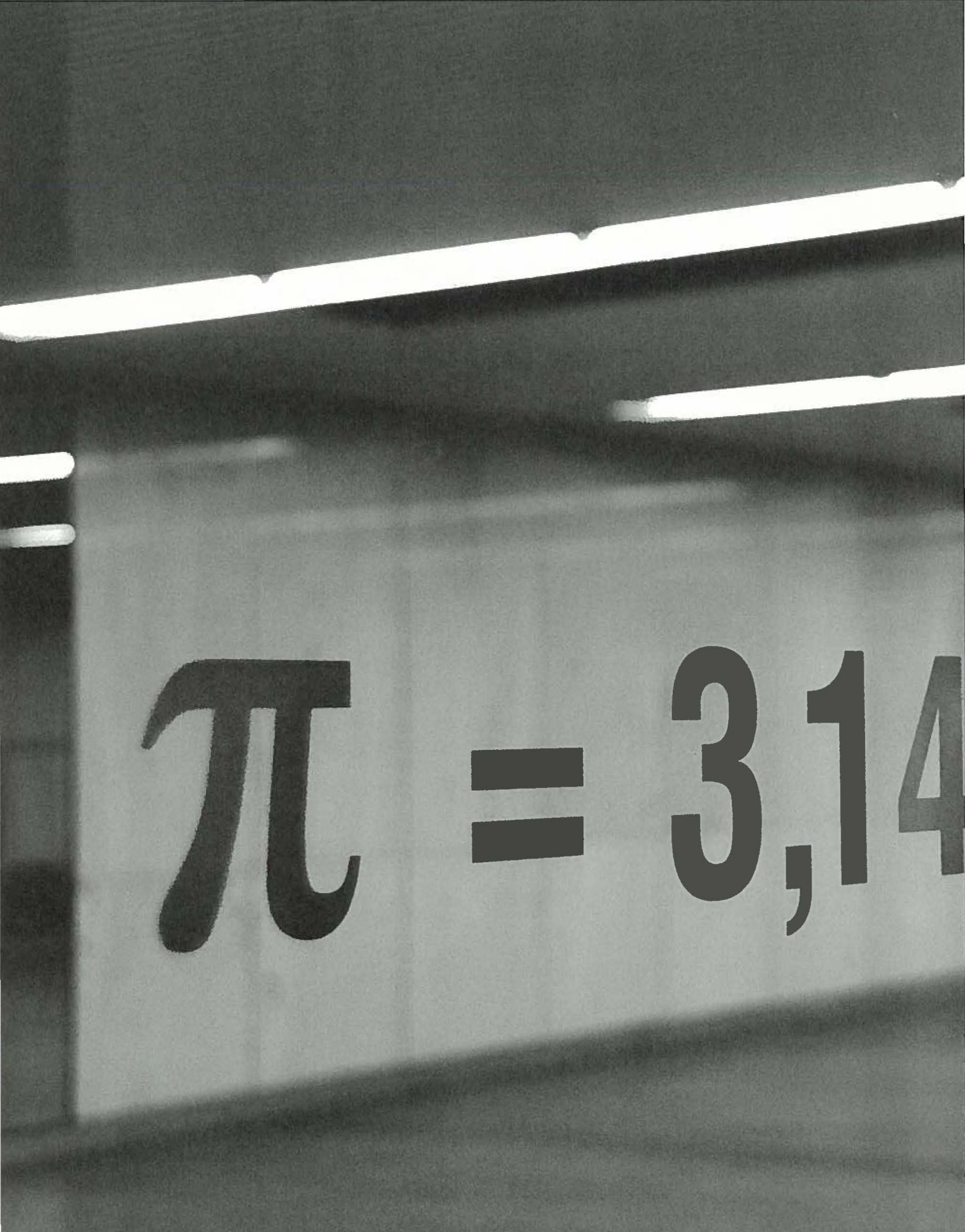
NATIONAL GEOGRAPHIC

Sumario

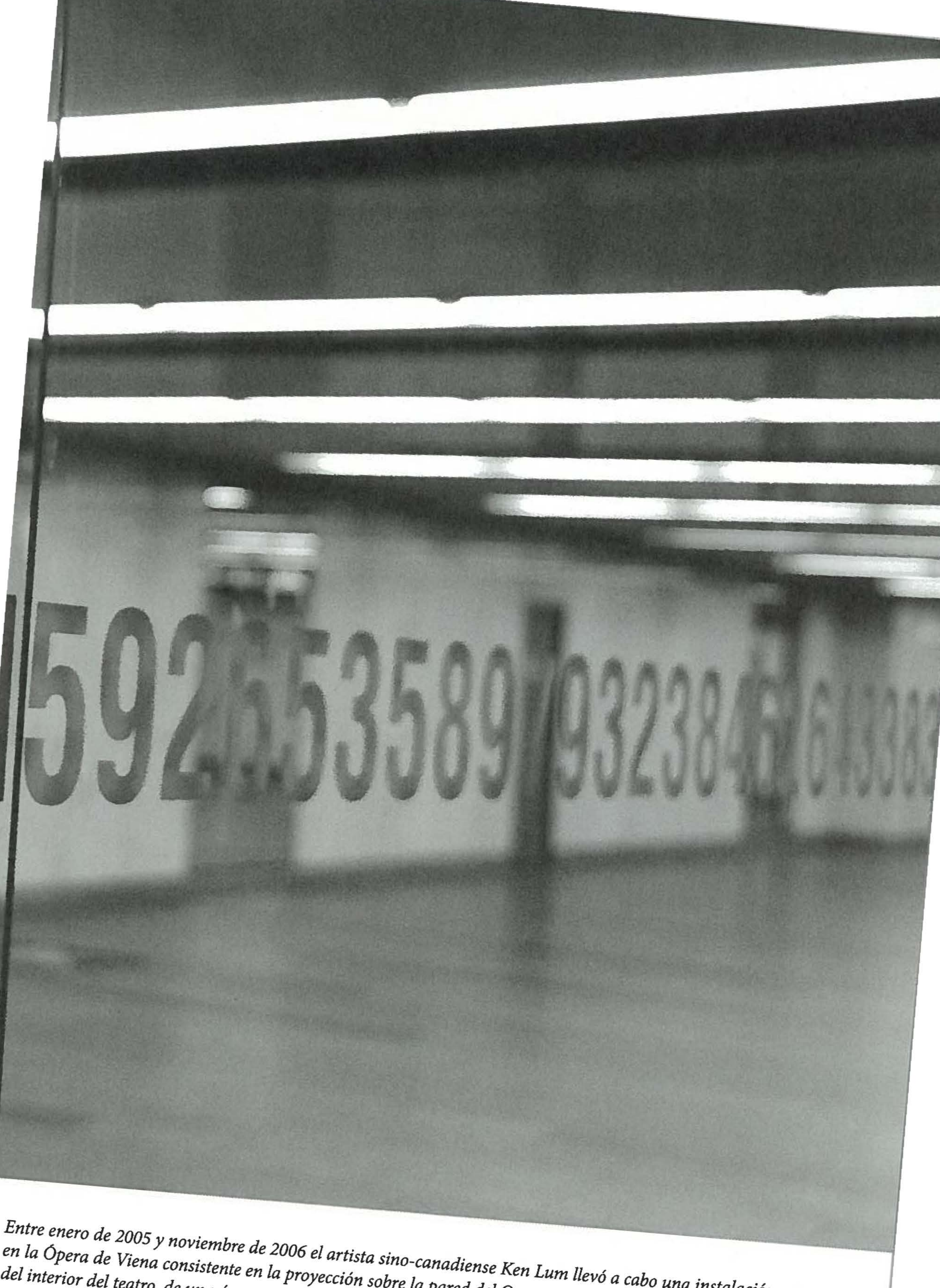
Buscando la cuadratura del círculo

En la década de 1910, en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, el extravagante matemático Srinivasa Ramanujan aportó 16 fórmulas para calcular el número π. En 1985, el hacker *Bill Gosper usó una de las fórmulas de Ramanujan para calcular π con 17.000.000 decimales exactos.*

SHUTTERSTOCK



Instalación artística en homenaje al número π



Entre enero de 2005 y noviembre de 2006 el artista sino-canadiense Ken Lum llevó a cabo una instalación en la Ópera de Viena consistente en la proyección sobre la pared del Opernpassage, una sala circular del interior del teatro, de un número π con 478 decimales.

MAURITIUS IMAGES

Un pisano y el valor del número π

Arriba, el duomo y la famosa torre inclinada de Pisa. En esta ciudad de la Toscana vivió el matemático del siglo XIII *Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci. En 1220 publicó la obra* Practica geometriae, *en la que, a partir del método de Arquímedes, da a* π *un valor aproximado de 3,141818.*

SHUTTERSTOCK

INTRODUCCIÓN

El mundo de los números es inagotable, infinito. Lo malo, lo único malo, es que profundizar en él se hace tanto más complicado cuanto más se avanza. Si se quiere saber mucho sobre la materia, no queda más remedio que ponerse a pensar. Así nació y se desarrolló la teoría de números, que hoy día es una gran rama, fuerte y consistente, del frondoso árbol de la matemática.

En esa teoría de números hay números llamados amigos, números primos, números abundantes, números trascendentes, números racionales, números aleatorios, números-universo, números computables, números normales, números reales, números hiperreales, números transfinitos, números figurativos, números complejos, números pseudoprimos, números intocables, números apocalípticos, etcétera; un muy largo etcétera, a decir verdad.

Pero ¿de dónde procede la fascinación por los números? ¿Por qué hay mucha gente que le tiene antipatía al 13? El número 666 ostenta un nombre particular, que pocos saben que procede del Apocalipsis de San Juan: los numerólogos lo llaman «el número de la bestia». ¿A qué se debe tal denominación? ¿Le interesa a alguien saber que un triángulo que tiene por lados 21669693148613788330547979729286307164015202768699465346081691 992338845992696 y 216696931486137883305479797292863071640152027 68699465346081691992338845992697 es necesariamente rectángulo? ¿Sabía usted que sesudos investigadores dedican su tiempo a una clase de números que ellos llaman «narcisistas»? Claro que en un terreno donde se habla de números palindrómicos, tetrádicos o amigables todo es posible, hasta lo que nos parece absurdo.

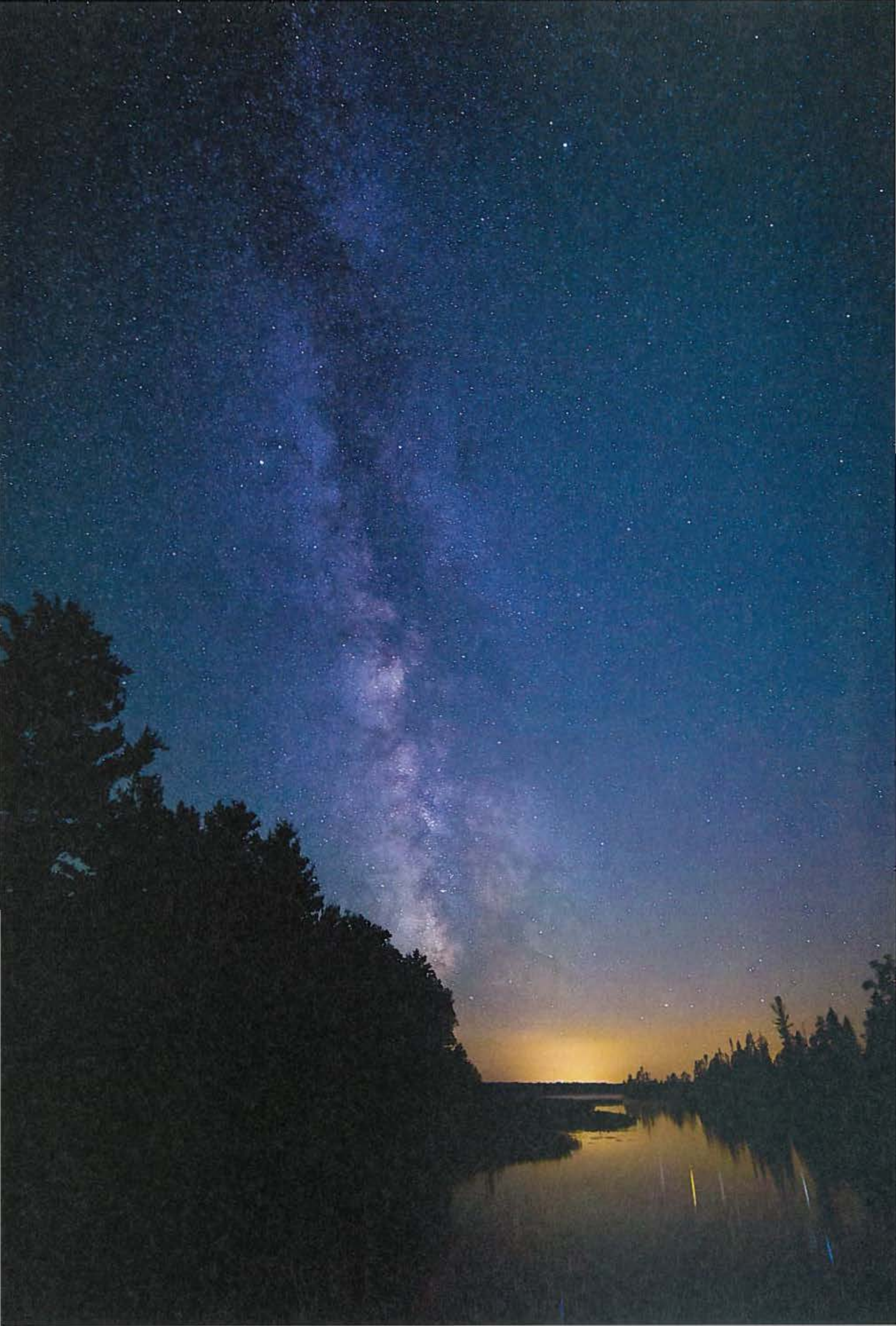
Hay números para todos los gustos, cada uno con su definición a cuestas, y π no es una excepción: pertenece al grupo de los números trascendentes y se sospecha que también al de los normales y a unos cuantos más. Es además la cifra más estudiada y admirada de la historia, y existe tanta información, tantos libros y tantas webs sobre π que pretender escribir algo radicalmente nuevo al respecto es prácticamente imposible. Por tal motivo, este libro se contenta con dar una respuesta variada, rigurosa y entretenida a esa manía numérica que tiene a p como objeto de su fascinación. Pero debe tratarse de una respuesta comprensible y breve, al alcance de todo lector interesado.

Por desgracia (ya se lo dijo Euclides al rey Ptolomeo I de Egipto), «no hay camino real para aprender geometría», y para saber de números y moverse entre ellos hay que someterse a un cierto esfuerzo mental. Así que abandonemos toda esperanza de que la lectura de unas páginas sobre matemáticas sea tarea fácil. Las matemáticas no se leen en un santiamén, pero por esa misma razón resulta tan satisfactoria la recompensa que de hacerlo se deriva. Pero tampoco tiene por qué ser una lectura aburrida.

Ahora bien, ¿hasta qué punto merece la pena ese esfuerzo? ¿Para qué se calculan las cifras decimales de π? En realidad, ¿para qué sirve conocer su primer millar de millones de dígitos? Sus cifras son infinitas y no habrá nunca un patrón de formación sencillo; incluso es posible que no exista, o que esté fuera de nuestro alcance. ¿Hay algún límite al conocimiento de

Hay números para todos los gustos y π no es una excepción: pertenece al grupo de los números trascendentes y se sospecha que también al de los normales y a unos cuantos más, y es además la cifra más estudiada y admirada de la historia.

π y de sus dígitos? Las matemáticas puras a menudo despiertan este tipo de interrogantes acerca de su propia utilidad. Tal vez la mejor respuesta que pueda darse a tan razonable inquietud sea la ofrecida por el ilustre matemático alemán Carl Gustav Jacobi, que en 1830 defendió la enseñanza de la disciplina «por el honor del espíritu humano». Adentrémonos pues en el libro animados por ese talante. No se trata de saberlo todo, ni siquiera de saber mucho, ni tampoco de que nuestra sabiduría pueda ser de utilidad. Se trata de saber algunas cosas numéricamente interesantes o divertidas simplemente porque sí, porque es hermoso saberlo. Por el honor del espíritu humano. □



CAPÍTULO 1

Todo lo que quería saber sobre π y no se atrevía a preguntar

«En la circunferencia, el comienzo y el fin coinciden.»
HERÁCLITO

Isaac Asimov afirmó que, si el universo fuera esférico y tuviera un diámetro de 80.000 millones de años luz, al calcular su ecuador celeste multiplicando el número π por 35 cifras, se cometería un error menor que una millonésima de centímetro. A la izquierda, la Vía Láctea observada desde la isla Madeline (EE. UU.), situada en el lago Superior.

AGE FOTOSTOCK

El número π es el más conocido de la historia, el más famoso, el más tratado, el más renombrado, el más citado... Todo lo que se pueda decir de π es poco. Su desarrollo decimal empieza así:

$$3{,}1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510...,$$

y con esas mágicas cincuenta cifras se puede circular por casi todo el ancho mundo del cálculo, aunque es raro encontrarse con un problema de física o de matemáticas que precise conocer más de diez dígitos de π. En realidad se usan las aproximaciones 3,14 o 3,1416 para los cálculos elementales.

Isaac Asimov escribió una vez: «Si el universo fuera esférico y tuviera un diámetro de 80.000 millones de años luz, el error que se cometería al calcular su ecuador celeste con el valor de π por 35 cifras sería menor que una millonésima de centímetro».

Si nos situáramos en un punto del ecuador terrestre y escribiéramos el desarrollo decimal de π con números semejantes en tamaño a los de este libro, el conjunto actual de las cifras calculadas por ordenador daría más de 500 vueltas al mundo. Ahora ya se sabe que la secuencia 0123456789 se encuentra en el decimal 17.387.594.880 de π. ¡Qué lejos queda hoy la afirmación de un matemático eminente como el holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), que consideraba la búsqueda de dicha secuencia una tarea sin sentido porque nunca se conocerían los suficientes dígitos de π!

En pleno siglo XXI hemos encontrado una utilidad incontestable al desarrollo decimal de π: cuando se desea testar el funcionamiento de un superordenador se le impone como tarea algo arduo de calcular, pero, a la vez, cuyo resultado se conozca bien; los dígitos de π son la solución ideal.

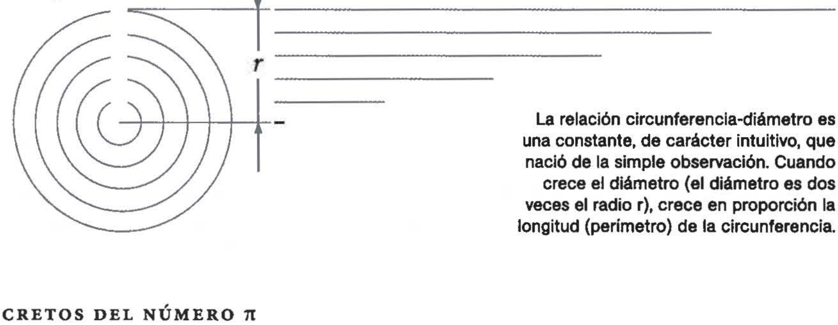
Reinventando la rueda

El número π no salió de la nada, como es natural, sino que nació de la simple observación. La razón o relación entre la longitud de una circunferencia *(p)* y su diámetro *(d)* es una constante:

$$p/d = \pi.$$

O, si se prefiere,

$$p = \pi d = \pi 2r = 2\pi r.$$



La relación circunferencia-diámetro es una constante, de carácter intuitivo, que nació de la simple observación. Cuando crece el diámetro (el diámetro es dos veces el radio r), crece en proporción la longitud (perímetro) de la circunferencia.

La simple observación nos dice que dicha relación es un número fijo, pues cuanto mayor es el diámetro de una rueda, mayor es (y proporcionalmente) la distancia recorrida por un punto fijo de la misma al dar una vuelta. Es decir:

Longitud de una circunferencia / diámetro de la misma = constante ≈ 3,14.

O, en términos algebraicos, siendo l la longitud de la circunferencia y r su radio (el diámetro, d, es el doble de r):

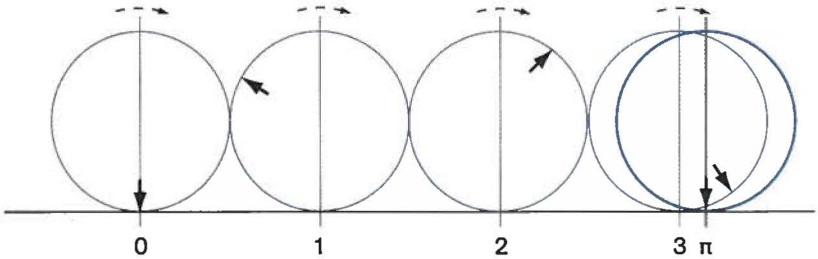
$$l = \pi d = \pi 2r = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14\, r.$$

El signo ≈ se lee «aproximadamente igual», y la mayor parte de la historia de π reside en reducir la aproximación al mínimo posible añadiendo dígitos a la derecha de 3,14.

Los matemáticos han empleado gran parte de su ingenio en el cálculo de π con la mayor precisión posible, arrancándole decimales con denodado esfuerzo. Durante un tiempo se pensó que la hazaña llegaría a su fin, pero en 1862 el matemático alemán Ferdinand von Lindemann (1852-1939) cerró la larga e interminable búsqueda con un «no» definitivo. No hay ni habrá nunca un modo finito, utilizando sólo regla y compás, de hallar «exactamente» π. A lo largo de estas páginas intentaremos explicar por qué.

LA PRIMERA RECTIFICACIÓN

Rectificar una curva es medir su longitud. La más natural de las rectificaciones es la de la circunferencia.



Cuando una circunferencia de perímetro p se desliza sin resbalar por una línea, al recorrer π veces su diámetro d, da una vuelta completa. Este proceso, el paso de un perímetro a un segmento, se llama rectificación. Al rectificar la circunferencia se obtiene $p/d = \pi$.

En un principio, el número π no se llamaba así. Aunque matemáticos como William Oughtred (1574-1660), Isaac Barrow (1630-1677) y David Gregory (1659-1708) utilizaron esta grafía, la denominación «oficial» no le llegó hasta que William Jones (1675-1749) llamó así a la constante en 1706, en una de sus *Synopsis Palmariorum Matheseos*, dado que la letra «p» es la primera de la palabra «periferia», que en griego se escribe περιφρεια. Posteriormente, el gran Leonhard Euler (1707-1783), tras usar en un principio una «c» y una «p», se inclinó por emplear definitivamente el símbolo π, con lo que inició una lenta pero imparable y universal difusión, aunque en el Egipto del siglo XX, por ejemplo, durante un tiempo se designó a la constante con la letra árabe *ta* en lugar de *pi*, y ello por razones nacionalistas, entre otras.

Hoy π se emplea en matemáticas sobre todo para simbolizar el número que hemos indicado, pero no es el único uso de la letra. Por ejemplo, se indica comúnmente con $\pi(x)$ la función de los números naturales «número de números primos menores que x». Y, descendiendo a la frivolidad de los

EL ASTEROIDE DE «EL PRINCIPITO»

Se impone revelar una curiosidad, no por sencilla menos sorprendente. Como en toda circunferencia se cumple que

$$\textit{longitud / diámetro} = \textit{constante},$$

un multiplicador en el denominador de esta fracción determina el mismo multiplicador en el numerador. Lo pondremos de relieve con un simple ejemplo. En *El principito*, el relato del escritor y aviador francés Antoine de Saint-Exupéry (1900-1944), el protagonista de la historia da la vuelta a su pequeño asteroide deshollinando los volcanes. Supongamos que recorre un meridiano, porque de no ser así no habría historia. El principito mide exactamente 1 m. Si recorre 1.000 m, ¿qué distancia recorre su cabeza? Empecemos recordando que nuestra unidad de medida es el metro. Como el principito camina 1.000 m y la

$$\textit{longitud de la circunferencia} = 2\pi r,$$

es evidente que la

$$\textit{distancia en metros recorrida por los pies} = 1.000 = 2\pi r.$$

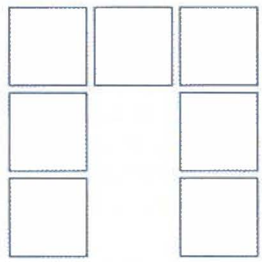
Como el protagonista mide 1 m, llamando C a la distancia recorrida por la cabeza, tenemos que

$$C = 2\pi\,(r + 1).$$

Y, restándole la primera expresión a la segunda, se obtiene que:

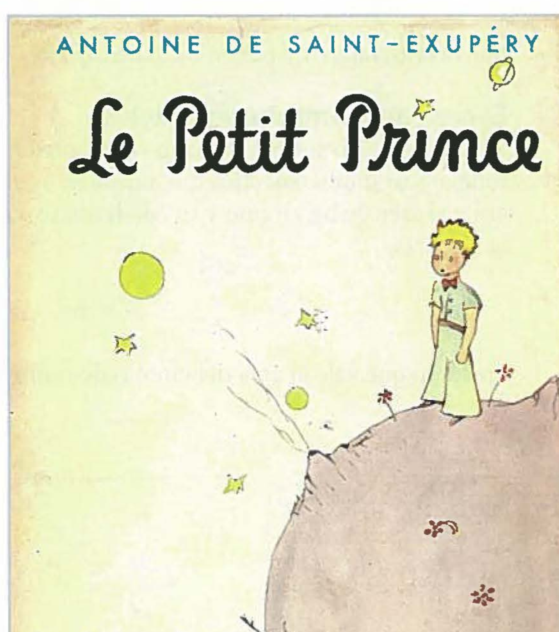
$$\textit{distancia en metros recorrida por la cabeza} - \textit{distancia en metros recorrida por los pies} =$$
$$= C - 1.000 = 2\pi\,(r + 1) - 2\pi r = 2\pi\,(r + 1 - r) = 2\pi \approx 6{,}28.$$

pasatiempos matemáticos, se llama π al heptominó, esto es, una figura formada por siete cuadrados conexos, como la representada aquí:



Según opiniones autorizadas, como la de Einstein, la constante π es un número fundamental en la descripción del Universo. Al establecer una relación básica entre lo circular y lo que no lo es, de un modo u otro π reaparecerá como un corcho en la superficie del agua en todo fenómeno natural

La diferencia es de 6,28 m, pero lo curioso de todo el cálculo es que el radio del asteroide no influye para nada en él. De hecho, mida lo que mida el radio original, toda añadidura de 1 m al radio original sólo incrementa en 6,28 la medida de la circunferencia. Si el asteroide hubiera medido 1.000 km de radio, el principito hubiera deshollinado a lo largo de 1.000 km, y la distancia adicional recorrida por su cabeza con respecto a los pies sería exactamente la misma: 6,28 m.



Portada de una edición de *El principito*, de Antoine de Saint-Éxupéry.

gobernado por leyes que tengan algo que ver con la forma, el giro o el círculo. Al igual que un puñado de escogidas constantes, π es una compañía de la que no nos desprenderemos nunca.

Tomando la cuestión por el otro extremo, hay mucha gente, más o menos fanática de la numerología, que ve a π en todas partes, como un componente de sencillas o retorcidas combinaciones numerológicas. Es como si se tratara de una teoría conspirativa basada en π. La llamada constante de estructura fina, el número α, es una de las víctimas preferidas de los adoradores de π. Incluso un serio Premio Nobel de Física como Werner Heisenberg (1901-1976) conjeturó durante muchos años que

$$1/\alpha = 2^4 3^3 / \pi.$$

Sin embargo, Heisenberg no ha sido el único. Por los tratados de física corren aproximaciones más o menos fantasiosas, como

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{8\pi^4}{9}\right)\left(\frac{2^4 5!}{\pi^5}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\frac{1}{\alpha} = 108\,\pi\left(\frac{8}{1843}\right)^{\frac{1}{6}},$$

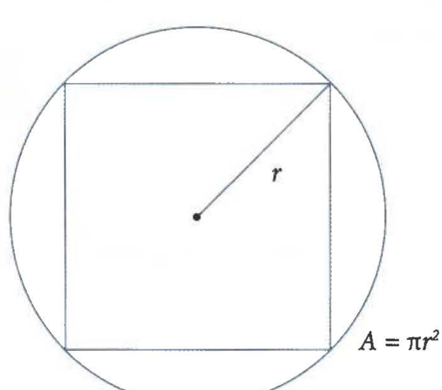
que involucran a π y tienen bastante mérito.

El gran problema durante siglos

El número π no sólo es la razón constante entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, sino que también es el doble de la razón constante entre el área de un círculo y su cuadrado inscrito. Tal como nos enseñan en la infancia,

$$A = \pi r^2,$$

que es lo que vale el área del círculo de radio r.



Y como el área del cuadrado vale precisamente el cuadrado del lado, una elemental aplicación del teorema de Pitágoras nos lleva a

$$\frac{A}{\textit{Área del cuadrado inscrito}} = \frac{\pi r^2}{2r^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Pero ¿quién nos asegura que esa constante, ese π que proviene del área es el mismo π que aparecía en la longitud? Sin duda, es el mismo π, pero en contra de lo que aprendemos en la escuela, no es tan evidente que las dos constantes sean la misma. Hubo que esperar al ingenio de Arquímedes para estar seguros.

El problema que de verdad importaba a los antiguos matemáticos era construir una superficie cuadrada equivalente a otra circular. Y ello era por simples consideraciones prácticas, pues medir un área cuadrada era tan elemental como sencillo, mientras que medir áreas circulares planteaba ciertas dificultades y ofrecía un valor aproximado. En la época de preponderancia del pensamiento griego se añadió a esta exigencia de conocimiento la pretensión de hallar tal equivalencia por un procedimiento divino, limpio, casi deportivo, muy en la línea de la filosofía griega; de este modo, para construir el cuadrado equivalente a un círculo sólo se admitía el uso de la regla y el compás. En eso consiste precisamente cuadrar el círculo, en obtener una construcción que resuelva dicha equivalencia usando sólo regla y compás un número finito de veces. Las matemáticas avanzaron de este modo, siempre tras la elusiva zanahoria de la cuadratura, pero sin alcanzarla jamás.

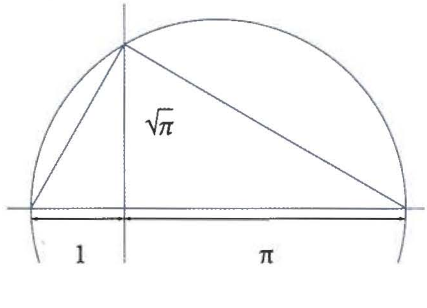
A lo largo de los siglos, todos los geómetras pretendían cuadrar el círculo, lo que equivale a construir exactamente π con regla y compás, y conseguir en el empeño acercarse sólo un poquito más, añadirle otro decimal exacto al desarrollo de π. Algebraicamente, «cuadrar» un círculo de área πr^2 significa buscar un cuadrado de lado l, de modo que

$$\pi r^2 = l^2.$$

O sea, que hay que buscar un l tal que

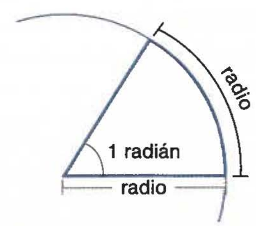
$$l = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi},$$

lo que equivale a construir $\sqrt{\pi}$ con regla y compás. Si se tiene $\sqrt{\pi}$, una elemental construcción también con regla y compás nos lleva a π:



EL RADIÁN Y π

En matemáticas, los ángulos no se miden en grados, minutos y segundos sexagesimales, ni siquiera en los sofisticados grados centesimales. El advenimiento del análisis matemático (derivadas, integrales, etc.) determinó el uso de una medida más natural, aunque en un principio parezca complicada. El radián se define como aquel ángulo central de la circunferencia que determina un arco igual al radio.



Como la longitud de su perímetro equivale a $2\pi r$, la circunferencia entera es un arco con un ángulo de 2π radianes. De modo que

1 radián = $360/2\pi$ grados sexagesimales ≈ 57°17'45".

Las equivalencias más frecuentes son:

$30° = \pi/6$; $60° = \pi/3$; $90° = \pi/2$; $180° = \pi$; $360° = 2\pi$.

De modo que si tuviéramos un determinado π, tendríamos una $\sqrt{\pi}$, y estaría cuadrado el círculo. Lo que sigue es, en el fondo, la historia de una búsqueda imposible que cada vez se acerca más al objetivo. El geómetra de turno (y alguien con un gran ingenio) añadía un decimal a π, y cada vez, de modo indirecto, los demás matemáticos avanzaban un paso siempre hacia delante.

La historia de π: la época heroica

De un par de versículos de la Biblia se deduce un valor de π que el sagrado libro sitúa en $\pi = 3$. No vamos a tomarnos demasiado en serio este valor aproximado, pues aparece como una receta para construir un altar circular y no es más que una excusa para explicar una historia, no un intento serio de calcular π. Para el lector curioso, lo que dice la Biblia, por ejemplo en *Reyes* (I, 7, 23) es:

> «Hizo fundir asimismo un mar de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo. Tenía cinco codos de altura y a su alrededor un cordón de treinta codos».

El cálculo del valor de π empleado aquí, que termina con $\pi = 3$, lo dejamos en manos del sagaz lector.

En el papiro Rhind egipcio, una de las fuentes matemáticas más antiguas y que los expertos sitúan alrededor de 1650 a.C., se encuentra también una referencia indirecta a π. En el problema numerado como 50 de los 87 que contiene, se dice: «Un campo circular tiene un diámetro de 9 khet (1 khet $\approx$ 50 m). ¿Cuál es su área?». En lenguaje moderno, esto equivale a un área igual a

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \pi\frac{81}{4}.$$

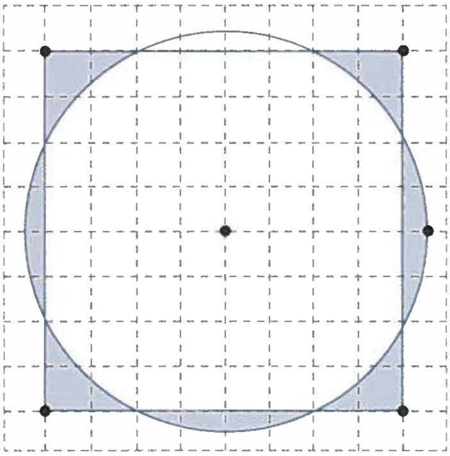
Pero el propio papiro proporciona el sistema para calcular el área, que es

$$\frac{64}{81}d^2,$$

donde d es el diámetro. Como $d = 9$, tenemos que

$$\pi\frac{81}{4} = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}9^2 = \frac{64}{81}81;$$

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}160493827.$$



Según el escriba Ahmes, autor del papiro Rhind, un cuadrado de lado 8 equivale en superficie a un círculo de diámetro 9.

No obstante, esta aproximación es inferior a la obtenida, supuestamente, por los mismos egipcios en Giza, allá por el año 2600 a.C. La proporción perímetro/altura en las pirámides de dicha ciudad es de 22/7, aunque se ignora la razón de tal cifra y se supone que debía de obedecer a causas que los arquitectos de entonces consideraban divinas. Lo cierto es que muchos lo toman como una aproximación a π de carácter místico por parte de los constructores. Si lo admitimos como explicación y llegamos a suponer que la relación perímetro/altura no es casual, obtenemos

$$\pi = 22/7 = 3{,}142\ldots,$$

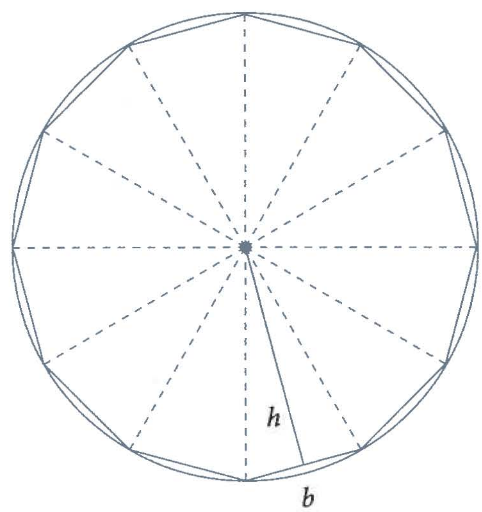
una cifra que no está nada mal.

En Babilonia los avances en este sentido tenían lugar más lentamente, pues en una tablilla de la antigua ciudad de Susa, datada hacia 2000 a.C., el valor de π era de $25/8 = 3{,}125$.

En la India, textos védicos del siglo IX a.C. proporcionan diversos valores de π basándose en cuestiones prácticas: el mejor valor proviene de cálculos astronómicos y se encuentra en los *Shatapatha Brahmana*; en ellos, $\pi = 339/108 = 3{,}1388\ldots$

La historia de π: Arquímedes

Llegamos al mundo de la antigua Grecia, donde se forjó una de las mentes más preclaras de la humanidad, la de Arquímedes de Siracusa. Por otro lado, es posible que Anaxágoras se ocupara de π en el siglo V a.C., si bien no se conservan testimonios escritos. No reproduciremos aquí el razonamiento de Arquímedes a la hora de aproximar π, pues se trata de un proceso largo y complejo, más apropiado para los historiadores de la ciencia. Intentaremos explicarlo de un modo más cercano y comprensible, recurriendo al concepto moderno de límite. Supongamos un polígono inscrito en un círculo, como el de la ilustración.



Se observa que se forman varios triángulos, de base b y altura h. El área total de los n triángulos, próxima aunque inferior al área del círculo que lo rodea es

$$A_n = n(\text{área del triángulo})$$

De manera que

$$A_n = n\left(\frac{1}{2}hb\right) = \frac{1}{2}h(nb).$$

Llevando la igualdad al límite, usando cada vez más triángulos y haciendo $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} h(nb) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} hnb = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} h \cdot \lim_{n\to\infty} nb = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2,$$

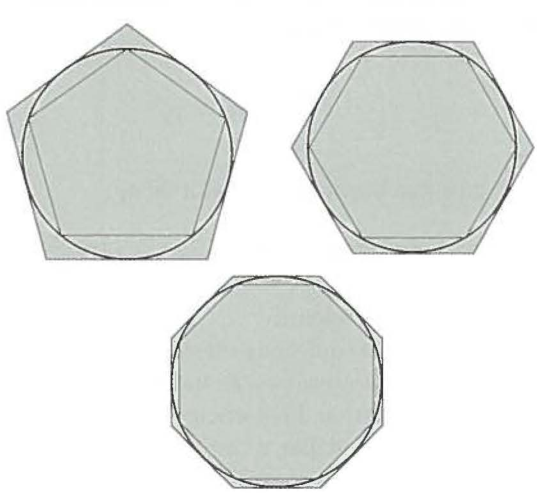
ya que

$$\lim_{n\to\infty} h = r,$$

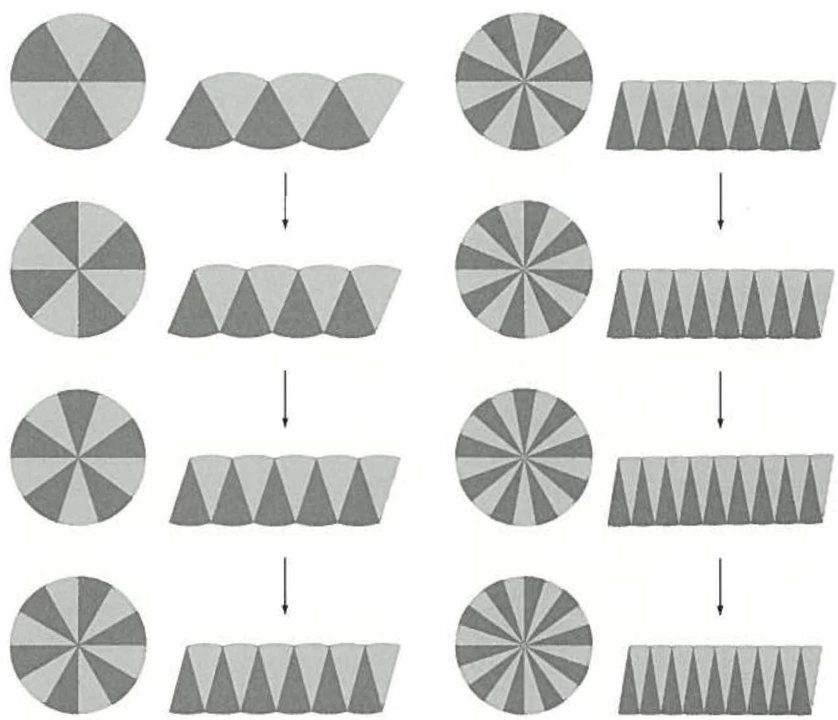
y llegamos a la siguiente conclusión:

$$\lim_{n\to\infty} nb = \textit{longitud de la circunferencia} = 2\pi r,$$

Arquímedes desconocía la definición moderna de límite y de integral, y procedía por el método denominado de exhauscción, ideado por Eudoxo de Cnido (400-347 a.C.); para ello utilizaba polígonos inscritos y circunscritos, como los de la ilustración. Imponía al círculo una cota superior y otra inferior, y el área del mismo quedaba, por así decirlo, laminada entre ambos valores, que se iban haciendo cada vez más pequeños.



Un esquema de cómo funcionaría hoy el «paso al límite» puede ayudar a comprender por qué el área del círculo es πr^2:



Se va formando una especie de romboide curvilíneo que se hace cada vez más plano. Recordemos que en un romboide corriente, el área es igual a la base por la altura. La altura está cada vez más cercana al radio r, mientras que la base es una curva que tiende a valer el semiperímetro (la mitad del perímetro) del círculo. El área tiende a

$$r\frac{l}{2} = r\frac{2\pi r}{2} = r\pi r = \pi r^2.$$

Arquímedes llegó a una horquilla del valor de π,

$$223/71 = 3{,}140845\ldots < \pi < 22/7 = 3{,}142857\ldots,$$

que puede ser calificada de excelente.

El método utilizado por Arquímedes sería casi de uso obligado en los años e incluso en los siglos posteriores. Es natural, accesible y directo; una maravilla del ingenio geométrico. En esencia, Arquímedes ideó un algoritmo, unas instrucciones para calcular π con tanta precisión como se quiera. Para aplicar tal algoritmo sólo se necesita una calculadora o un ordenador

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA

Ingeniero, físico, astrónomo y matemático griego, Arquímedes (hacia 287 a.C.-hacia 212 a.C.) está considerado el científico más importante de la Antigüedad y una de las mentes más preclaras de la historia. Su inteligencia y logros lo colocan a una altura sólo alcanzada, en el terreno matemático, por Newton, Gauss o Von Neumann. Sus aportaciones a la ciencia son incontables. Como ingeniero y físico creó el tornillo sin fin, los espejos parabólicos, numerosas aplicaciones de los sistemas de palancas (polipastos), entre otros muchos inventos. Quizá su contribución más universal sea la que hizo a la hidrostática, conocida como principio de Arquímedes o principio de la flotabilidad; la imagen de Arquímedes saliendo desnudo del baño y gritando «*¡Eureka!*» («¡Lo encontré!») es ya un icono del descubridor de universos intelectuales.
Como matemático sus descubrimientos son incontables: aparte de la aproximación a π se ocupó de hallar el perímetro, el área, el volumen o el centro de gravedad de muchos cuerpos geométricos (esferas, cilindros, parábolas, espirales...), estudió las ecuaciones diofánticas, ayudó a concebir y contar grandes números, etcétera.
Murió durante el sitio de Siracusa, que él y sus máquinas ayudaron a defender frente a los romanos. Según cuenta Plutarco, estando el sabio observando un esquema en la arena, le espetó algo parecido a «no toques mis dibujos», al soldado que iba a prenderle, lo que enfureció a este último, que le mató con su espada. Cuenta Plutarco que la muerte de Arquímedes indignó al general romano, que lo consideraba un botín muy valioso. Sobre su tumba se grabó una esfera inscrita en un cilindro, dada la proporción existente entre sus volúmenes y áreas, descubrimiento que realizó el propio Arquímedes y que tenía en gran aprecio.

Uno de los inventos atribuidos a Arquímedes es el empleo de espejos que reflejaran la luz solar para que ésta incidiera contra las naves romanas y las incendiara. El objetivo era proteger la ciudad de Siracusa del asedio romano.

ARCHIVO RBA

y una fórmula recursiva. Si n es el lado de un polígono circunscrito o inscrito en un círculo, y a_n y b_n, sus perímetros, si se hace

$$a_{2n} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},$$

$$b_{2n} = \sqrt{a_{2n} b_n},$$

se obtiene el denominado algoritmo de Arquímedes, una fórmula recursiva que los hace aproximarse a π a medida que crece n. Y en cualquier caso,

$$a_k > \pi > b_k.$$

El algoritmo arquimediano, partiendo de un hexágono regular, con $a_0 = 4\sqrt{3}$ y $b_0 = 6$ proporciona de modo sucesivo:

$$3{,}00000 < \pi < 3{,}46410$$
$$3{,}10583 < \pi < 3{,}21539$$
$$3{,}13263 < \pi < 3{,}15966$$
$$3{,}13935 < \pi < 3{,}14609$$
$$3{,}14103 < \pi < 3{,}14271.$$

La desigualdad correspondiente a un polígono de 96 lados, expresada adecuadamente en números racionales, da la aproximación de Arquímedes.

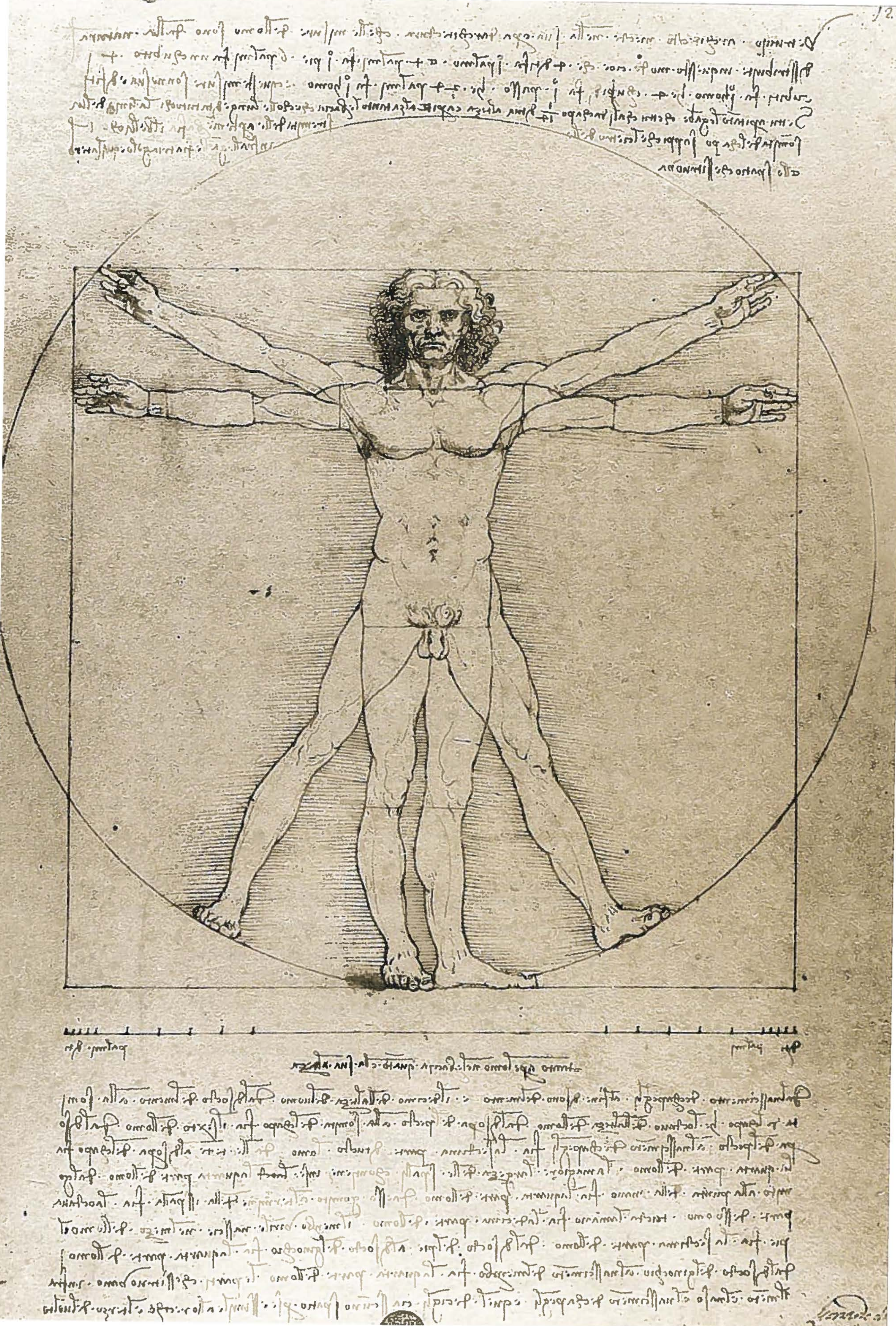
La historia de π: de Arquímedes en adelante

Hacia el año 20 a.C., el conocido arquitecto, ingeniero militar y escritor romano Marcus Pollio Vitruvius (hacia 85 a.C.-hacia 20 d.C.), más conocido en nuestros lares como Vitruvio, o Vitrubio, escribió el monumental tratado *De Architectura* (10 libros), donde usó la equivalencia mesopotámica π = 25/8. Vitruvio abordó por su cuenta la medida de π valiéndose del empírico auxilio de una rueda marcada. Sin embargo, no pasaría a la gloria histórica por ese cálculo sino por el dibujo de Leonardo da Vinci conocido como el *Hombre de Vitruvio*, que mide la proporción humana.

Dejando aparte su fama, Vitruvio no mejoró la aproximación de Arquímedes, cosa que sí hizo el astrónomo, astrólogo y geógrafo egipcio helenizado (nació en Grecia) Claudio Ptolomeo (hacia 100-hacia 170 d.C.) con su fracción π = 377/120 = 3,141666... Para llegar a este valor utilizó un polígono de 120 lados, concluyendo que π = 3 + 17/120, un resultado magnífico. En cualquier caso, la posteridad no le rindió por ello el sobradamente merecido homenaje, aunque sí lo hizo por una de sus obras, *Almagesto,*

A la derecha, el Hombre de Vitruvio, *o* Canon de las proporciones humanas *(ca 1490), dibujo del famoso arquitecto y, sobre todo, polímata que las postuló: el toscano Leonardo da Vinci (1452-1519). En la actualidad se conserva en la Galería de la Academia de Venecia.*

ARCHIVO RBA



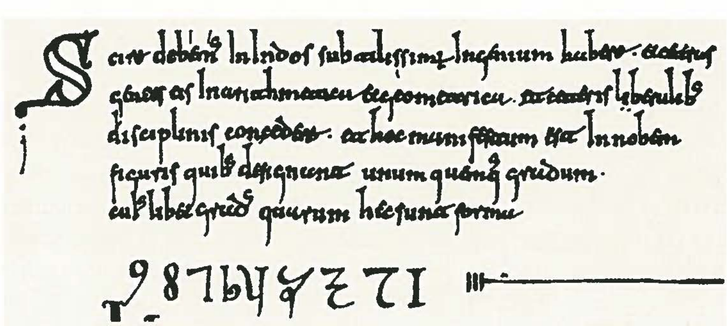
trece libros cuyo título en griego se traduce como *El gran tratado*. Con ellos se inauguró la tradición de obras que pretendían dar una explicación de todo lo conocido; de hecho, hubo que esperar hasta Copérnico para que el *Almagesto* quedara obsoleto.

La visión centrada en el mundo occidental nos impide muchas veces constatar que en la Antigüedad florecieron otras culturas, otros pueblos distintos de babilonios, griegos, romanos y egipcios. Mientras occidente vivía el alba de π, ¿qué sucedía en el lejano Oriente?

En China, por ejemplo, dejando aparte las tentativas de Chan T'sang (hacia 220 a.C.), quien estableció el valor de π en 3, y otros matemáticos, Zhang Heng (78-139 d.C.) encontró tiempo entre sus numerosas actividades (se dedicó a la astronomía y a las matemáticas e ideó un detector de terremotos) y escribió en uno de sus libros la aproximación $\pi = 736/232 = 3{,}1724...$; en el cálculo de una esfera inscrita en un cubo hizo uso de la aproximación $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162277...$

El nombre de Wang Fang o Fan (217-257 d.C.) es conocido hoy por la malformación que lleva su nombre: las personas que la padecen nacen con los pies vueltos del revés. Pero Wang Fang, que tenía los pies normalmente constituidos, también se interesó por las matemáticas, y calculó algunas cifras de π: en el año 250 dio la fracción aproximada $\pi = 142/45 = 3{,}155555...$

El matemático Liu Hui (hacia 220-hacia 280 d.C.) escribió unos comentarios acerca de *Nueve capítulos sobre el arte matemático* en el año 263, gracias a los cuales hoy se conoce algo de su existencia y logros. En ellos se halla una fórmula recurrente que calcula los lados de un polígono regular de 3×2^k lados, sabiendo los de un polígono de $3 \times 2^{k-1}$ lados; Liu Hui recomendó usar la aproximación $\pi \approx 3{,}14$, aunque él fue más lejos y llegó a $\pi = 3{,}141592104...$; eso presupone trabajar con un polígono de 3.072 lados.



Dígitos indoarábigos, tal como aparecen por primera vez en España (974-976) en el códice albeldense, llamado también código de Vigila, por el monje que lo realizó.

ARCHIVO RBA

Unos siglos después, Zu Chongzhi (429-500 d.C.), un científico y matemático que creó nuevos calendarios, ahorquilló a π de un modo que hoy calificaríamos con muy buena nota:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Incluso recomendó usar fracciones como 22/7 para las aplicaciones sencillas y 355/113 para las más complicadas.

Abandonemos por un momento China para pasar a la India, donde Aryabhata (hacia 476-550 d.C.), el gran patriarca de los sabios indios, obtuvo un valor de π de 3,1416 con el auxilio de un polígono de 384 lados.

Brahmagupta (598-665 d.C.), sin duda el más dotado de los matemáticos indios, es el autor de un largo texto, los *Brahmasphutasiddhanta*, donde, no sin cierta decepción, se encuentra de nuevo el valor $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162277...$

Es preciso trasladarse al siglo XII para encontrar algo mejor de la mano de Bhaskara II «el maestro» (1114-1185), recogido en su obra *Lilavati*. El libro lleva el nombre de su hija, que, a juzgar por el mérito de la obra, debió de ser una joven bellísima, pues éste es, precisamente, el significado de su nombre. Bhaskara da la aproximación $\pi \approx 3917/1250 = 3{,}1416$.

Nuestro sistema de numeración, que es posicional y de base 10, cuenta con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, de procedencia indoarábiga. De este hecho, al que no solemos prestar atención, proviene nuestro progreso comercial: de la introducción en un Occidente competitivo de los instrumentos aritméticos que pondrían el cálculo al alcance de todos.

No es este libro el más adecuado para narrar los avatares de las cifras indoarábigas, pero sepamos que se denominan así precisamente por su origen. Lo más sorprendente es que tales cifras y tal sistema numérico no hicieron su aparición en Occidente hasta el siglo X; fueron dados a conocer en el *Liber abaci* de Leonardo de Pisa (hacia 1170-1250), conocido también como Fibonacci. La popularidad de las cifras se extendió como un reguero de pólvora, especialmente entre los comerciantes y las gentes más cultivadas. Los cálculos en el nuevo sistema dejaron de ser una pesadilla añadida para simplificarse gracias a algoritmos sencillos de multiplicación y división y, aunque con lentitud, la civilización dio un paso adelante definitivo.

Precisamente en medio de esta crónica figura Fibonacci, que en 1220 dio a π el valor aproximado de 3,141818 en una de sus obras, *Practica geometriae*, aplicando un tanto libremente el método de Arquímedes.

Pero no adelantemos acontecimientos. Mucho antes hay que detenerse en el mundo árabe y en la figura señera de Abū 'Abdallāh Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (hacia 780-850 d.C.), cuyo nombre aparece también como al-Juarismi y grafías similares. En cualquier caso, el nombre del matemático persa es el origen de las palabras algoritmo y guarismo; escribió además una obra, titulada abreviadamente *Compendio de cálculo*, que dio lugar nada menos que a la palabra álgebra. Sus trabajos, trasladados a Occidente, ejercieron una influencia extraordinaria. Al-Khwārizmī también recomendó el uso de 3,14 para cálculos fáciles y 3,1416 para los difíciles, como, por ejemplo, los astronómicos.

En 1424, el también persa Jamshīd al-Kāshī (1380-1429), conocido como «el de Samarcanda», no calculó π, sino 2π, y lo hizo utilizando el sistema sexagesimal de numeración (en el que, por ejemplo, escribiríamos $1/60 = 0,1$, $1/60^2 = 1/360 = 0,01$, etcétera) y llegando a las 9 cifras, lo que traducido al sistema decimal proporciona una aproximación correcta de π de 16 cifras. Al-Kāshī computó:

$$2\pi = 6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9} + \ldots$$

usando polígonos de 3×2^{28} lados. Esta valoración superaba la marca de trece decimales obtenida por Madhava de Sangamagrama (hacia 1350-hacia 1425) en la India pocos años antes, en 1400. Además, los cálculos de Madhava presentaban un rasgo original: por primera vez se usaba una serie, un instrumento sumatorio de longitud infinita, un cálculo numérico puro, para evaluar π. La fórmula de Madhava no es otra que la que luego pasaría a la historia occidental con el nombre de «fórmula de Leibniz», solo que Madhava la descubrió mucho antes:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

La convergencia de este sumatorio es flojísima, y hay que sumar y restar miles de términos para llegar a resultados simplemente dignos; Madhava la trabajó para transformarla en

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right),$$

y así pudo calcular π.

El alemán Valentinus Otho o Valentin Otto (hacia 1550-1603), un entusiasta de Copérnico, recomendó en 1573 usar $\pi = 355/113 \approx 3,1415929\ldots$, pero esto no es nada comparado con los resultados que se obtuvieron más tarde, y no debido a la aproximación conseguida, sino a la inteligencia desplegada para alcanzar tal fin. De hecho, la cifra novena de π a la que llegó el francés François Viète no es algo extraordinario y, además, para conseguir ese resultado empleó los métodos de Arquímedes y trabajó con polígonos de 393.216 ($= 6 \times 2^{16}$) lados. Lo importante aquí es la fórmula que alcanzó, relacionada con π, aunque no pudo utilizarla debido a la dificultad de su cálculo, pues implica la extracción de raíz cuadrada tras raíz cuadrada. Viète demostró lo que en el lenguaje moderno se escribiría como

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdot \ldots$$

El camino que siguió hasta conseguirlo se explica, junto con otras fórmulas, en el capítulo 4.

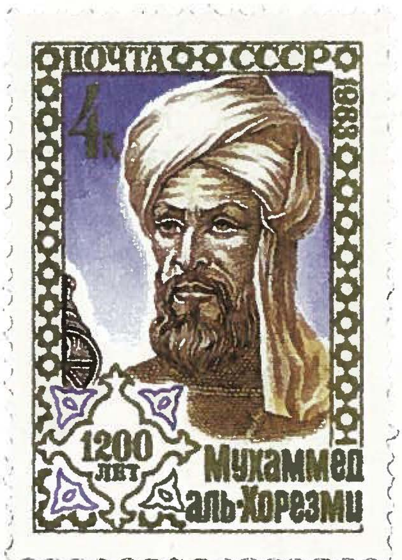


Foto superior izquierda: Un al-Khwārizmī de rostro imaginario y heroico adorna un sello soviético de 1983, ya que era uzbeko, según la geografía imperante, y Uzbekistán era una república soviética cuando se estampó el sello. Foto superior derecha: Sello estampado en 1999 en los Estados Federados de Micronesia que muestra el método de aproximación a π desarrollado por el matemático chino Liu Hui. Foto inferior izquierda: Zu Chongzhi trabajando con un compás. Foto inferior derecha: Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci.

ARCHIVO RBA (ARRIBA Y ABAJO DERECHA);
AGE FOTOSTOCK (ABAJO IZQUIERDA)

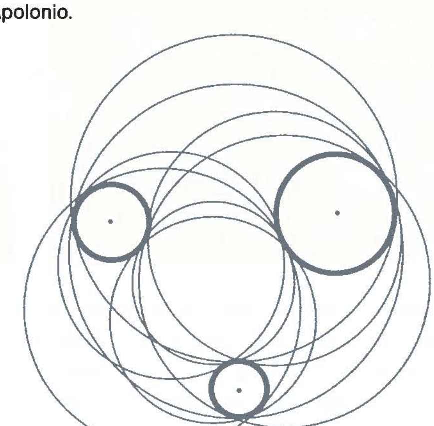
El rival y amigo de Viète, el geómetra holandés Adriaan van Roomen (1561-1615), conocido también como Adrianus Romanus en una sociedad en la que se latinizaban casi todos los nombres eminentes, dedicó mayores esfuerzos que el primero al estudio del método poligonal de Arquímedes y, utilizando impresionantes figuras de 2^{30} lados, en 1593 computó 16 cifras exactas de π.

Pero, si el trabajo de Van Roomen nos parece formidable, ¿qué decir de Ludolph van Ceulen (1540-1610)? Este germano, auténtico obseso de π, lo calculó primero en 1596 hasta 20 cifras y luego hasta 35, que vale la pena citar:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288...$$

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603)

En rigor, no se puede calificar a Vieta (forma latinizada de su nombre, por la que se le conoció en Europa) de matemático profesional, pues era abogado y, al ascender al trono Enrique IV, alcanzó el cargo de cortesano y miembro del consejo privado del rey. Su fama, un tanto legendaria, reside en que fue un precursor en criptografía, pues descifraba fácilmente los mensajes cifrados de Felipe II, enemigo de su señor. El monarca español llegó a pensar en que el perverso rey francés sostenía algún tipo de pacto con el diablo, ya que parecía averiguar de inmediato las maniobras diplomáticas de un paladín de la catolicidad como él. Vieta fue muy buen geómetra, pero casi mejor algebrista, impulsó los campos de la trigonometría y la resolución de ecuaciones y, lo que es quizá más importante, inventó notaciones algebraicas modernas que revolucionaron el lenguaje oral y escrito y promovieron el progreso de la ciencia. Sostuvo una gran rivalidad, trocada luego en amistad, con Adriaan van Roomen (1561-1615), a quien propuso el problema de las circunferencias tangentes o problema de Apolonio.



El problema de Apolonio propone que, dados tres círculos, se hallen todos los que son tangentes a ellos. La tradición imponía que la solución pudiera dibujarse usando sólo regla y compás. En el caso general, hay ocho soluciones distintas.

Tanto renombre alcanzó Van Ceulen que en muchos países se llegó a conocer π como el número ludolfino. Fue tal el cariño que tomó Van Ceulen a su número favorito que pidió que fuera grabado en su tumba, en la ciudad de Leiden. El testimonio directo de tan arrebatador deseo acabó perdiéndose, ya que durante la Segunda Guerra Mundial la tumba fue destruida. En el capítulo 5 se ilustra el túmulo actual, con los dígitos reluciendo sobre la piedra, ya que fue reconstruida en el año 2000; la perseverancia de Van Ceulen merecía alguna clase de galardón.

Willebrord Snel van Royen (1580-1626), denominado Snell o Snellius, alumno de Van Ceulen, es conocido sobre todo como el descubridor en Occidente de las leyes de la refracción. Como matemático también atacó el cómputo de π, con 35 dígitos correctos, que fueron publicados en 1621 en su *Cyclometricus*. El método que empleó para alcanzar el resultado supone una sensible mejora con respecto al de Arquímedes. Los refinamientos de cálculo de Snell serían más tarde justificados por el gran Christiaan Huygens (1629-1695).

En 1630, Christoph Grienberger (1561-1636), un jesuita austriaco conocido como astrónomo, batió el récord de dígitos de π, llegando hasta los 39. La posteridad lo ha recordado otorgándole una recompensa postmortem distinguida, ya que un cráter lunar lleva su nombre. Nada mejor para honrar la memoria de alguien cuya condición sacerdotal le impedía ambicionar recompensas de este mundo, y muy apropiado, además, para un astrónomo.

Con ellos llegó el escándalo... y el análisis

Los nombres de Gottfried Leibniz y de Isaac Newton han alcanzado la inmortalidad en el terreno de la ciencia, ya que son los creadores del análisis infinitesimal, para muchos estudiantes un maldito enredo forjado a base de derivadas e integrales. Leibniz y Newton llevaron a los matemáticos al paraíso, puesto que domesticaron el infinito, o mejor aún, les enseñaron cómo pasar de lo finito a lo infinito y cómo regresar del viaje cargados de resultados bajo el brazo. Muchos, como el clarividente y visionario Arquímedes, rondaron por ese camino; Leibniz y Newton anduvieron por él, lo pisaron y nos mostraron el modo de entrar y salir del laberinto de lo desconocido.

Series de potencias e integrales son el inmediato resultado de aplicar a la matemática las técnicas del análisis. Calcular π ya no es una simple cuestión de medición de polígonos, sino que ahora es ya una cuestión matemática, donde intervienen, sobre todo, «las pequeñas células grises», como diría Hercules Poirot.

A partir de ahora ignoraremos las aproximaciones a π del mundo oriental, salvo que lo justifique el número de dígitos alcanzado o el desarrollo de un procedimiento muy innovador.

Newton y Leibniz mantuvieron en vida una polémica poco edificante en cuanto al origen del desarrollo del cálculo, y puede decirse que con ellos llegó el escándalo. Nosotros prescindiremos de la disputa y nos centraremos en los resultados.

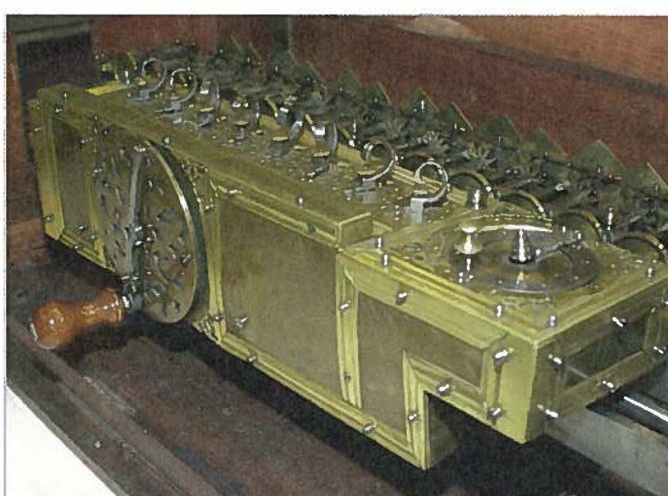
Hacia 1665, en pleno incendio de Londres, el cerebro de *sir* Isaac estaba, al parecer, desocupado, pues un año después se excusó de haber dedicado

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Resumir en un espacio limitado los rasgos más importantes de una personalidad tan heterogénea como la de Leibniz no es una tarea sencilla. Por poner un ejemplo, diremos que su obra completa, en proceso de publicación, ocupa ya 25 volúmenes y se calcula que el total de páginas que se deben examinar es de unas 200.000. Esta mente privilegiada nació en Leipzig y dedicó sus actividades a campos tan dispares como la abogacía, la diplomacia, la lógica matemática, la religión, la historiografía, el orientalismo, la aritmética binaria, la ética, la física, la biología, la ingeniería y, quizá su aportación más importante, el cálculo infinitesimal e integral.

Creador de la primera revista científica

Leibniz fue un niño prodigio, leyó y asimiló inmensamente y vivió, al parecer con holgura, de la jurisprudencia y la diplomacia. Creó la primera revista científica de la historia, el *Acta eruditorum*, en la que publicó algunos, aunque no todos, sus descubrimientos e investigaciones. Siempre estuvo dotado de un sexto sentido para la notación de las cosas, y a él se deben, entre otros, signos tan extendidos como el de integal ($\int$) o el de diferencial (*dx*), y expresiones como «fuerza viva». Parte de su vida transcurrió envuelta en una desagradable polémica con los partidarios de Newton (con el gran Newton detrás) sobre la paternidad del descubrimiento del cálculo, saldada hoy día por la creencia en la independencia y casual coincidencia en el tiempo de dicha concepción. Del Leibniz matemático hay que retener también que hizo contribuciones muy importantes a la lógica matemática, los autómatas, el sistema binario de numeración y la topología, que él llamaba *analysis situs*.



En 1673, Leibniz inventó una calculadora capaz de realizar las cuatro operaciones aritméticas fundamentales. Construyó un ejemplar funcional al año siguiente.

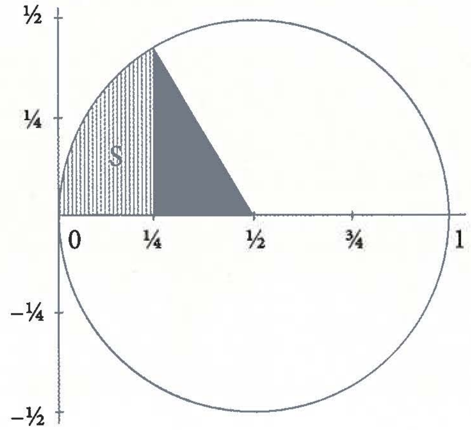
ARCHIVO RBA

cierto tiempo al cómputo de π tan sólo porque «no tenía nada más que hacer en ese momento». Excusas aparte, Newton partió de la fórmula binomial y descubrió la serie

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \dots\right),$$

con la cual calculó 16 dígitos exactos de π. Como en muchos otros casos, *sir* Isaac no le concedió mucha importancia al hecho, no lo incluyó en ningún libro y el resultado se ha publicado póstumamente.

Siempre es interesante seguir los pasos de un genio, así que seguiremos a Newton.



El área del sector circular, rayado en la imagen, vale π/24, dividiendo el área del círculo por 6; si se le resta el área triangular, que vale $\sqrt{3}/32$, nos queda la superficie del trozo de círculo que hemos señalado con una S; la ecuación de la circunferencia en la posición dibujada es

$$y^2 + x^2 = x,$$

que puede ponerse en la forma $y^2 = x(1-x)$ o $y = \sqrt{x(1-x)} = x^{½}(1-x)^{½}$. Aplicando las armas del cálculo integral que el propio Newton inventó tenemos:

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \dots\right)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128} - \dots\right)dx.$$

A partir de ahí, ya es sólo cuestión de integrar término a término y de tener un poco de habilidad con los números... o de ser Newton.

SIR ISAAC NEWTON (1642-1727)

Tal vez se le conozca más como físico y matemático, aunque Newton fue un personaje polifacético: alquimista, teólogo, político, astrónomo y, seguramente, estudioso de alguna que otra disciplina más. En cualquier caso, es uno de los científicos más importantes de la historia. Su obra principal, *Philosophiae naturalis principia mathematica (Principios matemáticos de filosofía natural)*, se publicó en 1687 sobre todo por presiones de sus allegados, hecho que demuestra de algún modo el perfil esquivo y poco comunicativo de Newton. Sus dos aportaciones científicas más conocidas, la ley de la gravitación universal (la leyenda quiere que la descubriera a partir de la caída de una manzana en su huerto) y el cálculo infinitesimal, figuran en ese libro. Entre sus contribuciones a la física figuran en primer lugar la teoría de los colores y la difracción, el primer telescopio funcional y la teoría corpuscular de la luz. También formuló las leyes de conservación de los momentos y momentos angulares de las fuerzas. En astronomía, estudió con brillantez el movimiento planetario y la naturaleza de las órbitas. En matemática pura, aparte de la introducción del cálculo diferencial e integral que lo domina todo, contribuyó también con muchas series de potencias, el teorema binomial, la teoría de errores y la aproximación a los ceros de las funciones. En los últimos años de su vida, Newton, ya convertido en miembro casi silente del Parlamento (su intervención más recordada fue la solicitud de que se combatiera una corriente de aire que azotaba a la insigne asamblea cerrando una ventana), destinó su energía a la jefatura de la Casa de la Moneda, puesto que le posibilitó enviar a la horca a varios falsificadores. Siempre pensó que sus descubrimientos alquímicos y teológicos (era, secretamente, un medio hereje monofisita) le sobrevivirían. Casi deificado en vida, una vez muerto y enterrado en la catedral de Westminster pareció despertarse la veda de su glorificación sin límites. Es explicable si se tienen en cuenta sus métodos.

Su compatriota Abraham Sharp (1651-1742), usando la siguiente equivalencia del astrónomo Edmund Halley (1656-1742),

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3},$$

que hoy se estudia en trigonometría elemental, así como un importante resultado del también británico James Gregory (1638-1675),

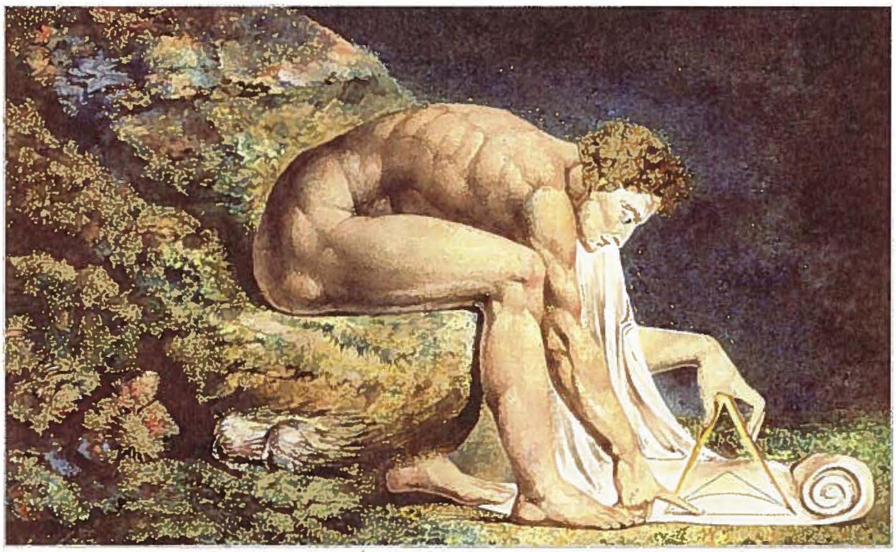
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

obtuvo una serie que hoy escribiríamos del siguiente modo:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k 3^{1/2-k}}{2k+1},$$

y que en 1699 le permitió calcular π con nada menos que 71 decimales correctos. En realidad, Sharp calculó 72, pero el último era incorrecto; se le puede perdonar, pues se supone que Sharp sumó unos 300 términos de su serie.

Digamos, incidentalmente, que en 1667 James Gregory quiso probar, aunque fracasó en el empeño, que la cuadratura del círculo era imposible.



Isaac Newton en un cuadro de William Blake (1757-1827). Del gran científico y de su influencia dan una idea los versos de Alexander Pope (1688-1744): «La naturaleza y sus leyes permanecían ocultas en la noche; Dios dijo "Hágase Newton" y todo fue luz».

Unos años más tarde, en 1706, John Machin (hacia 1686-1751), un profesor de astronomía que llegó a ser secretario de la Royal Society, dedujo y dio a conocer la fórmula que lleva su nombre:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{239}.$$

Para llegar a formularla siguió los siguientes pasos:

$$\tan \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1 + \tan 4\alpha} = \frac{1}{239}.$$

ARCHIVO RBA

JAMES GREGORY (1638-1675)

Es preciso no confundir a James Gregory con su sobrino, David Gregory (1659-1708), también matemático, amigo de Newton y uno de los introductores del símbolo π. James es mencionado en la historia de la astronomía como el inventor de un eficaz telescopio reflector y por su aportación al análisis matemático de las series de potencias de las funciones trigonométricas, sen x, cos x, tan x, y sus correspondientes funciones inversas, arc sen x, arc cos x y arc tan x. Descubierta primero por el indio Madhava de Sangamadrama, la serie llamada de Gregory, o de Gregory-Leibniz, puede escribirse de la siguiente forma:

ARCHIVO RBA

$$\theta = \tan\theta - \left(\frac{1}{3}\right)\tan^3\theta + \left(\frac{1}{5}\right)\tan^5\theta - \dots$$

y converge (es decir, es válida) entre π/4 y −π/4. Gregory fue de los primeros especialistas en sospechar que la cuadratura del círculo era imposible.

Y de ahí resulta la igualdad buscada al averiguar la función inversa, puesto que

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\ \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \arctan\frac{1}{239}.$$

A partir de su fórmula, combinándola con expresiones conocidas como

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

se deducen series de convergencia rápida con las que Machin calculó π hasta la centésima cifra. Sin duda, el gran mérito de Machin es su fórmula, trigonométrica en la forma, pero que permite una rápida conversión en series. Cuando hablemos, más adelante, de Zacharias Dase, veremos alguna curiosidad relacionada con Machin.

En la actualidad, las fórmulas de tipo Machin son instrumentos consagrados y han alcanzado un desarrollo independiente importante; Machin fue quien abrió la puerta.

En el tomo 9 de la primera edición de *L'Encyclopédie*, debida a los buenos oficios de Denis Diderot, figura Thomas Fantet de Lagny (1660-1734), un profesor de hidrografía y matemático que calculó en 1719 la friolera de 112 cifras de π, y cuyo elogio fúnebre mereció ser redactado nada menos que por Fontenelle. El francés utilizó la misma serie de potencias que Sharp.

En realidad, De Lagny calculó 127 decimales, pero sólo las 112 primeras cifras eran correctas, como comprobó el militar y matemático esloveno Jurij Vega, o Veha, (1754-1802). En alemán se le conoce por barón Georg von Vega, pues al final de su vida la Austria imperial le concedió un título nobiliario, aunque ello no le ahorró un destino muy plebeyo, ya que fue asesinado para robarle el dinero y el reloj. En 1794, Vega utilizó una fórmula de tipo Machin, deducida ya por Euler, para averiguar 137 dígitos exactos de π, esta vez sin errores. La fórmula era

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan\frac{1}{7} + 2 \arctan\frac{3}{79}.$$

Entre 1760 y 1800 se produjeron en paralelo algunos hechos que vale la pena reseñar. Así, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), creador de la geometría hiperbólica, demostró en 1761 o 1767 (la fecha es incierta) que π es irracional, mientras que Adrien-Marie Legendre (1752-1833), llegó a la conclusión de que π^2 también lo es. Pero quizá lo más relevante es el hecho de que el gran Leonhard Euler (1707-1783), además de deducir serie tras serie acerca de π, sugiriera que se trata de un número trascendente ¡antes

UN DESAFÍO IRRESISTIBLE

Thomas Fantet de Lagny (1660-1734), matemático nacido en la ciudad francesa de Lyon, ha conquistado su pequeña cuota de inmortalidad histórica con dos hazañas de naturaleza matemática: la primera fue el cálculo de 112 cifras correctas de π, que en su día constituyó la mejor marca mundial en este peculiar deporte científico; la segunda, menos importante y quizás apócrifa, aconteció en el momento de abandonar este mundo. Se cuenta que su colega Maupertuis fue a visitarlo en su lecho de muerte y se encontró con lo que aparentemente era ya un cadáver, pues no daba señales de vida. Para asegurarse del todo, Maupertuis murmuró en voz baja «¿Cuál es el cuadrado de 12?», tal vez a sabiendas de que no hay alma numérica que pueda resistirse a tal desafío. El presunto cadáver casi saltó del lecho respondiendo con un estentóreo «¡144!»... y expiró a continuación.

Billete de banco de 50 tólar eslovenos con la imagen de Jurij Vega en el anverso, junto con esquemas de geometría y las fases lunares. En el reverso, a la izquierda de la imagen del Sistema Solar se encuentra la fachada de la Academia de las Ciencias de Liubliana.

incluso de que Joseph Liouville (1809-1882) probara, en 1840, que los números trascendentes existen y encontrara el primero!

Hemos apartado deliberadamente a Euler de la carrera de decimales de π, ya que nunca consiguió un récord y no se trata de elaborar aquí una lista interminable. Y aunque es de suponer que no se dedicó a buscarlos, sí que podemos apuntar que el matemático suizo, usando sus propios conocimientos de las fórmulas de Machin, calculó en cierta ocasión 20 decimales de π ¡en una hora!

En 1841, William Rutherford (1798-1871) se basó en una fórmula de Machin,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \tan \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \tan \frac{1}{70} + \operatorname{arc} \tan \frac{1}{99},$$

ARCHIVO RBA

para obtener 208 dígitos, de los que 152 eran correctos. En 1853 volvió a la carga, ahora con la fórmula de Machin de toda la vida, y estableció un récord de 440 cifras.

Johann Martin Zacharias Dase, o Dahse (1824-1861), ocupa un lugar muy especial en la historia de la matemática. Un amigo suyo, L. K. Schulz von Strassnitzky (1803-1852), le proporcionó la siguiente fórmula de Machin

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8},$$

y Dase calculó π en 1844 con 200 decimales. Lo asombroso es que lo hiciera de memoria, en tan sólo dos meses. Era un hombre dotado de una capacidad increíble para el cálculo, la versión humana más parecida a un ordenador. El propio Gauss, el matemático más célebre de su época, recomendó a las autoridades que contrataran a Dase para calcular por horas. De hecho, existía una subvención para elaborar una lista de los divisores de los números N tales que $7.000.000 < N < 10.000.000$, y Dase emprendió el encargo, aunque falleció sin llegar a terminarlo. Por otra parte, se trataba del perfecto ejemplar de *idiot savant*, dotado milagrosamente para los números, capaz de derroches de memoria increíbles y bastante poco inteligente para lo demás. Por ejemplo, podía multiplicar en menos de un minuto dos números de ocho cifras. Con 100 cifras tardaba algo más, unas nueve horas. Gozaba de una memoria casi fotográfica para contar cosas, ya fueran ovejas, letras o fichas de dominó. En este sentido, el escritor y científico Arthur C. Clarke

JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

Matemático, astrónomo y médico alemán, fue el inventor de los primeros higrómetro y fotómetro operativos. Fue también el primero en demostrar que π es un número irracional, aunque ésta no fue su única contribución a las matemáticas. Estudió las funciones hiperbólicas y las conectó con la geometría no euclidea. También son notables sus aportaciones cartográficas, como la proyección que lleva su nombre. De origen muy humilde, fue autodidacta a la fuerza, aunque nada modesto a la hora de valorar sus propios méritos. Tras ser nombrado miembro de la Academia de Berlín por Federico II, el rey le preguntó en cierta ocasión en qué ciencias era versado. «En todas» fue la respuesta, lo cual era cierto. El rey prosiguió con cierta sorna: «Así que ¿también sabe usted de matemáticas?». «También» fue la veraz respuesta. Federico II, ya un tanto molesto prosiguió: «¿Y quién fue su maestro?». «Yo mismo, señor», y también era cierto. Ya receloso, el monarca recurrió a la ironía: «¡Hombre!, henos aquí ante otro Pascal». «Por lo menos», fue la respuesta final. Su demostración de la irracionalidad de π no es complicada de entender y es bastante ingeniosa. Lambert probó (ésa es la parte difícil de la demostración), usando fracciones continuas, que si x es un racional no nulo, $\tan x$ es irracional. Como $\tan \pi/4 = 1$, que es racional, $\pi/4$ y, por tanto, π deben ser irracionales.

¿QUÉ ES UN NÚMERO TRASCENDENTE?

Un número se denomina algebraico si es una solución de una ecuación polinómica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

con coeficientes a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, todos ellos números racionales. En matemática superior se demuestra que todo número constructible según las reglas del juego (es decir, usando sólo regla y compás un número finito de veces) es un número forzosamente algebraico. Un número no algebraico se denomina trascendente. Es obvio, pues, que un número trascendente no es constructible.

se preguntaba, en una carta al paleontólogo Stephen Jay Gould, qué utilidad podía tener para la evolución de la especie la capacidad de calcular mentalmente 200 cifras del número π. No conocemos la respuesta.

En 1847, el astrónomo y matemático autodidacta danés Thomas Clausen (1801-1885), aplicando dos fórmulas de Machin,

$$\frac{1}{4}\pi = 2 \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{7},$$

$$\frac{1}{4}\pi = 4 \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{239},$$

llegó hasta las 248 cifras exactas. También erró en sus cálculos, pero lo hizo muy cerca del final, ya que Clausen calculó en realidad 250 cifras.

En el año 1853, su colega alemán Jacob Heinrich Wilhelm Lehmann (1800-1863) alcanzó las 261 cifras exactas y se ganó la fama matemática y la inmortalidad también al ser bautizado con su nombre un cráter lunar. Al año siguiente, el profesor alemán Richter llegó a los 330, posteriomente a los 400 y, por último, a los 500 dígitos.

El matemático aficionado inglés William Shanks (1812-1882) dedicó su vida al cálculo y, aparte de otras constantes numéricas, llegó en 1875 a las 707 cifras de π, hazaña que figura en un célebre friso del Palais de la Découverte de París. Pero dicho homenaje obligó al museo a llevar a cabo una costosa modificación del friso, construido en 1937, ya que, tal como demostró D. F. Ferguson y publicó en 1946 en la revista *Nature*, sólo las 527 primeras eran correctas. El hecho de que la cifra 7 apareciera con demasiada frecuencia incitaba a la sospecha, tal como lo había advertido Augustus de Morgan (1806-1871).

Al igual que muchos otros enfrentados a cálculos enormes, Shanks cometió errores y, falto de referencias, creyó que sus dígitos eran correctos. Hay que pensar que en su tiempo se carecía de calculadoras y ordenadores, y todos los cálculos se hacían sobre papel, en inmensas hojas que acababan repletas de números. En el Palais de la Découverte ya pueden contemplarse las cifras rectificadas, lo que no es ninguna concesión, sino un auténtico homenaje al error explicable. Hoy se han encontrado los lugares precisos donde se equivocó Shanks, que no calculó π de una sola vez, sino por fases.

No debe quedar en el tintero la aportación de Ferguson, la última que mencionamos aquí justo antes de entrar en la era de la computación: en el año 1947 publicó 808 dígitos de π, empleando para ello un año de tiempo, una calculadora mecánica, mucha paciencia y la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 3\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{20} + \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{1985}.$$

En 1882, el alemán Lindemann echó un jarro de agua fría sobre el entusiasmo de los buscadores de dígitos de π al probar que éste no es un número algebraico y, por tanto, no es constructible. Lindemann fue quien demostró la trascendencia de π, y es preciso puntualizar que en tal demostración, propuesta en una memoria con unas cuantas y densas páginas, no emplea para nada la geometría. De este modo, π salía por completo de su marco geométrico, y lo hacía precisamente el día en que se demostraba su trascendencia.

La demostración original de Lindemann se asienta sobre los mismos moldes que la que unos años antes utilizó Charles Hermite (1822-1901) para demostrar la trascendencia del número *e*, otra constante famosa. Lindemann llegó a la conclusión de que una combinación lineal de potencias de *e* a coeficientes algebraicos A_k y exponentes algebraicos B_k (reales o complejos),

$$A_1e^{B_1}+A_2e^{B_2}+...+A_ne^{B_n} = 0,$$

era imposible (salvo para todos los $A_k = 0$). Como la conocida fórmula de Euler puede escribirse

$$e^{\pi i}+1 = e^{\pi i}+e^0 = 0,$$

satisface las condiciones de Lindemann ($A_1 = A_2 = 1$, $B_1 = \pi i$, $B_2 = 0$) y, por lo tanto, πi no puede ser algebraico, y π, tampoco. Y si π no es algebraico, es trascendente. Y si es trascendente, no es construible. Después, como es natural, vinieron otras demostraciones cada vez menos complicadas, pero bastó con la primera para expulsar a π del paraíso de lo desconocido. Antes de Lindemann se sabía que la trascendentalidad de π implicaba la imposibilidad de la cuadratura del círculo, y la prueba de Lindemann acabó para siempre con este problema legendario. La cuadratura del círculo era imposible. □

CAPÍTULO 2

La infinita insignificancia, y trascendencia, de π

«El rostro de Pi estaba enmascarado; se sobreentendía que nadie podía contemplarlo y continuar con vida. Pero unos ojos de penetrante mirada acechaban tras la máscara, inexorables, fríos y enigmáticos.»

BERTRAND RUSSELL

En la ilustración de la izquierda, un alquimista del siglo XVI trata de demostrar la cuadratura del círculo. En la antigua Grecia ya existían científicos que pretendían descubrir la cuadratura del círculo, un fenómeno del que hoy nadie en la comunidad científica duda de su imposibilidad.

AGE FOTOSTOCK

Hasta ahora hemos seguido, cifra a cifra, la carrera de π en busca de su propia trascendencia, que acabó cuando Lindemann lo puso en su lugar. Ahora ya sabemos que π es trascendente y no construible, y que, por tanto, la cuadratura del círculo es una entelequia.

Para comprender bien la magnitud e importancia de π en el mundo de las matemáticas se impone una excursión por el proceloso mundo del infinito. Es éste un universo aparte, muy extenso e intrincado, lleno de cuestiones a medio camino entre la filosofía y el mundo real; un lugar un tanto insólito incluso en ese reino de lo extraño que son a veces las matemáticas superiores, de modo que simplificaremos el infinito al máximo. Intentaremos tratarlo amigablemente, sin adentrarnos en aguas profundas. Con todo, una excursión matemática por el infinito no es algo trivial, sino que cuesta cierto esfuerzo y puede resultar una excursión a ratos aburrida y descorazonadora.

Hecha esta advertencia, empezaremos la excursión por el infinito con una pregunta que parece casi absurda: ¿Qué es un número? Para responderla empezaremos remontándonos al origen de la idea de número.

Números y conjuntos

En la base de casi todas las nociones elementales se encuentran los conjuntos, simples colecciones de cosas que, por comodidad, indicaremos poniéndolos entre llaves y separándolos por comas. Por ejemplo,

$$A = \{a, b, c, d\}$$

indicará aquel conjunto o colección A formado por a, b, c y d. En lugar de letras pueden figurar animales, objetos, personas, instrumentos musicales o pecados capitales; da igual. Adoptaremos el punto de vista más sencillo posible, que los expertos califican de ingenuo, y admitiremos que un conjunto es una colección de cosas llamadas, para entendernos, «elementos del conjunto».

Los conjuntos pueden coordinarse, que es como se acostumbra a denominar a la operación de ponerlos en correspondencia uno-a-uno. Por ejemplo, los conjuntos

{*a*, b, *c*} y {*Napoleón*, ♣, *el autor de este libro*}

son coordinables, ya que pueden ponerse en correspondencia uno-a-uno sin que quede ni a un lado ni a otro un elemento suelto. En cambio, los conjuntos

{*a*, *b*} y {*Napoleón*, ♣, *el autor de este libro*}

no pueden coordinarse, pues por mucho que nos esforcemos siempre quedará a la derecha un elemento que no se corresponde con ninguno del otro lado. La definición de número, por tanto, guarda relación con los conjuntos.

Un método moderno de definir de modo recursivo el concepto de número podría ser:

$$
\begin{gathered}
1 = \{0\} \\
2 = \{0, 1\} \\
3 = \{0, 1, 2\} \\
4 = \{0, 1, 2, 3\} \\
5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \\
\ldots \\
n = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1\} \\
\ldots
\end{gathered}
$$

Diremos que «un conjunto A tiene n elementos» cuando A puede coordinarse o ponerse en correspondencia uno-a-uno con n. Así, diremos que el conjunto de los jugadores de un equipo de fútbol tiene 11 elementos, o que el conjunto de los apóstoles tenía 12. El conjunto 11 es, según la lista que hemos escrito,

$$11 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

y no cabe duda de que puede ponerse en correspondencia uno-a-uno con cualquier conjunto de jugadores de fútbol.

¿Y dónde está el cero, que nos ha quedado por definir? ¿Cuándo decimos que algo tiene 0 elementos? En la teoría «ingenua» o elemental de los conjuntos, un conjunto es una colección de cosas. Por lo tanto, entre las colecciones de cosas se encuentran las colecciones vacías, aquellas que no albergan nada en su interior. Son como cajas... vacías.

No hay que confundir el conjunto vacío con la nada, ese objeto metafísico propio de debates filosóficos. El conjunto vacío es precisamente aquel dentro del cual no hay nada. Es un conjunto que no tiene elementos, pero no es la nada.

Para designar un conjunto tal (sólo hay uno, puesto que todos los conjuntos vacíos son iguales), el matemático francés André Weil (1906-1998) sugirió la letra danesa Ø. Weil conocía bien los alfabetos nórdicos, pues durante la Segunda Guerra Mundial fue encarcelado en Finlandia.

Designemos con el símbolo Ø el conjunto vacío, aquel que carece de elementos. Puede definirse de muchos modos, absurdos o divertidos, como

$$\emptyset = \{\textit{vacas voladoras}\}.$$

Definimos el cero como

$$0 = \emptyset,$$

y decimos que un conjunto «tiene 0 elementos» si es posible ponerlo en correspondencia con el conjunto 0.

El *número de elementos de* un conjunto A se indica escribiendo delante del conjunto el símbolo #. También se acostumbra a denominar *cardinal de* A a tal concepto, de modo que

$$\textit{Número de elementos de } A = \textit{Cardinal de } A = \#A.$$

En general, se distingue entre conjuntos finitos e infinitos y se suele reservar la expresión «número de elementos» para conjuntos finitos. Así que los conjuntos finitos pueden tener 6, 241 o 123.456.789.012 elementos.

Los conjuntos finitos presentan una característica peculiar: su cardinal es mayor que el de cualquiera de sus partes. Si A tiene, pongamos por caso, 7 elementos, cualquier trozo de A tendrá menos de 7. Si

$$A = \{\textit{enanitos de Blancanieves}\},$$

entonces $\#A = 7$; cualquier subconjunto o grupo parcial de enanitos B cumplirá que $\#B < \#A$ y tendrá menos de 7 enanitos. Esto que parece trivial es lo que distingue realmente a los conjuntos finitos de los infinitos: en un conjunto infinito, una parte del conjunto total puede tener el mismo cardinal que el conjunto original. Por sorprendente que nos parezca, hay partes efectivas del todo que tienen el mismo número de elementos que el todo.

Consideremos el infinito más sencillo, el formado por todos los números enteros positivos, o «naturales»,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,\ldots\},$$

al que los especialistas llaman $\mathbb{N}$ porque es la inicial de natural. $\mathbb{N}$ es la denominación del conjunto de los números naturales.

Vemos con sorpresa que una parte de $\mathbb{N}$, los números pares, resulta ser coordinable con el propio $\mathbb{N}$:

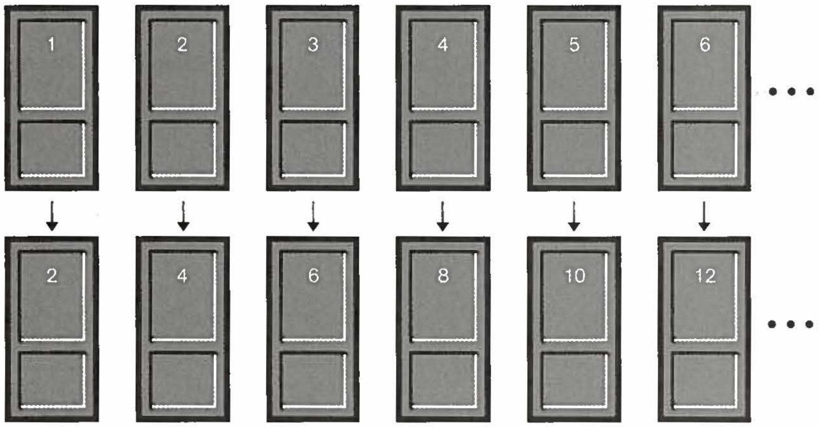
$$\begin{array}{ccc}
0 & \longleftrightarrow & 0 \\
1 & \longleftrightarrow & 2 \\
2 & \longleftrightarrow & 4 \\
3 & \longleftrightarrow & 6 \\
4 & \longleftrightarrow & 8 \\
5 & \longleftrightarrow & 10 \\
6 & \longleftrightarrow & 12 \\
7 & \longleftrightarrow & 14 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\#\{\textit{números pares}\} = \#\mathbb{N}.$$

EL HOTEL DE LAS INFINITAS HABITACIONES

Como ejemplo de esa situación muchos matemáticos explican la paradoja de un hotel de infinitas habitaciones, ideada por el matemático alemán David Hilbert, y que más o menos reza del siguiente modo. Existía un hotel regido por un propietario chino al que no asustaban las aglomeraciones. Para que nadie se confundiera, las habitaciones estaban numeradas, empezando por el 1 y siguiendo un orden creciente. Era temporada alta, así que el hotel estaba lleno y el hotelero, feliz, con todas las plazas ocupadas. Pero de repente le llegó un mensaje alarmante de un *tour-operator* chino: una avalancha de compatriotas suyos iba a llegar al día siguiente y no se les podía dejar sin alojamiento. Por otra parte, tampoco se podía desalojar a los huéspedes residentes. ¡Solución!: el hotelero, hombre conocedor de las matemáticas, pidió a los residentes actuales que se trasladaran a la habitación cuyo número fuera el doble del que figuraba en su puerta, como se muestra en la ilustración.



Ya volvían a quedar infinitas habitaciones vacías, de modo que los huéspedes recién llegados pudieron alojarse en ellas. El hotelero del hotel con infinitas habitaciones siguió administrándolo feliz, satisfecho de sus conocimientos sobre el infinito.

Una parte de algo infinito también puede ser infinita e incluso tener el mismo cardinal.

Números naturales, números racionales, números algebraicos

El ser humano vivió muchos años, incluso siglos, de espaldas al infinito. De tal indiferencia le libró un matemático alemán, de gran categoría e intelecto extraordinario, aunque un tanto excéntrico; se llamaba Georg Cantor.

Los conjuntos finitos tienen por cardinal uno de los números naturales. Los conjuntos infinitos tienen cardinales mucho mayores, de envergadura

GEORG CANTOR (1845-1918)

Este matemático alemán de origen ruso está considerado como una de las mentes más brillantes de la historia. Se le reconoce como el padre y creador de la moderna teoría de conjuntos y del álgebra transfinita. Sus ideas innovadoras le reportaron muchos y poderosos enemigos, lo que limitó en gran medida su progreso académico. Las continuas depresiones que Cantor padecía —murió en un hospital psiquiátrico— tal vez fueran inducidas por la imposibilidad de probar algunas de sus hipótesis. Hoy sabemos que las respuestas a algunas de las principales incógnitas de Cantor son imposibles de encontrar, y determinados modelos de sus demostraciones sólo pueden calificarse de geniales.

infinita. De hecho, los especialistas los llaman cardinales «transfinitos», lo que significa, literalmente, que están más allá de lo finito. El menor, el primero de todos los cardinales transfinitos es #ℕ, cardinal al que Cantor bautizó como $\aleph_0$. Corresponde al cardinal del conjunto de los números naturales; por tanto,

$$\#\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\} = \#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

Esta aparente rareza necesita una explicación: el símbolo $\aleph$ (se lee *aleph*) es la primera letra del alfabeto hebreo. El cero que aparece como subíndice indica que se está hablando del menor de todos los aleph (aleph cero). Porque, desde luego, hay más números aleph, todos ellos con su subíndice:

$$\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \ldots$$

El cardinal $\aleph_0$ numera de algún modo los conjuntos que pueden coordinarse con ℕ. Por ejemplo, los números pares, los impares, los múltiplos de 3, los múltiplos de 5 y otros muchos. A los conjuntos coordinables con ℕ los llamaremos «numerables», ya que se pueden numerar o contar, como los que se muestran a continuación:

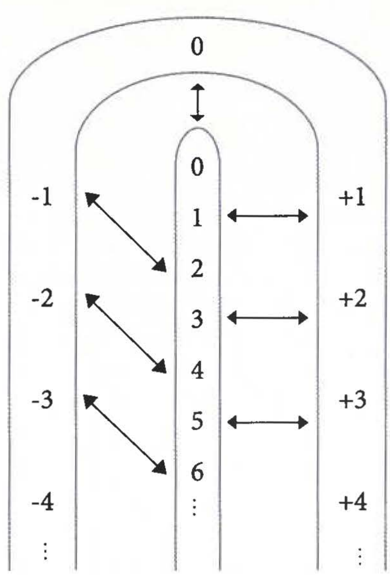
ARCHIVO RBA

$0 \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow 1$	$0 \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow 0$
$1 \longleftrightarrow 2$	$1 \longleftrightarrow 3$	$1 \longleftrightarrow 3$	$1 \longleftrightarrow 5$
$2 \longleftrightarrow 4$	$2 \longleftrightarrow 5$	$2 \longleftrightarrow 6$	$2 \longleftrightarrow 10$
$3 \longleftrightarrow 6$	$3 \longleftrightarrow 7$	$3 \longleftrightarrow 9$	$3 \longleftrightarrow 15$
$4 \longleftrightarrow 8$	$4 \longleftrightarrow 9$	$4 \longleftrightarrow 12$	$4 \longleftrightarrow 20$
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$

Pero hay muchas sorpresas: al conjunto infinito

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

los matemáticos lo denominan «conjunto de los números enteros», y $\mathbb{N}$ es una parte de $\mathbb{Z}$. Todo número natural es entero, eso está claro por lo que a conjuntos se refiere. Pero ¿y en cuanto a los cardinales? ¿Cuál es el cardinal de $\mathbb{Z}$? Si observamos la figura



resulta que $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0$, por lo que también $\mathbb{Z}$ es numerable.

Ahora daremos un paso más: nos centraremos en el conjunto de las fracciones, los llamados en ocasiones «números quebrados». Una fracción se expresa con numerador y denominador, en la forma *a*/*b*. Cuando *a* es múltiplo de *b*, la fracción *a*/*b* se denomina entera, y la fracción se suele identificar con un número entero *c*, el resultante entero, sin resto, de efectuar la división de *a* por *b*:

$$a/b = c.$$

De hecho, pueden identificarse varias fracciones con el mismo número:

$$756/378 = 524/262 = 6/3 = 2.$$

Aunque, evidentemente, existen otras que, como 1/2 o 5/3, no son enteras. Hay más fracciones que enteros, pues todo entero es representable con alguna fracción. Tenemos pues,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \{fracciones\}.$$

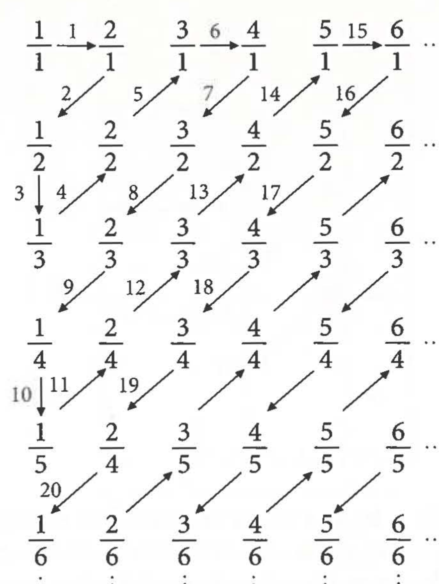
El símbolo $\subset$ significa «incluido estrictamente en»; es como una especie de signo < pero entre conjuntos, no entre números.

Se acostumbra a designar el conjunto de fracciones con la letra $\mathbb{Q}$, y se verifica que $\mathbb{Z}$ es una parte de $\mathbb{Q}$. Por tanto, si se prefiere,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Podría esperarse que el cardinal de $\mathbb{Q}$ fuera mayor que el de $\mathbb{Z}$, pero ya se sospecha que en el infinito ocurre con frecuencia lo inesperado.

Cantor «numeró» las fracciones de un modo sinuoso, tan zigzagueante como sutil, e ideó un gráfico parecido a éste:



No cabe duda de que en él se encuentran todas las fracciones, pues en cada fila están todos los numeradores posibles, y en las columnas, todos los denominadores. Si se busca un número de la forma *a*/*b*, se encuentra con facilidad yendo a la columna *a* y fila *b*. Y tampoco cabe duda de que a cada fracción (es decir, a cada número racional) le corresponde una secuencia de flechas, una detrás de otra, que va hasta él. Tan sólo basta numerar las flechas (1, 2, 3, 4, 5...) para llegar al resultado:

$$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

Demos un paso más. Se dice que un número es algebraico cuando es solución de alguna ecuación polinómica,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

con coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, todos ellos números racionales.

Existe una gran cantidad de números algebraicos, y, de hecho, todo número racional es algebraico. En efecto, si se toma un número racional cualquiera, a/b, la ecuación

$$x - a/b = 0$$

tiene como solución $x = a/b$, y sus coeficientes son racionales: $a_1 = 1$ *y* $a_0 = -a/b$.

Aunque hay muchos otros números algebraicos: el número $\sqrt{2}$, por ejemplo, además es irracional y cumple la ecuación $x^2 - 2 = 0$; por tanto, se trata de un número algebraico. Incluso un número tan conocido como la razón áurea, F, es un número algebraico al satisfacer la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

En 1874, Cantor todavía era joven y, lo que es más, mantenía su equilibrio mental. En una de sus memorias probó que el conjunto de los números algebraicos, al que llamaremos $\mathbb{A}$, que incluye incluso los números racionales, es un conjunto numerable. Por consiguiente,

$$\#\{\textit{números algebraicos}\} = \#\mathbb{A} = \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

Y cada uno es un conjunto estrictamente mayor que el siguiente:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A}.$$

Llegan los números reales

El universo de los números es muy grande. Hasta ahora hemos visto tan sólo una parte del universo numérico, que, además, se trata de una parte numerable, que se puede contar.

Quizás el mejor modo de hablar de los números sea caracterizarlos por su expresión decimal. Así que pensemos en el conjunto de todos los números decimales y exploremos el terreno palmo a palmo.

Hablando en términos generales, un número decimal como

34.658,124796

no es más que un modo de escribir

$3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} +$
$+ 7 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + 6 \cdot 10^{-6}$,

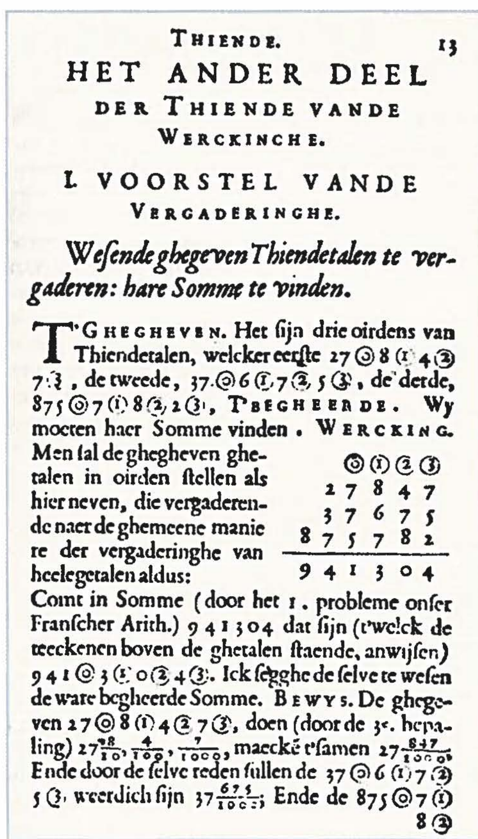
con los números que se encuentran a la izquierda de la coma indicando potencias positivas de 10, y los de la derecha, potencias negativas. Recordemos que

$$a \cdot 10^{-n} = \frac{a}{10^n}.$$

Los decimales son la expresión de los números en base 10, con numeración posicional y el cero. Son sólo un método de escritura, pero magnífico; ¡un gran logro de la humanidad!

SIMON STEVIN (1548-1620)

Este científico holandés, nacido en Brujas, la actual Bélgica, trabajó en campos tan diversos como la ingeniería militar, la música, la física, las matemáticas y la contabilidad. También ha pasado a la historia como el inventor de la contabilidad de doble entrada, una de las grandes aportaciones de la aritmética al avance de la economía y los negocios. Pero su contribución matemática es aún más importante; en su obra *De Thiende (El decimal)*, creó la notación decimal, aunque era tan complicada de llevar al papel que opciones posteriores, como la de John Napier, ganaron la partida.



THIENDE. 13

HET ANDER DEEL
DER THIENDE VANDE
WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE
VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerste 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men sal de gheghevẽ ghetalen in oirden stellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

	⓪	①	②	③
	27	8	4	7
	37	6	7	5
	875	7	8	2
	941	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onser Franscher Arith.) 941304 dat sijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen staende, anwijsen) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick segghe de selve te wesen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegheven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckẽ t'samen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de selve reden sullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich sijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ②

Página de *De Thiende* donde se muestra un ejemplo de la notación decimal, poco adecuada para el uso frecuente, de Stevin. Se indicaban las unidades con un circulito que encerraba un 0; las décimas, mediante otro circulito con un 1; las centésimas, con un 2, y así sucesivamente.

ARCHIVO RBA

Un número decimal puede tener un final o no tenerlo. He aquí un ejemplo de cada caso:

$$1{,}234567890101112131415161718192021223242526...$$

$$127{,}789564.$$

El primero es un decimal de infinitas cifras. El segundo también las tiene, puesto que

$$127{,}789564 = 127{,}78956400000000000000000...$$

De hecho, incluso podemos hallar otro modo más «sofisticado» de escribirlo

$$127{,}789564 = 127{,}78956399999999999999999...$$

No obstante, en estos casos nos referiremos a un decimal de número de cifras finito o de expresión finita. Los números decimales más sencillos son los números naturales ($\mathbb{N}$), pues son positivos y carecen de cifras tras la coma. Luego les siguen los números enteros ($\mathbb{Z}$), que pueden ser negativos, pero que tampoco tienen cifras tras la coma. Los números racionales ($\mathbb{Q}$) los engloban a ambos y tienen una expresión decimal peculiar: los dígitos de un número racional poseen un periodo, es decir, se repiten a partir de un punto determinado. Recordemos que los números racionales son las fracciones o números quebrados, todos ellos de la forma a/b, con a y b como números enteros. Para pasar de esta forma a la expresión decimal hay que dividir a por b, y ¿qué sucede? Pues que el número de restos es como máximo b, y al cabo de b divisiones, los números se repetirán una y otra vez. Esta circunstancia se advierte perfectamente en las fracciones más elementales, como la siguiente,

$$\frac{11}{7} = 1{,}571428571428571428...,$$

en la que el periodo o conjunto de cifras que se repite es siempre 571428. En ocasiones, el periodo es enorme, aunque no por ello el número decimal deja de tener infinitas cifras, sino que están infinitamente repetidas.

Llegados a este punto, la pregunta obligada es: si los decimales periódicos identifican a los números racionales, ¿qué sucede con los decimales que no son periódicos? Pues muy sencillo: si no son periódicos, no son números racionales, sino «irracionales».

Hay muchos números irracionales, desde $\sqrt{2}$ y todas las combinaciones de radicales, como $\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+1}{2}-\sqrt[7]{3}}$, a constantes universales como π. Es lógico preguntarse: «¿Cuántos irracionales hay?»

LA DEMOSTRACIÓN DIAGONAL

El razonamiento de Cantor que llevó a la demostración de la no-numerabilidad de todos los decimales (o sea de $\mathbb{R}$) ha pasado a la historia como muestra de ingenio. Es original y a la vez comprensible. Tan famoso ha llegado a ser que incluso ostenta un nombre propio, el de procedimiento diagonal, razonamiento diagonal o demostración diagonal. Veamos a qué responde el término «diagonal».

Procederemos a efectuar lo que en matemáticas se conoce como «demostración por reducción al absurdo», en la que se parte de una suposición o hipótesis y se demuestra que conduce a una conclusión absurda. Por consiguiente, dicha hipótesis de partida no puede ser cierta.

Aceptemos como hipótesis (que veremos que es falsa) la numerabilidad de los decimales (o números reales). Ya ni siquiera nos planteamos la numerabilidad de todo $\mathbb{R}$, sino sólo los decimales x del intervalo (0,1), es decir, los decimales $0 < x < 1$, que es una parte ínfima de $\mathbb{R}$.

En el caso que nos ocupa, partimos de la suposición de que tenemos los decimales numerados y listados unos debajo de otros, aunque no necesariamente en orden, como aquí se muestra:

$\mathbb{N}$ reales en el intervalo (0, 1)

$1 \leftrightarrow 0{,}835987...$

$2 \leftrightarrow 0{,}250000...$

$3 \leftrightarrow 0{,}559423...$

$4 \leftrightarrow 0{,}500000...$

$5 \leftrightarrow 0{,}728532...$

$6 \leftrightarrow 0{,}845312...$

...

$n \leftrightarrow 0{,}r_1\, r_2 r_3 r_4 r_5 ...\, r_n ...$

Llamemos $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números decimales., es decir, a la suma (o unión) de los números racionales y los irracionales:

$$\mathbb{R} = \{racionales\} \cup \{irracionales\}.$$

Sabemos que el primero de estos conjuntos, $\mathbb{Q} = \{racionales\}$, es numerable; pues bien, Cantor demostró que el conjunto total, $\mathbb{R}$, «no es numerable». Por consiguiente, el conjunto que se encuentra a la derecha tampoco puede serlo. En caso contrario, $\mathbb{R}$ formaría la unión de dos conjuntos numerables y, por consiguiente, también lo sería.

Por fin hemos encontrado algo no numerable, un conjunto $\mathbb{R}$ que no podemos contar, que no podemos numerar y que es indiscutiblemente un infinito mayor que todos los conjuntos infinitos con los que nos habíamos topado hasta ahora.

El conjunto $\mathbb{R}$ se conoce como «conjunto de los números reales».

En la teoría de conjuntos más básica, que se estudia hoy en la escuela, se suelen utilizar diagramas que resumen gráficamente todo lo que llevamos expuesto hasta este momento:

En la lista deben figurar todos los decimales comprendidos entre 0 y 1, de manera que sería una falsedad construir un decimal *n* que no estuviera en la lista. Y en eso se basó Cantor, inventó un nuevo número decimal *D*,

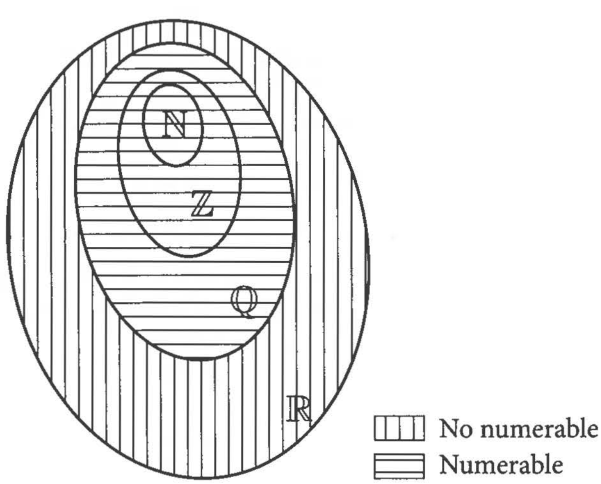
$$D = 0{,}d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5 \ldots\, d_n \ldots,$$

que no estuviera en la lista. Para ello definió para cada *n* una cifra d_n distinta a la que hay en la fila *n*, columna *n*.
¿*d* es distinto del número decimal que corresponde al 1? Sí, pues por construcción, d_1 es distinto a la primera cifra decimal de ese número.
¿*d* es distinto del segundo número decimal de la lista? Sí, porque la cifra d_2 es distinta de la cifra segunda del segundo número decimal.
¿*d* es distinto del tercer decimal de la lista? Sí, porque la cifra d_3 es distinta de la cifra tercera del tercer decimal.
Y lo mismo vale, por construcción, para el cuarto, el quinto... el *n-ésimo* decimal:

$$d_n \neq r_n.$$

D es distinto a todos los números decimales de la lista, luego no está en la lista. Pero ¿no habíamos supuesto que estaban todos? Existe una contradicción con la suposición de partida, que afirmaba que estaban todos los decimales numerados y listados unos debajo de otros. En realidad, ni los teníamos ni los tendremos jamás, pues queda demostrado que el conjunto de todos los decimales no es numerable.

$$\#\mathbb{R} > \aleph_0.$$



Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, interiores a $\mathbb{R}$, son numerables, mientras que $\mathbb{R}$ no lo es. Podría decirse, abusando ligeramente del lenguaje, que casi todos los números son irracionales, con la excepción de los racionales, que forman un infinito menor, un infinito numerable. El número π es irracional, como demostró Johann Heinrich Lambert (1728-1777) en la década de 1760, y pertenece, por tanto, a la mayoría no numerable en la que se engloban casi todos los números decimales. Desde este punto de vista, π no tiene nada de excepcional; es un número real más, además de irracional, como casi todos.

Algebraicos y trascendentes

Anteriormente hemos hablado de los números algebraicos; recordemos que:

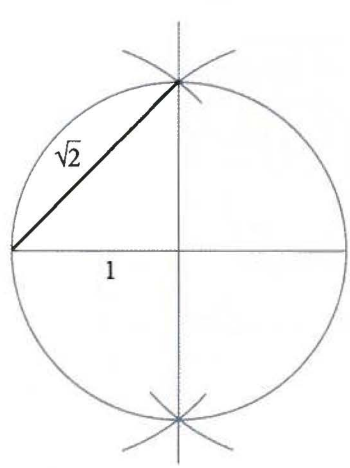
1) Los números algebraicos son aquellos que pueden ser solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes racionales:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0;$$
$$a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_1,\ a_0 \text{ números racionales.}$$

2) Los números algebraicos forman un infinito numerable.

¿Por qué reaparecen ahora? La razón es que todas las construcciones geométricas autorizadas sólo usan regla y compás, y en un número finito de ocasiones; ésas son las reglas del juego y así se generan segmentos un poco peculiares, de medida bastante sencilla.

La exigencia purista griega de usar sólo regla y compás en todas sus construcciones geométricas dio origen a unos segmentos (y, por tanto, a unos números) especiales, llamados «constructibles» o «construibles», que eran los que se podían dibujar. Tomemos como ejemplo un número sencillo, como $\sqrt{2}$; es un número euclideo, que se puede trazar perfectamente con regla y compás, como lo demuestra la figura:



Es el primer número irracional con el que se encontraron los griegos, y es el responsable directo de tal denominación. Además de irracional, $\sqrt{2}$ es constructible y algebraico. Como ya hemos visto, $\sqrt{2}$ es la solución de la ecuación polinómica de segundo grado $x^2 - 2 = 0$.

Los números constructibles son todos algebraicos; veamos por qué. Cuando nos enfrentamos a una construcción geométrica con regla y compás, lo máximo que podemos construir son números de la forma

$$x_1 = a_0+b_0\sqrt{x_0},$$

donde a_0, b_0 y x_0 son racionales. Nos ahorraremos aquí la demostración, no por complicada, sino por laboriosa. El número x_1 es algebraico, pues es solución de una ecuación cuadrática a coeficientes racionales, concretamente

$$x^2\text{-}2a_0x+a_0^2 - b_0^2\,x_0=0.$$

Esta expresión es una ecuación a coeficientes racionales, pues todos lo son: tanto 1, como $-2a_0$ y $a_0^2 - b_0^2\,x_0$ son miembros de $\mathbb{Q}$. Todos los números como x_1 forman lo que se llama «cuerpo», al que denominaremos K_0 y del que se verifica que

$$\mathbb{Q} \subset K_0.$$

Es decir, que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto de K_0. Ambos, $\mathbb{Q}$ y K_0, están formados por números construibles, pero sólo contienen números algebraicos. K_0 es mayor que $\mathbb{Q}$ y lo contiene. Todos los números de K_0 son algebraicos, unos racionales (los de $\mathbb{Q}$) y otros no (los que están en K_0 pero no en $\mathbb{Q}$).

Ahora elegiremos como elemento para construir a

$$x_2 = a_1+b_1\sqrt{x_1},$$

con los a_1, b_1 y x_1 de K_0, y formamos otro cuerpo, mayor aún:

$$\mathbb{Q} \subset K_0 \subset K_1,$$

que también está formado por números construibles y algebraicos. Es evidente que podemos fabricar tantos cuerpos K_n como queramos:

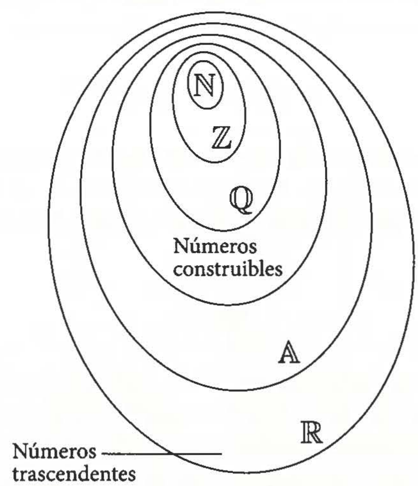
$$\mathbb{Q} \subset K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n.$$

En general, las construcciones geométricas que los caracterizan son ecuaciones de segundo grado (llamadas también cuadráticas) que pueden seguirse unas a otras, pero que, por mucho que lo hagan, acaban dando como resultado la construcción de otros números, que a fin de cuentas son también algebraicos.

Gracias a la llamada geometría analítica inventada por René Descartes en el siglo XVII, toda construcción geométrica es traducible a una ecuación de segundo grado; una construcción complicada puede traducirse en una cadena de ecuaciones de segundo grado, una dentro de la otra.

Pero, por larga que sea la cadena, el resultado es siempre un número construible que, al ser la solución de una ecuación de segundo grado a coeficientes construibles, es algebraico. Utilizando construcciones geométricas no salimos nunca del ámbito de los números construibles y, por tanto, del ámbito algebraico. Todo número construible es algebraico.

No entraremos aquí en la demostración rigurosa y detallada de este hecho, ya que necesitaríamos recurrir a las herramientas de la teoría de Galois, propias de la matemática superior. En forma de diagramas, la situación es la que puede verse en el siguiente gráfico:



En el reino de los números, hasta la cota de los números algebraicos nos movemos en un infinito numerable. Pero ya sabemos que ℝ es un infinito mucho mayor, no numerable, de modo que ℝ sin los números algebraicos, que abarca «casi todo» ℝ, tendrá también un número de componentes transfinito, no numerable.

Los matemáticos llaman a los números no algebraicos (recordemos que son todos los números reales menos los que son algebraicos, es decir, todo ℝ restándole 𝔸) «números trascendentes», ya que, según Euler, tales números «trascienden al poder de los métodos algebraicos». Tal denominación carece, por tanto, de connotaciones filosóficas, pero no alberga ninguna vaguedad ni indefinición: un número trascendente es simplemente aquel que no es solución de ninguna ecuación de tipo polinómico y con coeficientes racionales. Todos los números trascendentes son irracionales y no numerables; su cardinal es mayor que $\aleph_0$.

¿Y qué relación guarda eso con π? Pues que π no sólo es irracional, sino que también es trascendente, como demostró Lindemann en 1882. Si π es trascendente, no es algebraico, no es construible y, por tanto, no puede construirse en un número finito de pasos sólo con regla y compás. De modo que la búsqueda clásica de un procedimiento «a la griega» de cuadrar el círculo ha concluido. Pero no por ello se ha terminado la búsqueda de ese inaccesible arcano: aún hoy algunos ilustres matemáticos siguen recibiendo «demostraciones» de la cuadratura del círculo. Y no faltan quienes han preparado una respuesta ya precocinada para disuadir a los posibles descubri-

LAS RELACIONES TRASCENDENTALES DE PI

El número e es la base de los logaritmos neperianos; su valor es de 2,71828... y, después de π, es la constante matemática más conocida y frecuente. Se sabe, desde luego, que

$$\pi + e = 5{,}859874482...,$$

pero se ignora si este número es o no trascendente. Curiosa circunstancia, pues se sabe que uno de los dos números $\pi + e$ o $\pi \cdot e$ es trascendente, pero no cuál de ellos. Tampoco se sabe si es trascendente π^{π}.
En cambio, e^{π} sí es trascendente, como quedó demostrado gracias al teorema de los matemáticos Alexandr Gelfond (1906-1968) y Theodor Schneider (1911-1988). Aunque no puede afirmarse lo mismo para π^{e}; de hecho, no se sabe siquiera si es racional o irracional.
También son trascendentes $e^{\pi\sqrt{n}}$ (si $n \neq 0$), $\pi + \ln 2$ y $\pi + \ln 2 + \sqrt{\ln 3}$.
No se sabe si $\pi + e$ o π / e son irracionales; en cuanto a su trascendencia, se sabe que si son algebraicos, seguro que los eventuales polinomios que los tienen por solución son al menos de grado 8, con coeficientes de orden medio 10^9. No es matemáticamente relevante, pero sí humanamente convincente.

dores de demostraciones imposibles. Así, cuando llega a la mesa de un matemático examinador una pretendida demostración de la cuadratura del círculo, se le entrega como ejercicio a algún alumno aventajado. Cuando éste descubre el error (siempre hay algún error) se devuelve el formulario: «Estimado amigo: muchas gracias por su demostración de la cuadratura del círculo. Le devuelvo su original y llamo su atención sobre el primer error que hemos detectado. Se encuentra en la página..., línea..., Atentamente, etc.». Es un modo educado de responder a la contumacia.

En conclusión, el número π pertenece a la gran mayoría trascendente del reino de los números y, al parecer, no tiene nada de especial; es un vulgar número trascendente. Tan vulgar y anodino que hasta ahora nadie ha encontrado entre sus cifras regularidad o irregularidad alguna.

La cuadratura del círculo

Tras analizar la naturaleza de π y comprobar que es trascendente, resulta evidente que este hecho convierte en tarea inútil todo intento de cuadrar el círculo. Sin embargo, en tiempos anteriores a Lindemann no faltó quien se volcara en dicha búsqueda, siempre de buena fe, y con aproximaciones inteligentes. La mayoría de los cazadores de decimales de π eran en realidad buscadores de la huidiza cuadratura; estaban afectados por lo que se ha dado en denominar en clave humorística *morbus cyclometricus*, el agente infeccioso de la enfermedad de la cuadratura del círculo. En una descripción de los «cuadradores», se los define como varones, maduros, ajenos al signifi-

ARISTÓFANES Y LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

El dramaturgo griego Aristófanes (hacia 446-hacia 386 a.C.) habló de la cuadratura del círculo más bien en clave jocosa en una de sus comedias, en las que la sátira estaba omnipresente. En *Las aves*, estrenada en el año 414 a.C., unos ciudadanos de Atenas, cansados del bullicio de la metrópoli, deciden fundar una ciudad en el aire y emigrar a ella. Varios arquitectos y urbanistas ofrecen sus servicios al protagonista, Pistetero.

[METÓN]: Vengo a...
[PISTETERO]: ¡No se acabará mi miseria! ¿Venido a qué? ¿Cuál es vuestro diseño?
[METÓN]: Vengo a hacer un reconocimiento de este Aire vuestro, y a parcelarlo en acres.
[PISTETERO]: ¡Por los cielos! ¿Quién sois vos?
[METÓN]: ¿Que quién soy? Soy Metón, conocido a lo largo y ancho de Grecia.
[PISTETERO]: Muy bien. ¿Y eso qué es?
[METÓN]: Esto es una varilla para medir el Aire. Se lo explicaré. El contorno del Aire es como el de un vasto horno; así, al aplicar aquí mi varilla flexible, y situando allí el compás... ¿Me entiende usted?
[PISTETERO]: Ni una palabra.
[METÓN]: Con esta otra regla trazo una línea recta, inscribo un cuadrado en el círculo y coloco en su centro la plaza. A ella afluyen todas las calles, del mismo modo que del centro de una estrella, aunque circular, parten rayos rectos en todas direcciones.
[PISTETERO]: ¡Vaya por Dios, este hombre es un auténtico Tales!

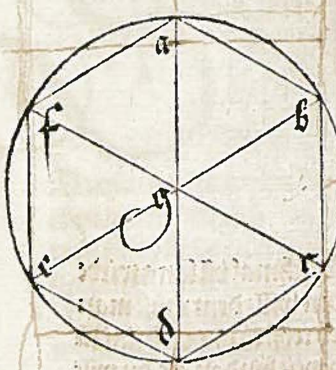
cado de la palabra imposible, con pocos conocimientos matemáticos, convencidos de la importancia del problema y de merecer una pingüe recompensa, faltos de lógica, solitarios y, por si fuera poco, escritores prolíficos. Todo un panorama bastante macabro, pero cercano a la realidad estadística histórica.

El filósofo romano Boecio (hacia 480-524), Anicius Boethius en latín, antes de que lo ajusticiara el rey Teodorico acusado de conspiración, afirmó en su *Liber circuli* que había cuadrado el círculo, pero que la prueba era demasiado larga para reproducirla completa allí. Esta expresión, que luego se ha hecho popular al usarla Fermat al referirse a su célebre teorema, junto con el hecho incuestionable de que la cuadratura es imposible, convierten la presunta demostración de Boecio en más que dudosa.

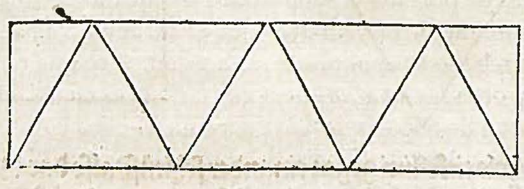
Derecha, detalle de una página de Underweysung der messung (Los cuatro libros de la medida) *del renacentista alemán Alberto Durero (1471-1528). Publicada en 1525, en la obra se exhiben muestras sobre la cuadratura aproximada del círculo.*

ARCHIVO RBA

gel in einander. Darnach setz auf ytliche seyten ein halben dryangel / auß disen sechs dryangelen wirde ein ablange fierung von gleychē winckelen / die eben so vil inhelt / als das sechs eck. Darnach mach die ablang fierung zů einer rcheten / wie du for bericht bist / dise wirdt eben so vil inhalten als das sechs eck / wie du das in der folgetenn figur sihest. Also magstu jm auch thůn mit allerley geregulirten figuren / sie haben so vil eck als sie wöllen.

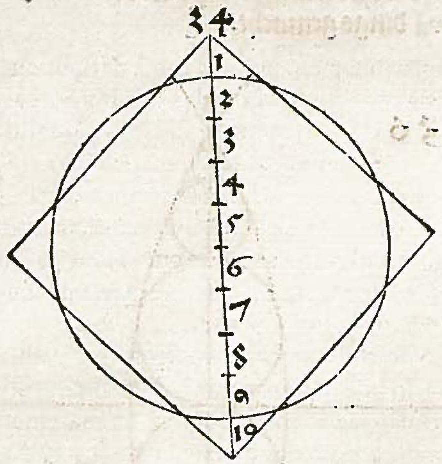


33



VOn nöten wer zůwisen quadratura circuli / das ist / die vergleychnus eines cirkels / vnnd eines quadrates / also das eins als vil inhielt als dz ander / aber soliches ist noch nit von den gelerten demonstrit Mechanice / aber das ist beyleyfig / also das es im werck nit / oder gar ein kleyns felt / mag dise vergleychnüß also gemacht werden. Reyß ein fierung vñ teyl den ortstrich in zehen teyl / vnd vnd reyß darnach ein cirkelriß des Diameter sol achtteyl haben / wie die quadratur zechne hat / wie jch das vnden hab aufgerissen.

34



SO man ein dryangel van vngleychen seyten macht / vñ der doch ein rechten winckel hat / was man dann für ein figur auß den selben seytē in sich selbs zeücht / so helt alweg die lengst seyten oder die selb figur die man darauß macht so vil innen als die anderen zwo / des sind zweyerley figur hernach aufgerissen. Erstlich der dryangel.a.b.c.in sich selbs in dryangel zogen / die ander.d.e.f. in sich selbs zů quadraten zogen.

Más próximo en el tiempo encontramos al insigne cardenal germano Nicolás de Cusa (1401-1464); su gran talla intelectual le mereció ser citado incluso por Kepler y Cantor, dado que abrigaba ideas muy avanzadas sobre el infinito. Fue un excelente políglota, jurista, filósofo, astrónomo y más numerólogo que matemático. Como geómetra intentó (y, según él, consiguió) cuadrar el círculo, pero su contemporáneo Johannes Müller von Königsberg (1436-1476), que portaba el seudónimo latinizado de Regiomontanus, o Regiomontano, mejor matemático que el cardenal y gran admirador de Arquímedes, rebatió sus puntos de vista y demostró que no existía tal cuadratura en su obra *De cuadratura circuli*. Sí que es cierto, no obstante, que la aproximación de Nicolás de Cusa a π (que él daba como medida definitiva) es excelente: 3,1423... Es preciso puntualizar que Regiomontanus dio como valor de π la aproximación 3,14243.

En 1525, el gran artista Alberto Durero, en alemán Albrecht Dürer (1471-1528), también intentó cuadrar el círculo, pero advertía de hecho que su construcción era sólo aproximada.

Un poco más tarde, en 1585, Adriaan Anthonisz (hacia 1543-1620), padre de Adriaan Metius (1571-1635), calculó que π estaba entre 377/120 y 333/106. El hijo lo tuvo fácil para intentar cuadrar el círculo: le bastó con hacer una especie de media de los numeradores y denominadores:

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}(377+333)}{\frac{1}{2}(120+106)} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$$

Es una buena aproximación, pero de eso a dar por cuadrado el círculo...

Tal vez la historia más conocida de las cuadraturas sea la que implicó a Thomas Hobbes (1588-1679), célebre filósofo y adalid del empirismo, y a John Wallis (1616-1703), eminente matemático inglés. Según parece, Hobbes, hombre muy inteligente pero carente de una especial educación geométrica, proclamó en *De corpore*, en 1655, que había cuadrado el círculo, amén de otras hazañas como rectificaciones de curvas varias. Lógicamente, no era cierto, y Wallis, en su opúsculo *Elenchus geometriae hobbianae*, descubrió varios errores y deslizó algunas opiniones, malvadas pero reales, acerca del talento geométrico de Hobbes. Hay que decir que Wallis profesaba la doctrina presbiteriana, lo que le convertía en doblemente odioso para Hobbes, pues era un adversario hasta en la religión. La matemática de Hobbes era deficiente, pues cayó en las redes de Euclides a los 40 años, pero, al fin y al cabo, otros filósofos fueron tan mediocres matemáticos como él y no sucedió nada relevante. Sin ir más lejos, Marx sostuvo en pleno siglo XIX que el materialismo dialéctico era deducible de la ecuación de segundo grado. En el caso de Hobbes, lo malo era que no sólo no quiso reconocerlo, sino que llevó la polémica al terreno personal, se recreó en ella y la prolongó escrito tras escrito. Los títulos, cada vez más venenosos, son incluso divertidos: *Markes on the Absurd Geometry, Rural Language, Scottish Church-Politiks, and Barbarismes of John Wallis (Observaciones sobre la absurda geometría,* *el lenguaje rural, la política de la iglesia escocesa y barbarismos de John Wallis).* La disputa contenía aspectos zahirientes (por desgracia ciertos), como cuando Wallis acusó a Hobbes de plagiar a sus contemporáneos: «...Cuando algo verdadero se incluye entre sus cosas de usted, no es realmente suyo, sino cosas sacadas de otros.»

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), un jesuita belga a quien le debemos, entre otras cosas, las coordenadas polares, acuñó un nuevo sistema, próximo al concepto de integral, halló la cuadratura de la hipérbola (correctamente) y pretendió haber encontrado la cuadratura del círculo. Sus con-

JOHN WALLIS (1616-1703)

El famoso símbolo para representar el infinito, ∞, nos servirá de presentación del excelente matemático inglés, pues fue él quien lo introdujo. Vinculado a la Royal Society, Wallis trabajó en el desciframiento de mensajes y, sobre todo, en temas relacionados con la moda científica de su tiempo, el cálculo infinitesimal, al que aportó nuevos e interesantes conceptos. Su creación más notable se sitúa en el terreno de las series y, más concretamente, en el de los productos infinitos, donde nos legó una fórmula tan bella como útil:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

Wallis era también un gran calculador mental, quizá debido a que padecía de insomnio. También era gramático y, cosa poco común, dedicó muchos esfuerzos a la enseñanza de los sordomudos.

ARCHIVO RBA

temporáneos se lo tomaron con un explicable escepticismo y, finalmente, Huygens descubrió el inevitable error en su razonamiento. Si lo citamos aquí es por su excelente trabajo y porque, de paso, demostró una gran cantidad de cosas matemáticamente ciertas e interesantes.

Un ejemplo típico de cuadratura del círculo viene representado por Jacob Marcelis (1636-hacia 1714), un fabricante de jabones que afirmó que

$$\pi = 3\,\frac{1008449087377541679894282184894}{6997183637540881944003523927 1702},$$

El poco caritativo comentario de De Morgan en su antología de horrores matemáticos *A budget of paradoxes* fue: «Es de esperar que sus jabones fueran mejores que los valores de π.»

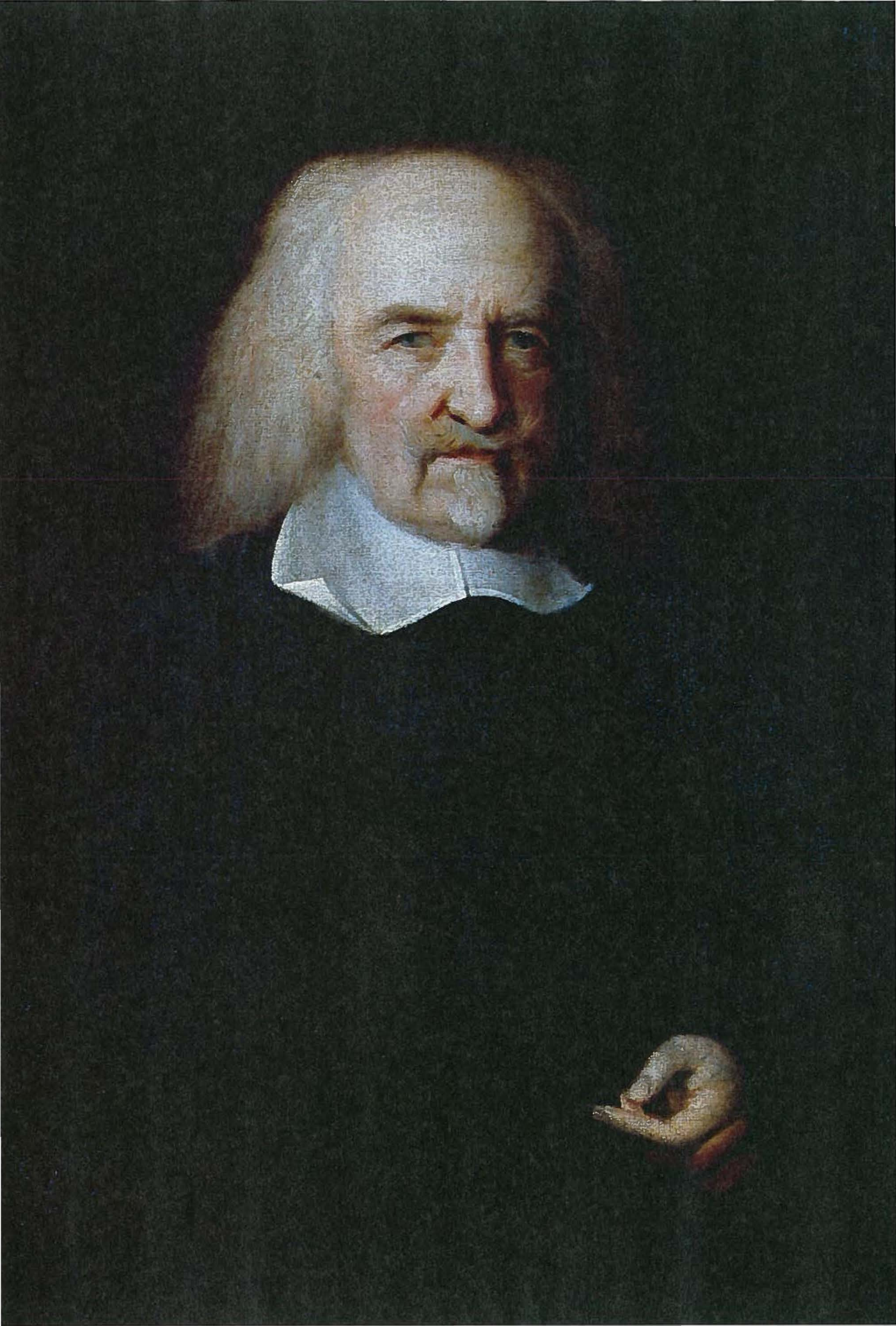
Las insensateces se acumulan a medida que se avanza en el tiempo y así se llega a Malthulon, que en 1728 afirmó haber desentrañado, y de modo simultáneo, el movimiento perpetuo y la cuadratura del círculo. Además, ofreció una recompensa a quien pudiera refutar un solo paso; fue un símbolo de seguridad conmovedor. No hace falta ni decirlo: se demostró que la pretendida prueba era falsa y a Malthulon no le quedó más remedio que pagar. No es de extrañar que, en 1753, la Académie Française decidiera no encargarse de revisar más demostraciones de la cuadratura del círculo. Quizá se horrorizaron ante la creciente cantidad de solicitudes y el coste de revisarlas, o quizá los académicos deseaban ponerse a salvo de ciertos personajes perseverantes, como un tal Vausenville, que los demandó reclamando un premio eventualmente concedido al primer descubridor.

Con Lindemann no se terminó el desfile de cuadradores, pero al menos se sabía que sus demostraciones no eran más que falacias. Hay que excluir a aquellos que, como Srinivasa Ramanujan (1887-1920), sabían de sobra que la cuadratura era imposible, pero buscaban construcciones aproximadas de sorprendente exactitud. Con una construcción de Ramanujan se consigue un valor de

$$\pi \approx \sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}} = 3{,}1415926525826\ldots$$

El filósofo inglés Thomas Hobbes (1588-1676) no solo pasó a la historia por popularizar la frase «Homo homini lupus» *(«El hombre es un lobo del hombre»), sino también por asegurar en una obra,* De Corpore *(1655), haber encontrado la cuadratura del círculo. A la derecha, Hobbes retratado por el pintor J. M. Wright.*

AGE FOTOSTOCK



CAPÍTULO 3

El número π y la probabilidad

«La teoría de la probabilidad sólo es, en el fondo,
el sentido común reducido al cálculo.»
MARQUÉS DE LAPLACE

Se puede establecer un vínculo entre la probabilidad matemática y el número π a través de teorías como la de la «distribución normal», que el matemático Augustus de Morgan planteó para que una compañía de seguros pueda calcular las probabilidades de que ocurra un deceso. Esta fórmula también se podría aplicar al juego.

SHUTTERSTOCK

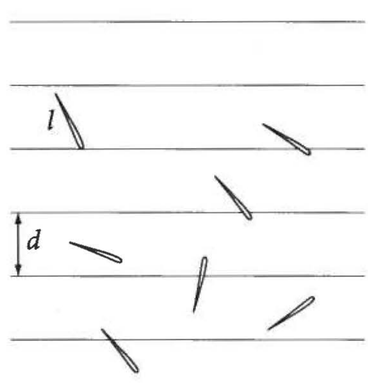
Al hablar de probabilidad parece que estamos adentrándonos en un concepto muy apartado de π; nada más lejos de la realidad. De entrada, 0,6079271018... $= 6/\pi^2$ es la probabilidad de que dos enteros elegidos al azar sean primos entre sí; lo anunció R. Chartres en 1904. Además, $\pi^2/6 = \zeta(2)$, lo que establece un curioso vínculo entre π y la misteriosa función ζ de Riemann. También se establece una inesperada relación entre π y la teoría de la probabilidad, pues el número mágico es aquí un invitado inesperado. Por último, se establece otro vínculo entre π y los números primos.

En una ocasión, Augustus de Morgan explicó una cuestión matemática a un vendedor de seguros: un determinado cálculo implicaba la probabilidad que tenía un grupo de personas de seguir vivas al cabo de un tiempo y, como sucede a menudo con la teoría de la probabilidad, apareció rondando el número π. El vendedor de seguros, convencido de que De Morgan había cometido algún error, se lo hizo notar. ¿Cómo era posible que apareciera π hablando de seguros? ¿Qué pintaba π allí? Y, sin embargo, De Morgan no se había equivocado: realmente existía un vínculo entre la expectativa de vida, las pólizas y π; se llama «distribución normal».

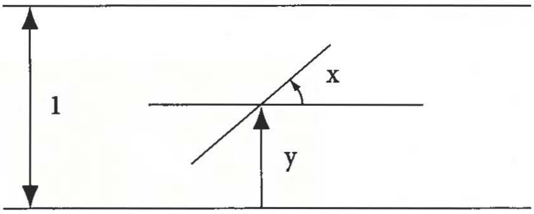
El objeto de este capítulo es mostrar esos vínculos ocultos. La historia comienza con las incursiones de un noble francés, el conde de Buffon, en el mundo de las matemáticas. Buffon tuvo la idea de estudiar el comportamiento matemático de una aguja que cae plana, sin clavarse, sobre una serie de líneas paralelas.

Una aguja en un pajar

Se dibuja en un papel una serie de rectas paralelas equidistantes. Seguidamente se lanza una aguja al azar. ¿Cuándo cortará la aguja una de las líneas?



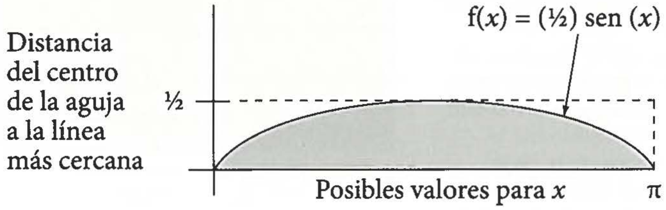
El caso más sencillo se da cuando la longitud l de la aguja es igual a la distancia d entre las líneas. Llamemos y a la distancia que hay desde punto medio de la aguja (su supuesto centro de gravedad) a una de las líneas del entramado. Si suponemos que $d = l = 1$, se simplifican un poco los cálculos. Llamemos ahora x al ángulo formado por la aguja y el eje horizontal, y midámoslo en radianes, puesto que vamos a usar (sólo lo indispensable) las armas del análisis matemático en forma de integrales.



Usando un poco de geometría elemental se observa que cuando se dé la desigualdad

$$y \leq ½ \text{ sen } x,$$

la aguja cortará una línea. De este modo tenemos un punto de partida. El esquema siguiente es la representación gráfica de la función $y = ½ \text{ sen } x$:



Para evaluar el área de la zona sombreada, que es aquella en la que se cumple $y \leq ½ \text{ sen } x$, es preciso calcular una integral:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{ sen } x \, dx = 1.$$

El valor del área del rectángulo entero es $\pi/2$, y la probabilidad de que la aguja caiga sobre la línea es el cociente entre un área y otra:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366197\ldots$$

Y ahí es donde aparece π.

El problema también puede resolverse si $l \neq d$; si $l < d$ se obtiene una probabilidad $2l/\pi d$, y si $l > d$, la probabilidad es

$$\frac{2l}{d\pi} - \frac{2}{d\pi}\left(\sqrt{l^2 - d^2} + d \text{ sen}^{-1}\left(\frac{d}{1}\right)\right) + 1.$$

En este caso hay que recurrir a calcular una integral doble.

GEORGES LOUIS LECLERC, CONDE DE BUFFON (1707-1788)

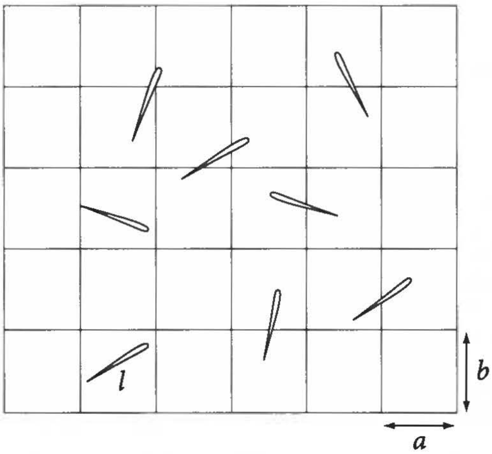
El conde de Buffon fue un sabio universal, conocido sobre todo como naturalista.

Este hombre de ciencia francés dejó su impronta en muy diversas disciplinas: fue naturalista, escritor, biólogo, botánico, cosmólogo y matemático. Su obra maestra es la monumental *Histoire naturelle, générale et particulière (Historia natural, general y particular)*, presentada en nada menos que 36 volúmenes y 8 anexos. En su faceta de cosmólogo, la aportación más notable de Lecrerc es su hipótesis sobre la edad de la Tierra, que él calculaba basándose en el enfriamiento del hierro y que le reportó una seria confrontación con la doctrina oficial de la Iglesia. Tradujo al francés a Newton y contribuyó a la teoría de probabilidades con una publicación propia de título encantador, *Essai d'arithmétique morale (Ensayo de aritmética moral)*, que contenía, entre otras cosas, el célebre estudio sobre la aguja que cae sobre un conjunto de líneas paralelas.

Basándose en este procedimiento, se ha intentado calcular π, pero los resultados no han sido demasiado satisfactorios. De hecho, pequeñas irregularidades en la aguja podrían determinar graves errores, por lo que este método no es aconsejable. Es preferible simular el experimento arrojando virtualmente agujas sobre enrejados lineales del ciberespacio; hay programas informáticos que lo hacen así.

Y una aguja en una cuadrícula

Se llama problema de Buffon-Laplace a una versión más complicada del planteamiento anterior, estudiada por Laplace en 1812, en su *Traité analytique des probabilités*, en el que la aguja no cae sobre unas rectas paralelas equidistantes, sino sobre una cuadrícula de lados perpendiculares. Cada celda de la cuadrícula mide a en un sentido y b en el otro ($a \neq b$), y se supone que la aguja es más corta que ambos lados.



Es necesario recurrir a una integral un poco más complicada que en el caso anterior para llegar al resultado final. La probabilidad de que la aguja corte algún lado de la cuadrícula es:

$$\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}.$$

Si $a = b$, la probabilidad de que la aguja no corte ninguna línea es:

$$1-\frac{l(4a-l)}{\pi a^2};$$

la probabilidad de cortar una línea es:

$$\frac{2l(2a-l)}{\pi a^2},$$

y la de cortar dos es:

$$\frac{l^2}{\pi a^2}.$$

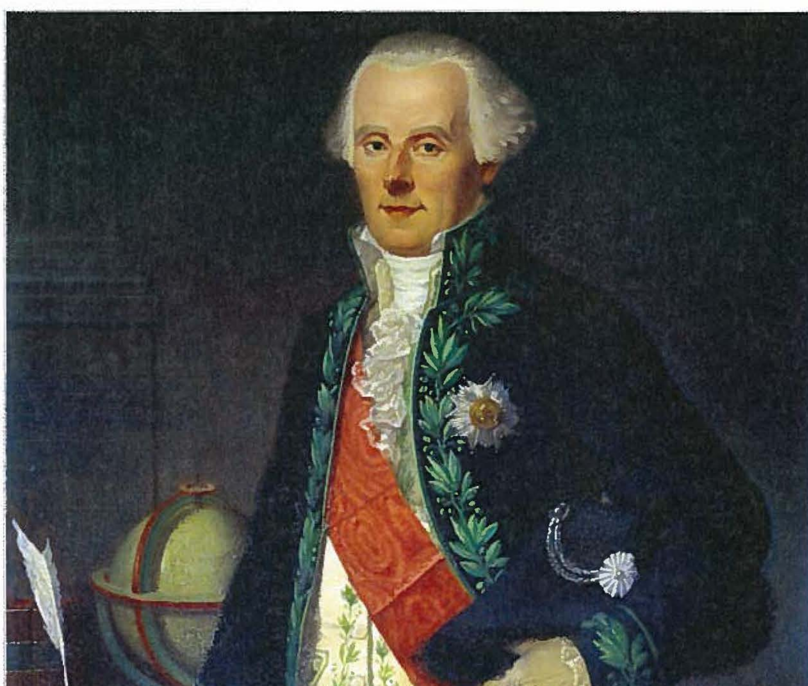
Se puede generalizar el problema de la aguja modificando la cuadrícula y haciéndola, por ejemplo, triangular. Pero ésta es una cuestión que hay que dejar a los especialistas.

La curva normal

En muchas cuestiones vinculadas a la probabilidad y estadística, como podrían ser el reparto o distribución de la estatura, el coeficiente intelectual, los errores instrumentales de los telescopios, la intensidad de un láser, por poner sólo unos ejemplos, tropezamos con la llamada campana de Gauss o curva normal. Corresponde a una distribución de probabilidad que tiene una curva de densidad en la que π interviene de un modo decisivo.

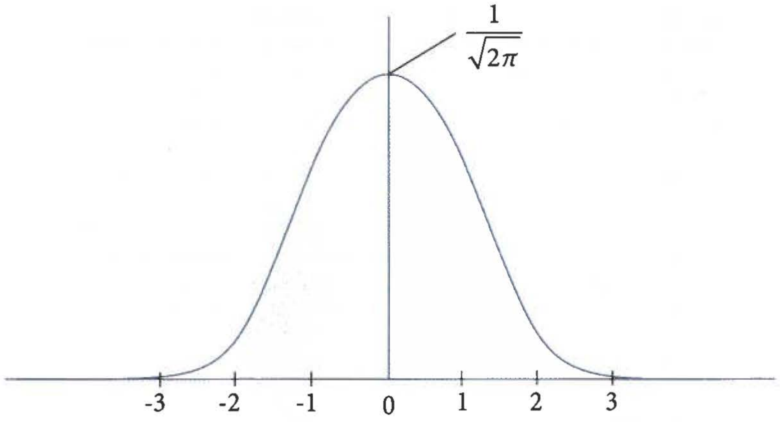
PIERRE-SIMON, MARQUÉS DE LAPLACE (1749-1827)

Astrónomo y matemático francés, amigo y protegido de Napoleón y autor de los cinco volúmenes de la *Mecánica celeste*, su obra magna y uno de los textos fundamentales de la física y del conocimiento universal. Laplace, que además de una mente precoz tenía una facilidad prodigiosa para el análisis matemático y para comprender los fenómenos físicos, contribuyó al desarrollo de muchos conceptos nuevos en probabilidad (funciones generadoras, probabilidad condicionada, problema de la aguja de Buffon), matemática pura (teoría del potencial, transformada de Laplace, análisis armónico) y astronomía (forma de la Tierra, nebulosa primordial, inestabilidad planetaria), y puede ser considerado un genio casi universal. Tan extraordinarios fueron para sus contemporáneos sus logros científicos que, a su muerte, su cerebro fue separado del cuerpo y destinado al estudio, aunque sin que pudiera observarse en él nada nuevo. Llegó a ser ministro de Napoleón, pero ello no le impidió aceptar un título de nobleza otorgado por la Restauración borbónica. Una célebre anécdota sobre Laplace cuenta que Napoleón, al serle presentada por el autor una obra astronómica, le comentó la llamativa ausencia en el libro de toda mención al Creador. «Señor, no he necesitado esa hipótesis» fue la respuesta.



ARCHIVO RBA

La curva puede centrarse y estandarizarse si se eligen una media igual a cero y una varianza $\sigma^2 = 1$. Entonces la curva tiene este aspecto tan familiar de campana que hemos exagerado dibujando las ordenadas más grandes



y que corresponde a la ecuación

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

La probabilidad se calcula por medio de una integral,

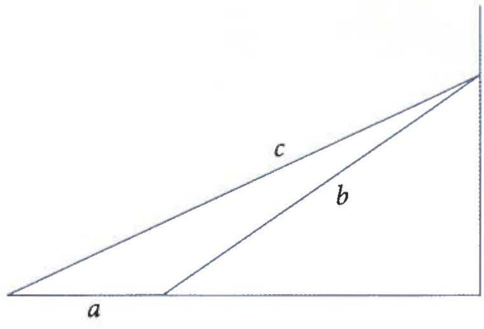
$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-w^2}{2}}\,dw.$$

Como se puede apreciar, π siempre está presente.

La distribución normal gobierna, por ejemplo, el rango de edades en el caso de fallecimientos. Podríamos decir, parafraseando a Alexander Pope, que cada vez que alguien muere, las campanas (de Gauss) suenan por π.

Más probabilidad con π

He aquí algunas curiosidades para el lector no especialista pero ávido de π. Si las medidas de un triángulo con lados elegidos al azar son a, $b < 1$ y $c = 1$, la probabilidad de que a, b y c formen un triángulo obtusángulo es $\frac{\pi - 2}{4}$.



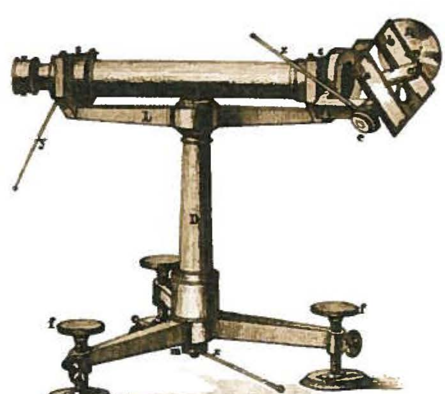
JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Cualquier descripción empalidece al tratar de reflejar fielmente una personalidad como la del matemático, astrónomo y físico Gauss. Baste decir que sus contemporáneos lo bautizaron con el sobrenombre de *Princeps Mathematicorum* (Príncipe de las matemáticas). Gauss, hijo de una familia muy humilde, fue un niño prodigio en su terreno. Se acostumbra a contar una anécdota de su niñez, quizás apócrifa pero representativa, que muestra su extraordinario talento: el maestro de su clase propuso a los alumnos que sumaran todos los números entre 1 y 100. A los pocos minutos, Gauss acudió con la respuesta correcta: 5.050. ¿Cómo podía aquel niño dar con un resultado que a cualquier otro le hubiera ocupado muchos minutos? Gauss se había dado cuenta de que había involucradas 50 equivalencias, que todas suman 101:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 48 + 53 = 49 + 52 = 50 + 51.$$

Por consiguiente, $50 \cdot 101 = 5.050$.

Gauss se convirtió en un científico precoz y muy prolífico, pues todo le interesaba; sus aportaciones son incontables y desbordantes por su variedad: enunció las condiciones de constructibilidad de los polígonos regulares, formuló el teorema de distribución de los números primos, demostró el teorema fundamental del álgebra, calculó la órbita del planeta enano Ceres, predijo puntos esenciales de la geometría no euclidea, todo ello además de obtener numerosos e importantes resultados en análisis, álgebra, teoría de números, teoría de la probabilidad y otras ramas de la matemática pura. En cuanto a la matemática aplicada y la física, hay que destacar sus trabajos de geodesia, electricidad y magnetismo, así como la invención del heliotropo, el heliógrafo y de una versión del telégrafo.

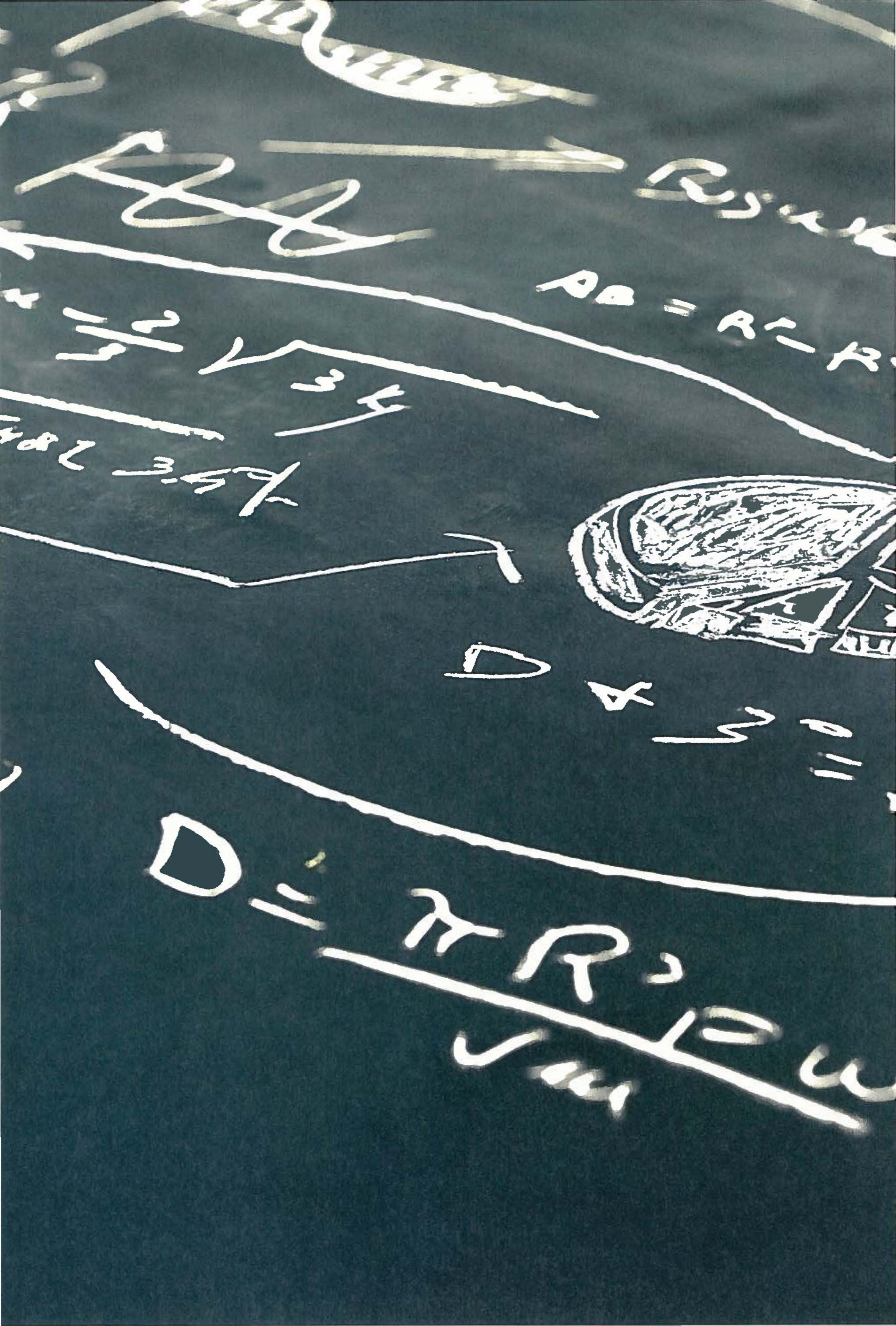


El heliotropo fue uno de los instrumentos creados por Gauss, de gran ayuda en los estudios geodésicos. Este aparato, que dispone de un espejo móvil, refleja la luz del Sol en una dirección predeterminada, haciendo posible la alineación de los instrumentos topográficos.

ARCHIVO RBA

El número promedio de maneras de escribir (teniendo en cuenta el orden) un número natural como suma de dos cuadrados es $\pi/4$.

Decimos que dos números complejos son enteros gaussianos cuando son de la forma $x + yi$, con x e y enteros. Los enteros gaussianos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, dando siempre otros enteros gaussianos. Constituyen lo que se llama en álgebra un «cuerpo»; son una especie de supernúmeros enteros, y admiten que se defina entre ellos la divisibilidad, con sus máximo común divisor, su mínimo común múltiplo y sus números primos. Pues bien, la probabilidad de que sean relativamente primos es $6K/\pi^2$, donde K es un número muy conocido en matemáticas superiores, la llamada constante de Catalan. Entre enteros normales, la probabilidad es $6/\pi^2$. □



CAPÍTULO 4

Fórmulas con π

«El señor al que sirve el oráculo de Delos no revela ni esconde, sino que provee símbolos.»

HERÁCLITO

El número π interviene en fórmulas matemáticas tan dispares como el cálculo de la longitud de una circunferencia, el del área de la esfera, el de su volumen, el de un polígono regular con n *lados y semiperímetro* s *o el de la célebre función zeta de Riemann. A la izquierda, detalle de una pizarra con varias fórmulas escritas.*

SHUTTERSTOCK

En cierta ocasión lord Kelvin escribió en la pizarra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

y dirigiéndose a sus oyentes proclamó: «Un matemático es alguien para el que esto es tan obvio como que 2 + 2 = 4».

Nosotros no iremos tan lejos como lord Kelvin, pero sí que escribiremos algunas fórmulas relacionadas con π. Escribir fórmulas es casi una garantía de desatención por parte de un lector no demasiado iniciado, por lo que hemos intentado reducirlas al mínimo y concentrarlas en un mismo capítulo.

Algunas de ellas son casi de obligado conocimiento para toda persona interesada en el tema y es preciso incluirlas. En los casos más especializados, aunque su comprensión pueda resultar dificultosa, no está de más reconocer el esfuerzo y el ingenio que costó descubrirlas.

Expresiones con π

Son aquellas en las que interviene π y que siempre es conveniente conocer. Las que afectan al mundo físico son interesantes y, en algún caso, adecuadamente incomprensibles.

La siguiente fórmula es la ley de Coulomb para la fuerza eléctrica entre dos cargas q_1 y q_2, situadas a distancia r, donde ε_0 es la permitividad en el vacío, un valor constante:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Ésta es la tercera ley de Kepler, con periodo P, masas m_1 y m_2, semieje mayor a y constante de la gravedad G:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

Principio de indeterminación de Heisenberg para una partícula de posición media x y momento medio p, donde h tiene por valor una constante, llamada cuanto de acción de Planck:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Constante cosmológica Λ, donde G es la constante de gravitación; c, la velocidad de la luz, y p es la densidad en materia y radiación:

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{3c^2} p.$$

A partir de ahí se adivina que lo que sigue ya sólo interesará a los especialistas, por lo que no continuaremos. Es preciso puntualizar que éstas y otras fórmulas procedentes de la física no sirven para calcular π, pero son útiles para mostrar una cierta cultura general.

Algunas fórmulas matemáticas en las que interviene π

Las fórmulas elementales afectan sobre todo a las curvas denominadas cónicas, llamadas así porque resultan de cortar un cono con un plano. En lo sucesivo, *r* representará el radio:

Longitud de la circunferencia:

$$L = 2\pi r.$$

Área del círculo:

$$A = \pi r^2.$$

Área de la elipse de semiejes *a* y *b*:

$$A = \pi ab.$$

Área del polígono regular, con *n* lados y semiperímetro *s*:

$$A = \frac{1}{4} n s^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Área de la esfera:

$$A = 4\pi r^2.$$

Área total del cilindro de revolución de altura *h*:

$$A = 2\pi r(r + h).$$

Área total del cono de revolución de generatriz *g*:

$$A = \pi r(r + g).$$

Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Volumen del elipsoide de semiejes *a*, *b* y *c*:

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Volumen del cilindro recto de altura *h*:

$$V = \pi r^2 h.$$

Volumen del cono recto de altura h:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Existen, obviamente, otras fórmulas en las que interviene π junto con integrales muy complicadas.

Fórmulas elementales

Se entiende por fórmula elemental cualquier fórmula previa al advenimiento de la era de los ordenadores. Con posterioridad a esa fecha los matemáticos fijaron su atención sobre todo en procedimientos susceptibles de proporcionar cifras de π con la mayor eficacia posible; criterios como la belleza matemática fueron dejados de lado en beneficio del cálculo. Citar una fórmula tras otra puede llegar a ser laborioso, pero probablemente no queda más remedio:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} = \pi.$$

$$\int_{0}^{1} \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

La última es una integral compleja y se supone que el camino de integración rodea $z = 0$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Las series ocupan un lugar importante en el entorno de π:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \operatorname{arc\,tan} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-...=\frac{\pi^2}{12}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)^3}=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+...=\frac{\pi^3}{32}.$$

Y son de todo tipo:

$$\frac{1}{4}(\pi-3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k(2k+a)(2k+2)}=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7\cdot8}-...$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+...$$

$$\frac{2^{24}76977927\ \pi^{26}}{27!}=\frac{1}{1^{26}}+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+...$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{n^2+n+1}\quad.$$

$$\frac{11340}{691\pi^6}=\sum_{n\,primo}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{11^6}+\frac{1}{13^6}+...$$

Y entre ellas hay series que vinculan a π y a la misteriosa «función zeta de Riemann», $\zeta(s)$:

$$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\zeta(4)=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+...=\frac{\pi^4}{90}.$$

$$\zeta(6)=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+...=\frac{\pi^6}{945}.$$

$$\zeta(8)=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+...=\frac{\pi^8}{9450}.$$

$$\zeta(2n)=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+...=(-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}.$$

En el último caso, los B_{2n} son los llamados números de Bernoulli, que se estudian en análisis matemático superior. Como curiosidad, daremos los primeros:

n	0	1	2	4	6	8	10	12
B_n	1	−1/2	1/6	−1/30	1/42	−1/30	5/66	−691/2.730

Quizás una simple enumeración de series no sea lo que espera el lector. Mostremos cómo funciona un ejemplo fácil, como la primera serie de la lista, denominada fórmula de Leibniz. Si partimos de la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots,$$

que converge para $|x|<1$, puede integrarse miembro a miembro y valerse del cálculo integral para calcular

$$\operatorname{arc\,tan} x=\operatorname{arc\,tan} x-0=\operatorname{arc\,tan} x-\operatorname{arc\,tan} 0=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$+\int_0^x (1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots)dx=\int_0^x dx-\int_0^x x^2\,dx+\int_0^x x^4\,dx-$$

$$-\int_0^x x^6\,dx+\int_0^x x^8\,dx-\ldots=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots$$

Si ahora hiciéramos $x=1$, vamos viendo que nos acercamos al final. Para extender la validez de lo calculado a $x=1$, puesto que lo dicho hasta ahora sólo vale para $|x|<1$, hay que pensar un poquito más. Escribamos la fórmula original de la serie geométrica pero hagámoslo de manera que nos detengamos en el término $n-1$, escribiendo a continuación el resto como si fuera el término n:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Al integrar miembro a miembro entre *0* y *1* y dar a x el valor *1*, queda

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx.$$

Al tomar en esa expresión el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$, el último término tiende a cero. Por tanto,

$$\operatorname{arc\,tan} 1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Por desgracia, la serie no es demasiado útil para calcular π, ya que su convergencia es desesperadamente lenta. Para obtener diez dígitos hay que sumar nada menos que 10^{50} términos, una cantidad astronómica. Como es lógico, no repetiremos el proceso para mostrar el por qué de cada serie. Sería tan prolijo como fatigoso, y no nos revelaría nada nuevo. Algunos manuales llaman a esta fórmula serie de Gregory-Leibniz; en realidad, debería denominarse serie de Madhava de Sangamagrama, pues fue este matemático indio quien la formuló primero. Una serie curiosa es:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{F_{2n+1}},$$

en la que los F_k son los números de Fibonacci, los componentes de la sucesión de Fibonacci, donde cada término es la suma de los dos anteriores:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

También podemos encontrar a π en los llamados «productos infinitos». El siguiente se debe a John Wallis (1616-1703):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \ldots = \frac{\pi}{2},$$

y puede deducirse de la integral

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x^n \, dx$$

tras laboriosas manipulaciones algebraicas. Lord Brouncker (1620-1684) convirtió la fórmula en fracción continua.

El siguiente producto infinito se debe a Euler:

$$\prod_{n\,primo} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tiene la particularidad de involucrar sólo a las potencias de números primos. Como este otro producto infinito, aún más raro,

$$\pi = \frac{2}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \pi p_k}{p_k} \right)},$$

que no se conforma con involucrar a los números primos p_k, sino que es de formato trigonométrico. No había límites para la imaginación y capacidad de búsqueda de Euler.

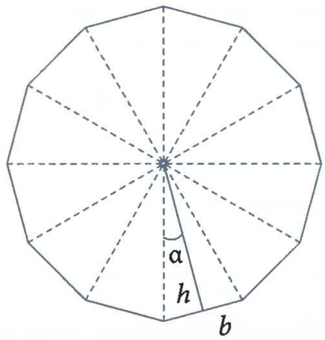
El resultado clásico que se da a continuación se debe a François Viète (1540-1603), matemático francés latinizado en su tiempo como Vieta:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots = \frac{2}{\pi}.$$

Este producto, matemáticamente hermoso de por sí, puede transformarse algebraicamente en algo todavía más sublime, como hizo Joakim Munkhammar en el año 2000:

$$\lim_{n \to \infty} 2^{n+1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}_{n}} = \pi.$$

La fórmula de Viète se deduce, utilizando el lenguaje moderno, como sigue: se empieza con el triángulo que usó Arquímedes, pero dándole un nombre, digamos α, al ángulo del triángulo de base *b* determinado por la altura *h* y el lado del triángulo que aparece en la figura.



Se tiene, por tanto, $A_n = n(\textit{área del triángulo})$ y, utilizando las armas de la trigonometría elemental (que, por cierto, el propio Viète contribuyó a desarrollar):

LEONARDO DE PISA (HACIA 1170-HACIA 1250)

Este matemático italiano es conocido por muchos nombres, aunque tras su muerte se le empezó a llamar Fibonacci (hijo de Bonaccio) y así es como ha pasado a la posteridad. Su padre era un comerciante que viajaba continuamente, y Fibonacci lo acompañaba en los viajes, lo que le proporcionó una cultura cosmopolita y un buen conocimiento del sistema de numeración hindú y de la matemática árabe. Llegó a ser un personaje muy respetado en su tiempo, amigo del emperador del Sacro Imperio Federico II, e incluso percibía un sueldo de la ciudad de Pisa, que le pagaba poco menos que por pensar. Eso sí, por pensar en temas útiles, como los relativos al comercio, pues sus contemporáneos no manifestaban gran curiosidad por los temas abstractos: algunos de los resultados de Fibonacci no despertaron interés hasta después de 300 años de su óbito. Su obra más conocida es el *Liber abaci* de 1202, en el que se encuentra la célebre sucesión conocida con su nombre,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\ldots,$$

donde cada término es la suma de los dos anteriores. Fibonacci la aplicaba a un acertijo concerniente a las familias de conejos. El *Liber abaci* contiene otros problemas del mismo tipo, pero se hizo famoso en Europa porque trataba cuestiones prácticas en un lenguaje moderno y aplicable. En otras palabras, a la gente no le parecía mal que se hablara de π, pero lo que le interesaba realmente es que se le dieran consejos para la utilización en notación posicional de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0, para que se le hablara claramente de contabilidad, de pesos, medidas y monedas, de reparto de beneficios, etc. Fibonacci escribió otros libros, dedicados a la matemática pura, importantes para la geometría, las ecuaciones o la teoría de números, pero no obtuvieron en su tiempo la resonancia que merecían.

$$A_n = \frac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen} 2\alpha = n r^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

Siguiendo el proceso de Arquímedes, y usando un polígono con el doble de lados, con el lado del polígono se va a la mitad del ángulo central, de modo que

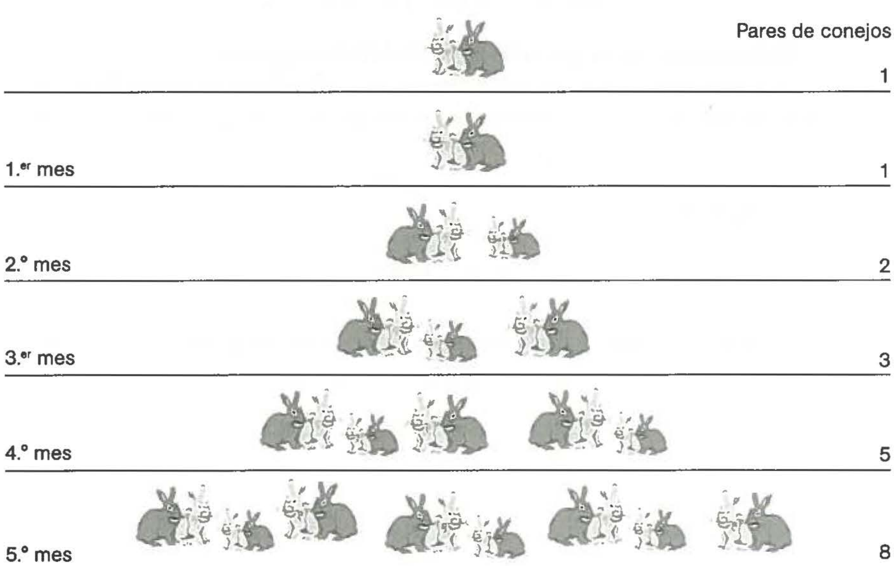
$$A_{2n} = \frac{1}{2} 2 n r^2 \operatorname{sen}\alpha = n r^2 \operatorname{sen}\alpha,$$

y se tiene la razón

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \cos\alpha.$$

Ése es el punto clave, pues de ahí se pasa fácilmente por simple, aunque inteligente, manipulación algebraica a:

$$\frac{A_n}{A_{2^k n}} = \frac{A_n}{A_{2n}} \cdot \frac{A_{2n}}{A_{2^2 n}} \cdot \ldots \cdot \frac{A_{2^{k-1} n}}{A_{2^k n}} = \cos\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^k}.$$



El número de parejas de conejos *Fn* en la generación *n*, admitiendo que no hay fallecimientos y que se parte de una pareja que no procrea en la primera generación, obedece a la ley $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Los F_n son los llamados «números de Fibonacci».

Ahora basta con observar que, si vamos al límite cuando $k \to \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} A_{2^k n} = \pi r^2.$$

Y después de otra elemental manipulación,

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \operatorname{sen} 2\alpha}{\cos\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2^2} \cos\frac{\alpha}{2^3} \ldots},$$

lo que reduce la fórmula a las condiciones de partida. ¿Cuánto valía α al principio? Si, como hizo Viète, se toma un cuadrado de partida,

$$n=4, \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

y se recuerda la regla trigonométrica elemental del ángulo doble que dice

$$\cos\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\chi},$$

se obtiene finalmente, aunque de otro modo, la expresión buscada:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots}$$

Hay que reconocer que a Viète no le faltaba ingenio.

Un lugar aparte lo ocupan dos fórmulas, consideradas reinas de la belleza matemática y que se conocen, respectivamente, como «fórmula de Euler»,

$$e^{\pi i}+1=0.$$

y «fórmula de Stirling»,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Pasando a las fracciones continuas, π no tiene un desarrollo demasiado fácil de recordar (Lambert fue quien lo calculó primero):

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

Esta mítica función compleja, que se designa con la letra griega zeta (ζ) y cuyo estudio quizás algún día nos reporte conocimientos impensables sobre los números primos y nos desvele muchos de sus misterios, se define, después de los estudios de Euler, bien como una serie, bien como un producto infinito:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

La función está definida de modo natural en la región compleja formada por los números complejos de componente real mayor que 1; se prolonga de modo único, según mostró Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), para todo el plano complejo en una función analítica y meromorfa, con un único polo en $s = 1$. La hipótesis de Riemann afirma que los ceros no triviales de ζ están en la recta formada por los números complejos de parte real igual a ½. Todo eso parece (y es) bastante difícil, y también lo es encontrar el vínculo entre π y la función ζ. Lo primero es inevitable, y lo segundo se observa explorando los valores de $\zeta(s)$, pues π aparece en todos los correspondientes a s entero y par. Es curiosa la serie siguiente, hallada por Philippe Flajolet e Ilan Vardi:

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n} \zeta(n+1).$$

Existen otras fracciones, menos canónicas, que son mucho más simétricas:

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \cfrac{49}{\ddots}}}}}}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{9}{6 + \cfrac{25}{6 + \cfrac{49}{6 + \cfrac{81}{6 + \cfrac{121}{\ddots}}}}}}$$

La fórmula de Lord Brouncker es la última de la lista, aunque manipulada algebraicamente. Lo bueno de las fracciones continuas es que, cuando se cortan en un punto de la «torre», la fracción resultante es la mejor aproximación racional posible del número que representan. Si nos detuviéramos en un punto del desarrollo en fracción continua de π y desenrolláramos la madeja al revés, obtendríamos la mejor aproximación racional posible. Por ejemplo, si nos detenemos en [3; 7, 15] obtendríamos

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{106}{15}}=3+\frac{15}{106}=\frac{333}{106}\approx 3{,}141509\ldots$$

QUÉ ES UNA FRACCIÓN CONTINUA

Enseñar cómo se construye una fracción continua puede resultar una labor compleja, pero tiene la ventaja de que contribuye a una buena comprensión.

Supongamos que trabajamos con un número N no entero, que en principio tendrá una coma y una parte decimal tras ella. Si separamos su parte entera, a la que llamaremos $[N]$, obtenemos $N-[N]$, que, evidentemente, se encuentra entre 0 y 1.

Si ahora hallamos el inverso de $N-[N]$, $\frac{1}{N-[N]}$, que será mayor que 1 y al que llamaremos para simplificar N_1, obtendremos:

$$N-[N]=\frac{1}{N_1} \quad \text{o} \quad N=[N]+\frac{1}{N_1}.$$

Separando la parte entera de N_1 y reiterando el procedimiento tendremos una segunda fracción:

$$[N]+\cfrac{1}{[N_1]+\cfrac{1}{N_2}}.$$

Y así sucesivamente:

$$[N]+\cfrac{1}{[N_1]+\cfrac{1}{[N_2]+\cfrac{1}{N_3}}}.$$

Si el proceso no se terminara nunca, obtendríamos una torre infinita y continua de fracciones:

$$[N]+\cfrac{1}{[N_1]+\cfrac{1}{[N_2]+\cfrac{1}{[N_3]+\cfrac{1}{\ldots}}}}.$$

Cuando el proceso se detiene es que N es un número racional, entero o quebrado o, en términos de número decimal, finito o periódico. En el caso de π, que es irracional, la fracción continua es una torre infinita. La secuencia, que suele escribirse

$$[[N]; [N_1], [N_2], [N_3]\ldots],$$

identifica inequívocamente a N y a la fracción continua que lo representa.

JOHN MACHIN (HACIA 1680-1751)

Este matemático inglés desempeñó durante 29 años el cargo de secretario de la Royal Society, aunque en realidad ha pasado a los libros de historia gracias a una sola fórmula, que lleva su nombre y que, combinada con la serie de Taylor permite calcular π de modo conveniente, ya que su convergencia es bastante rápida. Se conocen hoy muchas fórmulas del tipo Machin, como por ejemplo,

$$\frac{\pi}{4}=183\arctan\frac{1}{239}+32\arctan\frac{1}{1023}-68\arctan\frac{1}{5832}+$$

$$+12\arctan\frac{1}{113021}-100\arctan\frac{1}{6826318}-12\arctan\frac{1}{33366019650}+$$

$$+12\arctan\frac{1}{43599522992503626068},$$

debida a Hwang Chien-Lih, que la dio a conocer en 2003.

La fracción $\frac{333}{106}$ es la mejor aproximación racional en el sentido de que cualquiera que la mejore tiene forzosamente que usar un denominador mayor. Y la verdad es que la aproximación $\frac{333}{106}$ ya la encontró en su día Rivard, y es una excelente aproximación.

De la denominada fórmula de John Machin,

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239},$$

se han derivado otras, utilizadas para calcular los dígitos de π. Más adelante nos encontraremos con dos de ellas, pues las usó Kanada para obtener 1.241.100.000.000 cifras de π.

Fórmulas avanzadas

El matemático indio Ramanujan abrió el camino cuando, alrededor del año 1910, dio a conocer la fórmula

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390\,k)}{(k!)^4\,396^{4k}}$$

(y otras 16 más), que goza de la sorprendente propiedad de producir ocho decimales cada vez que se calcula con un término más. Pero hubo que esperar tres cuartos de siglo para demostrarla, pues Ramanujan no se molestó en hacerlo. Bill Gosper, uno de los primeros *hacker* de la historia, la usó para calcular diecisiete millones de cifras.

La variante $$\frac{1}{\pi}=12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591406+545140134n)}{(n!)^3(3n)!(640320^3)^{n+1/2}}$$

elevó la cifra de ocho a catorce decimales. Además, el cómputo podía dividirse en más de una máquina.

La fórmula anterior, obra de los hermanos Chudnovsky, vio la luz en 1987; si la traemos ahora a colación es para dar una idea de lo deprisa que avanza todo lo relacionado con la informática: en el siglo XXI se usa esa fórmula para los cálculos que utiliza un PC, no para los cálculos avanzados.

SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920)

Matemático indio, uno de los más sorprendentes talentos que se conocen. Nacido en una familia muy pobre, la lectura de un compendio matemático sin apenas demostraciones despertó en él, por razones desconocidas, unas ansias autodidactas de conocimiento extraordinarias. Escribió a varios matemáticos europeos de renombre, a los que envió algunos de sus resultados (120 de sus teoremas), pero sólo obtuvo respuesta de un especialista inglés, G. H. Hardy (1877-1947), que leyó su manuscrito una noche en presencia de su colega J. E. Littlewood (1885-1977) y apenas podía creer lo que veían sus ojos. Las fórmulas de la carta, según explica el mismo Hardy, debían de ser ciertas, pues de no serlo «nadie hubiera tenido la suficiente imaginación para inventarlas». En cualquier caso, eran asombrosas: algunas se parecían a los resultados obtenidos por Hardy y Littlewood, y otras eran tan originales como extrañas. Más tarde, a expensas de Hardy primero y becado por la universidad de Cambridge después, Ramanujan se trasladó al Reino Unido y desarrolló su actividad allí hasta su muerte, que acaeció tempranamente tras enfermar de tuberculosis. Por la originalidad de sus resultados, su aportación matemática es tan desconcertante como difícil de evaluar, pues muchas veces no indicaba la ruta para deducir sus fórmulas con rigor.

Como persona era un hombre muy religioso, además de vegetariano estricto. Su anécdota más popular, conocida como «la anécdota del taxi», lo retrata a la perfección. Ramanujan fue hospitalizado en cierta ocasión y Hardy le hizo una visita. Éste le comentó que había llegado en taxi, concretamente en el 1.729. Esperaba, dijo Hardy, que no le fuera un número de mal agüero. «En modo alguno —fue la respuesta—; es el menor número natural posible que es dos veces la suma de dos cubos distintos». Y era cierto, pues $1.729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$, y 1.729 es el menor número posible que verifica tal propiedad. La cosa carecería de mayor relevancia si no fuera porque probarlo le costó a Hardy varias semanas, y porque estudiar a fondo y apropiadamente la cuestión le costó casi treinta y cinco años más. Hoy día se siguen estudiando este tipo de números: se les conoce como «números taxicab».

ARCHIVO RBA

Dichas fórmulas algebraicas pueden parecer complicadas, pero eso no ha impedido que aparecieran en una producción de Walt Disney, la película *High School Musical*: en la pizarra están escritas dos de esas fórmulas e incluso una de ellas, que contiene un error, es corregida en plena acción, lo que pone de relieve el sentido del humor de los guionistas.

A partir de 1946, con el ENIAC (acrónimo de Electronic Numerical Integrator And Computer) se introdujeron las computadoras en el cálculo y todo cambió, y, cómo no, también el cálculo de las cifras de p. El ENIAC fue la primera computadora electrónica funcional dedicada a usos de computación pura. Su antecesora más cercana es la máquina Colossus, utilizada por Alan Turing (1912-1954) en Bletchley Park para usos militares, concretamente para descifrar mensajes secretos alemanes. La ENIAC fue construida por John Presper Eckert (1919-1995) y John William Mauchly (1907-1980). Sus dimensiones y consumo eléctrico se han hecho legendarios: contaba con casi 100.000 componentes entre resistencias, relés, diodos, tubos de vacío, condensadores, etc. Pesaba más de 27 toneladas, ocupaba una longitud de más de 30 m y el calor que desprendía elevaba la temperatura del local hasta los 50 °C. Toda esa masa permitía hacer unas 5.000 sumas en un segundo, un millar de veces más rápido que los artefactos preexistentes (y unas mil veces más lento que un PC actual). Además, podía guardar en su memoria 200 dígitos. Las conexiones para programarla se llevaban a cabo manipulando clavijas, como en una centralita telefónica de las antiguas. Era un aparato enorme, dado que en su tiempo no existían los transistores ni los circuitos miniaturizados. Tampoco se adaptaba a la arquitectura moderna de Von Neumann, que reúne datos y programa dentro de la misma memoria.

En el cálculo de las primeras 2.037 cifras de π, el ENIAC empleó 70 horas. La tabla siguiente, que incluye el año y el número de dígitos alcanzados, da una idea de la importancia del cambio, que todavía sigue:

1949	D.F. Ferguson y John W. Wrench, usando una calculadora no electrónica	1.120
1949	John W. Wrench, Jr., y L.B. Smith usando ya el ENIAC	2.037
1958	François Genuys	10.000
1961	Daniel Shanks y John W. Wrench	100.265
1973	Jean Gilloud y Martin Bouyer	1.001.250
1983	Yasumasa Kanada y Yasunori Ushiro	10.013.395
1987	Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura y Yoshinobu Kubo	134.214.700
1989	Gregory V. Chudnovsky y David V. Chudnovsky	1.011.196.691
2002	Yasumasa Kanada y un equipo de nueve especialistas	1.241.100.000.000
2009	Daisuke Takahashi y colaboradores informáticos	2.576.980.370.000
2014	Alexander Yee	13.300.000.000.000

En 1973, una antigua fórmula de Euler combinada con otra de tipo Machin permitió a Gilloud y Bouyer calcular un millón de dígitos de π:

$$\pi = 864 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n+1)!325^{n+1}} + 1824 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n+1)!3250^{n+1}} - 20 \arctan \frac{1}{239}.$$

Lo curioso del segundo sumatorio reside en que basta con calcular el primero y desplazar la coma algunos lugares. Por enormes que sean, ambos sumatorios sólo difieren en los ceros.

En 1976 hizo su aparición el algoritmo de Eugène Salamin-Richard Brent, basado en una idea de Gauss y Legendre de venerable vejez: la iteración de la media aritmético-geométrica. Aunque no es fácil de explicar en pocas palabras, diremos que un algoritmo algebraico no es más que una receta para calcular algo, en este caso π. Salamin y Brent partían de las definiciones

$$a_0 = 1; \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad t_0 = \frac{1}{4}; \quad p_0 = 1$$

y luego computaban de modo recurrente

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2};$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n};$$

$$t_{n+1} = t_n - p_n(a_n - a_n + 1)^2;$$

$$p_{n+1} = 2p_n.$$

En el límite se verifica que

$$\pi \approx \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}.$$

El referido algoritmo, impensable si tuviera que calcularse con lápiz y papel o incluso valiéndose de calculadoras mecánicas o eléctricas, es de convergencia cuadrática, es decir, que permite cada vez doblar las cifras obtenidas en el paso anterior. Con este algoritmo se llegó a los 206.158.430.000 primeros dígitos de π.

Pero eso no es todo: en la década de los años 1980-1990, Peter y Jonathan Borwein crearon un algoritmo de grado cuatro (que no reproduciremos aquí, ya que se trata de un campo puramente para especialistas), que iba a permitir acercarse a π hasta la cifra de 1.241.100.000.000 dígitos.

A finales de 2002 un equipo japonés dirigido por el especialista Yasumasa Kanada firmaba este hito que ya no emociona como antes a los matemáticos. No está nada mal, pero no se trata en modo alguno de una historia cerrada. El progreso en este campo parece imparable, y en 2014 ya se ha llegado a 13.300.000.000.000 cifras.

LOS CUATRO MAGNÍFICOS

Cualquier especialista de π sabe quiénes son los Borwein, una familia canadiense excepcional. El padre, David Borwein (n. 1924), de origen lituano, es un icono de la matemática de su país. Ha trabajado en muchos campos, sobre todo en series. El hijo mayor, Jonathan (n. 1951), fértil escritor de libros, es una luminaria de los ordenadores, con un aprecio especial por las cifras del número π. Le fascina la enseñanza de las matemáticas y crea software específico sobre el tema. Peter (n. 1953) es uno de los creadores de las fórmulas BBP (llamadas así en honor de sus descubridores, Bailey, Borwein y Plouffe) para el cálculo de π. Es también un genio de la informática. La madre de Jonathan y Peter, esposa de David, es una científica distinguida, aunque no matemática, sino anatomista.

Qué lejos queda aquel 1983 en que el experto Daniel Shanks (no confundir con William Shanks) opinaba que calcular mil millones de cifras de π sería una tarea inabordable... Como testimonio para la historia reproduciremos aquí las dos fórmulas autocorrectivas (tipo Machin) usadas por Kanada:

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443};$$

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} - 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943}.$$

La primera es de 1982, pero la segunda, creación de F. C. W. Störmer, es nada menos que de 1896 (la publicó en francés el Bulletin de la Société Mathématique de France) ¡Quién se lo iba a decir a Störmer! En matemáticas nunca se sabe: lo que hoy nos parece irrelevante quizá mañana sea fundamental.

Más que los récords asombrosos tal vez llame nuestra atención los métodos computacionales que se salen de lo común. El empleo de la fórmula

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

permitió calcular una cifra cualquiera n de π sin necesidad del cómputo de todos los dígitos previos a n. Claro que, lamentablemente, tal hazaña sólo da cifras binarias o hexadecimales. Las fórmulas como la anterior se deben a David H. Bailey, Peter Borwein y Simon Plouffe, y se conocen como fórmulas BBP, iniciales de sus apellidos. Se supone que marcarán una nueva época de la computación.

UN DÍGITO SIN FÓRMULAS

El columnista del *Scientific American* Martin Gardner (1914-2010), notorio escritor, mago, polemista y matemático, predijo en 1966 que el dígito decimal un millón del desarrollo de π sería un 5. Se basaba en una versión inglesa autorizada de la Biblia y concretamente en el libro 3, capítulo 14, versículo 16 (3-14-16), donde aparece el mágico número 7 y la séptima palabra tiene 5 letras. Así que la cifra un millón de π (entonces desconocida) debería ser un 5. Nadie confiaba mucho en la predicción, pero en 1974 se conoció el dígito y, como era de esperar, perversamente era un 5. Martin Gardner no se valió de fórmula alguna.

La fórmula de Fabrice Bellard (n. 1972)

$$\pi=\frac{1}{2^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\left(\frac{-2^5}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}+\frac{2^8}{10n+1}-\frac{2^6}{10n+3}-\frac{2^2}{10n+5}-\frac{2^2}{10n+7}+\frac{1}{10n+9}\right),$$

una derivación de las BBP, es ya un 43 % más rápida que éstas.

La computación en base 2 calcula simples bits (0 o 1) y ha superado ya el dígito mil billones. Sabemos que en ese lugar la cifra es un 0 (sólo hay dos posibilidades, 0 y 1), aunque, como dicta el algoritmo, no conocemos los dígitos intermedios. El saber no ocupa lugar, aunque su utilidad actual sea dudosa.

Para concluir, digamos que ya existen fórmulas que permiten averiguar un término del desarrollo de π en cualquier base.

Al margen de las fórmulas

Terminemos el capítulo con algunas curiosidades matemáticas que pueden ser consideradas fórmulas. Por ejemplo,

$$i^i = e^{-\pi/2},$$

igualdad que une el campo complejo y el real.

La siguiente igualdad vincula π con el mundo de los números primos:

$$\frac{3}{\pi^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(n)}{n^2},$$

donde

$$\Phi(n)=\sum_{k=1}^{n}\phi(k).$$

Los $\phi(k)$ son el número de enteros menores que k y primos con k.

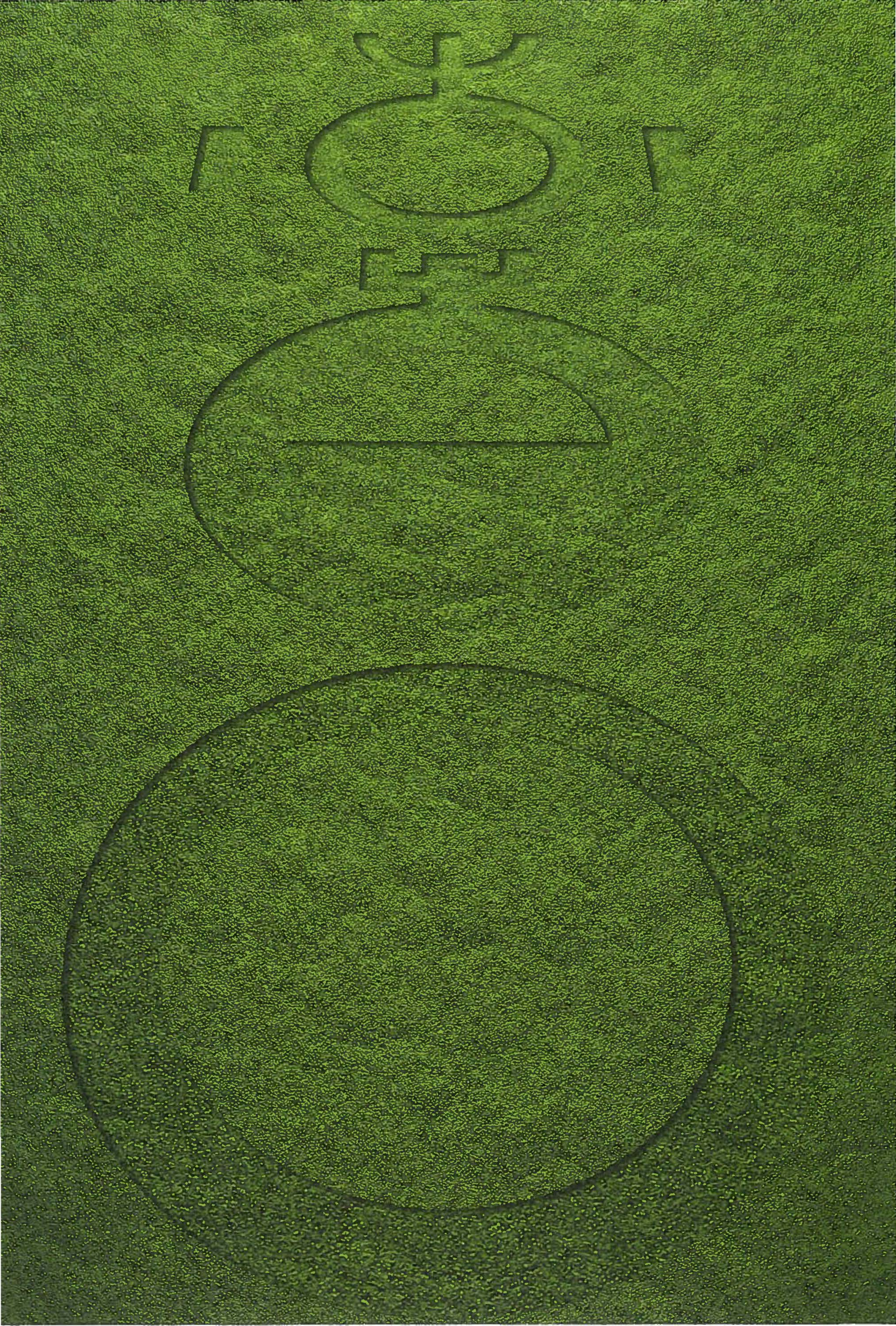
La siguiente fórmula se encuentra en un capítulo de la teoría de números, dentro de los números cuasienteros. Evidentemente son irracionales, pero cuando se calculan con una máquina convencional aparentan ser números enteros. La diferencia con un número auténticamente entero reside en una cifra decimal avanzadísima, y precisa de una buena calculadora para que se vea que hay algo significativo escondido tras un montón de ceros después de la coma. El número 427 es cuasi el de la derecha, que por cierto involucra a π:

$$427 \approx \left(\frac{\log(5280^3)(236674 + 30303\sqrt{61})^3 + 744)}{\pi} \right)^2.$$

Si se calcula con cualquier máquina casera, el larguísimo cuadrado da 427; calculado con más esmero, empleando una buena calculadora, la diferencia con el entero 427 aparece en la cifra decimal 52. En ese dígito dejan de surgir ceros y la calculadora parece que resucita. El cuadrado se merece realmente el nombre de cuasientero.

No se puede negar que los tentáculos de π abarcan muchos campos. A modo de ejemplo, vayamos a uno tan alejado como los empaquetamientos de Kepler. ¿Cuál es la densidad maximal de un empaquetamiento de discos en el plano? Pues

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$



CAPÍTULO 5

Pimanía

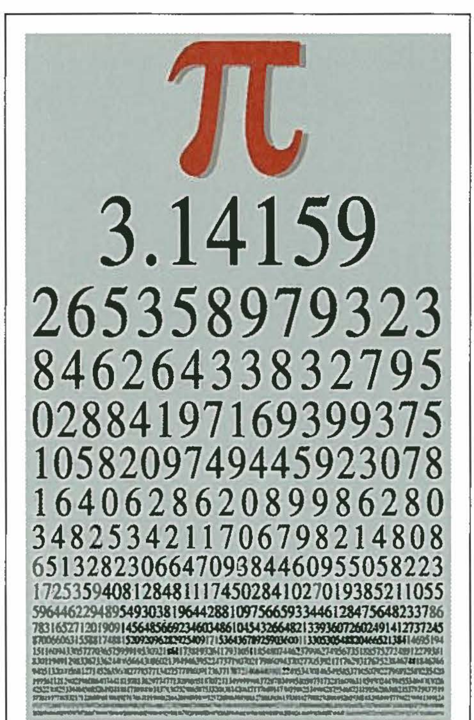
A la derecha, vista aérea de las formaciones geométricas sobre los campos de Cheesefoot, en el condado inglés de Hampshire. A mediados de la década de 1980 se descubrieron estas extrañas figuras sobre plantaciones de trigo o cebada, de origen desconocido, y algunos lo vincularon al número π.

SHUTTERSTOCK

El número π es algo especial. Ya hemos dicho que es el más conocido y mencionado de todos los números, el más célebre. El entusiasmo, la pasión, el auténtico fanatismo por π y sus cifras han llevado a acuñar el término «pimanía», que es como se describe la obsesión por todo lo relacionado con dicho número. Un paseo por este mundo, a medio camino entre lo extravagante y lo académico, resulta ameno a la vez que interesante. Puede parecerle exagerado al lector que se le dedique tanto espacio a un apartado relativamente poco matemático, pero la realidad es así: π es realmente algo más que un número.

Orbitando alrededor de π

Alrededor de π se ha instalado incluso el mundo del márketing. Es posible encontrar camisetas con ideogramas sobre π (incluso para animales de compañía), botones, gemelos, tazas, teteras, relojes, alfombrillas para el ratón del ordenador, delantales, ositos de peluche, almohadones, cajitas, azulejos, gorras, pósters, embellecedores de automóvil y un largo etcétera.



Un póster para matemáticos y fanáticos del culto a π.

ARCHIVO RBA

El Mazda 3 quizá no corra más por esa razón, pero lleva a π incorporado.

Los círculos dibujados por presuntos extraterrestres en campos de maíz tuvieron hace años su época de gloria. El de la fotografía de la izquierda, una vez desentrañado, se ha descubierto que se basa en las cifras de π.

El Día de π (en inglés *Pi Day*) es el 14 de marzo, según asegura su creador, el estadounidense Larry Shaw, ya que 14 de marzo se escribe 3/14 o 3-14 y ésas son precisamente las primeras cifras de π. Esta circunstancia puede llegar a parecer absurda, pero ha tenido un gran éxito, y en medios universitarios se ha extendido como un reguero de pólvora.

El plato estrella de los celebradores del Día de π es la pizza, ya que guarda en su redondeado formato los secretos de π. Las conmemoraciones se han convertido en fuente de todo tipo de iniciativas, incluso se han editado pósters con las propiedades de la pizza.

El Día de π coincide asimismo con el aniversario del nacimiento de Albert Einstein, lo que contribuye sin duda al éxito de la celebración. Es posible encontrar el número π en otros productos gastronómicos, como el queso o el vino, e incluso en un perfume.

Una «pitarta» para celebrar el Día de π puede servirse en unos «piplatos» como éste.

El símbolo π goza de una fama que se prolonga en el tiempo: en 1915 era el emblema de un escuadrón de la RAF, concretamente del número 22. Cuando Google emitió acciones, las de la serie A llegaron hasta la 14.159.265 (recordemos que π = 3,**14159265**...). La formación matemática de los propietarios de Google se puso de manifiesto hasta en el parquet de Wall Street.

En 1982, en los tiempos heroicos del juego informatizado, cuando todavía las consolas no nos habían invadido y reinaban los entrañables ZX Spectrum o los Dragon 32, la compañía Automata UK creó un juego centrado en π titulado *Pimania* y cuyo protagonista era precisamente un héroe llamado Pi-Man. En la actualidad el juego está ya muy avejentado, por lo que no sería de extrañar que alguien decidiera relanzarlo.

Google llegó a emitir la misma cifra de acciones que los ocho primeros decimales del número π. A la derecha, un grupo de ejecutivos de Google y del mercado de valores Nasdaq celebran la entrada del gigante de Internet en la bolsa de Nueva York, el 19 de agosto de 2004.

ARCHIVO RBA (ARRIBA); GETTY IMAGES (DERECHA)


NASDAQ

Quizá lo más sorprendente del culto a π sea la utilización, no comercial, de un buscador computadorizado de las cifras de π para encontrar en su expresión decimal la secuencia deseada entre, pongamos, los primeros ocho millones de dígitos. Si alguien desea saber en qué lugar de las infinitas cifras decimales de π aparece el día, mes y año de su nacimiento, sólo tiene que entrar en Internet a una web armada con el motor infomático *The π searcher*, escribir el número y, si se encuentra entre los primeros millones de dígitos (se empezó la aventura con sólo ocho millones de cifras, pero luego ya fueron doscientos millones y ha seguido mejorando), un mensaje le dirá dónde se puede encontrar. Y si no está, también lo indica.

Por cierto, si escribe su fecha de nacimiento abreviada (por ejemplo, 18/11/46 se introduce como 181146), la probabilidad de obtener una respuesta es casi del 100 %; si buscara sólo cuatro cifras (supongamos que ha nacido el 1/3/56, o sea el 1 de marzo de 1956), seguro que el buscador también le respondería, puesto que en el lugar 60.872 del desarrollo decimal de π ya han salido, con seguridad, todas las combinaciones de cuatro dígitos posibles, y todas ellas están incluidas en el buscador. Si, en cambio, prefiere una forma más completa (18/11/46, por ejemplo, entraría como 18111946), la probabilidad de encontrarse a uno mismo desciende hasta un 63 %. Cuanto más larga es la secuencia numérica, más improbable se hace el éxito de la búsqueda.

Una variante del pasatiempo anterior consiste en localizar entre los decimales de π el número de teléfono o la matrícula del automóvil, o cualquier otro número; no ofrece novedades con respecto a la búsqueda de la fecha de nacimiento.

Utilizando las potencialidades de un buscador ultrarrápido para trabajar en el desarrollo decimal de π se han hallado bucles curiosos. Por ejemplo, se han encontrado resultados con bucle empezando por los dígitos «40», que aparecen en la posición setenta; a continuación se busca «70», y así sucesivamente, iniciando una inquisición al parecer sin fin. Pero en realidad sí tiene fin. Dan Sikorski encontró la siguiente secuencia: 40, 70, 96, 180, 3664, 24717, 15492, 84198, 65489, 3725, 16974, 41702, 3788, 5757, 1958, 14609, 62892, 44745, 9385, 169, 40, que volvía, después de muchos rodeos, a su origen. Un bucle a la espera de un estudio probabilístico acerca de su aparición.

Poemas y memoriones

Casi siempre que se desea citar un poema sobre π se recurre a la misma fuente. Wieslawa Szymborska, poetisa polaca galardonada en 1966 con el Premio Nobel de Literatura, escribió un soberbio fragmento titulado precisamente *El gran número*, del que corren muchas traducciones, incluso por Internet. Una de ellas dice:

> «Digno de admiración el número pi
> tres punto uno cuatro uno.
> Todas sus demás cifras también son iniciales,
> cinco nueve dos porque nunca se termina.

No se deja abarcar seis cinco tres cinco con la mirada,
ocho nueve con un cálculo,
siete nueve con la imaginación
o incluso tres dos tres ocho con una broma es decir una comparación
cuatro seis con nada
dos seis cuatro tres en el mundo.
La serpiente más larga de la tierra se interrumpe después de algunos metros.
Lo mismo pasa, aunque un poco después, con las serpientes de los cuentos.
El cortejo de cifras de que se forma pi
no se detiene en el borde de la página,
es capaz de continuar por la mesa, por el aire,
la pared, una hoja, un nido, las nubes, y así hasta el cielo,
y por toda esa expansión e insondabilidad celestiales.
¡Ay qué corta, ratonescamente corta es la trenza del cometa!
¡Qué débil el rayo de la estrella, que en cualquier espacio se curva!
y aquí dos tres quince trescientos diecinueve
mi número de teléfono tu talla de camisa
año mil novecientos setenta y tres sexto piso
el número de habitantes sesenta y cinco centavos
centímetros de cadera dos dedos código charada,
en la que a dónde irá veloz y fatigada
y se ruega mantener la calma
y también la tierra pasará, pasará el cielo,
pero no el número pi, eso ni hablar,
seguirá con un buen cinco,
con un ocho de primera,
con un siete no final,
apurando, ay, apurando a la holgazana eternidad
para que continúe».

En *Poesía no completa*, FCE, México, 2002,
traducción de Gerardo Beltrán.

Se han escrito muchas «odas a π» y cosas parecidas, pero hay que reconocer que la pieza de Szymborska es magnífica.

Muchos maníacos de π piensan en la poesía sólo como instrumento; así nació la pifilología, un método mnemotécnico basado en el uso de poemas para recordar cifras de π. A estas composiciones se las denomina entonces «piemas». Normalmente cada palabra del piema representa una cifra de π, la de su longitud en letras. De ese modo, «paraíso» equivale al 7, pues es una palabra de siete letras. «Cielo» equivale o se lee 5, pues tiene cinco letras. Decir «cielo, tu mirada me lleva al paraíso» significa en realidad evocar la secuencia numérica de decimales 5262527, y no homenajear los ojos de la amada.

CIELO,	TU	MIRADA	ME	LLEVA	AL	PARAÍSO
5	2	6	2	5	2	7

Este ejemplo muestra una técnica mnemotécnica para recordar secuencias numéricas que parecen aleatorias o gobernadas por el azar, como ocurre con las cifras decimales de π. ¿Quiere recordarlas? Pues busque poesías o frases adecuadas y memorícelas; aunque no lo parezca, siempre es más fácil recordar versos que cifras. Sólo hay que tener en cuenta que cada palabra «vale» el número de letras que la componen; simplemente hay que contarlas.

Eso reduce el valor de la poesía al de simple instrumento, y un poema se convierte en algo más valioso no cuanto más hermoso es, sino cuanto más largo es, o sea, si permite recordar un número elevado de cifras. Veamos unos ejemplos (hay que advertir que algunos rozan el absurdo y los hay en multitud de lenguas). En castellano encontramos el inspirado poema (en realidad, según parece, está escrito en verso libre) de procedencia argentina:

> «Fue y cayó. Y queda solamente la inútil cifra con pocos destinos
> poderosos, tristes devenires sin el más sencillo bien.
> Idiota, re idiota, sabe que sus encantos son ya latosos decimales. Pobre...»,

y que proporciona la secuencia decimal de 31 decimales:

$$3{,}1415926535897932384626433832795.$$

Casi al mismo nivel encontramos una composición mexicana:

> «Fue a casa y buscó caramelos de fresca menta muy dulces. Inmortal ingeniero, artista inventivo, que en sus pinturas tuvo mérito en exceso. Para tus estatuas fui el viernes corriendo.»

Digamos que existen otras codificaciones algo más complicadas que permiten llegar casi a los 80 decimales. En inglés se alcanzaron en 1986 más de 400 cifras.

Otras codificaciones tienen la ventaja de la brevedad, con frases que pueden memorizarse fácilmente:

> «Sol y Luna y Mundo proclaman al Eterno autor del cosmos.»

Aquí la última cifra (6) es una aproximación, ya que en realidad debería ser un 5, pero de este modo obtenemos un valor redondeado de π.

En otros idiomas se encuentran expresiones similares. En inglés, por ejemplo, la manera más popular de recordar los primeros catorce decimales es la frase, debida según parece al premio Nobel sir James Hopwood Jeans (1877-1946):

> *«How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!»*.

> («Cómo deseo un trago, alcohólico por supuesto, tras las pesadas lecturas sobre mecánica cuántica.»)

Ésta puede extenderse hasta convertirse en otra aún más larga añadiéndole una coletilla:

> *«How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics and if the lectures were boring or tiring, then any odd thinking was on quartic equations again».*
>
> («Cómo deseo un trago, alcohólico por supuesto, tras las pesadas lecturas sobre mecánica cuántica y si las lecturas son aburridas o agotadoras, cualquier pensamiento extra será otra vez sobre ecuaciones cuánticas.»)

Pero se detiene ahí, en la palabra 32, de modo aparentemente inexplicable. Muchas sentencias y versos mnemotécnicos se detienen forzosamente en el decimal 32, porque allí hay un cero, y expresarlo en palabras se convierte en un obstáculo casi insalvable. En francés nos encontramos con el ejemplo siguiente:

> *«Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !*
> *Immortel Archimède, artiste ingénieur,*
> *Qui de ton jugement peut priser la valeur ?*
> *Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.*
> *Jadis, mystérieux, un problème bloquait*
> *Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose*
> *Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.*
> *Ô quadrature! Vieux tourment du philosophe*
> *Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez*
> *Défié Pythagore et ses imitateurs.*
> *Comment intégrer l'espace plan circulaire ?*
> *Former un triangle auquel il équivaudra ?*
> *Nouvelle invention : Archimède inscrira*
> *Dedans un hexagone ; appréciera son aire*
> *Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :*
> *Dédoublera chaque élément antérieur ;*
> *Toujours de l'orbe calculée approchera ;*
> *Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur*
> *De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle*
> *Professeur, enseignez son problème avec zèle».*
>
> («¡Cómo me gusta enseñar un número útil a los sabios!
> Inmortal Arquímedes, artista e ingeniero,
> ¿Quién puede apreciar el valor de tu juicio?
> Para mí, tu problema tiene un atractivo parecido.
> En otros tiempos, un problema misterioso bloqueaba
> Todo el proceso admirable, la obra grandiosa
> Que Pitágoras descubrió a los antiguos griegos.
> ¡La cuadratura! Antiguo tormento del filósofo
> Círculo insoluble, demasiado tiempo has desafiado

A Pitágoras y sus imitadores.
¿Cómo integrar el espacio plano circular?
¿Formar un triángulo al que equivaldrá?
Nueva invención: Arquímedes inscribe
Dentro un hexágono, calculará su superficie
En función del radio, conservará muy poco,
Desdoblará cada elemento anterior
Aproximándose siempre a la superficie calculada
Determinará límite; al final el arco limita
De este inquietante círculo, enemigo demasiado rebelde
Profesor, enseñe el problema con celo.»)

Ahí se encierran 126 cifras decimales. Obsérvese que el 10 de «mystérieux» se lee 09, con lo que se introduce el escurridizo 0. Trucos parecidos con palabras de más de nueve letras se usan en el resto de casos en que aparece el cero.

Si alguien está interesado en encontrar pipoemas en otras lenguas, debe saber que los hay. Basta con hurgar lo suficiente en Internet. Y un último consejo: al manejar pipoemas hay que asegurarse de contar bien. A George Gamow, un científico famoso (entre otros logros, fue uno de los padres de los modernos conceptos de la física nuclear aplicados a la formación de las estrellas) en una ocasión le reprocharon en *Scientific American* que hubiera mencionado a π como 3,14158 en lugar de los correctos 3,14159. La razón es que Gamow, que era ruso, nacionalizado americano y políglota, deletreó mal el verso «*Que j'aime à faire apprendre*» de una versión mnemónica en francés de π... y lo escribió mal, sin una de las «p» de *apprendre*.

Un caso especial dentro de las formas poéticas lo ocupa el *haiku*, el especial terceto japonés. Se cultiva ya en muchos idiomas y lugares, y π no iba a ser una excepción. Aunque hay *haikus* que tratan sobre π, el ingenio reside en componer un *piku*, una variante matemática del *haiku*. Mientras que el *haiku* es un terceto con la estructura silábica 5-7-5 (es decir, el primer verso tiene 5 sílabas; el segundo, 7, y el tercero, de nuevo 5), el *piku*, que también es un terceto, cuenta con una exigencia más: sus palabras deben tener un número de letras igual a la cifra decimal correspondiente de π.

En lengua inglesa ofrecemos una muestra de *piku* que es, además, autorreferencial, pues describe a π:

«*Can I know a cycle,*
according to nature round,
and never complete?».

(«¿Puedo saber de un ciclo,
acorde con la naturaleza, redondo,
sin completarse nunca?»)

Otro caso tangencial lo constituyen los que usan poemas ya existentes y sistemas especiales de codificación. Entre quienes se dedican a tan inhabitual actividad figura Mike Keith, un entusiasta pimaníaco a quien debemos una versión sui géneris del poema *The raven (El cuervo)* de Edgar Allan Poe. La versión de Keith se titula *Near a raven*. Pero eso no es nada: el propio Keith ha incrementado su repertorio y ha escrito *Cadaeic cadenza*, una obra de mayor enjundia que amplía el poema anterior con fragmentos de Lewis Carroll, Omar al-Khayyam, William Shakespeare y otros autores. La *Cadaeic cadenza* permite almacenar 3.834 dígitos, lo que es todo un logro, por no decir que parece imposible. Lo de *Cadaeic* quizá necesite una explicación:

C a d a e i c
3. 1 4 1 5 9 3

Un aspecto distinto al tratado hasta ahora es el de la capacidad de algunos seres humanos para retener en la memoria las cifras de π, usen o no versos para ello; se trata de una actividad entre el deporte y la mística, inclasificable pero real. No es extraño, por lo tanto, que muchos cultivadores de ese hobby, auténticos atletas de la memoria imposible, aparezcan en las páginas del libro Guinness... y a veces también en los de matemáticas.

El estado de los récords de memoria es algo efímero, pues evoluciona con el tiempo y, como es lógico, cada memorión intenta batir la marca de su predecesor. Existe incluso una escisión de los memoriones que evalúan no sólo el número de cifras recordadas sino también la velocidad a la que pueden reproducirlas. Pero no entraremos en sutilezas: si nos limitamos a la pura memoria, el récord lo ostenta un ucraniano, Andry Slyusarchuk, capaz de recordar treinta millones de cifras. Tan increíble es la cantidad que el Guinnes World Records no lo registró en su día como legítimo récord mundial.

El récord aceptado en 2006 era de cien mil dígitos y estaba en manos de un japonés, Akira Haraguchi. No obstante, no vayamos a pensar que sólo los pimaníacos se entretienen en estas tareas, ya que si se rebusca en la lista de memoriones se encuentran auténticas eminencias científicas reconocidas internacionalmente, como el estadounidense Alexander Aiken o el canadiense Simon Plouffe.

Pimúsica

En el terreno de la música, π no se encuentra de una manera tan profusa, a pesar de las buenas migas que tradicionalmente han hecho ambas materias entre sí. Recordemos que el sistema casi oficial en el mundo occidental es el del temperamento establecido por intervalos iguales de valor $\sqrt[12]{2}$. La escala diatónica, muy anterior, se define más o menos por lo que los entendidos llaman «intervalo de quinta», al que atribuyen el valor 3/2. Todos estos tecnicismos sólo sirven como preámbulo de lo que viene a continuación.

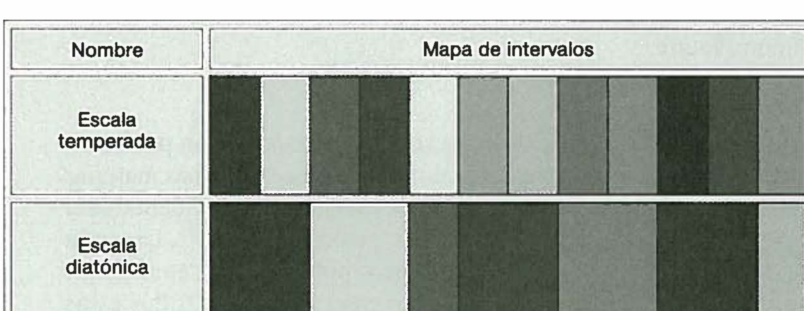
El temperamento

La escala musical occidental tiene su origen en Pitágoras y en las notas de la escala llamada diatónica (do, re, mi, fa, sol, la, si). Las notas correspondían en la versión pitagórica a la frecuencia de vibrado de una cuerda. *Grosso* *modo*, a frecuencias distintas, notas distintas. La separación entre vibraciones (notas) se medía por intervalos, que no son resultado, como podría pensarse, de restar una frecuencia a otra, sino de dividirlas entre sí. Los cocientes entre dos frecuencias daban fracciones sencillas y elegantes, como el intervalo de quinta, que indicaba el cociente de frecuencias entre una nota cualquiera y la que hacía cinco contando desde ella, y que valía 3/2. Estos intervalos culminaban en el de octava, cuando la escala volvía a empezar por la misma nota, y que correspondía a la fracción 2/1 = 2.

Veamos un ejemplo: si se pulsa la tecla central de un piano, sonará una nota, *la*, de una frecuencia igual a 440 hertzios (pulsaciones por segundo). Si se pulsa el siguiente *la*, situado siete teclas blancas más a la derecha, el nuevo sonido tendrá una frecuencia de 880 hertzios. La diferencia acústica entre ambas notas (el intervalo entre una y otra) se expresa en música con el cociente 880/440 = 2.

Este intervalo es el llamado «de octava». Dos notas separadas entre sí por un intervalo de octava (en nuestro ejemplo, *la*) suenan exactamente igual, solo que con alturas distintas. Pitágoras, que no tenía piano, constató este mismo comportamiento tañendo una simple cuerda, ya que si se pulsa una cuerda al doble de distancia que otra cualquiera, ambas pulsaciones proporcionan notas idénticas.

El problema de esta escala es que, aunque funcionaba bien con instrumentos como el violín, no medía bien algunas pequeñas diferencias entre notas, como, por ejemplo, las que se dan entre sostenidos y bemoles. Ello condujo a la introducción del «buen temperamento»: la equiparación de sostenidos y bemoles al resto de notas mediante la adopción de doce intervalos iguales, cada uno de amplitud $\sqrt[12]{2}$ con respecto al siguiente. La escala resultante, de doce notas, se bautizó como «temperada».



Las notas de la escala temperada son, de izquierda a derecha: *do, do#, re, re#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, si♭, si, do.* Las de la escala diátonica son: *do, re, mi, fa, sol, la, si, do.*

El valor $\sqrt[12]{2}$ resulta del cálculo siguiente: si hay que dividir un intervalo de medida 2 en partes iguales y la manera de establecer la medida es dividir las frecuencias, el modo de realizarlo es crear doce intervalos consecutivos en una progresión geométrica cuya razón sea $\sqrt[12]{2}$. Esta serie de doce intervalos, uno por cada nota, es:

$$\sqrt[12]{2}, (\sqrt[12]{2})^2, (\sqrt[12]{2})^3, (\sqrt[12]{2})^4, (\sqrt[12]{2})^5, (\sqrt[12]{2})^6, (\sqrt[12]{2})^7, (\sqrt[12]{2})^8, (\sqrt[12]{2})^9, (\sqrt[12]{2})^{10}, (\sqrt[12]{2})^{11}, (\sqrt[12]{2})^{12}=2.$$

En el siglo XVIII se originó un nuevo sistema interválico en el que la quinta valía $600 + 300/\pi$. El nuevo temperamento lo ha desarrollado modernamente Charles Lucy (n. 1946) y lleva su nombre; hay que aclarar que se aparta poco de los sistemas más comunes, y que se trata de un sistema ya patentado.

Otro aspecto musical de π, más ameno que intelectual, es la posibilidad de «oír» los decimales de su desarrollo, ya que en Internet existen programas que «tocan a p». En concreto, asignan una nota musical a cada una de las diez primeras cifras de la constante. Cada vez que aparece una cifra, el programa le asigna la nota correspondiente y la reproduce por los altavoces. Como los dígitos de π son (o lo parecen) aleatorios, lo que se escucha es una composición aleatoria. Lo más probable es que el oyente caiga en el tedio, tanto más cuantos más dígitos escuche, aunque tampoco hay que descartar que percibir algo aleatorio y muy, muy largo, pueda producir a alguien placer. En la escala diatónica existen 7^{10} posibilidades distintas de construir una melodía con siete notas puras (no hay sostenidos ni bemoles); en combinatoria se diría que hay 7^{10} combinaciones con repetición. De esas posibilidades hemos de descontar las secuencias en que una misma nota se repite, pues el resultado es particularmente aburrido. Hay siete alternativas de ruido continuo basadas en elegir la misma nota para cada decimal.

El cine, la literatura y π

Las apariciones de π en el séptimo arte se cuentan por miles, aunque por lo general se reducen a meras anécdotas que buscan añadir un halo de misterio a situaciones concretas, como en el caso del nombre clave de la organización de evadidos al mundo libre en *Torn Courtain (Cortina rasgada)*, de Alfred Hitchcock. La naturaleza matemática de π raramente se explora, o se hace de un modo efectista y superficial, como en el caso de π (o *Pi*), película dirigida en 1998 por el estadounidense Darren Aronofsky. El filme se centra en la aventura intelectual del genio matemático Max Cohen, sumido en un proceso de locura progresiva inducido por su obsesión con ciertas cifras. En él se juega con la idea del significado oculto de los números, una noción próxima a la de la cábala hebrea, pero supeditando en todo momento el rigor matemático a la componente dramática.

Una cinta en la que π pudo desempeñar un papel central fue en la superproducción estadounidense de ciencia-ficción *Contacto* (1997), dirigida por Robert Zemeckis, con Jodie Foster en el papel de la astrónoma Eleanor Arroway. Pudo ser el gran filme sobre π, pero el guión final dejó la cifra de lado. En la novela original, *Contact* (1985), del conocido cosmólogo Carl

Sagan y en la que se basa el largometraje, π es extraordinariamente importante, hasta el punto de suscitar todo un debate a nivel científico. Pero vayamos por partes.

Contacto es un filme sobre el posible contacto con civilizaciones extraterrestres y los problemas, sobre todo religiosos, que dicho acercamiento podría originar entre nosotros. Cuenta la aventura de la Dra. Arroway, empezando por su puesto como escucha a cargo de varios radiotelescopios, la detección de una señal procedente del espacio exterior, la construcción de un artefacto generador de un «agujero de gusano» en la textura del universo y el contacto con los extraterrestres. Estos últimos plantean a Arroway la posibilidad de que haya un mensaje escondido entre las cifras decimales de π. Un mensaje oculto entre la trama real de lo existente, algo que no podrían trucar ni los mismísimos extraterrestres, pues su disposición sería privilegio sólo de Dios, creador del universo.

El mensaje, sugieren los extraterrestres, está escrito en el desarrollo de π: hay un fragmento enorme de las cifras decimales de π, formado sólo por ceros y unos, que puede disponerse a lo largo de un cuadrado y da un círculo perfecto. Está escrito desde toda la eternidad en la naturaleza, dentro de π, así que ¿lo puso Dios? En el último capítulo hablaremos de *Contact* y de las cifras decimales de π, incluyendo la posibilidad de la existencia de un cuadrado tal y de un círculo de ceros.

En un clásico moderno de la literatura de humor, la novela del autor británico Douglas Adams *Guía del autoestopista galáctico (The hitchhiker's guide to the galaxy)*, una computadora gigantesca comunica a los hombres la respuesta a los enigmas de la vida, la propia existencia y a casi todo, vamos. La respuesta, un tanto sorprendente, es «42». Para algunos pimaníacos la respuesta de la computadora fue más allá de la clave humorística y la consideraron una provocación, de modo que pusieron manos a la obra. Desecharon 42 por demasiado sencillo y buscaron con *The π searcher* combinaciones algo más creativas, como 424242. Apareció en la posición 242.423. Es casi seguro que persistirá la búsqueda.

El número π y las leyes

Resulta aquí un poco extraño un apartado dedicado a algo en apariencia tan distante de π como el derecho, la legislación y temas afines, pero es que este número se encuentra en todos los ámbitos. Ya en fecha tan lejana como 1836 y en la avanzada y posrevolucionaria Francia hubo un ciudadano-científico, LaComm, que no sólo pretendía que π equivaliera a 3,25, sino que, sorprendentemente, fue galardonado por varias instituciones por sus descubrimientos sobre π. Y eso ocurrió cuando ya se habían descubierto más de un centenar de decimales exactos de π.

En 1997, Robert Zemeckis dirigió una adaptación cinematográfica de la novela de Carl Sagan Contact, *en la que un grupo de extraterrestres defiende la existencia de un mensaje oculto entre los decimales del número π. La actriz Jodie Foster (derecha) es la protagonista del filme.*

AGE FOTOSTOCK

La noticia más conocida en el terreno legislativo proviene de Indiana, en Estados Unidos. Allí, en el año 1897, un ciudadano que respondía al nombre de Edward Goodwin y que había mostrado su aptitud para la gimnasia geométrica, habiendo incluso publicado algo (sólo un titular y un corto extracto) en el *American Mathematical Monthly*, una revista seria, persuadió a los legisladores del estado para que aprobaran el texto de una presunta proposición de ley (la *bill* n.º 246), que debía ser refrendada por la cámara de representantes del estado. Hasta aquí todo parecía normal. Lo extraño eran las consecuencias de la ley, en caso de aprobarse, ya que ésta postulaba, según se dedujo de laboriosos cálculos posteriores, que

$$\pi = \frac{16\sqrt{2}}{7} \approx 3,232.$$

También procuraba que tal igualdad se incorporara gratuitamente en los libros de texto del estado; en los demás lugares, por el acceso a la «verdad» (es decir, a la igualdad anterior) se pagaría un royalty a Mr. Goodwin. En resumen, Goodwin y los eventuales legisladores no tuvieron en cuenta el hecho, ya demostrado por Lindemann más de treinta años antes, de que π fuera trascendente, la correspondiente imposibilidad de la cuadratura del círculo y la historia de varios siglos, pues ya se habían calculado más de cien decimales exactos de π. Nada de eso inquietaba a los próceres de Indiana que, seguramente, lo ignoraban.

La proposición de ley fue aprobada por más de un comité de la Cámara baja y pasó al senado del estado con la recomendación de que debía ser votada. Afortunadamente, pero por azar, esto nunca se llevó a término. Alguien enseñó el texto a un profesional que casualmente estaba allí de paso, el profesor Clarence Abiathar Waldo (1852-1926) para que escribiera un prólogo al texto, y éste respondió cortésmente que estaba ya un poco cansado de descubridores de la cuadratura del círculo. Luego, horrorizado al leer con detalle el texto, aleccionó de modo adecuado a los senadores. Finalmente, los legisladores de la Cámara alta fueron informados por Waldo de lo absurdo de la ley, y la famosa *bill* nº 246 no fue consagrada como tal.

El número π y el arte

En el Palais de la Découverte de París existe un friso dedicado a π; se trata de una imagen que caracteriza al lugar. El friso reproduce los algo más de 600 decimales calculados por William Shanks en 1873; en realidad, el eminente matemático inglés llegó al 707, pero D. F. Fergusson descubrió en 1944 que había cometido un error a partir del 528. Los siguientes versos de Nicholas Rose fueron creados al respecto:

«Seven hundred seven, Shanks did state,
Digits of π he would calculate.
And none can deny
It was a good try
But he had erred in five twenty eight».

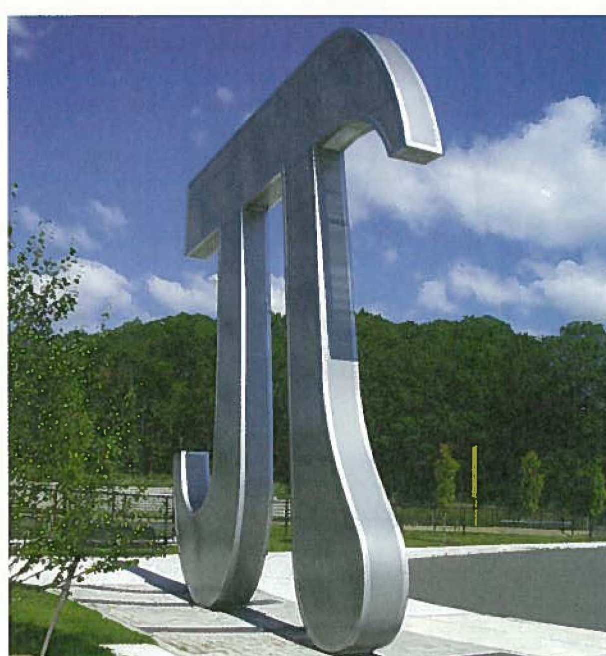


Foto superior: Los rectángulos coloreados son todos iguales, pero se colocan de manera que su superficie visible sea proporcional a la cifra correspondiente de π. Cada rectángulo actúa de pantalla, ocultando el anterior.
Foto derecha: Escultura de Barbara Grygutis erigida en Connecticut que representa a π.

EJA2K (ARRIBA); HENRI ABBOTT TECHNICAL HIGH SCHOOL (ABAJO)

(«Setecientos siete, dijo Shanks,
Dígitos de π que calcularía.
Y nadie puede negar
Que fue un buen intento
Pero ha errado en cinco veintiocho.»)

La auténtica obra de arte basada de modo deliberado en π y sus cifras se encuentra en Toronto y es una creación de la artista canadiense Arlene Stamp: el vestíbulo de la estación de metro Downsview es un gigantesco mosaico, elaborado con rectángulos, todos de diferente anchura, que se solapan unos con otros. La distancia a la que lo hacen no es caprichosa, aunque hay que ser un geómetra, y estar previamente informado, para percatarse de ello. Cada rectángulo invade al siguiente dejando sólo a la vista una par-

LEONHARD EULER (1707-1783)

El suizo Euler ha sido uno de los matemáticos más eminentes de la historia. Estaba tan bien dotado para el cultivo de esta ciencia que después de quedarse ciego su fenomenal memoria y capacidad para el cálculo mental le permitieron continuar trabajando hasta su muerte, acaecida más de veinte años después. Falleció en Rusia, país al que le llevó la zarina Catalina II la Grande seducida por su fama y por los informes del también suizo Daniel Bernoulli; allí residió de modo intermitente desde 1737. Sus obras completas (tan sólo las científicas), en fase de compilación, ocupan ya unos ochenta volúmenes. Euler fue quien bautizó de modo definitivo a pi con el símbolo griego π, y también introdujo otras notaciones, como *f(x)* para las funciones de variable *x*, *i* para la unidad imaginaria, la constante e y el símbolo de sumatorio Σ. Sus aportaciones son incontables, y han marcado una impronta indeleble en campos como el cálculo infinitesimal, las funciones, la teoría de números, la topología, la teoría de grafos, la física y la astronomía; incluso un asteroide lleva su nombre. En el terreno de las series, dio a conocer innumerables de ellas relacionadas con el número π.

Sello de la Unión Soviética estampado en el año 1957 en conmemoración del 250º aniversario del nacimiento de Euler.

ARCHIVO RBA

te del total: si el total es 1, la parte visible es proporcional a una cifra decimal de π. El mosaico empieza por «1», la primera cifra decimal de *3,1415926535...*, y sigue el orden de los dígitos del número milagroso.

Como π es aleatorio (o así lo parece), nadie adivina a qué regla puede obedecer la colocación de las losetas rectangulares. Pero, como advirtió en su día el matemático Ivars Peterson, hay un orden en medio del aparente azar.

En la puerta de la Henry Abbott Technical School, situada en Danbury, Connecticut, existe una estatua de π de casi 20 m erigida por la escultora Barbara Grygutis. Ésta se ilumina de noche y, sin duda, recuerda a los futuros técnicos que se encontrarán con la constante en un momento u otro de sus estudios.

En la también estadounidense ciudad de Seattle, uno puede encontrarse en pleno paseo con π. La estatua se situó temporalmente en una escalinata próxima al museo de Arte. En la entrada de la Universidad Técnica de Berlín se encuentra asimismo un mosaico de la constante.

Existe una obra de arte estrictamente matemática, la fórmula

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

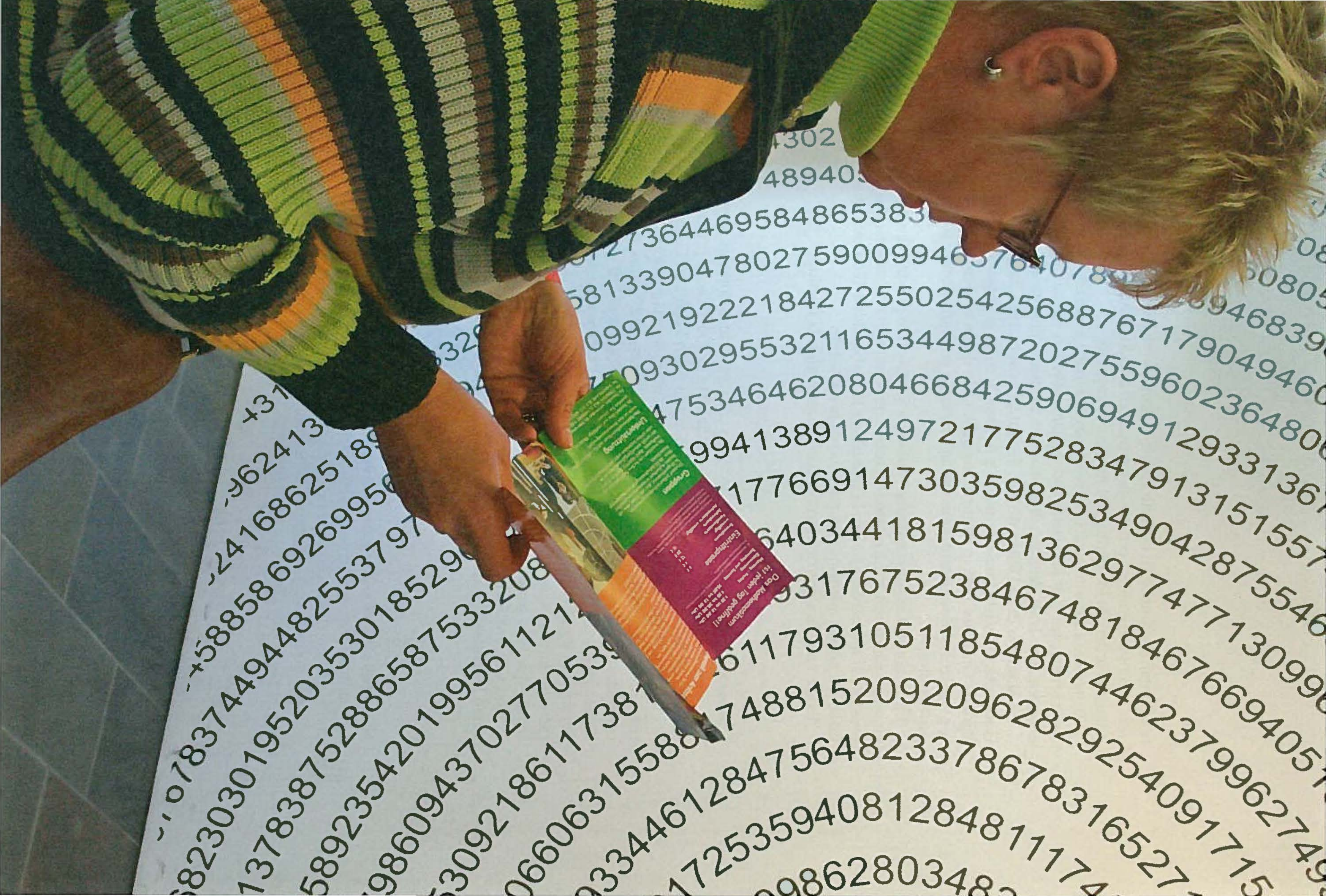
que aúna en una sola expresión las cinco constantes más notables (*e*, π, *i*, 1 y 0). Considerada la fórmula más bella de toda esta ciencia, el primero en darla a conocer, además de demostrarla, fue el suizo Leonhard Euler.

Quizá Ludolph van Ceulen (1540-1610) no compartiría esa opinión. Tras trabajar arduamente con circunferencias y polígonos de 2^{62} lados, el geómetra alemán llegó a una aproximación de π, primero con 20 y luego con 35 decimales. Tal fue su fervor y entusiasmo que ordenó que tal hazaña se perpetuara esculpida en la lápida de su tumba para edificación de generaciones futuras. No se trata de una gran obra de arte, pero a Van Ceulen seguro que se lo parecería.

Para Clifford Pickover, matemático y divulgador, la fórmula conocida como fórmula de Stirling (1692-1770),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

es tan bella matemáticamente que casi conmueve a los especialistas que la contemplan. No sé si el entusiasmo del lector llegará tan lejos, pero sí es cierto que en ella se reúnen la exponenciación de *n*, su potenciación a la *n*-ésima potencia de sí misma, su factorización ($n! = n\,(n\text{-}1)\,(n\text{-}2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ indica «factorial» de *n*) y su radicación. □



CAPÍTULO 6

Una segunda ojeada al infinito

«Las computadoras no sirven para nada.
Sólo pueden dar respuestas.»
PABLO PICASSO

En el Museo de las Matemáticas de Giessen (Alemania) se expone una curiosa recreación artística de la infiniud del número π (izquierda). Cada 14 de marzo, el Mathematikum *de Giessen y otros museos similares de todo el mundo celebran el Día de π.*

MAURITIUS IMAGES

Ocupémonos ahora de las infinitas cifras de π, un infinito que tenemos muy próximo y que quizá requiere menos imaginación que la utilizada por Georg Cantor.

El Premio Nobel de Física Richard Feynman (1918-1988) se asomó a la infinitud de π para darse cuenta de que en su desarrollo había una curiosa ristra de nueves seguidos:

3, 1415926535897 9323846264338 3279502884197 1693993751058
2097494459230 7816406286208 9986280348253 4211706798214
8086513282306 6470938446095 5058223172535 9408128481117
4502841027019 3852110555964 4622948954930 3819644288109
7566593344612 8475648233786 7831652712019 0914564856692
3460348610454 3266482133936 0726024914127 3724587006606
3155881748815 2092096282925 4091715364367 8925903600113
3053054882046 6521384146951 9415116094330 5727036575959
1953092186117 3819326117931 0511854807446 2379962749567
3518857527248 9122793818301 1949129833673 3624406566430
8602139494639 5224737190702 1798609437027 7053921717629
3176752384674 8184676694051 3200056812714 5263560827785
7713427577896 0917363717872 1468440901224 9534301465495
8537105079227 9689258923542 0199561121290 2196086403441
8159813629774 7713099605187 0721134**999999**...

Eso ocurre en el punto 762 y se llama, muy apropiadamente, «punto Feynman». Dado que en un número con decimales que surgen al azar la probabilidad de que aparezcan seis nueves seguidos es muy baja, tan sólo de un 0,08 %, la observación de Feynman es todavía más relevante. ¿Tiene ésta importancia? Se desconoce, como muchas otras cosas referentes a π.

Otro caso de vista privilegiada podría ser el de la secuencia 0123456789, que se encontró en la posición 17.387.594.880. En esta ocasión no fue Feynman quien lo detectó, sino un programa informático.

Construyamos ahora un cuadrado mágico, es decir, un cuadrado donde filas, columnas y diagonales suman lo mismo, en este caso, 65:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Este cuadrado mágico lo diseñó el estadounidense T. E. Lobeck.

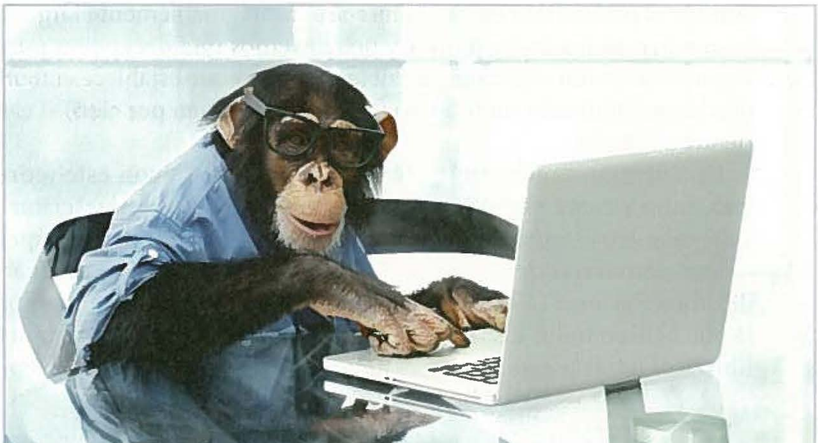
Vamos ahora a los decimales de π. Para cada número del cuadrado, llamémosle *n*, tomamos el dígito que encontramos en esa posición, es decir, la cifra *n* del desarrollo decimal de π. Si nos fijamos en el primer número del cuadrado, el 17, vamos al dígito decimal 17, que resulta ser un 2. Lo ponemos en lugar del 17, y así sucesivamente. De este modo obtendremos otro cuadrado en cuyos márgenes anotaremos las sumas de filas y columnas:

2	4	3	6	9	(24)
6	5	2	7	3	(23)
1	9	9	4	2	(25)
3	8	8	6	4	(29)
5	3	3	1	5	(17)
(17)	(29)	(25)	(24)	(23)	

La sorpresa surge cuando se observa que la suma de cada columna figura entre las sumas de cada fila. Parece un truco de prestidigitación, solo que en matemáticas no hay magia que valga. ¿Por qué sucede esto? También se desconoce. En realidad, sabemos tan pocas cosas de π y del infinito...

Monos, teclados y bibliotecas

Vamos a emprender un paseo por un camino desconocido a través de lo que no sabemos y tal vez no sepamos nunca acerca de π. Además de elevarnos a las alturas eximias del pensamiento humano y a la frontera misma de lo desconocido, este recorrido permite que nos adentremos en el terreno de la anécdota y la leyenda.



Un ejército de monos tecleará, si el tiempo del que disponen es infinito, cualquier texto finito imaginable.

ISTOCKPHOTO

En la tradición anglosajona, Darwin y el darwinismo ocupan un lugar especial. Al publicar su obra *El origen de las especies*, Charles Darwin ofendió a muchos «espíritus bienpensantes» al sugerir que la evolución humana no había seguido caminos distintos a la animal. La frase «el hombre desciende del mono» es una grosera simplificación de la tesis darwiniana, pero ha quedado como paradigma de toda una doctrina biológica. De ahí que cualquier referencia a los monos ya de entrada sugiera polémica científica. Por otra parte, la mención del teclado de una máquina de escribir tenía en tiempos victorianos resonancias tecnológicas y modernas. Juntemos las dos, monos y teclados, y obtendremos un cóctel potencialmente explosivo. La historia de los monos y los teclados es un clásico cuyas raíces parecieron en su día darwinianas y modernas a la vez.

Supongamos que una familia de monos es obsequiada con un teclado para cada uno de sus miembros; obviaremos la realidad, que se ha comprobado que no es muy halagüeña. De hecho, se ha experimentado con macacos y se ha visto que al teclear producen ingentes cantidades de páginas repletas de la letra «s», que por alguna misteriosa razón les es muy grata. Supongamos, por consiguiente, que los monos se comportan como es de esperar de animales responsables y teclean de modo más o menos aleatorio símbolos sobre hojas de papel, y que el proceso dura y dura.

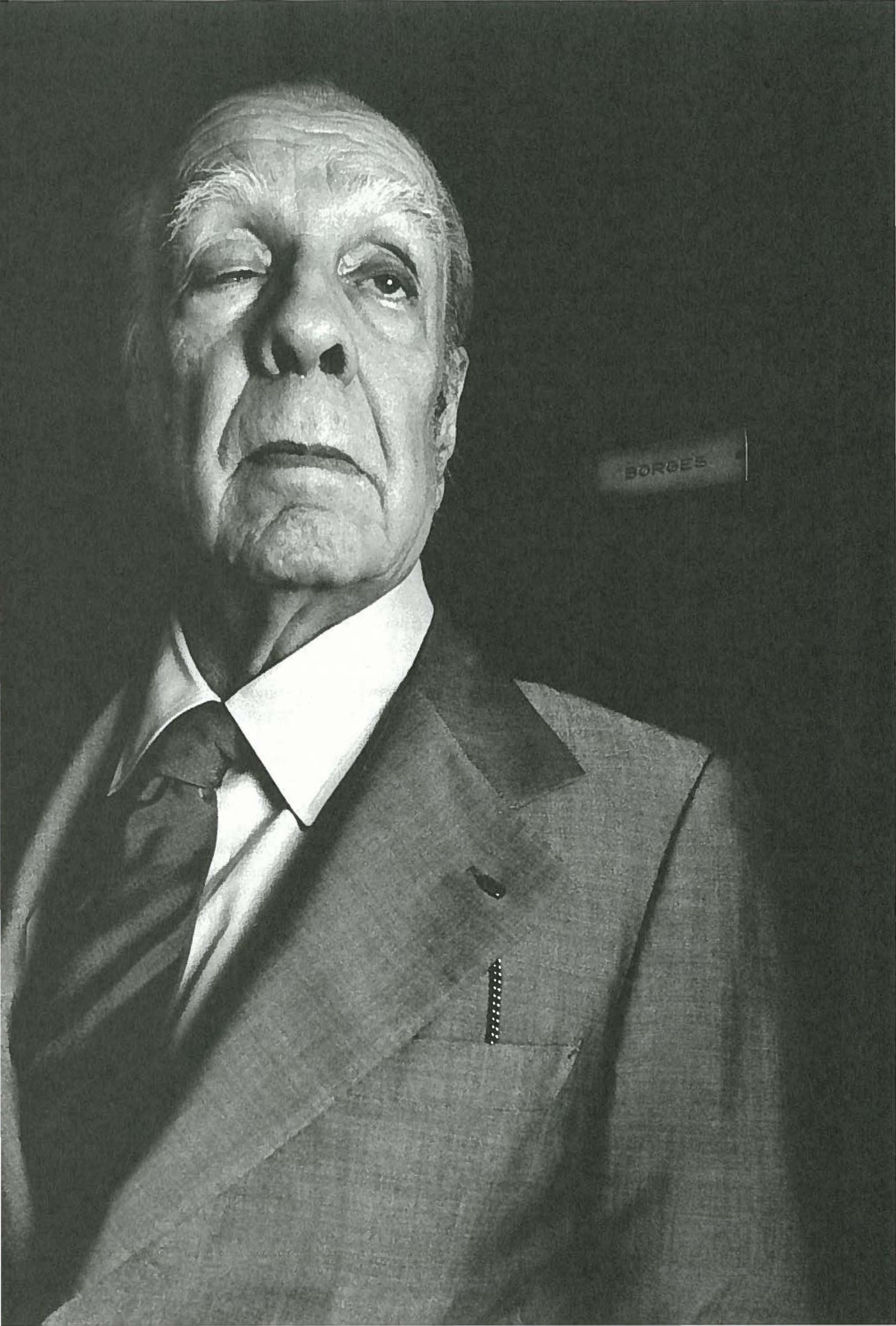
El llamado «teorema de los monos teclistas» establece que si el periodo de tiempo de tecleo es infinito, los monos casi seguro que escribirán un texto inteligible dado de antemano. Es decir, si no hay limitación de tiempo, el grupo de monos abandonado ante el teclado acabará escribiendo, por ejemplo, *El Quijote* de manera exacta, letra a letra, o, si se prefiere, este mismo libro.

En teoría de la probabilidad «casi seguro» significa «en el límite» o «con probabilidad tendiendo a uno». Tiene un significado nada ambiguo, muy matemático. Ahora bien, eso no es obstáculo para que en un momento dado, aunque el plazo hasta ese momento sea inimaginablemente largo, se mire lo que han tecleado los monos y nos llevemos una decepción porque no hayan escrito aún algo comprensible. Lo único que establece el teorema es que la probabilidad tiende a uno (algo seguro al cien por cien) si el tiempo tiende a infinito.

Una versión mucho más literaria y relacionada con este teorema se encuentra en una narración de Jorge Luis Borges, el gran escritor argentino, maestro escrutador del infinito y a quien debemos tantas aproximaciones visionarias del universo. En *La biblioteca de Babel*, una narración del libro *Ficciones* (1944), Borges describe una biblioteca inimaginable en la que figuran todos los libros posibles. Le basta con limitar su tamaño del libro a N letras o signos, con N lo bastante grande para que quepa hasta

El escritor argentino Jorge Luis Borges (1899-1986) describió en 1941 una «biblioteca total» en cada uno de cuyos cubículos hay 410 libros de idéntica extensión. A la derecha, Borges delante de su casa de Buenos Aires, en 1983.

GETTY IMAGES


BORGES

un libraco enciclopédico. Según dice el texto de Borges, en esta biblioteca están todas las permutaciones de los signos básicos de la escritura (caracteres, signos de puntuación y espacios blancos separadores de palabras) impresas en formato libro. Para ser precisos, efectuados algunos cálculos indispensables, la biblioteca imaginada por Borges contendría unos $25^{1132000} \approx 1{,}956 \cdot 10^{1834097}$ libros como mínimo.

No vamos a ofrecer aquí una prueba rigurosa y detallada del teorema de los monos teclistas, pues sería demasiado larga y requeriría una exposición un tanto aburrida de conceptos propios de la teoría de la probabilidad, pero, a grandes rasgos, ya se adivina que el contenido del teorema es cierto. Supongamos que el teclado es de 60 teclas. Una secuencia sencilla de signos, como *To be or not to be* (el célebre «ser o no ser» de *Hamlet*), tiene 18 pulsaciones, y la probabilidad de no teclearla en n tentativas es representable por

$$\left(1-\frac{1}{60^{18}}\right)^{n},$$

y el límite para $n \to \infty$ de toda la expresión es cero. Si, para simplificar, suponemos que en lugar de un mono hay k monos, el límite permanece inalterable, pero intuitivamente se llega antes, su convergencia se acelera.

Consideraciones algo más sofisticadas llevan a la conclusión esperada: no cabe duda matemática de que, con tiempo infinito, los monos acabarán reproduciendo *Hamlet*. Cualquier libro imaginable es, en definitiva, una secuencia de letras, unas variaciones con repetición de signos, de tamaño finito. Infinitos monos escribirán cualquier libro si el tiempo para hacerlo es infinito.

Ahora bien, también es cierto que desde el punto de vista de la realidad cotidiana es muy improbable que esta circunstancia se produzca en un tiempo accesible. ¿De qué nos sirve saber que unos monos pueden reproducir *El Quijote* si el tiempo que van a emplear en conseguirlo es incluso mayor que la edad del universo? Para escribir algo con sentido, no ya *El Quijote*, sino una simple frase, los monos emplearían seguramente un tiempo inconcebible.

De hecho, un físico experto en cuestiones termodinámicas nos dirá que la reproducción de *Hamlet*, por ejemplo, es matemáticamente probable, pero físicamente imposible. De hecho, el universo es finito en partículas y finito en el tiempo; aunque las partículas sean un googol (término acuñado por un sobrino del matemático Edward Kasner y equivalente a 10^{100}) de partículas y el Big Bang hubiera acaecido hace 10.000 millones de años, incluso si sustituimos partículas por monos y llenamos el universo de simios tecnológicos teclistas, éstos tienen una probabilidad despreciable de teclear *Hamlet* en lo que llevamos transcurrido de eternidad.

El relato de Borges en *La biblioteca total* es mucho más poético y vale mucho más que nuestras simples palabras; reproduzcamos algún párrafo descriptivo de esta maravillosa biblioteca:

> «Todo estará en sus ciegos volúmenes. Todo: la historia minuciosa del porvenir, *Los egipcios* de Esquilo, el número preciso de veces que las aguas

del Ganges han reflejado el vuelo de un halcón, el secreto y verdadero nombre de Roma, la enciclopedia que hubiera edificado Novalis, mis sueños y entresueños en el alba del catorce de agosto de 1934, la demostración del teorema de Pierre Fermat, los no escritos capítulos de Edwin Drood, esos mismos capítulos traducidos al idioma que hablaron los garamantas, las paradojas que ideó Berkeley acerca del Tiempo y que no publicó, los libros de hierro de Urizen, las prematuras epifanías de Stephen Dedalus que antes de un ciclo de mil años nada querrán decir, el evangelio gnóstico de Basílides, el cantar que cantaron las sirenas, el catálogo fiel de la Biblioteca, la demostración de la falacia de ese catálogo. Todo, pero por una línea razonable o una justa noticia habrá millones de insensatas cacofonías, de fárragos verbales y de incoherencias. Todo, pero las generaciones de los hombres pueden pasar sin que los anaqueles vertiginosos —los anaqueles que obliteran el día y en los que habita el caos— les hayan otorgado una página tolerable.»

(Jorge Luis Borges, *La biblioteca total.*)

Las infinitas cifras de π

Todo lo que hemos contado es más o menos ameno y no está tan lejos de π y de su desarrollo decimal como podría parecer. Si, en vez de alimentar a nuestros queridos monos con un teclado tan complejo lo hiciéramos con un teclado numérico, obtendríamos secuencias más o menos azarosas no de letras, sino de números. Una ristra de números. ¿Y qué es π sino una ristra de números?

La biblioteca de Borges podemos sustituirla por una biblioteca en la que en lugar de obras literarias de extensión finita (la mayor parte de ellas serían colecciones pseudoliterarias de signos sin sentido) obtendríamos libros cuyo contenido serían secuencias numéricas finitas, con principio y final.

Ahora bien, hay una diferencia fundamental entre esos entes de ficción creados por la imaginación anglosajona o la pluma de Borges y la secuencia de decimales de π. La diferencia es que se trata de entes de ficción finitos, y π no lo es, sino que posee infinitos decimales; hay en π una infinidad numerable de dígitos.

No hay mono teclista que pueda con π, ni biblioteca alguna, por inmensa que sea, que pueda albergar a π y a sus dígitos. Nos hemos asomado al balcón del infinito, pero el desarrollo de π nos contempla inmutable desde allí. Inasequible.

La indemostrable normalidad de π

¿Es π normal? Es paradójico que la pregunta sin respuesta (todavía) que muchos matemáticos se hacen es si π es un número normal. Un número irracional se dice que es normal en base 10 cuando en su expansión decimal la frecuencia de sus dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 es la misma para todos ellos, y lo mismo ocurre con las combinaciones de dos cifras, 00 a 99, de tres cifras 000 a 999, etcétera.

Cuando un número es normal escrito en todas las bases de numeración se dice que es absolutamente normal.

Cuando Kanada calculó un billón de dígitos de π hizo una estadística de las veces en que aparecía cada dígito:

Dígito decimal	N.º de veces que aparece el dígito
0	99.999.485.134
1	99.999.945.664
2	100.000.480.057
3	99.999.787.805
4	100.000.357.857
5	99.999.671.008
6	99.999.807.503
7	99.999.818.723
8	100.000.791.469
9	99.999.854.780
Total	1.000.000.000.000

La distribución de los dígitos realizada por Kanada no denuncia irregularidades que aparten a π de la normalidad, aunque una muestra de un billón de elementos pueda parecer insignificante.

Ahora bien, una cosa es conjeturar y otra demostrar, y lo cierto es que, aunque se sospeche, no se ha probado que π sea normal.

De hecho no se ha probado que π, ni e, ni $\sqrt{2}$, ni log 2, ni siquiera el número áureo (Φ) ni ninguna de las llamadas constantes más corrientes sean normales. Curiosamente, nunca se ha llegado a probar que sea normal un número del que se quiera demostrar de un modo explícito que es normal.

Más adelante mostraremos ejemplos de números que sí se sabe que son normales, pero han sido construidos ex profeso por el ingenio humano. En 1917 el matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) mostró el primer número normal.

La denominada constante de Chaitin,

$$\Omega = 0{,}00787499699...,$$

mide la probabilidad de que un programa seleccionado al azar detenga una determinada máquina de Turing. Su definición es francamente complicada, pues requiere conocer cómo funcionan los sumatorios, los bits de un programa, la máquina de Turing universal y otras minucias. Pero, en realidad, Ω también es un número normal, por poco normal que nos parezca dada su definición.

Los números normales no es que sean raros, puesto que hay una infinidad no numerable de ellos. La infinidad de números normales es equiparable a la de todos los números reales. Casi todos los números son normales, lo que ocurre es que son muy difíciles de encontrar para el matemático. Pertenece al reino de las conjeturas posibles el enunciado de que todo irracional algebraico es normal.

La insuficiente aleatoriedad de π

La aleatoriedad de π parece clara, pero sólo lo parece. Los hermanos Chudnovsky, especialistas en π, sometieron sus cifras a todos los tests de aleatoriedad imaginables, y π emergió siempre triunfante. Los números aleatorios, para entendernos, aquellos cuyas cifras parecen fruto del azar, se han intentado definir de muchos modos y durante bastante tiempo. Al final parece imponerse la definición de Andrei Kolmogorov, que pone el acento de modo preferente en la complejidad más que en el azar. Para Kolmogorov, un número es tanto más complejo cuanto más largo es el programa de cálculo mínimo que se aplica para describirlo. Está claro que si para describir un número el algoritmo o proceso mínimo que hemos de aplicar es tan largo como el número, éste debe de ser muy complejo (o muy aleatorio). Si para calcular N hemos de dar instrucciones por valor de N, entonces escribamos de una vez N y admitamos que tratamos con un número muy complejo, aleatorio.

Con π no ocurre exactamente eso, puesto que existen algoritmos que calculan sus cifras (¡sus cifras individuales, prefijadas!) y que son finitos y relativamente cortos; de modo que π no debe de ser aleatorio del todo. Por ejemplo, hay un programa informático descriptible en 158 caracteres que

ANDREI KOLMOGOROV (1903-1987)

Kolmogorov nació en la ciudad rusa de Tambov; su madre falleció en el parto y su padre fue deportado por participar en el movimiento revolucionario, de manera que fue criado por sus tías. En la década de 1930 ya se había labrado un nombre en el panorama matemático internacional al publicar *Fundamentos de la teoría de la probabilidad*, donde exponía la materia de un modo axiomático pero muy moderno. Su fama se incrementó luego al resolver, junto con uno de sus estudiantes, V. I. Arnold (n. 1937), el problema nº 13 de la famosa lista de Hilbert (en 1900 David Hilbert, a la sazón el mejor matemático del mundo, publicó una lista, casi mítica, con los 23 grandes problemas por resolver). Los fenómenos estocásticos y las cadenas de Markov figuran entre los entes matemáticos más estudiados por Kolmogorov. Su contribución más innovadora y difícil fue la teoría de la complejidad, o de la aleatoriedad, que son dos caras opuestas de la misma moneda. Sus últimos años, ya convertido en un respetable gurú de las matemáticas rusas, los dedicó a estos conceptos y a la matemática aplicada.

permite calcular 2.400 dígitos de π. Podemos decir, de un modo sencillo, que π quizá sea aleatorio, pero menos.

Los dígitos de π aparecen uno tras otro de un modo que nos parece caprichoso o azaroso. No se ha encontrado configuración o patrón alguno que nos permita saber qué va aparecer en una posición determinada. Sí que existen procedimientos para calcular una cifra cualquiera, aplicando una fórmula BBP y similares, aunque ello no establece ningún patrón ni nada parecido. Se supone que π debe de ser «débilmente aleatorio», pero nadie lo ha demostrado todavía.

Si toda secuencia de dígitos de π fuera aleatoria, entonces la constante sería un número normal. Pero el caso contrario por lo general no es cierto: un número puede ser normal y claramente no ser aleatorio. El denominado número de Champernowne, del que hablaremos más tarde, es normal y no es aleatorio, puesto que hay un método explicable en pocas palabras que permite construirlo.

La inaccesible universalidad de π

Limitémonos a la base 10 para simplificar. Un número-universo es un decimal que en su desarrollo contiene cualquier secuencia de números imaginable. Si, por algún procedimiento de codificación, convirtiéramos los dígitos en letras, podríamos hacer hablar a π y encontrar, al recorrer su expresión decimal, *Hamlet*, *El Quijote*, este mismo libro o cualquiera de los concebidos por Borges; las tesis y las refutaciones de las tesis, tratados y copias del mismo tratado que sólo diferirían en una letra, galimatías incomprensibles y extensiones inmensas de letras repetidas. Todo estaría en algún lugar, esperando pasivamente durante toda la eternidad para ser o no leído. Es una gimnasia virtual que requeriría un tiempo infinito.

Volvamos por unos momentos a Carl Sagan y a su novela *Contact*. En ella se supone que los extraterrestres embarcan a la Dra. Arroway en la búsqueda de un mensaje, que debe de ser de origen divino, pues está codificado desde la creación en las mismas entrañas de la naturaleza, en los decimales de π (escritos en base 11, aunque no entraremos en detalles). Al avanzar profundamente en la expansión de π, muchos millones de caracteres después de la coma, aparece una ristra de cifras, que, adecuadamente dispuesta en un plano, sólo consta de unos y ceros, y éstos configuran o dibujan un cuadrado de unos con un círculo de ceros en su interior. De la aparición de este cuadrado ¿se deduce realmente algo tan controvertido como la existencia de Dios?

Si se suman las 20 primeras cifras de π, da 100. Si se va más lejos, hasta el dígito 144, se obtiene el número de la Bestia, el apocalíptico 666, que aparece en la obra de san Juan. Pero no tenemos derecho a otorgar carta de trascendentalidad a esas casualidades, por divinas que nos parezcan, porque lo cierto es que dependen del sistema de numeración, y ésa es una obra muy humana.

Como humano era David Gawen Champernowne (1912-2000), que ideó un número normal en base 10. Éste halló la constante que lleva su nombre a los 21 años, antes incluso de terminar sus estudios. Es un ejemplo de número trascendente que, además, es un número normal y un número-universo. Se define de un modo tan sencillo que no parece real, pues basta con escribir seguidos todos los números, en su orden natural:

$$C_{10} = 0{,}1234567891011121314151617181920212223...$$

No cabe duda de que nos encontramos ante un número-universo, pues cualquier secuencia N de dígitos imaginable se encuentra en el desarrollo del número de Champernowne. Le hemos llamado C_{10}, pues ésta es su abreviatura más común en matemáticas: el 10 indica que está escrito en base 10. Además, hay infinitas variaciones de C_{10}, todas ellas tan números-universo como él. Lo dejamos a la imaginación del lector, para que las busque a modo de ejercicio.

Debemos añadir que el llamado número de Copeland-Erdös se construye como el de Champernowne, aunque se limita a los números primos, y es también normal (en base 10):

$$0,\ 2\ 3\ 5\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31...$$

Desde tal punto de vista, el desarrollo de π descrito por Sagan pierde hierro. No es tan raro encontrar números que contengan una circunferencia de ceros y unos. De hecho, hay infinitos, aunque no reflejen la relación circunferencia-diámetro, algo que sí lleva π grabado en su frente.

Y bien ¿es π un número-universo? No se sabe. Sólo se sabe que todos los números-universo son normales, pero eso no ayuda demasiado.

Lo que se puede y lo que no se puede probar

El lógico y matemático checo Kurt Gödel (1906-1978) probó algo muy desconcertante, algo que ponía límites por primera vez al conocimiento humano. Imaginen un sistema lógico, con sus teoremas y sus axiomas, que contenga la aritmética elemental entre sus proposiciones. Por ejemplo, la matemática convencional. ¿Es siquiera imaginable que sea contradictorio en algún punto? ¡Qué sandez!, dirá la mayoría. ¿Es imaginable que sea incompleto? ¿Puede abrigar enunciados imposibles de demostrar o de refutar valiéndose de las herramientas del sistema? La mayor parte de la gente también lo rechazaría. ¿Cómo va a ser incompleto un campo del pensamiento que incluya las reglas de la aritmética elemental? Todo teorema es cierto o es falso, y quizá tardemos mucho en saberlo, pero un día se esclarecerá... Un claro ejemplo es el teorema de Fermat: siglos esperando, pero al fin llegó la demostración.

Pues bien, Gödel probó que un sistema tal o es inconsistente o es incompleto, y no puede ser a la vez consistente y completo. Si es completo y podemos probarlo o refutarlo todo, entonces en algún punto es contradictorio, y si todo él es impecable, sin sombra de contradicción, entonces es incompleto. Siempre habrá alguna proposición imposible de demostrar o refutar.

Curiosa situación aquella en que nos ha colocado Gödel. Bertrand Russell definía jocosamente la matemática como aquella actividad en la que no se

KURT GÖDEL (1906-1978)

Matemático de origen checo, nacionalizado estadounidense, y especializado en lógica. En Europa trabajó con el llamado Círculo de Viena y emigró a Estados Unidos con el advenimiento del nazismo. La publicación de *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas relacionados* le hizo famoso. Su lectura, no obstante, es tan técnica que un librito de Ernest Nagel, que es una obra de divulgación (*Gödel's Proof*) se conoce más que el artículo original. En él Gödel dio a conocer sus teoremas de incompletitud que demuestran que un sistema lógico lo suficientemente grande como para incluir entre sus axiomas a los de la aritmética elemental no puede ser a la vez consistente y completo. Probó también que dentro de tal sistema no puede demostrarse la consistencia de la axiomática del mismo.

Ambas conclusiones son chocantes incluso en nuestros días y ponen un límite al campo matemático de modo similar a como el principio de indeterminación de Heisenberg se lo puso a la física.

Este resultado y otros que le siguieron convirtieron a Gödel en una figura casi mítica entre los científicos de todo el mundo. Incluso un libro de Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle*, ha llegado a ser un *best-seller*.

A lo largo de su vida, Gödel fue desarrollando una serie de depresiones y paranoias que culminaron en su dramática muerte, que parece de novela: se negaba a ingerir nada que no hubiese probado antes su mujer, por lo que cuando ésta cayó enferma y fue ingresada en un hospital, Gödel rehusó alimentarse y falleció de hambre.

Kurt Gödel y Albert Einstein en el Institute for Advanced Study de Princeton, Nueva Jersey.

LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

Georg Cantor se pasó una buena parte de su vida intentando probar esta hipótesis, que puede enunciarse así: llamemos *A* a un conjunto numerable, cuyo cardinal será $\aleph_0$. Definiremos $\aleph_1$ como el cardinal de $\wp(A)$, siendo $\wp(A)$ el conjunto de las partes de *A*:

$$\#\wp(A) = \aleph_1.$$

Llamemos ahora *c* al cardinal, no numerable, de los números reales, denominado el continuo real. Cantor llegó a la desigualdad:

$$\aleph_0 < c \leq \aleph_1.$$

Y creyó firmemente que entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$ no podía existir ningún cardinal, por lo que $c = \aleph_1$. Ésa es la hipótesis del continuo.
En 1963, el matemático estadounidense Paul Cohen (1934-2007) probó que tal hipótesis es indecidible, y que, por tanto, puede elegirse entre su certeza o su falsedad sin que se altere nada en el campo de la matemática convencional.

sabía qué se quería demostrar ni si lo demostrado era cierto. Gödel parece haber remachado el clavo. Ni siquiera sabemos si seremos capaces de demostrar algo algún día. El teorema de Gödel no es ninguna fantasía, pues se han encontrado ya algunas de tales proposiciones indemostrables, entre ellas la llamada hipótesis del continuo.

Seguramente las proposiciones indemostrables no hay que buscarlas entre las llamadas normales. Si la consecuencia de que algo sea indemostrable afecta de algún modo a otras cuestiones del devenir matemático habitual (el teorema de Fermat es un buen ejemplo) es poco probable que estemos ante una proposición gödeliana.

Interroguémonos por las últimas preguntas que nos ha suscitado π. ¿Tienen alguna respuesta? Ahora, no. ¿La tendrán en el futuro? Quizá.

No es que afirmemos que las incógnitas sobre π sean indemostrables. Muchos piensan que sólo lo serían si su afirmación o negación no tuviera repercusión en la matemática «convencional».

Digamos, pues, que algunas incógnitas sobre π guardan relación con el infinito, y se trata de un campo resbaladizo, en la frontera de las matemáticas, y en el que precisamente las conclusiones de Gödel han encontrado una resonante confirmación. □

ANEXO: LOS DIEZ MIL PRIMEROS DÍGITOS DE Π

π = 3,	nº de cifras
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 :	50
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 :	100
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 :	150
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 :	200
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 :	250
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 :	300
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 :	350
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 :	400
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 :	450
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 :	500
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 :	550
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 :	600
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 :	650
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 :	700
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 :	750
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 :	800
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 :	850
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303 :	900
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 :	950
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989 :	1.000
3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952 :	1.050
0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151 :	1.100
5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983 :	1.150
8175463746 4939319255 0604009277 0167113900 9848824012 :	1.200
8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744 :	1.250
9448255379 7747268471 0404753464 6208046684 2590694912 :	1.300
9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511 :	1.350
2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279 :	1.400
6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745 :	1.450
5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955 :	1.500
3211653449 8720275596 0236480665 4991198818 3479775356 :	1.550
6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000 :	1.600
8164706001 6145249192 1732172147 7235014144 1973568548 :	1.650
1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333 :	1.700
4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542 :	1.750

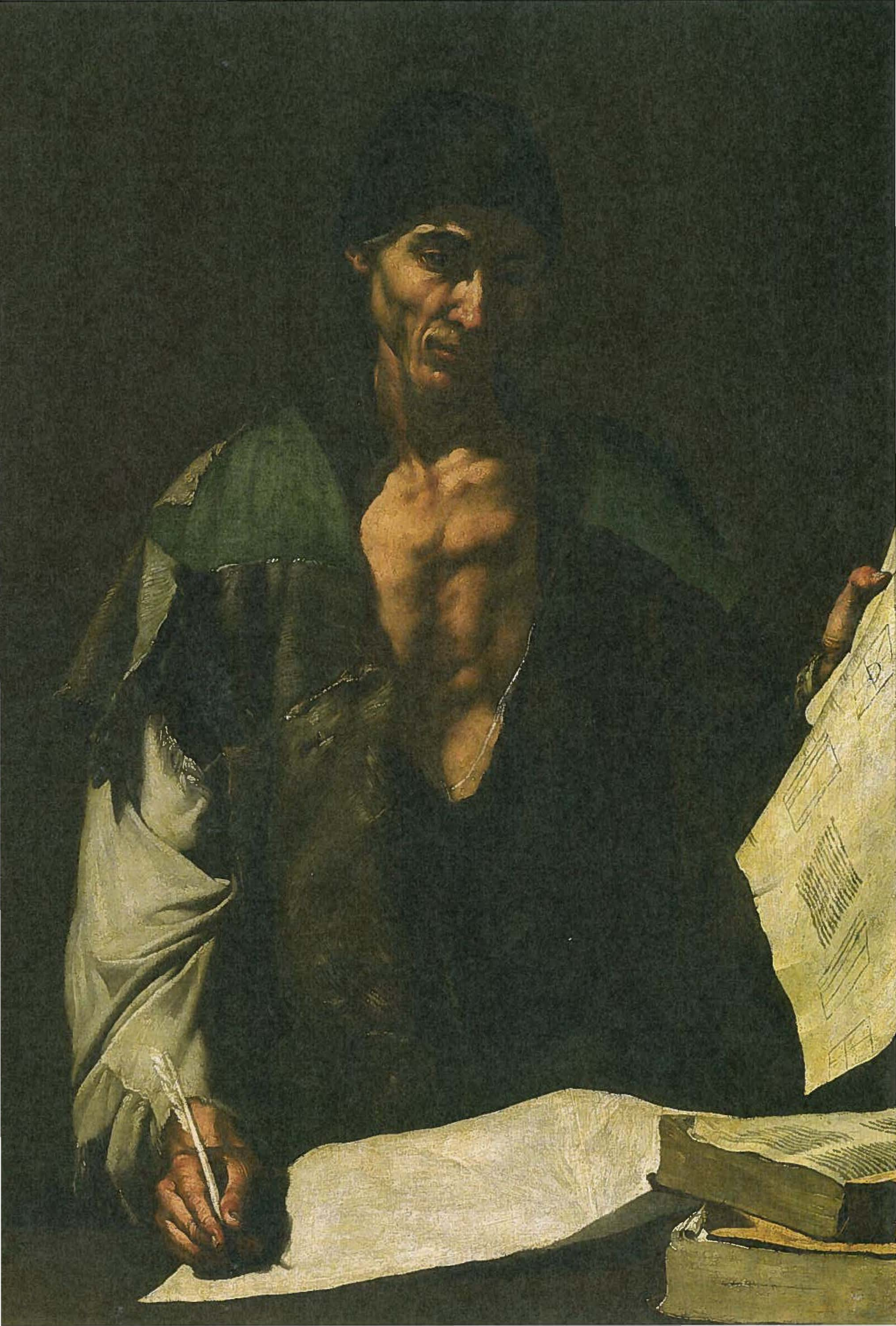
5688767179 0494601653 4668049886 2723279178 6085784383 : 1.800
8279679766 8145410095 3883786360 9506800642 2512520511 : 1.850
7392984896 0841284886 2694560424 1965285022 2106611863 : 1.900
0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287 : 1.950
4677646575 7396241389 0865832645 9958133904 7802759009 : 2.000
9465764078 9512694683 9835259570 9825822620 5224894077 : 2.050
2671947826 8482601476 9909026401 3639443745 5305068203 : 2.100
4962524517 4939965143 1429809190 6592509372 2169646151 : 2.150
5709858387 4105978859 5977297549 8930161753 9284681382 : 2.200
6868386894 2774155991 8559252459 5395943104 9972524680 : 2.250
8459872736 4469584865 3836736222 6260991246 0805124388 : 2.300
4390451244 1365497627 8079771569 1435997700 1296160894 : 2.350
4169486855 5848406353 4220722258 2848864815 8456028506 : 2.400
0168427394 5226746767 8895252138 5225499546 6672782398 : 2.450
6456596116 3548862305 7745649803 5593634568 1743241125 : 2.500
1507606947 9451096596 0940252288 7971089314 5669136867 : 2.550
2287489405 6010150330 8617928680 9208747609 1782493858 : 2.600
9009714909 6759852613 6554978189 3129784821 6829989487 : 2.650
2265880485 7564014270 4775551323 7964145152 3746234364 : 2.700
5428584447 9526586782 1051141354 7357395231 1342716610 : 2.750
2135969536 2314429524 8493718711 0145765403 5902799344 : 2.800
0374200731 0578539062 1983874478 0847848968 3321445713 : 2.850
8687519435 0643021845 3191048481 0053706146 8067491927 : 2.900
8191197939 9520614196 6342875444 0643745123 7181921799 : 2.950
9839101591 9561814675 1426912397 4894090718 6494231961 : 3.000
5679452080 9514655022 5231603881 9301420937 6213785595 : 3.050
6638937787 0830390697 9207734672 2182562599 6615014215 : 3.100
0306803844 7734549202 6054146659 2520149744 2850732518 : 3.150
6660021324 3408819071 0486331734 6496514539 0579626856 : 3.200
1005508106 6587969981 6357473638 4052571459 1028970641 : 3.250
4011097120 6280439039 7595156771 5770042033 7869936007 : 3.300
2305587631 7635942187 3125147120 5329281918 2618612586 : 3.350
7321579198 4148488291 6447060957 5270695722 0917567116 : 3.400
7229109816 9091528017 3506712748 5832228718 3520935396 : 3.450
5725121083 5791513698 8209144421 0067510334 6711031412 : 3.500
6711136990 8658516398 3150197016 5151168517 1437657618 : 3.550

3515565088 4909989859 9823873455 2833163550 7647918535 : 3.600
8932261854 8963213293 3089857064 2046752590 7091548141 : 3.650
6549859461 6371802709 8199430992 4488957571 2828905923 : 3.700
2332609729 9712084433 5732654893 8239119325 9746366730 : 3.750
5836041428 1388303203 8249037589 8524374417 0291327656 : 3.800
1809377344 4030707469 2112019130 2033038019 7621101100 : 3.850
4492932151 6084244485 9637669838 9522868478 3123552658 : 3.900
2131449576 8572624334 4189303968 6426243410 7732269780 : 3.950
2807318915 4411010446 8232527162 0105265227 2111660396 : 4.000
6655730925 4711055785 3763466820 6531098965 2691862056 : 4.050
4769312570 5863566201 8558100729 3606598764 8611791045 : 4.100
3348850346 1136576867 5324944166 8039626579 7877185560 : 4.150
8455296541 2665408530 6143444318 5867697514 5661406800 : 4.200
7002378776 5913440171 2749470420 5622305389 9456131407 : 4.250
1127000407 8547332699 3908145466 4645880797 2708266830 : 4.300
6343285878 5698305235 8089330657 5740679545 7163775254 : 4.350
2021149557 6158140025 0126228594 1302164715 5097925923 : 4.400
0990796547 3761255176 5675135751 7829666454 7791745011 : 4.450
2996148903 0463994713 2962107340 4375189573 5961458901 : 4.500
9389713111 7904297828 5647503203 1986915140 2870808599 : 4.550
0480109412 1472213179 4764777262 2414254854 5403321571 : 4.600
8530614228 8137585043 0633217518 2979866223 7172159160 : 4.650
7716692547 4873898665 4949450114 6540628433 6639379003 : 4.700
9769265672 1463853067 3609657120 9180763832 7166416274 : 4.750
8888007869 2560290228 4721040317 2118608204 1900042296 : 4.800
6171196377 9213375751 1495950156 6049631862 9472654736 : 4.850
4252308177 0367515906 7350235072 8354056704 0386743513 : 4.900
6222247715 8915049530 9844489333 0963408780 7693259939 : 4.950
7805419341 4473774418 4263129860 8099888687 4132604721 : 5.000
5695162396 5864573021 6315981931 9516735381 2974167729 : 5.050
4786724229 2465436680 0980676928 2382806899 6400482435 : 5.100
4037014163 1496589794 0924323789 6907069779 4223625082 : 5.150
2168895738 3798623001 5937764716 5122893578 6015881617 : 5.200
5578297352 3344604281 5126272037 3431465319 7777416031 : 5.250
9906655418 7639792933 4419521541 3418994854 4473456738 : 5.300
3162499341 9131814809 2777710386 3877343177 2075456545 : 5.350

3220777092 1201905166 0962804909 2636019759 8828161332 :	5.400
3166636528 6193266863 3606273567 6303544776 2803504507 :	5.450
7723554710 5859548702 7908143562 4014517180 6246436267 :	5.500
9456127531 8134078330 3362542327 8394497538 2437205835 :	5.550
3114771199 2606381334 6776879695 9703098339 1307710987 :	5.600
0408591337 4641442822 7726346594 7047458784 7787201927 :	5.650
7152807317 6790770715 7213444730 6057007334 9243693113 :	5.700
8350493163 1284042512 1925651798 0694113528 0131470130 :	5.750
4781643788 5185290928 5452011658 3934196562 1349143415 :	5.800
9562586586 5570552690 4965209858 0338507224 2648293972 :	5.850
8584783163 0577775606 8887644624 8246857926 0395352773 :	5.900
4803048029 0058760758 2510474709 1643961362 6760449256 :	5.950
2742042083 2085661190 6254543372 1315359584 5068772460 :	6.000
2901618766 7952406163 4252257719 5429162991 9306455377 :	6.050
9914037340 4328752628 8896399587 9475729174 6426357455 :	6.100
2540790914 5135711136 9410911939 3251910760 2082520261 :	6.150
8798531887 7058429725 9167781314 9699009019 2116971737 :	6.200
2784768472 6860849003 3770242429 1651300500 5168323364 :	6.250
3503895170 2989392233 4517220138 1280696501 1784408745 :	6.300
1960121228 5993716231 3017114448 4640903890 6449544400 :	6.350
6198690754 8516026327 5052983491 8740786680 8818338510 :	6.400
2283345085 0486082503 9302133219 7155184306 3545500766 :	6.450
8282949304 1377655279 3975175461 3953984683 3936383047 :	6.500
4611996653 8581538420 5685338621 8672523340 2830871123 :	6.550
2827892125 0771262946 3229563989 8989358211 6745627010 :	6.600
2183564622 0134967151 8819097303 8119800497 3407239610 :	6.650
3685406643 1939509790 1906996395 5245300545 0580685501 :	6.700
9567302292 1913933918 5680344903 9820595510 0226353536 :	6.750
1920419947 4553859381 0234395544 9597783779 0237421617 :	6.800
2711172364 3435439478 2218185286 2408514006 6604433258 :	6.850
8856986705 4315470696 5747458550 3323233421 0730154594 :	6.900
0516553790 6866273337 9958511562 5784322988 2737231989 :	6.950
8757141595 7811196358 3300594087 3068121602 8764962867 :	7.000
4460477464 9159950549 7374256269 0104903778 1986835938 :	7.050
1465741268 0492564879 8556145372 3478673303 9046883834 :	7.100
3634655379 4986419270 5638729317 4872332083 7601123029 :	7.150

9113679386	2708943879	9362016295	1541337142	4892830722 :	7.200
0126901475	4668476535	7616477379	4675200490	7571555278 :	7.250
1965362132	3926406160	1363581559	0742202020	3187277605 :	7.300
2772190055	6148425551	8792530343	5139844253	2234157623 :	7.350
3610642506	3904975008	6562710953	5919465897	5141310348 :	7.400
2276930624	7435363256	9160781547	8181152843	6679570611 :	7.450
0861533150	4452127473	9245449454	2368288606	1340841486 :	7.500
3776700961	2071512491	4043027253	8607648236	3414334623 :	7.550
5189757664	5216413767	9690314950	1910857598	4423919862 :	7.600
9164219399	4907236234	6468441173	9403265918	4044378051 :	7.650
3338945257	4239950829	6591228508	5558215725	0310712570 :	7.700
1266830240	2929525220	1187267675	6220415420	5161841634 :	7.750
8475651699	9811614101	0029960783	8690929160	3028840026 :	7.800
9104140792	8862150784	2451670908	7000699282	1206604183 :	7.850
7180653556	7252532567	5328612910	4248776182	5829765157 :	7.900
9598470356	2226293486	0034158722	9805349896	5022629174 :	7.950
8788202734	2092222453	3985626476	6914905562	8425039127 :	8.000
5771028402	7998066365	8254889264	8802545661	0172967026 :	8.050
6407655904	2909945681	5065265305	3718294127	0336931378 :	8.100
5178609040	7086671149	6558343434	7693385781	7113864558 :	8.150
7367812301	4587687126	6034891390	9562009939	3610310291 :	8.200
6161528813	8437909904	2317473363	9480457593	1493140529 :	8.250
7634757481	1935670911	0137751721	0080315590	2485309066 :	8.300
9203767192	2033229094	3346768514	2214477379	3937517034 :	8.350
4366199104	0337511173	5471918550	4644902636	5512816228 :	8.400
8244625759	1633303910	7225383742	1821408835	0865739177 :	8.450
1509682887	4782656995	9957449066	1758344137	5223970968 :	8.500
3408005355	9849175417	3818839994	4697486762	6551658276 :	8.550
5848358845	3142775687	9002909517	0283529716	3445621296 :	8.600
4043523117	6006651012	4120065975	5851276178	5838292041 :	8.650
9748442360	8007193045	7618932349	2292796501	9875187212 :	8.700
7267507981	2554709589	0455635792	1221033346	6974992356 :	8.750
3025494780	2490114195	2123828153	0911407907	3860251522 :	8.800
7429958180	7247162591	6685451333	1239480494	7079119153 :	8.850
2673430282	4418604142	6363954800	0448002670	4962482017 :	8.900
9289647669	7583183271	3142517029	6923488962	7668440323 :	8.950

2609275249 6035799646 9256504936 8183609003 2380929345 :	9.000
9588970695 3653494060 3402166544 3755890045 6328822505 :	9.050
4525564056 4482465151 8754711962 1844396582 5337543885 :	9.100
6909411303 1509526179 3780029741 2076651479 3942590298 :	9.150
9695946995 5657612186 5619673378 6236256125 2163208628 :	9.200
6922210327 4889218654 3648022967 8070576561 5144632046 :	9.250
9279068212 0738837781 4233562823 6089632080 6822246801 :	9.300
2248261177 1858963814 0918390367 3672220888 3215137556 :	9.350
0037279839 4004152970 0287830766 7094447456 0134556417 :	9.400
2543709069 7939612257 1429894671 5435784687 8861444581 :	9.450
2314593571 9849225284 7160504922 1242470141 2147805734 :	9.500
5510500801 9086996033 0276347870 8108175450 1193071412 :	9.550
2339086639 3833952942 5786905076 4310063835 1983438934 :	9.600
1596131854 3475464955 6978103829 3097164651 4384070070 :	9.650
7360411237 3599843452 2516105070 2705623526 6012764848 :	9.700
3084076118 3013052793 2054274628 6540360367 4532865105 :	9.750
7065874882 2569815793 6789766974 2205750596 8344086973 :	9.800
5020141020 6723585020 0724522563 2651341055 9240190274 :	9.850
2162484391 4035998953 5394590944 0704691209 1409387001 :	9.900
2645600162 3742880210 9276457931 0657922955 2498872758 :	9.950
4610126483 6999892256 9596881592 0560010165 5256375678 :	10.000



LECTURAS RECOMENDADAS

Beckmann, P., *A History of Pi*, Nueva York, St. Martin's Griffin, 1976. Existe una edición alemana de 2004.

Blatner, D., *The Joy of Pi*, Nueva York, Walker and Company, 1999.

Delahaye, J.-P., *Le Fascinant Nombre Pi*, París, Belin-Pour la Science, 2001.

Pisa Menéndez, P., *La cuadratura del círculo: geodesia y metrología en el mundo antiguo*, Oviedo, Cincopiedras, 2007.

Posamenter, A. y Lehman, I., *La proporción transcendental. La historia de Pi, el número más misterioso del mundo*, Barcelona, Ariel, 2006.

Torija Herrera, R., *Arquímedes: alrededor del círculo*, Madrid, Nivola, 1999.

El primer gran científico que ideó un algoritmo para calcular el número π fue el griego Arquímedes de Siracusa (ca 287 a.C-ca 212 a.C). La colección del Museo del Prado incluye un retrato al óleo del célebre matemático (ca 1630), obra de José de Ribera.

ALBUM

ÍNDICE