Las medidas del mundo

Calendarios, longitudes y matemáticas

Iolanda Guevara - Carles Puig

El mundo es matemático

Sumario

Prefacio 9

Capítulo 1. ¿Qué es medir? 11
Una actividad omnipresente 11
Actividades matemáticas comunes a todas las culturas 12
Contar y medir 15
Continuo o discreto 20
Magnitudes y unidades 23
El Sistema Métrico Decimal y otros sistemas 26
Medidas directas e indirectas 29

Capítulo 2. Medir los cielos 33
El pensamiento racional griego y la cosmología 33
Los dos grandes hechos de los cielos 34
El movimiento diurno del Sol y el movimiento de las estrellas 35
El movimiento de los planetas 38
La primera explicación: el universo de las dos esferas 41
La segunda explicación: la astronomía geométrica 43
El principio de la circularidad 43
El sistema de las esferas homocéntricas 45
La cosmología de Aristóteles 47
Aristarco de Samos 49
Hiparco de Nicea 52
Claudio Ptolomeo 52
El sistema copernicano 55

Capítulo 3. Medir el tiempo 59
Un antiguo reto 59
La imposibilidad de armonizar los ciclos naturales 59
El ciclo de Metón 60
El calendario gregoriano 61
El primer calendario romano 61
La reforma juliana 65
La reforma gregoriana 68

El calendario islámico 70
El calendario chino 74
Un calendario revolucionario 78

Capítulo 4. Medir la Tierra 83
Primeras ideas sobre la forma y la extensión de la Tierra 83
Medida de la dimensión de la Tierra esférica. Eratóstenes 85
Mapas de la Tierra: latitud y longitud, localización y proyección 87
Redes de triangulación para medir arcos de meridiano 92
Localización y orientación. La navegación y el problema de la longitud 97
Una Tierra no esférica. Expediciones científicas: Virreinato del Perú y Laponia 101

Capítulo 5. Midiendo el metro 105
La necesidad de una medida universal 105
La elección del meridiano 107
Condiciones de la nueva medida 107
Tres propuestas 109
La decisión final 109
¿Qué arco de meridiano? 110
Triangular, la base matemática de la medición 112
Los instrumentos y la precisión de las medidas 115
La aventura de la medición del arco Dunkerque-Barcelona 116
Una primera expedición 116
Una segunda expedición 119
Una tercera expedición 122
¿El metro se impone? 125
El nacimiento del metro 125
Dos sistemas que conviven actualmente 126
Un error de medida fatal 126

Capítulo 6. Medir hoy en día 129
Diversidad en los métodos de medición 129
Medir en el mundo físico 131
El Sistema Internacional de Unidades 131
Geodesia, cronometría y astrometría 132

Medir en el modelo matemático 136
Rectificar 136
Cuadrar 139
Cubicar 146

Epílogo 151

Bibliografía 155

Índice analítico 157

Prefacio

«Cuando puedes medir aquello de lo que hablas, y expresarlo con números, sabes algo acerca de ello; pero cuando no lo puedes medir, cuando no lo puedes expresar con números, tu conocimiento es pobre e insatisfactorio.» Esta frase se atribuye al físico y matemático escocés William Thomson (1824-1907), lord Kelvin, que creó la escala de temperaturas absolutas en 1848; en su honor, la unidad de temperatura en el Sistema Internacional de Unidades recibe el nombre de «kelvin».

Efectivamente, como manifestó Thomson, medir es algo fundamental para la ciencia moderna, pero medir también resulta necesario en la cotidianidad del día a día. El conocimiento y dominio del entorno más inmediato, lo mismo que del más lejano, no sería posible sin haber realizado, de alguna manera, alguna medición. Las mediciones más finas, más fiables y exactas tienen necesidad de las matemáticas.

El ser humano ha elaborado a lo largo de la historia estrategias para medir. Con ellas ha sido capaz de medir el planeta en el que habita, el espacio interestelar e intergaláctico o el tiempo. Ha ideado unidades apropiadas para ello y ha comprendido que puede realizar medidas directas o indirectas. Desde muy antiguo, la humanidad observó que los ciclos naturales eran importantes para la vida de los pueblos, y descubrió que mirando los cielos podía medir el paso del tiempo a través del movimiento de los astros. Dicho movimiento se relacionó con acontecimientos del entorno natural (frío, calor, caída de las hojas, migración de las aves...). El propio entorno natural también fue objeto de medición, primero de manera local, para delimitar el territorio habitado, y más adelante de manera más general, para dar cobertura a viajes y expediciones comerciales. El auge del comercio puso en evidencia, con el paso del tiempo, la existencia de multiplicidad de unidades de medida locales y las dificultades que ello comportaba; hubo que pensar en encontrar patrones universales. El primer patrón universal, el metro, que dio lugar al Sistema Métrico Decimal, se estableció a partir de una medida precisa de la Tierra que requería una técnica matemática muy concreta: la triangulación. De ella y de otras técnicas matemáticas relacionadas con medidas astronómicas, geodésicas, calendáricas y metrológicas trata este libro.

De hecho, el acto de medir es algo cotidiano. Cada uno de nosotros realizamos, de un modo u otro, mediciones constantemente. Nos levantamos por la mañana y, por ejemplo, para desayunar «medimos» a ojo la leche que calentaremos en el microondas para añadir al café. Si hiciéramos el recuento de todas las actividades dia-

rias que comportan algún tipo de medición quedaríamos asombrados de la cantidad de ellas.

Queremos agradecer a los responsables de la editorial RBA su confianza al hacernos participar en la colección y, a la vez, la buena predisposición en aceptar un proyecto inicial sobre la historia del calendario y el establecimiento del metro, proyecto que finalmente se ha transformado, gracias a sus consideraciones, en un texto más general sobre diferentes aspectos de la medida. Hemos de manifestar nuestro agradecimiento a Roser Puig por sus orientaciones sobre algunos detalles técnicos relativos al calendario islámico. También queremos agradecer a Anton Aubanell Pou que nos animase a escribir esta obra y nos ofreciese su apoyo entusiástico e incondicional, poniendo a nuestra disposición sus trabajos y documentación personal sobre la historia del calendario y el nacimiento del metro.

Capítulo 1

¿Qué es medir?

Desde que nacemos iniciamos un largo proceso de aprendizaje. Ya en un estadio muy temprano y mucho antes de que pueda balbucear las primeras palabras o dar los primeros pasos, el bebé desarrolla la capacidad de determinar la proximidad o lejanía de su madre, aprende a alargar su brazo justo hasta el objeto que desea coger y percibe diferencias entre entidades similares descubriendo que hay cuerpos más *grandes* o más *pequeños* que otros. Así pues, los seres humanos aprendemos enseguida y de forma natural a situarnos en el entorno estableciendo comparaciones entre distancias, tamaños, volúmenes, etc. En otras palabras, desde que nacemos aprendemos a medir, pero ¿qué es medir?

Una actividad omnipresente

Una infinidad de acciones cotidianas nos muestran como los humanos realizamos de forma espontánea la actividad de medir. Algunas, como las que se relatan a continuación, son situaciones que nos pueden resultar familiares.

Entramos en casa de unos amigos, caminamos por el pasillo y cruzamos bajo el dintel de la puerta del comedor; lo hacemos decididos y sin dudar. Sabemos que «pasamos por la puerta» y, en caso de ser muy altos, espontáneamente nos agachamos un poco al pasar.

Debemos cruzar una carretera poco transitada y vemos, a lo lejos, acercarse un vehículo; decidimos cruzar y lo hacemos de forma tranquila, pues hemos evaluado que él va a tardar más en llegar hasta donde nos encontramos que nosotros en alcanzar la otra acera.

Escribimos una carta a un conocido y llenamos un folio; al acabar vemos el sobre y sabemos de inmediato que hemos de doblar por la mitad el folio o bien que hemos de doblarlo dos veces para poder introducirlo dentro del sobre.

Estos ejemplos nos muestran que constantemente estamos tomando decisiones que requieren un proceso de comparación, «que ya hemos automatizado», entre magnitudes del mismo tipo: la altura de la puerta y la nuestra, los tiempos empleados por dos objetos móviles (el vehículo y la persona que cruza la calle)

para efectuar un recorrido sin colisionar, la superficie del folio desplegado y el tamaño del sobre.

Actividades matemáticas comunes a todas las culturas

Las matemáticas son un producto cultural como cualquier otra forma de conocimiento, afirma Alan J. Bishop en *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Esta cultura matemática se pone de manifiesto en tres ámbitos: el primero se relaciona con los números y tiene que ver con las actividades de contar y medir; el segundo hace referencia al espacio y se pone de manifiesto en las acciones de localizar y diseñar; finalmente, el tercero atañe a la relación social de las personas y afecta al dominio de explicar y jugar. Reconocer que las matemáticas forman parte de todas las culturas es una manera de afirmar que «el mundo es matemático». Pero ¿qué entendemos por matemáticas?

Nuestro enfoque busca determinar las actividades humanas comunes a diferentes culturas que tienen relación con el pensamiento matemático. En este sentido, entendemos que la matemática no son contenidos, temas objeto de estudio, sino los razonamientos y procesos mentales que realizamos mientras hacemos unas determinadas actividades que tienen un trasfondo matemático. En la vida académica se realizan en la escuela, en el instituto o en la universidad, pero si sólo observáramos este ámbito estaríamos hablando de las matemáticas regladas, las de los manuales. La idea es ir más allá, ampliar el campo de estudio y ver también qué actividades se realizan en la vida diaria, fuera de la escuela, aquí y en otras culturas, que tienen características comunes y que puede afirmarse que son matemáticas. El lenguaje surgió de la necesidad de comunicarse, pero ¿de dónde surgieron las matemáticas? ¿Cuáles fueron las necesidades que se debían cubrir y que dieron lugar a las seis actividades mencionadas anteriormente?

En el desarrollo de las ideas matemáticas adquiere especial importancia la organización de los elementos en el espacio. *Localizar* y *diseñar* son las dos actividades que se reparten la realización de esta tarea. La primera responde a la necesidad primitiva de salir en busca de comida y regresar a casa sin perderse, representa conocer el entorno más próximo de cada uno, hace referencia a situarse y orientarse. Se pueden considerar tres tipos de espacio: el espacio físico o de los objetos, el sociogeográfico de nuestro entorno y el cosmológico del mundo en que vivimos.

Diseñar se relaciona con la creación y fabricación de objetos y utensilios manufacturados. Éstos pueden destinarse al uso doméstico, al comercio, a la ornamenta-

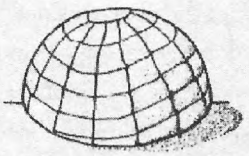
ción, a la guerra o a los rituales religiosos. ¿Por qué todas las culturas diseñan cuencos para comer los alimentos líquidos? La respuesta es bien sencilla: en un plato plano o convexo es imposible contener el líquido. Diseñar también tiene que ver con la ordenación y estructuración de espacios más amplios, como casas, pueblos, jardines, carreteras y ciudades.

Además de estar vinculados con nuestro entorno físico, no vivimos solos y necesitamos relacionarnos con los otros individuos de la comunidad. Esta necesidad de socialización da lugar a dos actividades relacionadas con el pensamiento matemático: *jugar* y *explicar*.

La primera se refiere a las reglas y procedimientos sociales de actuación y también a la imaginación, al planteamiento de hipótesis o a la formulación de preguntas del tipo: ¿qué pasaría si...?, cuando se analiza una situación.Todas las culturas juegan y, lo que es más importante, ¡se toman en serio los juegos! Esta constatación sugiere que el juego, actividad lúdica por excelencia, puede estar más cerca de las

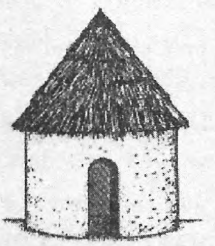
VIVIENDAS DE PLANTA CIRCULAR

¿Cuál es la razón para que en diferentes culturas y lugares encontremos casas con plantas circulares? De entre todos los rectángulos que se pueden construir de igual perímetro, el cuadrado es el rectángulo que tiene mayor área. Pero, a igual perímetro, la figura que encierra un área mayor en su interior es la circunferencia. Así pues, las viviendas de planta circular serán las más económicas de construir porque utilizarán el material mínimo (perímetro de ladrillos, hielo, cañas, pieles de animales, etc.) para abarcar una determinada superficie de planta del habitáculo. Existen múltiples ejemplos de este razonamiento en culturas muy diversas: inuit (esquimal), india (aborígenes del Norte de América), africana ecuatorial, etc., como se pone en evidencia observando algunas de sus construcciones tradicionales.



Iglú inuit, Canadá.

Tipi indio, praderas norteamericanas.

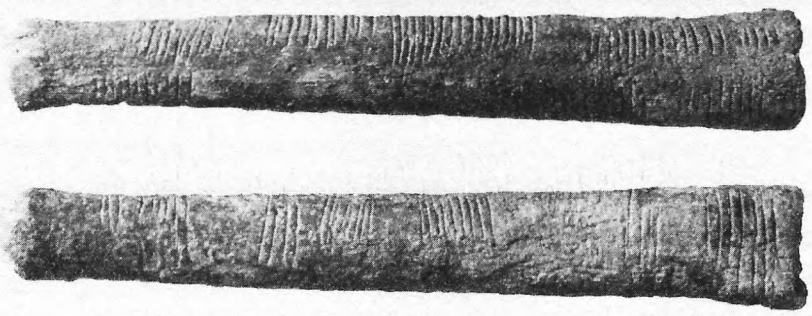


Choza kikuyu, Kenya.

matemáticas de lo que se podría esperar. En realidad, muchos matemáticos consideran que la actividad de jugar comporta un proceso de reflexión parecido al que se produce cuando se intenta resolver un problema: analizar la situación, buscar estrategias, compararlas, elegir la mejor, llevarla a cabo y comprobar que funciona.

Explicar también tiene más que ver con el entorno social que con el físico, a pesar de que los mantiene relacionados. Se trata de compartir con los otros miembros de la comunidad el análisis y la conceptualización del entorno. Sin entorno no hay explicación, pero tampoco la hay si no tenemos la necesidad de compartir nuestras pequeñas o grandes investigaciones. Explicar se ocupa de buscar las causas de los fenómenos, de sus similitudes o diferencias, de las conexiones entre ellos y también, por tanto, de la clasificación. Para los fenómenos más complejos la explicación deviene relato; en él, desde el punto de vista matemático, lo que llama la atención es el uso de muchos «conectores lógicos» que permiten combinar, oponer,

EL HUESO DE ISHANGO



El llamado hueso de Ishango es un peroné de babuino que presenta unas muescas talladas distribuidas en tres series. El hueso fue descubierto en 1960 por el arqueólogo belga Jean de Heinzelin en Ishango, cerca del nacimiento del río Nilo. La población establecida cerca del actual lago Eduardo, entre la República Democrática del Congo y Uganda, hace unos 20.000 años, pudo haber sido una de las primeras sociedades que llevó a cabo conteos. Diversos estudios de las muescas y de su agrupación permiten afirmar que tal vez se trata de una herramienta tallada para establecer un sistema numérico. Se leen series de parejas de números uno el doble del otro (5, 10; 4, 8; 3, 6), series de números impares (19, 17, 13, 11; 9, 19, 21, 11) en las que una de ellas son los números primos comprendidos entre 10 y 20. Por último, se observa que la suma de dos de las series es 60, y la otra, 48. También se han dado interpretaciones referidas a calendarios; se afirma, en este

extender, restringir, ejemplificar y elaborar proposiciones. Estos procesos son los mismos que pedimos a una demostración matemática: consistencia, elegancia y convicción.

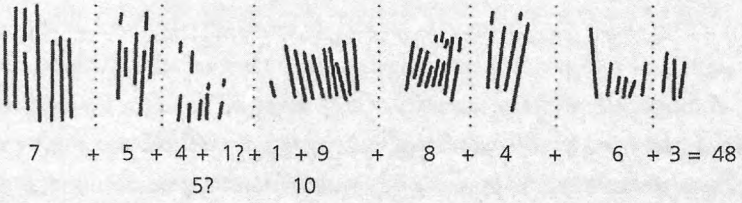
Contar y medir

Contar y *medir* son las dos actividades que imaginamos con más facilidad relacionadas con las matemáticas porque utilizan los números. La historia de los símbolos que las diferentes culturas han empleado para expresar los números, las cifras, nos informa sobre las necesidades que nuestros antepasados debían cubrir y de cómo la civilización se dotó de una herramienta indispensable para someter sus actividades a una especie de orden: los números. Georges Ifrah, en *Historia universal de las cifras*, expone el resultado de un largo proceso de investigación sobre el origen y signifi-

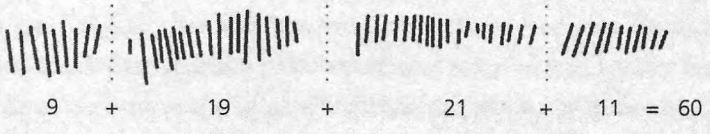
sentido, que puede representar un calendario lunar de seis meses, e incluso que el creador del instrumento era una mujer que investigaba la relación entre las fases lunares y el ciclo menstrual.

Serie izquierda:

Serie central:



Serie derecha:



cado de los números en las más diversas culturas que componen el complejo mapa de la humanidad, así como los sistemas numéricos y de cálculo, desde la antigüedad hasta nuestros días.

A través de la actividad de contar, de asociar objetos con números, la humanidad descubrió y describió los aspectos cuantitativos del mundo que le rodeaba. A lo largo de la historia, las diversas culturas y grupos sociales han necesitado contar. Se contaban los días del año, seguramente a raíz de observar la periodicidad de los cambios estacionales y la necesidad de saber cuándo era la mejor época para sembrar. Se contaban los miembros de la comunidad, sus nacimientos, sus defunciones. Se contaban los bienes y el ganado. Al volver de la pastura, los pastores necesitaban saber si habían perdido algún animal o habían regresado con todos.

Contar personas, objetos y el paso del tiempo son necesidades que aparecieron en los inicios de la historia de la humanidad. En un principio el hombre no sabía contar tal como se entiende en la actualidad. Percibía la unidad, el par y la multitud. Diversos estudios sostienen que a simple vista no se posee percepción directa e inmediata más que de los números 1 al 4 y que por encima de ellos se debe contar, de la manera que sea, pero contar. Esta cuantificación puede realizarse de diversas formas, contando los elementos de cada conjunto en cuestión o bien mediante algún tipo de comparación o agrupamiento mental.

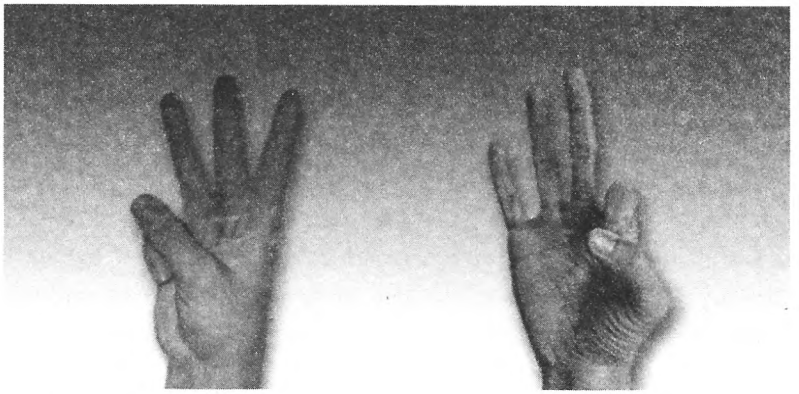
Para contar, para estar en condiciones de reconocer y transmitir la fecha de una ceremonia o constatar que los corderos, las cabras o las vacas que se han hecho salir por la mañana son los mismos que regresan por la tarde, se utilizaron procedimientos diversos.

Para memorizar y comunicar socialmente el recuento se tuvo que desarrollar el lenguaje, el nombre del número. La humanidad se inspira en la naturaleza próxima para llegar a los modelos cardinales. Así, las alas de un pájaro simbolizan la pareja; los pétalos de un trébol ordinario, el tres; las patas de un animal, el cuatro; los dedos de una mano, el cinco, etc. Existen asimismo otros tipos de relación de sucesión para llegar progresivamente a la abstracción de los números y del cálculo.

De la misma manera que la mayoría de nosotros hemos empezado a contar con nuestros dedos de las dos manos hasta diez, la mayor parte de sistemas de numeración que existen actualmente son de base 10. Algunos eligieron la base 12, probablemente porque a la hora de repartir funcionaba mucho mejor, pues tenía más divisores que el 10. Los mayas, los aztecas, los celtas y los vascos ampliaron el número de dedos con los pies y adoptaron la base 20. A los sumerios, inventores de la más antigua escritura conocida, y a los babilonios, inventores del cero, debemos la base

60, que todavía hoy en día utilizamos para dividir la hora en minutos y segundos, así como los grados del círculo en 360 grados y a su vez cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

Diversos huesos de animales con marcas verticales o muescas descubiertos en yacimientos de la Europa occidental muestran cómo contaban nuestros antepasados. Esta técnica de numeración se puede tomar como el origen de la numeración romana. Otro medio concreto es la mano. Se tiene constancia de que todos los pueblos de la tierra recurrieron a ella en un momento u otro de su historia. La contribución de las falanges y articulaciones de los dedos permitió a egipcios, romanos, árabes y persas, sin olvidar los pueblos cristianos del occidente medieval, concretar los números del 1 al 9.999, siguiendo un procedimiento similar al lenguaje gestual de los sordomudos. Los chinos les superaron: imaginaron un sistema que les permitía contar hasta cien mil con una mano y hasta diez mil millones con las dos.

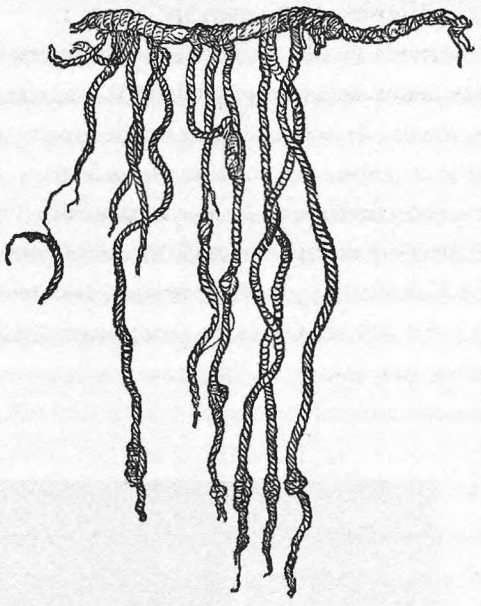


A la izquierda, una de las formas de indicar el número tres con los dedos. A la derecha, forma china para expresar el mismo número.

Otro sistema utilizado en la historia de la aritmética para realizar cálculos es el uso de un montón de piedrecillas o guijarros, como algunos autores afirman. Este método se toma como punto de partida del origen de los ábacos. Todavía hoy en día existen contadores de ábaco en China, Japón y en países de la Europa del Este. La misma palabra «cálculo» remite a dicho método, ya que justamente el término latino *calculus* significa «guijarro pequeño».

La escritura del número, la cifra, apareció en un estadio posterior. Parece ser que algunos contables decidieron sustituir los guijarros habituales por objetos de arcilla.

CONTAR CON CUERDAS: LOS QUIPUS



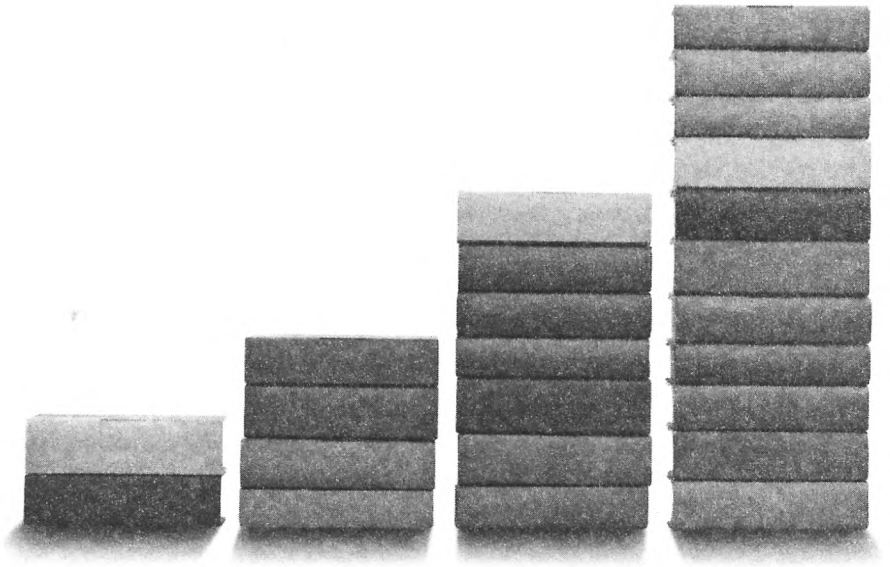
El quipu (del quechua: *khipu*, «nudo») es un sistema desarrollado por las antiguas civilizaciones andinas que utiliza cuerdas de lana o algodón y nudos de uno o varios colores. Los eruditos del Imperio inca, los quipucamayoc (*khipu kamayuq*), lo usaban para contar. Algunos investigadores afirman que también se usaba para escribir. Se han hallado quipus en Caral, yacimiento arqueológico considerado por la UNESCO como la ciudad más antigua de América (de unos 5.000 años de antigüedad), situada en el valle de Supe, a unos 200 km al norte de Lima (Perú), así como en los centros de la cultura Wari o Huari, antigua civilización andina que floreció en el centro de los Andes aproximadamente desde el siglo VII hasta el XIII d.C.

El quipu consta de una cuerda principal, sin nudos, de la que cuelgan otras, generalmente anudadas y de diversos colores, formas y tamaños. Los colores se identifican con los diferentes sectores (pardo, gobierno; carmesí, inca; morado, curaca —el jefe político—; verde, conquista; rojo, guerrero; negro, tiempo; amarillo, oro; blanco, plata) y los nudos, con cantidades.

Según las formas y la dimensión de éstos, representaban unas cantidades u otras del sistema de numeración: un bastoncillo era la unidad; una bola, la decena; una bola mayor, la centena, y así sucesivamente. Se tienen evidencias arqueológicas de este sistema en fechas parecidas (milenio IV a.C.) en dos civilizaciones distintas: una que contaba en base 10, en Elam, una tierra iraní cerca del golfo Pérsico, y otra en Sumeria, Baja Mesopotamia, en base sexagesimal. Los contables encerraban los objetos que simbolizaban los números en bolas de arcilla; eran como pequeños archivos, y el día que necesitaban las cuentas, rompían la bola de arcilla y aparecían los objetos que simbolizaban la cantidad. El sistema evolucionó de tal manera que poco a poco se fueron sustituyendo los objetos introducidos en la bola de arcilla por

marcas sobre la bola misma. Una bola se convirtió en una pequeña muesca; un cono grande, en una muesca ancha; una esfera, en un círculo. Así, hacia el 3200 a.C. nacieron las primeras cifras sumerias, las más antiguas que se conocen.

Medir es la otra actividad universalmente significativa para el desarrollo de las ideas matemáticas, y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar. Aunque todas las culturas reconocen la importancia de ciertas cosas, no todas ellas miden lo mismo ni lo hacen con las mismas medidas. Cada entorno local, cada contexto crea unas necesidades y, a su vez, éste lleva a un tipo de medidas u otras. Por ejemplo, el cuerpo humano fue, probablemente, el primer dispositivo para medir que se empleó en todas las culturas; incluso hoy en día, en ausencia de cintas métricas u otros dispositivos más exactos, medimos distancias cortas con pasos, y longitudes menores, con palmos.



Medir implica comparar.

Probablemente, medir distancias y evaluar la cantidad de comida fueron unas de las primeras necesidades. En muchas culturas se medían distancias por comparación a la acción de desplazarse, esto es, con respecto al tiempo empleado para llegar, por ejemplo, en días de camino, a pie, a caballo, en carro, etc. Hoy en día continuamos midiendo las caminatas por la montaña en función del tiempo, en este caso horas de marcha previstas. Para la comida, se realizaban mediciones a partir de los utensi-

lios que se utilizaban para contenerlos: canastas, tazas de arroz, sacos, etc. Estas unidades también perviven en nuestro entorno más próximo: cuando cocinamos arroz para cuatro personas, ¿usamos la báscula para pesarlo o simplemente lo medimos a razón de una taza de café por persona?

Continuo o discreto

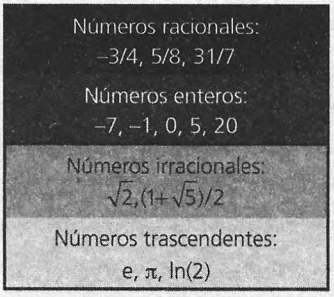
La diferencia entre contar y medir nos lleva en matemáticas a hablar del concepto de *continuo* y *discreto*, que se puede aproximar al continuo y discreto del mundo físico cuando pensamos en contar ovejas o en medir agua. Las ovejas se pueden individualizar; el agua es un fluido continuo que se puede medir, pero no contar. En términos matemáticos, contar es una actividad que se realiza con números enteros, o a lo sumo fracciones, números racionales ($\mathbb{Q}$), mientras que para medir se necesitan los números reales ($\mathbb{R}$), que representan en matemáticas los números que permiten la continuidad que nos daba la imagen del líquido. Consideremos, por otro lado, cómo se mide en el mundo físico y en el mundo matemático, y veremos nuevos aspectos de la dicotomía continuo/discreto.

En el mundo físico, la medición se realiza mediante la comparación con un patrón que tomamos como unidad de medida. La comparación se realiza a través de múltiplos o submúltiplos (fracciones) del patrón; el resultado es un número racional. Veamos un ejemplo: probemos a medir la longitud de uno de los lados de una mesa con un lápiz cualquiera, de la medida que sea. El lápiz es el patrón y el objeto para medir la longitud de la mesa. ¿Cuántos lápices mide la mesa? Lo probamos cuando estábamos escribiendo este párrafo. La respuesta es más de 7 lápices, pero menos que 8, es decir, un número entre 7 y 8. Vamos a necesitar las fracciones para expresar este resultado. Ahora se trata de comparar la longitud desde donde acababa el séptimo lápiz hasta el final de la mesa. ¿Qué fracción del lápiz representa? ¿La mitad, una tercera parte, un cuarto...? Este razonamiento empírico, por aproximación visual, nos acerca a los antiguos egipcios, que operaban con fracciones de numerador 1, a excepción de la fracción 2/3. En la medición de la mesa, si, por ejemplo, aproximamos a ojo y decimos que la mesa se acaba a un cuarto del final del lápiz, diríamos que mide 7 3/4; si, por el contrario, queremos ser más precisos, podemos entrar en la teoría de proporciones de los griegos clásicos, trasladar la medida a un papel y proceder a aplicar el teorema de Tales hasta conseguir una buena aproximación a la fracción que mejor se acerque a la longitud que se quiere medir. Así, obtuvimos 7 y 2/3.

El resultado de realizar una medición en la vida cotidiana se expresa con una fracción o con un decimal finito, según el procedimiento y el instrumento utilizados para realizar la medida; en cualquier caso, es un número racional. En la mesa del ejemplo se dio el resultado en forma de fracción, 7 y 2/3, utilizando como unidad de medida un lápiz; al medir la mesa con una cinta métrica el resultado fue 1,40 m, un decimal finito. En la vida real, el acto de medir es una aproximación que depende del objeto que se mide, del tipo de instrumento utilizado y de la precisión con que se realice la medida.

LOS NÚMEROS REALES

Los números reales (designados por $\mathbb{R}$) son aquellos que incluyen tanto los números racionales (designados por $\mathbb{Q}$; fracciones positivas, negativas y el cero) como los irracionales (trascendentes, algebraicos), que no se pueden expresar de manera fraccionaria y tienen infinitas cifras decimales no periódicas, tales como: $\sqrt{2}$, π,...



Ejemplos de diferentes números reales ($\mathbb{R}$).

Desde los números naturales ($\mathbb{N}$), 1, 2, 3,..., que usamos para contar, hasta los reales ($\mathbb{R}$), que necesitamos para medir en el modelo matemático, se puede explicar la ampliación de los conjuntos numéricos a través de la necesidad de tener números que expresen el resultado de ciertas operaciones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$(-) \rightarrow (:) \rightarrow \sqrt{\ } \rightarrow \sqrt{(-)}.$$

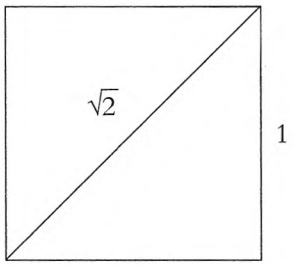
Los enteros ($\mathbb{Z}$) permiten expresar $3 - 4 = -1$; los racionales ($\mathbb{Q}$) permiten expresar $\frac{3}{4} = 0{,}75$; los reales ($\mathbb{R}$) expresan $\sqrt{2}$; los complejos ($\mathbb{C}$), $\sqrt{-4}$.

La medida exacta sólo se da en el modelo matemático. En éste, la medición se asocia a continuo, en contraposición a discreto. ¿Qué miden o cómo miden los matemáticos? En la historia de la matemática la medición está estrechamente relacionada con la geometría, la rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras o cuerpos en el plano o en el espacio. Es interesante remarcar que los orígenes de la geometría se remontan a la resolución de problemas concretos relativos a medidas.

En la geometría elemental primero se describen los objetos y las formas, de una manera general y cualitativa; después, si se pretende una descripción más ajustada y concreta, se debe cuantificar; aquí aparece la medida y, para expresarla, se utilizan los números. Los segmentos tienen longitud; las regiones planas tienen área, y los cuerpos del espacio tienen volumen.

En el modelo matemático, la medida es continua. Esta afirmación se traduce en el hecho de que para expresar el resultado de una medida no nos bastan los números racionales, sino que necesitamos ampliar el conjunto y disponer de todos los números que cubren la recta, los números reales. En la vida cotidiana, una de las características o propiedades que medimos es la longitud. En el modelo matemático, la longitud la imaginamos sobre una línea recta y establecemos una correspondencia entre los puntos de la recta y los números que los representan, los números reales.

En el modelo matemático necesitamos los números reales para medir, incluso en casos aparentemente simples. Los pitagóricos descubrieron que existían magnitudes inconmensurables a partir de la pregunta siguiente: ¿cuánto mide la diagonal de un cuadrado de longitud la unidad? Según el teorema de Pitágoras podemos responder que la diagonal es $\sqrt{2}$, pero el resultado de esta operación, la raíz cuadrada de 2, no se puede expresar mediante un número racional ($\mathbb{Q}$), sino que necesitamos los números irracionales; hemos entrado en $\mathbb{R}$.



Cuadrado de lado 1 y diagonal $\sqrt{2}$, puesto que por el teorema de Pitágoras se cumple que $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Nuestros antepasados griegos, que en el campo del cálculo sólo operaban con números racionales, se plantearon la siguiente cuestión de método: ¿cómo podemos medir la diagonal del cuadrado si no tenemos un número que exprese este resultado? Esta cuestión les llevó a hablar de magnitudes mensurables, las que se podían medir por comparación mediante múltiplos o submúltiplos con la unidad de partida, y las inconmensurables, las que no se podían medir usando sólo la comparación a través de fracciones o proporciones, como en el ejemplo el cuadrado de lado uno y su diagonal; dicho de otro modo, si la unidad y el objeto que se mide no son proporcionales entre ellos.

En el libro V de los *Elementos*, Euclides (ca. 325-ca. 265 a.C.), a través de su teoría de la proporción aplicable a magnitudes conmensurables e inconmensurables, resuelve de alguna manera el problema, estableciendo reglas para operar con todo tipo de magnitudes, tanto conmensurables como inconmensurables.

Magnitudes y unidades

«Medir» es un verbo que etimológicamente proviene del término latino *metīri*, y que, según el Diccionario de la Real Academia Española, significa «comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera». También tiene otras acepciones, como la de «tener determinada dimensión, ser de determinada altura, longitud, superficie, volumen, etc.». Entendemos como «medición» o como «medida» la acción y el efecto de medir, aunque el término «medida» se usa también para indicar la «expresión del resultado de una medición». Así, podemos decir que la medida de la superficie de nuestra vivienda es de 110 m^2, o que hemos efectuado la medición de la temperatura de la sala de estar y hemos obtenido una medida de 21,5 °C. Asimismo, se utiliza la palabra «medida» en el sentido de «cada una de las unidades que se emplean para medir longitudes, áreas o volúmenes de líquidos o áridos». Podríamos, por lo tanto, referirnos a una «pinta» diciendo que es *una medida* de capacidad que varía según los países y dependiendo de que sea para líquidos o para áridos.

Medir presupone un proceso de abstracción en el que de todas las propiedades o características de un objeto se destaca una que queremos subrayar y que es susceptible de ser cuantificada, es decir, asociada a un número. De un libro nos puede interesar su altura o su anchura si estamos intentando colocarlo en una determinada estantería, pero si lo que deseamos es tener una idea de si va a servirnos para pre-

sionar sobre unas hojas de distintos arbustos que queremos disecar, seguramente nos fijaremos en su peso o en su grosor.

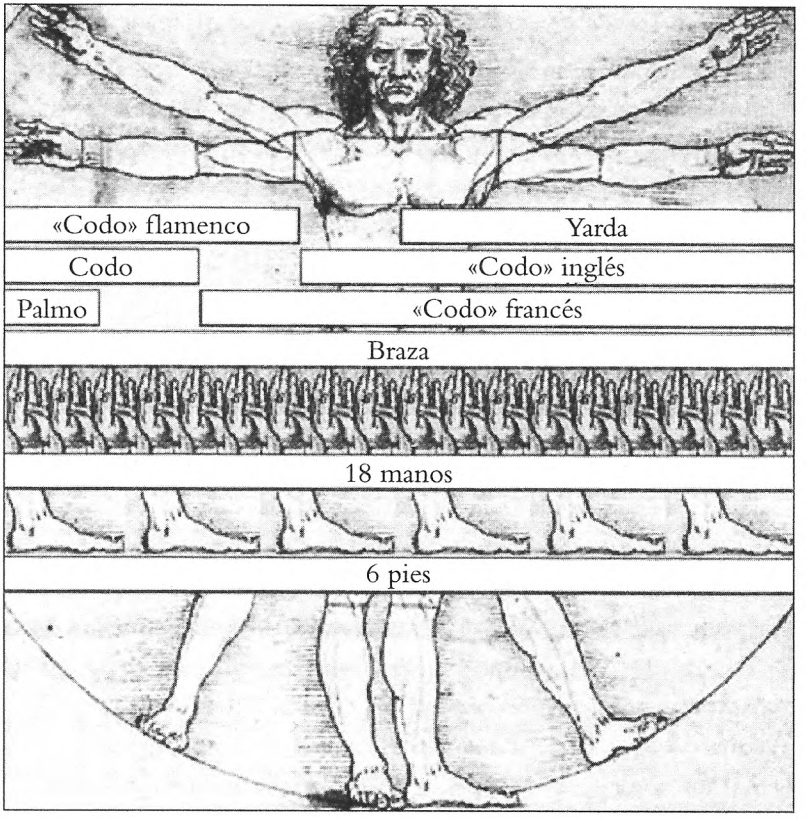
Resulta esclarecedor en el proceso de medir el concepto de *magnitud*. Aunque la primera acepción que contempla el Diccionario es el de «tamaño de un cuerpo», a nosotros nos interesa destacar esta otra: «propiedad física que puede ser medida», ya que nos aproxima más a lo que aquí nos importa. Resulta aún más clarificadora la definición de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, que define la magnitud como «un atributo de un fenómeno; un cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente».

El proceso de medir implica destacar una determinada magnitud y comparar, pues medir es comparar una cantidad desconocida que deseamos determinar y una cantidad conocida de la misma magnitud, que elegimos como unidad. En el proceso de medición determinamos la proporción entre la dimensión de un objeto y una unidad de medida concreta.

Para realizar cualquier medición es preciso disponer de una unidad, una cantidad que se toma como medida o término de comparación de las demás de su especie. El resultado de una medición es una cantidad que expresamos mediante un número acompañado del nombre o símbolo de la unidad correspondiente: 25 kg, 30 m, 28 s, etcétera.

La necesidad de medir, ya fuese para planificar la jornada o las labores agrícolas, cuantificar los intercambios comerciales, poder comprar o vender, pagar impuestos o realizar una ingente variedad de actividades, hizo que a lo largo de la historia los sistemas tradicionales manejasen una gran diversidad de medidas. En estos sistemas de medidas, los patrones se establecieron a partir de partes del cuerpo, de actividades relacionadas con el trabajo agrícola o artesanal, o simplemente por convenio dentro de un determinado grupo social. Es posible establecer una diferenciación entre distintos tipos de medidas tradicionales.

A partir de las partes del cuerpo, surgieron medidas que les hacían referencia; son las que hoy denominamos medidas antropomórficas, como el brazo, el codo, el pie, el palmo, la cuarta, la braza, etc. Podríamos decir que la famosa frase de Plutarco «el hombre es la medida de todas las cosas» resulta aquí también pertinente en el sentido que desde la antigüedad el hombre se dotó de una serie de unidades de medida que se relacionaban consigo mismo, con su propio cuerpo. Naturalmente, medidas de este tipo y con el mismo nombre diferían dependiendo de la época y del lugar donde se adoptaban, y correspondían, de hecho, a longitudes diferentes.



Medidas antropomórficas.

Las largas distancias se midieron en unidades de tiempo: tantos días de viaje a pie o a caballo, una hora de camino, media hora, etc.; son las que denominamos medidas itinerarias. Más adelante se usaron otras, como el estadio, la legua o la milla. La milla, por ejemplo, fue una medida itineraria que ya se utilizaba en las vías romanas y equivalía a 8 estadios o 1.000 pasos de 5 pies romanos (aproximadamente, 1.375 m); la milla empleada por los ingleses como medida itineraria terrestre equivale a 1.609 m. En la marina también existe la milla náutica; su equivalencia es de 1.852 m.

Para medir la tierra, tradicionalmente se usaron medidas vinculadas al trabajo humano, como la jornada, que era el tiempo necesario para cultivar un determinado terreno. El ferrado o la fanega, como medidas de superficie de tierra de sembrado, medían la productividad de una determinada superficie de tierra teniendo en cuenta la cantidad de grano que podía producir; eran, pues, unidades que dependían de múltiples factores y no eran invariables.

El procedimiento tradicional de medir grano se llevaba a cabo a través de su volumen, entendiendo la unidad como el recipiente contenedor del grano, como en el caso, por ejemplo, de la fanega de trigo. Este tipo de medidas presentaban problemas derivados del hecho de que un mismo instrumento de medida podía tener equivalencias distintas, pues se admitía la medida a ras (llenando sólo hasta los bordes) y la medida colmada (el grano rebasaba los bordes hasta el máximo posible).

El Sistema Métrico Decimal y otros sistemas

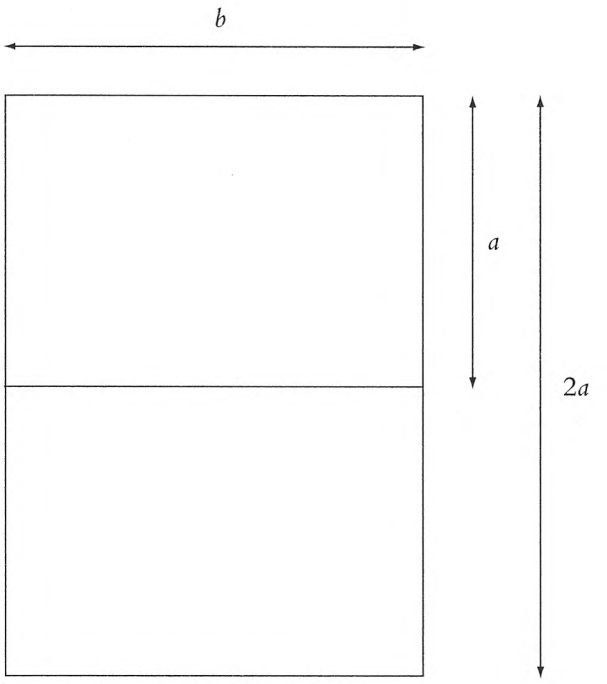
La mayor parte del mundo moderno está familiarizado con el Sistema Métrico Decimal, aunque en los países de influencia anglosajona se simultanea con otros sistemas. Indicamos en kilómetros la distancia entre ciudades, preparamos un biberón o ingerimos una dosis de un determinado medicamento teniendo en cuenta la cantidad de mililitros (o centímetros cúbicos) que nos han prescrito, y si deseamos comprar un piso nos interesamos por los metros cuadrados que tiene.

Sin embargo, ello no significa que no utilicemos también unidades que no derivan de este sistema. Así, constatamos que nuestro reloj nos indica los minutos, pero no damos un nombre ni un significado especial a 10 minutos, sino a 60, y a su vez el minuto no equivale a 10 segundos. Los números que indican las tallas de los guantes o de los zapatos, por poner sólo algún ejemplo, no se expresan en centímetros u otras unidades derivadas del metro. Aún así, incluso hoy en día utilizamos unidades que, sin ser de un sistema determinado, nos permitan describir aspectos de la realidad que deseamos destacar.

En contextos tecnológicos modernos encontramos medidas muy útiles que no encajan con el Sistema Métrico Decimal. Un caso paradigmático es el de las medidas DIN para los formatos de papel. Aunque existen formatos de papel muy diversos, como el folio, la cuartilla, la holandesa, etc., el más extendido por su uso es el DIN A4 (210 mm × 297 mm). Los formatos de papel estándar adoptados en la mayor parte del mundo se basan en la norma alemana que el Deutsches Institut für Normung (Instituto Alemán de Normalización) definió en 1922: la norma DIN, adoptada después por las normas ISO (International Organization for Standardization). La mayoría de máquinas impresoras digitales y fotocopiadoras, tanto de uso particular como industriales, están diseñadas para utilizar formatos de papel de la norma DIN.

Las condiciones impuestas a este tipo de formato de papel fueron tres: la primera es que los diferentes tamaños tenían que tener la misma proporción entre su lado mayor y menor; la segunda, que los tamaños de papel sucesivos debían tener uno el

doble de superficie que el siguiente, de manera que al cortar una hoja de papel de un formato se obtengan dos iguales del formato siguiente; y la tercera y última, que el formato mayor, denominado A0, debía tener una superficie de 1 m^2.



Formato de papel que, al doblarse por la mitad, mantiene la proporción entre sus lados.

¿Cómo podemos encontrar esta proporción buscada? Si partimos de un formato de papel rectangular de lados a y b respectivamente, el formato superior tendrá $2a$ por b; para que la proporción entre sus lados sea la misma tendrá que cumplirse que:

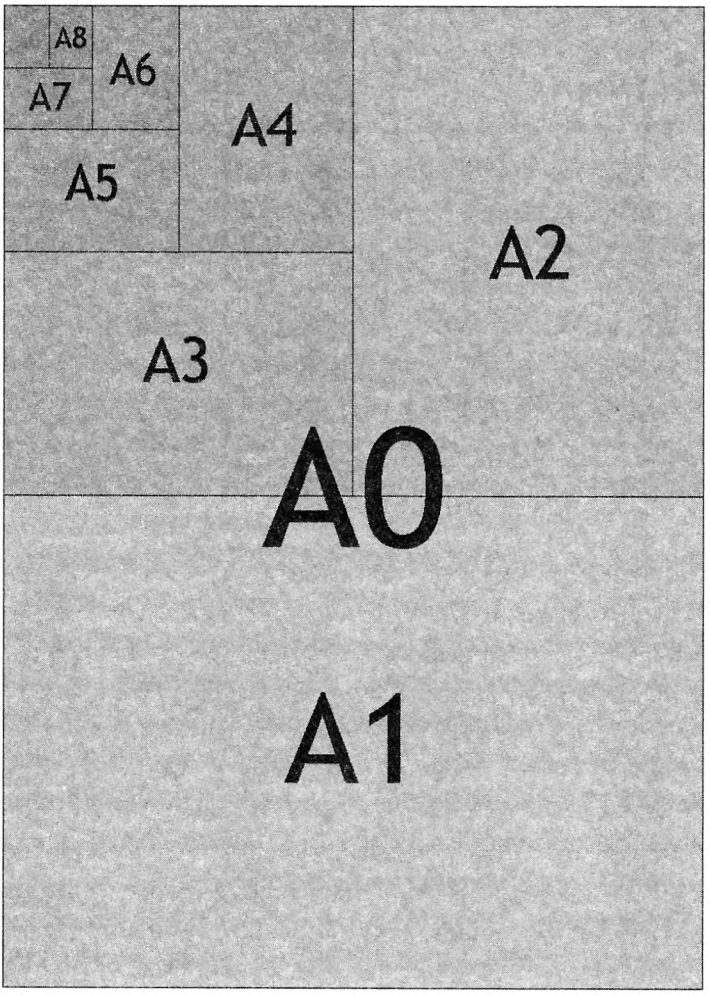
$$\frac{b}{a} = \frac{2a}{b}$$

y, por consiguiente:

$$b^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}\, a.$$

Es decir, la proporción entre el lado mayor y el menor ha de ser $\sqrt{2}$. Si tenemos un formato de papel que cumpla esta condición, al partirlo en dos iguales la proporción se conservará.

A partir de las dimensiones del A0, el formato siguiente (A1) se obtiene dividiendo el lado mayor entre dos y convirtiendo las medidas del lado menor de A0 en las del lado mayor de A1. Repitiendo el proceso con A1, esto es, dividiendo la medida mayor por dos y conservando la menor igual, se obtienen las de A2, y así sucesivamente, como muestra la figura siguiente:



Las dimensiones del formato DIN.

CÁLCULO DE LAS DIMENSIONES DEL FORMATO A0

El rectángulo de lados *a* y *b* debe tener un área de 1 m^2, y a su vez, la relación o proporción entre los lados debe ser $b = \sqrt{2} \cdot a$

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 1\ m^2 \\ b = \sqrt{2} \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot a \cdot \sqrt{2} = 1\ m^2 \Rightarrow a^2 \cdot \sqrt{2} = 1\ m^2 \Rightarrow a^2 = \frac{1\ m^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{1\ m^2}{\sqrt{2}}} \Rightarrow a = \frac{1\ m}{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{1{,}189}\ m \Rightarrow a = 0{,}841\ m.$$

Sabiendo el valor de *a* podemos calcular fácilmente el de *b*:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 1\ m^2 \\ a = 0{,}841\ m \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{1\ m^2}{0{,}841\ m} \Rightarrow b = 1{,}189\ m.$$

De manera que el formato DIN A0 tiene las siguientes medidas:

$$\text{DIN A0} \begin{cases} \text{ancho} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\ m = 0{,}841\ m \\ \text{largo} = \sqrt[4]{2}\ m = 1{,}189\ m. \end{cases}$$

Medidas directas e indirectas

Una medida puede ser directa, como la medida de la temperatura tomada con un termómetro, o indirecta, si se requieren otras mediciones hasta llegar a la deseada. Si se efectúa la medición mediante un instrumento de medida creado específicamente para este fin hablamos de *medición directa*. En ese caso disponemos de un instrumento que obtiene la medida comparando la magnitud (la variable) que se quiere medir con otra de la misma naturaleza física. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, si se compara la longitud del objeto con la longitud de un patrón marcado (calibrado) efectuando la comparación distancia-distancia.

Las técnicas de medición son estrategias usadas para determinar una medida, tales como contar, estimar, utilizar fórmulas o valerse de instrumentos. Estos últimos son los que la mayoría de la gente asocia con la medición. Todos hemos visto reglas graduadas, cintas métricas, recipientes calibrados, escalas, termómetros, relojes, cronómetros, etcétera.

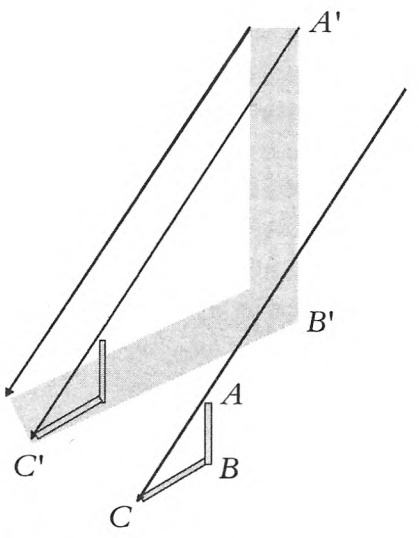
Puede ocurrir que no podamos realizar una medida directa, bien porque existen magnitudes (variables) que no podemos medir mediante una comparación directa con patrones de la misma naturaleza, bien porque estamos frente a casos en los que la magnitud que deseamos medir es muy grande o muy pequeña, y no disponemos de un instrumento adecuado. En estas situaciones, la medición deberá realizarse a través de una variable que permita calcular otra diferente, y entonces estaremos efectuando una *medición indirecta*.

En el uso de fórmulas y relaciones para deducir de manera indirecta nuevas medidas ocupa un lugar destacado el triángulo. La historia de las matemáticas está llena de ejemplos. Por un lado existe un teorema, el de Pitágoras, con múltiples demostraciones realizadas por diferentes culturas distribuidas a lo largo del tiempo y de la geografía terrestre: Egipto, Grecia, África, China, India y Europa tuvieron conocimiento del mismo. Los triángulos semejantes o el teorema de Tales son otros ejemplos en los que interviene el triángulo como figura destacada y que también nos facilitan técnicas para realizar medidas indirectas.

El triángulo está también en la base del desarrollo de la historia de la trigonometría. Esta disciplina matemática ligada durante siglos a la astronomía proporcionaba los fundamentos para los cálculos necesarios en las medidas de los cielos. También es la base matemática de la *triangulación*, el método usado en las mediciones de arcos de meridianos terrestres que veremos en los próximos capítulos.

Veamos, por ejemplo, un cálculo de medida indirecta utilizando el concepto matemático de semejanza entre figuras, en este caso entre triángulos rectángulos. Deseamos medir la altura de una torre (o un edificio) de gran altura. Resulta que, por la razón que sea, no podemos subir a lo alto de ella para realizar una medición directa mediante, por ejemplo, el deslizamiento de una cuerda o cinta métrica graduada desde lo alto de la misma. Aún así, podemos usar un sencillo método indirecto y averiguar cuál es la altura desconocida.

Coloquemos cerca de la torre o del edificio un objeto vertical (una vara, una estaca...) y midamos su altura. Si luego medimos simultáneamente la longitud de la sombra de dicho objeto y la longitud de la sombra del edificio, podremos conocer la altura buscada. ¿Cómo? Dada la enorme distancia que separa el Sol de la Tierra (150.000.000 km aprox.) podemos considerar paralelos los rayos del Sol que inciden sobre la torre y sobre el objeto. La relación entre la altura y la sombra del objeto será la misma que la relación entre la altura y la sombra de la torre o del edificio, ya que los dos triángulos que comparamos son semejantes (ambos son rectángulos y tienen sus ángulos iguales). Por tanto, basta con calcular una proporción.



Medición de la torre comparando su sombra con la de un gnomon.

Si $A'B'$ es la altura que buscamos, $B'C'$ es la longitud de la sombra de la torre (o edificio), AB la altura del objeto vertical (vara, estaca...) y BC la longitud de su sombra, como

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$$

tendremos que

$$A'B' = \frac{AB}{BC} \cdot B'C'.$$

Este simple razonamiento matemático nos permite calcular la altura de la torre (o del edificio) mediante una medición indirecta a partir de otras medidas directas, de longitudes, que sí hemos podido tomar.

Las matemáticas constituyen, como acabamos de ver, una herramienta idónea para establecer medidas precisas. A lo largo de la historia el ser humano intentó explicar el mundo, comprender su entorno y controlarlo. Una de las preocupaciones más ancestrales y generalizadas fue la de conseguir medir el tiempo y poder establecer un calendario. Otra preocupación permanente fue la de buscar explicaciones del mundo en el que vivía y disponer de una visión global del mismo, es decir, de una cosmología. Cuando fue capaz de desprenderse de las explicaciones

mitológicas intentó conocer las dimensiones reales del mundo que habitaba y quiso medir la Tierra. Tanto para medir el tiempo como para medir el espacio del mundo físico donde vivía tuvo, paradójicamente, que mirar a un mundo que le era inaccesible, el mundo de los cielos y, de alguna manera, como veremos, la observación sistemática de los acontecimientos celestes y su interés por comprenderlos sería lo que le permitiría llevar a cabo aquellas mediciones.

Capítulo 2

Medir los cielos

Las civilizaciones antiguas ya observaron que muchos fenómenos de la naturaleza son cíclicos: después de una época de calor viene otra de frío y vuelve de nuevo la de calor y luego la de frío. La vegetación parece tener una explosión de verdor, florecen las plantas, aparecen los frutos y luego, progresivamente, muchos árboles van perdiendo sus hojas para acabar un ciclo que se reinicia una y otra vez.

La observación del firmamento y el registro sistemático de los cambios cíclicos que en él se pueden detectar condujeron a relacionarlos con los cambios que el ser humano observaba en el medio en el que vivía. Esta constatación llevó a la humanidad a estudiar la posición y el movimiento de los astros (astronomía) y permitió poder prever fenómenos naturales que se producían en la Tierra, como los cambios estacionales. Enraizó así la idea de que los astros influían en los acontecimientos terrestres (astrología).

De alguna manera resultó imprescindible medir los cielos. Las matemáticas y, en particular, la geometría y la trigonometría, demostraron ser las herramientas más útiles para ello, y fueron los griegos quienes desarrollaron una sofisticada astronomía matemática que permitió explicar el movimiento aparente de los astros y, especialmente, de los planetas.

El pensamiento racional griego y la cosmología

Si entendemos la ciencia como la comprensión, descripción y explicación sistemática de los fenómenos naturales con la ayuda de la lógica y de las matemáticas, entonces los orígenes de la ciencia occidental hay que buscarlos en la tradición griega y helenística. Las raíces de la física moderna entroncan con el estudio de los problemas astronómicos planteados por los movimientos celestes y el intento de explicarlos racionalmente mediante modelos matemáticos.

En general, las antiguas concepciones sobre el universo (cosmologías) tuvieron un marcado carácter mitológico, ya que recurrían a explicaciones de carácter sobrenatural. Pero con los filósofos de la antigua Grecia apareció la cosmología racional. A partir del siglo VI a.C., las mentes imaginativas de los grandes pensadores griegos

intentaron explicar racionalmente los fenómenos sin recurrir a la mitología. Los fenómenos naturales se consideraron regidos por relaciones determinables de causa-efecto. Los cambios en la naturaleza se relacionaron con los principios subyacentes, que creyeron inteligibles, pudiendo explicar así por qué los acontecimientos suceden como suceden.

ANAXIMANDRO Y LOS RAZONAMIENTOS POR ANALOGÍA

El filósofo jónico Anaximandro (ca. 610 a.C.-ca. 545 a.C.) hizo servir razonamientos por analogía. Utilizaba este tipo de razonamiento cuando decía que «las estrellas son porciones de aire comprimido, en forma de ruedas, llenas de fuego, y que emiten llamas en algún momento desde pequeñas aberturas». Una explicación que ahora podría hacernos sonreír, pero que situada en el contexto de su época significa un importante avance al descartar fuerzas sobrenaturales y establecer sólo causas naturales.

Detalle de La escuela de Atenas *(1510-1511), de Rafael Sanzio, que representa a Anaximandro.*

Los dos grandes hechos de los cielos

Para darnos cuenta de la capacidad de la mente racional griega, que imaginó sofisticados modelos matemáticos para explicar, cuantificar y predecir los fenómenos celestes, conviene que, por un momento, nos desprendamos de los conocimientos que tenemos e intentemos situarnos en el propio contexto de principios del siglo IV a.C. Sólo así podremos entender la genialidad de sus logros. Unos 400 años a.C., los griegos ya disponían de suficientes datos sobre los movimientos aparentes de los cuerpos celestes, y fue cuando empezaron a formular teorías matemáticas explicativas de los mismos. ¿Cuáles eran esos datos? ¿Cuáles eran, como ellos dijeron, las apariencias que «había que salvar», es decir, explicar racionalmente?

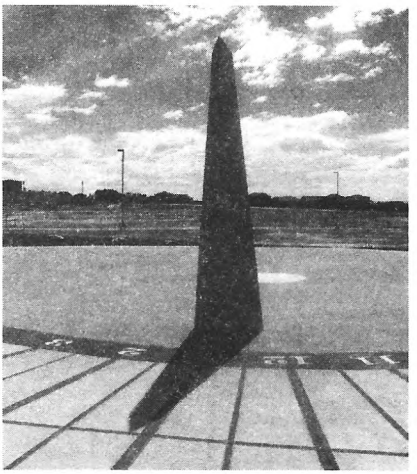
De la observación sistemática del cielo podemos distinguir dos grandes hechos. El primero consiste en el movimiento diurno del Sol y el movimiento de las estre-

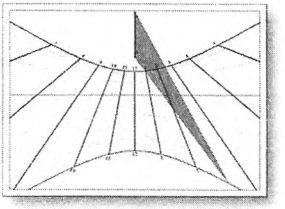
llas; el segundo en el movimiento de los planetas. Veamos los principales datos de observación sobre ambos de que dispusieron los astrónomos de la Antigüedad (Egipto, Mesopotamia, Grecia).

El movimiento diurno del Sol y el movimiento de las estrellas

Observaciones locales sistemáticas del movimiento diurno del Sol con la ayuda del gnomon (una varilla vertical sobre una superficie horizontal) muestran que la longitud y la dirección de la sombra de dicho gnomon varían simultáneamente, de forma lenta pero continuada, en el transcurso del día (tiempo de exposición a la iluminación solar) y determinan, así, la dirección del Sol.

El desplazamiento de la sombra del gnomon durante el día describe una figura simétrica en forma de abanico; dicha figura cambia todos los días, pero en el momento del día en el que la sombra del gnomon es más corta, ésta siempre señala la misma dirección.





A la izquierda, reloj de sol monumental en la Chinook Trails Elementary School en Colorado Springs (Estados Unidos). Arriba, líneas de las proyecciones de los extremos de las sombras del gnomon.

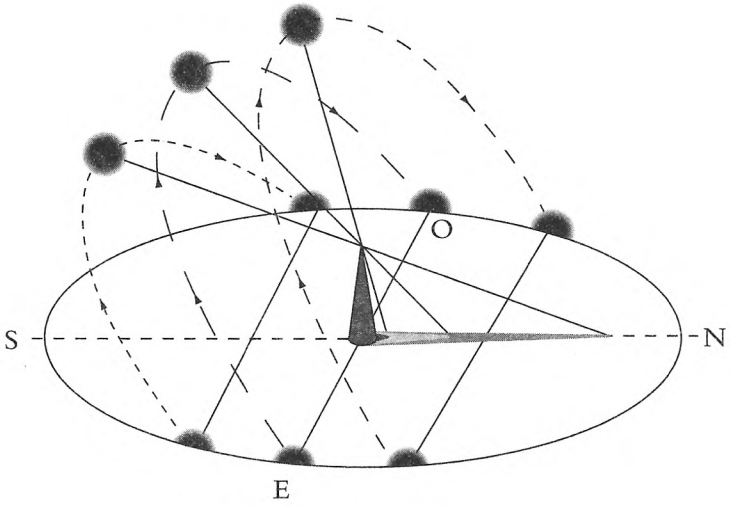
Ello permite definir la *dirección Norte* (dirección que señala, diariamente, la sombra más corta del gnomon) y, a partir de ella, las direcciones Sur, Este y Oeste; el *mediodía* del lugar (instante en que la sombra del gnomon es la de menor longitud), y el *día solar* (intervalo de tiempo que separa, en un lugar determinado, dos mediodías consecutivos y que es de 24 horas).

Por otro lado, la posición del Sol naciente sobre la línea del horizonte varía de un día para otro: se desplaza paulatina y cíclicamente desde el punto cardinal Este

(*equinoccio de primavera*) hacia un punto situado más hacia el Norte (*solsticio de verano*), desde donde va al Este (*equinoccio de otoño*) y continúa hacia el Sur, hasta un punto a partir del cual vuelve a cambiar de sentido (*solsticio de invierno*), para ir de nuevo hacia el Este, repitiendo el ciclo. La posición del Sol poniente varía de forma análoga en torno al punto Oeste. Así se pudo definir el año como el intervalo de tiempo que separa dos equinoccios de primavera consecutivos.

El intervalo de tiempo de luz también varía de un día para otro. El solsticio de invierno es el día en el que el intervalo de tiempo de luz es el más corto del año y la sombra del gnomon al mediodía es la más larga del año. El solsticio de verano es el día en el que el intervalo de tiempo de luz es el más largo del año y la sombra del gnomon al mediodía, la más corta del año.

En resumen, las variaciones de la posición del Sol naciente (y poniente) sobre la línea del horizonte se corresponden con el ciclo de las estaciones, y el Sol atraviesa el cielo una vez cada 24 horas, cambiando su elevación con las estaciones.



Movimiento aparente del Sol.

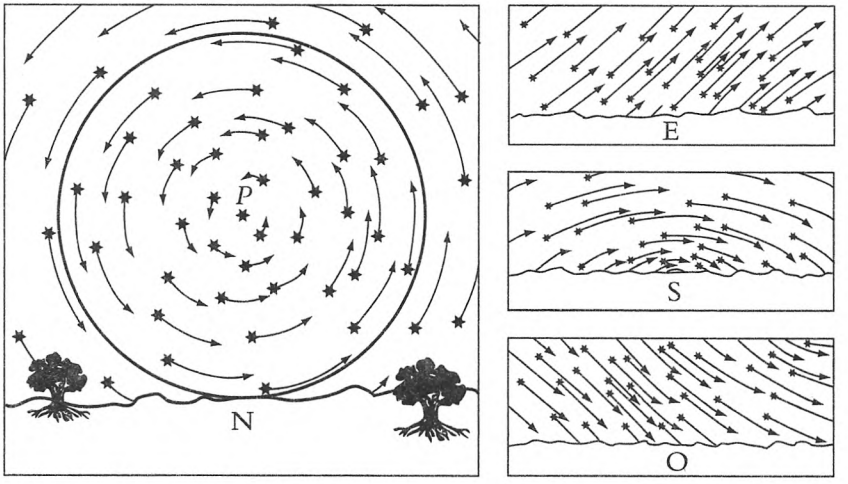
La observación sistemática del cielo nocturno indica que las posiciones relativas entre las estrellas son invariantes. Esto permitió poder hablar de constelaciones, agrupaciones (arbitrarias) de estrellas vecinas y establecer un mapa estelar.

Las estrellas se mueven globalmente de la zona Este a la Oeste. Este movimiento se denomina *movimiento diurno* (o movimiento diario) porque recuerda el movimiento diurno del Sol, que también es hacia el Oeste.

Por encima del horizonte, en dirección Norte, hay un punto *P*, muy cercano a la Estrella Polar, que llamaremos Polo Norte celeste, con respecto al cual las estrellas próximas parecen girar describiendo arcos de circunferencia. Las estrellas tales que su distancia angular respecto del Polo Norte celeste es menor o igual que la distancia entre éste y el horizonte (*N*) nunca desaparecen por debajo del horizonte, tal como se observa en la figura siguiente. Son, por tanto, estrellas visibles cualquier noche a cualquier hora (noche de buena visibilidad y con un horizonte despejado), dichas estrellas se denominan *estrellas circumpolares*.

Con el nombre de *círculo diurno* se indica la circunferencia descrita, aparentemente, por una estrella durante su movimiento diurno (desafortunado término porque, hablando con propiedad, en geometría se reserva el vocablo «círculo» para expresar la superficie contenida dentro de una circunferencia). Cuanto más alejada está una estrella del Polo Norte celeste más difícil se hace reconocer la parte visible de su recorrido como un arco de circunferencia.

Las estrellas parecen describir *círculos diurnos* completos (retornan a la misma posición) cada 23 horas 56 minutos, aproximadamente. Esta observación permite definir el *día sidéreo*, tiempo que tarda una estrella en pasar por dos posiciones consecutivas idénticas. Una estrella que sale exactamente por el Este sigue un recorrido aparente casi idéntico al del Sol en los equinoccios, que designaremos como *ecuador celeste*. Sobre el horizonte, cerca del punto cardinal Sur, las estrellas no se elevan demasiado y se esconden poco después de haber salido.



Movimiento aparente de las estrellas según la dirección de observación: Norte (izquierda), Este (derecha arriba), Sur (derecha centro) y Oeste (derecha abajo).

Los griegos sabían que si se desplazaban del lugar donde habían hecho sus observaciones en dirección Sur, hacia Egipto por ejemplo, la altitud del polo Norte celeste decrecía a razón de 1° cada 110 km, aproximadamente. Ciertas estrellas que antes eran circumpolares iban dejando de serlo; las estrellas que antes salían por el punto cardinal Este y se ponían por el Oeste lo seguían haciendo, pero describiendo una trayectoria cada vez más perpendicular al plano del horizonte; finalmente, cada vez veían más estrellas que antes no era posible ver, y las cercanas al punto cardinal Sur se elevaban a mayores altitudes y eran visibles durante más tiempo.

Las características principales del movimiento de las estrellas son, pues, que tienen un *movimiento diurno* de Este a Oeste y describen regularmente *círculos diurnos* cada 23 horas 56 minutos.

El movimiento de los planetas

Si se afina en la observación se descubren ciertas anomalías en relación con el movimiento regular de los cielos, mencionado en el apartado anterior, que constituyen el segundo hecho de los cielos.

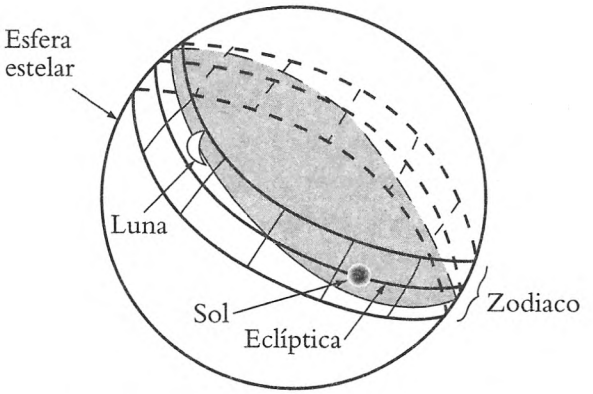
A simple vista podemos detectar siete cuerpos celestes que no permanecen en posiciones fijas respecto de las estrellas. Fueron denominados *planetas* («errantes») por los antiguos, y son: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Veamos qué podemos decir de ellos basándonos en las observaciones.

¿Cómo determinar la posición del Sol respecto de las estrellas? Observando, como hicieron egipcios, babilonios y griegos, el fondo estelar inmediatamente anterior a la salida del Sol, o inmediatamente posterior a la puesta. Así, se comprueba que el Sol cambia día a día su posición referida al fondo estelar, desplazándose aproximadamente 1° en dirección hacia el Este respecto de la posición que ocupaba el día anterior. El Sol tarda un año en volver al mismo punto respecto del fondo estelar. Esta observación llevó de forma natural a definir la *eclíptica* que, en su sentido original, es la trayectoria aparente del Sol a través de las estrellas.

En su recorrido por la eclíptica, el Sol atraviesa un conjunto de doce constelaciones. Tal como las atraviesa son: Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis. Denominamos *zodiaco* a la franja de unos 16° de ancho alrededor de la eclíptica que contiene esas doce constelaciones, popularizadas a través de la astrología.

El Sol, en su movimiento aparente por la eclíptica, se sitúa en el ecuador celeste en los equinoccios y se va alejando de éste hasta un máximo de unos 23,5°, aproxi-

madamente, y en direcciones opuestas en los solsticios. Los griegos constataron que la velocidad aparente del Sol a través de la eclíptica era algo superior en invierno que en verano.

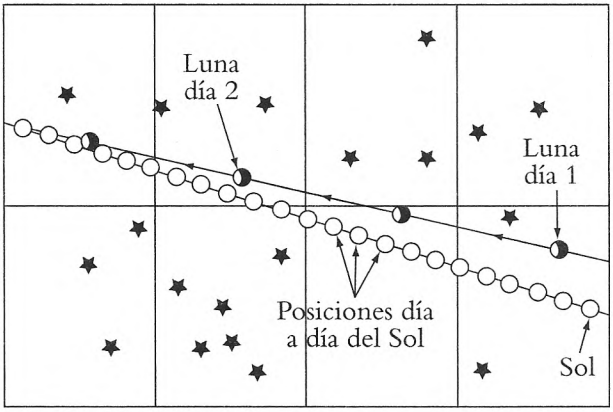


Trayectorias del Sol y de la Luna a lo largo del zodiaco.

Lo mismo que el Sol, el resto de planetas presentan, además del movimiento diurno (hacia el Oeste), un movimiento más lento hacia el Este.

El diámetro de la Luna, igual que el del Sol, se ven bajo un ángulo de medio grado, aproximadamente. El recorrido de la Luna en dirección Este es más rápido y menos regular que el del Sol; tarda una media de 27 días y un tercio en realizar un recorrido completo a través del zodiaco en dirección Este. En general, se llama *periodo sidéreo medio* al promedio de tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa en su movimiento hacia el Este a través de la banda del zodiaco. En el caso de la Luna este valor, también llamado *mes sidéreo*, puede llegar a diferir en 7 horas de la media de tiempo estimada.

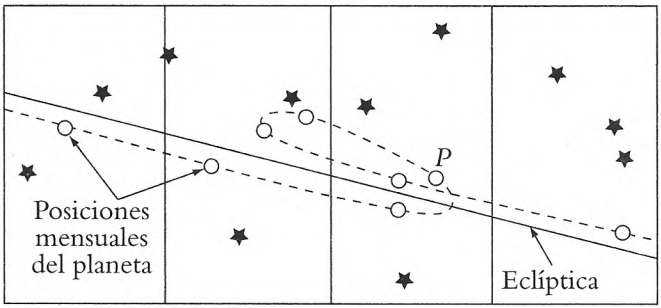
El aspecto del disco lunar varía notablemente a lo largo del tiempo, es decir, la Luna presenta fases que, vistas desde el hemisferio Norte son: luna nueva (disco lunar invisible); cuarto creciente (parte visible del disco lunar aparentando un semicírculo en forma de «D»); luna llena (disco lunar totalmente visible); cuarto menguante (parte visible como un semicírculo en forma de «C»). El ciclo entre dos lunas nuevas consecutivas (*lunación* o *periodo sinódico medio* de la Luna) dura un promedio de 29 días y medio; el tiempo real puede llegar a diferir hasta en medio día de ese promedio. Finalmente se observa que la trayectoria de la Luna respecto del fondo estelar coincide en algún momento con la eclíptica y se va alejando de ella hasta un valor máximo de unos 5° en un sentido y después en el opuesto.



Trayectorias solar y lunar a través del zodiaco.

Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno son cinco planetas que se muestran como simples puntos luminosos en el cielo. Si se calculan sus periodos sidéreos medios se obtienen valores diversos: para Mercurio, 1 año; Venus, 1 año; Marte, 687 días; Júpiter, 12 años, y Saturno, 29 años y medio, aunque los periodos sidéreos reales pueden diferir de los valores anteriores en todos los casos.

El movimiento de los planetas en dirección Este se denomina *movimiento normal* o *propio*. Se observa que de estos cinco pequeños planetas ninguno tiene una velocidad uniforme en su movimiento propio. Además, y ésta fue la observación más sorprendente de todas, presentan retrogradaciones, es decir, interrupciones periódicas en su movimiento propio hacia el Este, cuando, durante ciertos intervalos de tiempo, retroceden hacia el Oeste realizando una especie de rizo en su trayectoria aparente antes de volver a recuperar su movimiento propio. En las retrogradaciones se observa un incremento de luminosidad de los planetas.



Trayectoria aparente de la retrogradación de un planeta.

Mercurio invierte el sentido de su movimiento normal cada 116 días; Venus lo hace cada 584 días; Marte, cada 780 días; Júpiter, cada 399 días, y Saturno, cada 378 días. Estos valores son los de sus *periodos sinódicos medios*, es decir, el promedio de tiempo transcurrido entre dos retrogradaciones consecutivas.

Mercurio y Venus nunca se alejan angularmente demasiado del Sol, pero Marte, Júpiter y Saturno no tienen esta restricción.

En resumen, los planetas, además de tener un movimiento diurno hacia el Oeste acompañando a las estrellas, cada noche se encuentran un poco más hacia el Este en relación a las constelaciones zodiacales (movimiento normal o propio) y, salvo el Sol y la Luna, interrumpen periódicamente su movimiento normal para efectuar retrogradaciones. Este segundo hecho de los cielos fue tan difícil de reconciliar con el primero que toda la historia subsiguiente de la teoría planetaria se puede ver como una sucesión de esfuerzos para hacerlos concordar.

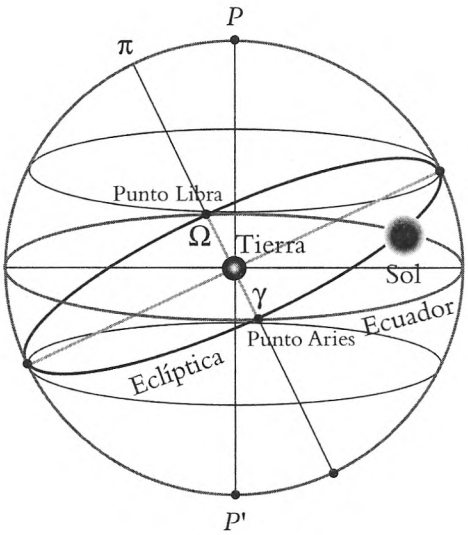
La primera explicación: el universo de las dos esferas

Las aportaciones de los antiguos filósofos griegos fueron conformando un esquema conceptual de carácter geométrico capaz de explicar buena parte de las observaciones. Este esquema, que llamamos el *universo de las dos esferas*, fue aceptado a partir del siglo IV a.C. por la mayoría de filósofos y astrónomos griegos. Consiste en considerar la Tierra como una esfera inmóvil, situada en el centro de otra esfera mucho mayor (la esfera estelar) que gira hacia el Oeste en torno a un eje fijo —que pasa por el Polo Norte celeste— y arrastra, solidariamente, las estrellas. Más allá de la esfera estelar no hay nada, ni espacio ni materia.

En el seno de este marco estructural aparecieron diferentes y contradictorios sistemas astronómicos y cosmológicos durante los casi dos milenios que separan el siglo IV a.C. de la época de Nicolás Copérnico (1473-1543). Pero una vez impuesto casi nunca se puso en discusión su veracidad.

Este modelo no da una explicación del movimiento de todos los cuerpos celestes, en particular de los planetas, pero, de entrada, explica con asombrosa sencillez el primer hecho de los cielos: permite que nos olvidemos de una ingente cantidad de observaciones particulares a condición de recordar unas pocas premisas y, además, es capaz de predecir futuras posiciones estelares. Las pocas premisas que necesitamos son que la esfera celeste efectúa un giro completo, hacia el Oeste, cada 23 horas 56 minutos, y que el Sol describe, en un año y en dirección Este, la circunferencia de un círculo máximo (eclíptica) inclinada unos 23,5° (en realidad 23° 27'), respecto

del ecuador de la esfera (ecuador celeste). Fijada la posición del Sol en la eclíptica, éste describe ese día un círculo paralelo al ecuador.



El universo de las dos esferas.

El modelo geométrico del universo de las dos esferas no es algo sólo del pasado, sino que en astronomía observacional sigue explicándose precisamente por su simplicidad y utilidad para determinar las posiciones de los astros. Las mediciones que se efectúan para determinar las posiciones estelares (las coordenadas) son angulares, por eso podemos suponer que están sobre una esfera.

Los griegos esgrimieron poderosas razones para defender esta idea del universo de las dos esferas. Los argumentos estéticos tenían un peso destacado en la cultura griega y no debe extrañar que sean unos de los que aparecen aquí. Se usa la esfera tanto para situar las estrellas como para atribuirle esa forma a la Tierra. La esfera era considerada por los geómetras griegos como la figura más perfecta, la que al girar sobre su eje ocupa siempre el mismo espacio. Pero, además, tenía sentido una esfera celeste porque se observaba que las estrellas en su movimiento aparente describían circunferencias. La Tierra tenía que ser esférica, no sólo por razones estéticas sino porque, desde un lugar elevado, se observaba que el casco de un navío que se alejaba desaparecía antes que el mástil, y que éste aparecía antes que el casco cuando el barco se acercaba. Además, la sombra que la Tierra proyectaba sobre la Luna durante los eclipses de este astro tenía el borde circular.

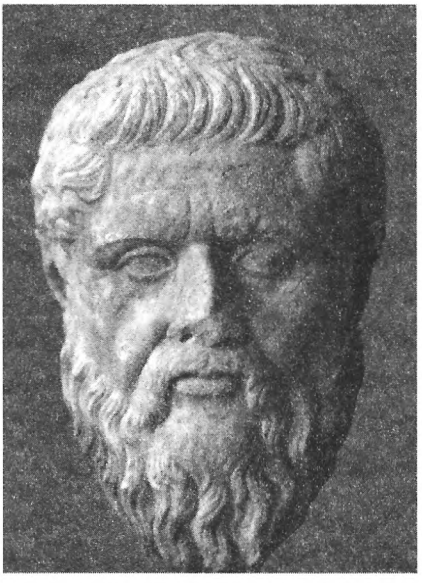
La Tierra tenía que estar en el centro (geocentrismo) no sólo para mantener la simetría del modelo sino también porque un cuerpo situado en el centro de una esfera ¿hacia dónde podría caer? Todas las direcciones señalan hacia arriba, por lo tanto, la Tierra no puede caer en ninguna dirección y debe permanecer en el centro. Por último, la inmovilidad de la Tierra (geoestatismo) se argumentaba en base a las observaciones sobre las posiciones de las estrellas y cuestiones relacionadas con el sentido común acerca de los objetos situados en el aire o las trayectorias de las piedras lanzadas verticalmente.

Con respecto a las estrellas, los datos de que se disponía no permitían detectar cambios entre las distancias relativas de las estrellas (ausencia de paralaje estelar), que sería lo que se debería ver si la Tierra se moviera. Hoy sabemos que las enormes distancias a las estrellas no permitieron detectar esos cambios. Por último, si la Tierra se moviese, los cuerpos situados en el aire, como los pájaros o las piedras lanzadas verticalmente, deberían quedar —o caer— hacia atrás respecto del movimiento de la Tierra, y si ésta girase saldrían despedidos los objetos que no estuviesen fijados a ella. También deberíamos notar el fuerte viento que necesariamente provocaría el movimiento de la Tierra. Sin embargo, no observamos nada de esto; por tanto, la Tierra no se mueve.

La segunda explicación: la astronomía geométrica

El principio de la circularidad

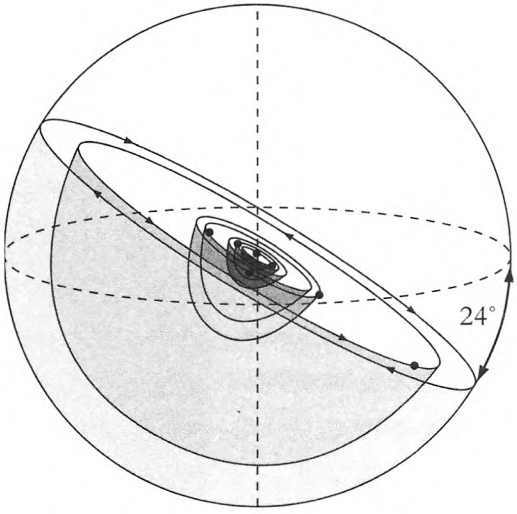
Platón (427-347 a.C.) sentó las bases de lo que podríamos llamar programa de investigación de la astronomía griega al plantear —supuestamente— a los estudiosos la pregunta: ¿cuáles son los movimientos uniformes y ordenados cuya suposición permite *salvar los fenómenos* (explicar racionalmente las apariencias) relacionados con los movimientos de los planetas?



Copia romana de la cabeza de Platón que estuvo expuesta en la Academia de Atenas después de su muerte.

Según Platón, fundador de la Academia de Atenas, la verdad había que buscarla en el mundo de las ideas, de las formas puras, y trató la experimentación con desdén. Podemos enunciar tres características del enfoque platónico que influyeron, en mayor o menor grado, en la astronomía y la cosmología posteriores: el primero, el desprecio o desconfianza hacia la observación; el segundo, el convencimiento de que el cosmos se estructura según una geometría perfecta, y el tercero, el establecimiento del principio básico de la circularidad y uniformidad: todos los cuerpos celestes se mueven con movimiento circular y uniforme. Se puede extraer la visión cosmológica platónica a partir de las ideas que expone en algunos de sus diálogos, en particular el *Fedro*, el *Fedón*, *La República* y el *Timeo*.

En *La República*, Platón habla de una tortera (o un huso) en la que se encaja otra tortera, y así sucesivamente hasta ocho, con sus bordes a modo de círculos. Más adelante, dice: «Todo el huso daba vueltas sobre sí mismo con un movimiento uniforme, y en él, por su parte, giraban también ligeramente, pero en sentido contrario al todo, los siete círculos del interior». Queda claro que se está refiriendo a los planetas. A partir de Platón cualquier astronomía o cosmología serias incluirán los movimientos erráticos de los planetas. El influjo posterior del postulado platónico relativo al movimiento circular y uniforme de los planetas fue extraordinario. La falacia de la circularidad encandiló la astronomía durante dos milenios.



Esquema de la cosmología platónica deducido a partir de las ideas expuestas por Platón en sus diálogos.

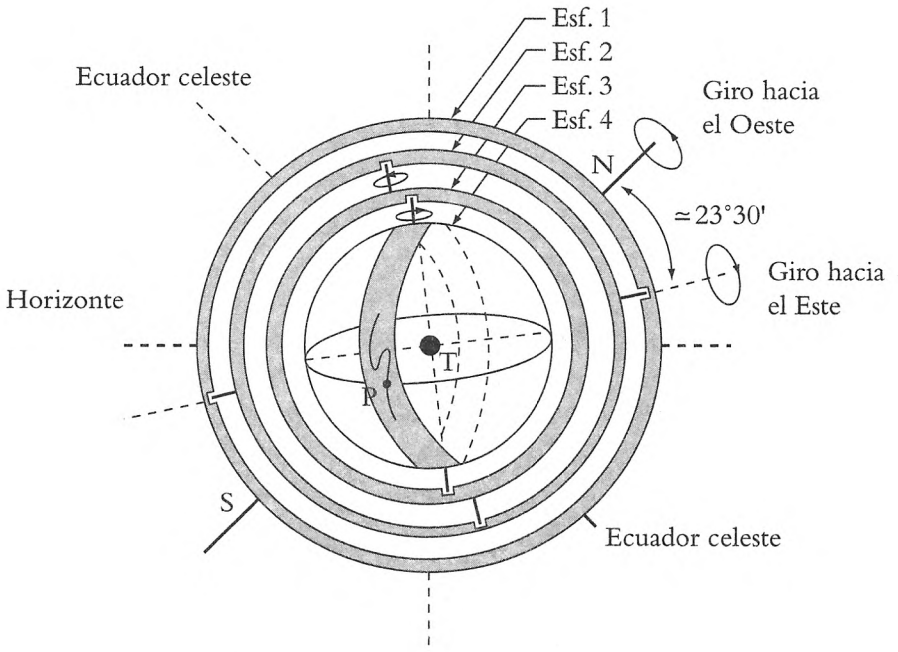
El sistema de las esferas homocéntricas

El matemático Eudoxo de Cnido (ca. 390 a.C.-ca. 337 a.C.) fue el primero que respondió seriamente a la supuesta pregunta de Platón. Propuso un ingenioso sistema de esferas concéntricas mediante el cual conseguía ofrecer una primera y genial explicación del movimiento de los planetas a base de movimientos circulares.

En su *sistema de las esferas homocéntricas*, Eudoxo consideró para cada planeta un modelo con un cierto número de esferas encajadas, concéntricas con la Tierra: tres para el Sol, tres para la Luna y cuatro para cada uno de los otros planetas (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno); para explicar el movimiento de las estrellas sólo era necesaria una esfera. Podríamos decir que para poder explicar los movimientos celestes tuvo que usar un total de 27 esferas:

$$3\ (\text{Sol}) + 3\ (\text{Luna}) + 20\ (4 \times 5, \text{los cinco planetas}) + 1\ (\text{las estrellas}) = 27.$$

Sin embargo, Eudoxo no relacionó el movimiento de un conjunto de esferas de un planeta con el conjunto de esferas de otro. Se trataba de modelos matemáticos independientes unos de otros.



Sistema eudoxiano de esferas de un planeta.

En el caso de Mercurio, Venus, Marte, Júpiter o Saturno, cada uno de estos planetas tenía asociadas cuatro esferas con la disposición siguiente: el planeta está situado en el ecuador de la esfera más interna (esfera 4); el eje de esta esfera (los polos) se fija a otra esfera (esfera 3) concéntrica con ella y más grande; el eje de la esfera 3, a su vez, tiene los polos solidarios con otra esfera (esfera 2) mayor y concéntrica con las anteriores; finalmente, y de forma análoga, el eje de la esfera 2 tiene los polos solidarios con una última esfera (esfera 1) más grande y concéntrica con las anteriores.

De esta manera el eje de cada esfera (y, por tanto, cada par de polos) se ve obligado a desplazarse por el movimiento de la esfera más cercana que le rodea. Todas las esferas giran con velocidades constantes, y respectivamente diferentes, en torno a su propio eje.

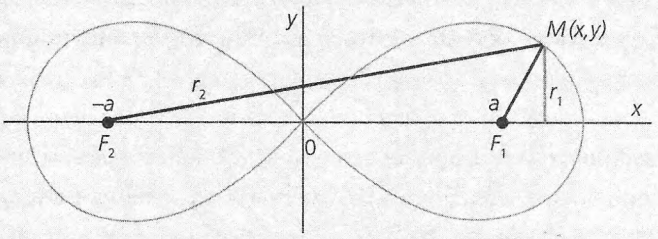
¿Qué papel desempeña cada una de las cuatro esferas en la descripción del movimiento del planeta? La primera de ellas, llamémosla esfera 1, tiene el eje en dirección Norte-Sur y gira diariamente de Este a Oeste; explica el movimiento diurno del planeta, corresponde a la esfera de las estrellas y es la que mueve todas las demás. La esfera 2 tiene el eje inclinado con respecto a la anterior un ángulo casi igual al que forma la eclíptica con el ecuador celeste, y gira hacia el Este con una velocidad de una revolución cada periodo sidéreo correspondiente al planeta. Explica el movimiento propio (en dirección Este) del planeta. La esfera 3 tiene el eje (los polos) sobre el ecuador de la anterior (sobre la banda zodiacal) y gira con una velocidad igual a una revolución cada periodo entre dos retrogradaciones consecutivas (periodo sinódico). La última, la esfera 4, tiene el eje inclinado un cierto ángulo (pequeño) con respecto al eje de la anterior y gira con la misma velocidad, pero en sentido opuesto.

Si observamos desde el centro de las esferas (Tierra) y nos fijamos únicamente en el movimiento combinado de las esfera 3 y 4, el resultado es que el planeta describe una curva llamada hipopeda (una lemniscata esférica, esto es, una curva en forma de ∞ sobre una esfera). Por tanto, el planeta describiría esta curva visto desde el centro, pero al ser obligado además a desplazarse debido a las esferas 2 (movimiento lento hacia el Este) y 1 (movimiento hacia el Oeste), el resultado final es que presentará todos los movimientos que de hecho se observan, incluyendo las retrogradaciones.

Cada planeta presenta, por consiguiente, un movimiento diario hacia el Oeste alrededor de la Tierra, un movimiento propio hacia el Este a lo largo del zodiaco y un movimiento de retrogradación.

LA LEMNISCATA

En el modelo de las esferas homocéntricas de Eudoxo aparece la hipopeda o lemniscata esférica. En el plano, una lemniscata es una curva con una forma característica, que consiste en dos bucles que se encuentran en un punto central, como se muestra en la figura.



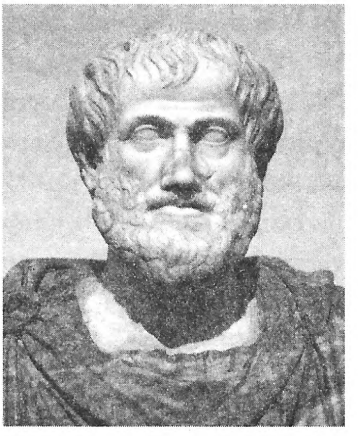
En el plano, la lemniscata puede ser descrita a través de la ecuación general siguiente:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2\,(x^2-y^2),$$

siendo $2a$ la distancia entre los focos F_1 y F_2. La curva, también conocida como lemniscata de Bernoulli, fue descrita por primera vez en 1694 por el matemático y científico suizo Jakob Bernoulli (1654-1705) como la modificación de una elipse. Si la elipse es la curva que se define como el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es una constante, la lemniscata es el conjunto de puntos del plano tales que el producto de sus distancias a los dos focos es constante.

La cosmología de Aristóteles

Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), discípulo de Platón pero fundador de su propia escuela, el Liceo de Atenas, fue un gran filósofo que se propuso organizar en un todo sistemático y coherente el saber de su época. Integró en su cosmología el mecanismo de las esferas homocéntricas para explicar el movimiento de los planetas y estableció las bases de lo que hoy llamamos la *física antigua*.



Busto en mármol de Aristóteles que se conserva en el Palacio Altemps, Roma.

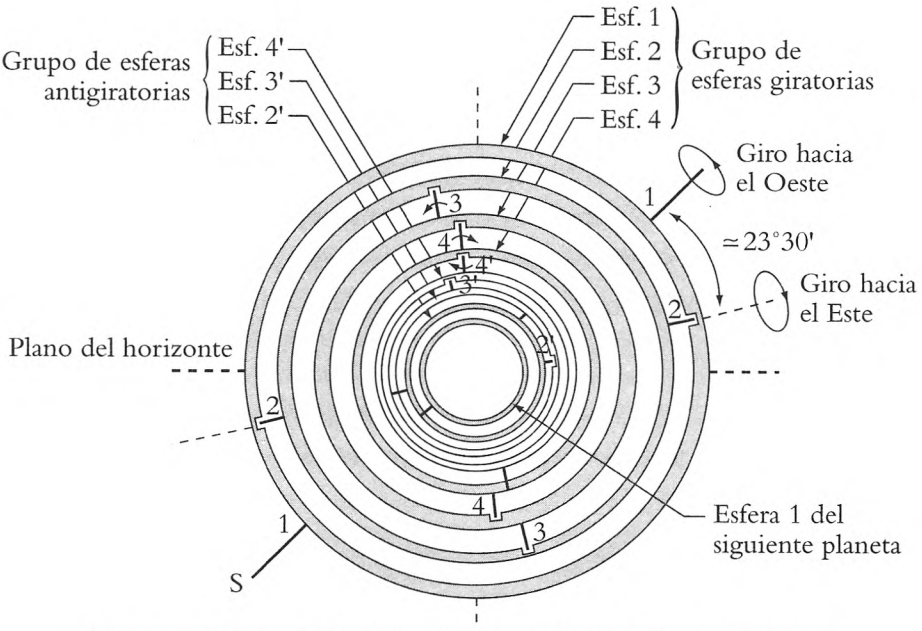
Según Aristóteles, hay una diferencia esencial entre la región sublunar que se extiende de la Tierra a la Luna y la región celeste o supralunar. Existe una clara distinción entre las eternas, regulares e inmutables revoluciones de las esferas celestes y los movimientos de la región terrestre, que son finitos, irregulares y perecederos. Los objetos de la región sublunar están constituidos por cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego. Los cuerpos celestes, sin embargo, no están hechos de estos cuatro elementos, sino de otro que es puro, inalterable, transparente y sin peso: el éter o quintaesencia. Como el éter es inmutable, en los cielos nada cambia nunca.

En su cosmología, Aristóteles aprovechó el modelo de esferas homocéntricas de Eudoxo, que Calipo de Cízico (370 a.C.-300 a.C.) había perfeccionado ampliando de 27 a 34 el número total de esferas. Pero la mente sistemática de Aristóteles intentó dar realidad física a los artificios geométricos que aparecían en ellas. Un esquema geométrico sólo podía ser aceptable si tenía un sentido mecánico y se adecuaba a nuestras ideas generales sobre la materia y el movimiento.

Así, construyó un sistema único de esferas homocéntricas que actuaban simultáneamente conectadas todas entre sí. La esfera estelar, la más externa, imponía el movimiento hacia el Oeste a todas las demás. Para impedir que una esfera asociada con un planeta determinado impusiera su particular movimiento a todas las esferas inferiores, introdujo, entre el conjunto de esferas de cada planeta y el del planeta siguiente (más interno), esferas compensadoras que giraban sobre los mismos ejes y con las mismas velocidades que cada una de las esferas planetarias del conjunto anterior (más externo), pero en dirección opuesta. La introducción de este conjunto de esferas antigiratorias elevó a 56 el número total de esferas, ahora en contacto físico y formando un sistema global.

El sistema de las esferas homocéntricas suscitó críticas ya en la Antigüedad, puesto que en él se mantiene constante la distancia entre un planeta dado y la Tierra, y resulta difícil de explicar, entre otras observaciones, la variación de brillo de los planetas durante las retrogradaciones, algo que se relacionaba con una aproximación a la Tierra.

Las bases de la que llamamos física antigua las estableció Aristóteles, que analizó y explicó los movimientos diferenciando claramente entre la dinámica celeste (región supralunar) y la dinámica terrestre (región sublunar). Su doctrina física fue aceptada como dogma por sesenta generaciones porque era una teoría muy elaborada y coherente, que concordaba con el sentido común y la experiencia cotidiana, y que él integró en su cosmología.



Esferas antigitratorias de Aristóteles. Si las cuatro primeras esferas corresponden a Saturno, entonces, salvo la esfera 1, que imprime a las otras el movimiento hacia el Oeste, el movimiento de las otras tres (2, 3, 4) queda anulado para los planetas siguientes mediante tres esferas antigiratorias (4', 3' y 2').

Aristóteles no se limitó a aceptar que el cosmos es geocéntrico, geostático y fundamentalmente circular, sino que argumentó en favor de estos postulados con notable habilidad e ingenio. La cosmología aristotélica estableció una conexión íntima entre la astronomía y la física que dio como resultado un todo coherente, un verdadero sistema del mundo, una cosmofísica. Por este motivo no es de extrañar que, salvo raras excepciones, como fue el caso de Aristarco de Samos, la práctica totalidad de los astrónomos griegos, árabes y cristianos aceptaran, de forma implícita o no, las premisas fundamentales de la cosmología aristotélica: el carácter cerrado y finito del cosmos, la inmovilidad de la Tierra en el centro del mundo y la diferencia esencial entre dos regiones, la celeste (supralunar) y la terrestre (sublunar).

Aristarco de Samos

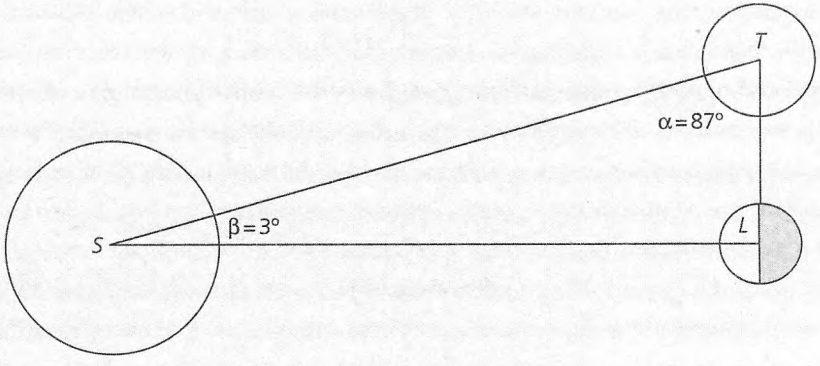
Se conoce muy poco de la vida de Aristarco de Samos (ca. 310 a.C.-ca. 230 a.C.), que fue discípulo de Estratón de Lampsaco, tercer director del Liceo. Sabemos básicamente lo que se desprende de su obra *Sobre los tamaños y distancias del Sol y de la*

Luna y las citas halladas en textos posteriores. Reconocido como astrónomo en su época, fue llamado el «matemático» y citado como un hombre de profundos conocimientos en muchas ramas de la ciencia: geometría, astronomía, música... Arquímedes (ca. 287 a.C.-ca. 212 a.C.), contemporáneo suyo, afirma en un pasaje de su obra *Arenario* que Aristarco suponía que la esfera de las estrellas y el Sol permanecían inmóviles, y que la Tierra giraba alrededor del Sol en un círculo.

Sobre los tamaños y las distancias del Sol y de la Luna es un libro de astronomía en el que mediante procedimientos geométricos se aproximan razones entre distancias de los astros que en el lenguaje actual se identificarían con los senos de los ángulos. Los procedimientos geométricos que utiliza proceden de la teoría de proporciones de Eudoxo del libro V de los *Elementos* de Euclides. Se basa también en otras relaciones, que para nosotros son trigonométricas, como si las conociese o las conside-

MEDIDA DE LAS DISTANCIAS RELATIVAS TIERRA-LUNA Y TIERRA-SOL DE ARISTARCO

En el siglo III a.C., Aristarco de Samos calculó cuánto más lejos está la Tierra del Sol que de la Luna y también sus tamaños relativos. Para ello tuvo en cuenta que cuando la Luna está «medio llena» (cuarto creciente) el triángulo *TLS* es rectángulo (pues el ángulo Tierra-Luna-Sol es de 90°). Midió el ángulo α que entonces forman las visuales al Sol y a la Luna y que él estimó en 87°. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, $\beta = 3°$.



Pudo así calcular la relación de distancias $d(T,S) / d(T,L)$ a través de un razonamiento matemático impecable. Simplificando, y utilizando la notación actual, la idea básica es:

$$\cos 87° = \frac{d(T,L)}{d(T,S)},$$

rase triviales. Comparó la distancia Tierra-Sol con la distancia Tierra-Luna, calculando que la primera era casi veinte veces la segunda (la proporción real es mucho mayor, 390:1).

¿Por qué los sucesores de Aristarco no adoptaron la tesis heliocéntrica y hubo que esperar hasta que Copérnico, en su obra *De revolutionibus orbium coelestium* (1543), volviese a proponer una hipótesis heliocéntrica? Para contestar a esta pregunta no podemos pensar con la mentalidad del siglo XXI, sino que debemos situarnos en el siglo III a.C. Poner la Tierra en movimiento violaba la antigua autoridad, el sentido común y la física aristotélica. También implicaba la observación de la paralaje estelar, algo que no se observaba. Además, otras ventajas que pudiera tener, como la capacidad de explicar las variaciones de brillo de los planetas, fueron pronto resueltas con nuevos métodos que no violaban la cosmología tradicional.

siendo $d(T,S)$ la distancia de la Tierra al Sol, y $d(T,L)$, la distancia de la Tierra a la Luna:

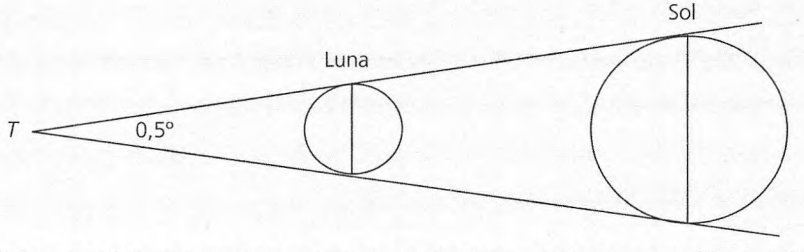
$$d(T,S) = \frac{1}{\cos 87^\circ} d(T,L),$$

y como $\frac{1}{\cos 87^\circ}$ es aproximadamente 19, resulta que:

$$d(T,S) \approx 19\, d(T,L).$$

Además, como la Luna y el Sol, observados desde la Tierra, se ven bajo el mismo ángulo de medio grado, resulta que los diámetros de dichos astros mantendrán la misma proporción:

diámetro del Sol = 19 diámetros de la Luna.



El método matemático fue ingenioso y riguroso, a pesar de que Aristarco tuvo un error en la medición del ángulo α, que no es de 87° sino de 89° 52' (el Sol está unas 390 veces más lejos de la Tierra que la Luna).

Hiparco de Nicea

Hiparco de Nicea (ca. 190 a.C.-ca. 120 a.C.) usó nuevos artilugios geométricos en la astronomía y proporcionó una primera evaluación cuantitativa de las irregularidades de los movimientos del Sol y de la Luna. Fue el prototipo de astrónomo alejandrino que se caracteriza por intentar conciliar el principio de circularidad con un respeto absoluto por los hechos observados. Su programa astronómico establecía que, con la premisa anterior, el astrónomo debe definir el número, las dimensiones y las posiciones de los círculos que deben considerarse, así como la velocidad del movimiento circular que realiza cada uno, con el fin de mostrar, mediante la geometría y el cálculo numérico, que el sistema que propone es capaz de explicar las apariencias, hacer predicciones cuantitativas exactas y servir para construir tablas predictivas.

Hiparco destacó por sus observaciones astronómicas, mejoró el mapa estelar, dispuso de una larga serie de datos observacionales de los babilónicos y descubrió la precesión de los equinoccios (movimiento retrógrado de los puntos equinocciales o de intersección del ecuador celeste con la eclíptica, en virtud del cual se van anticipando las épocas de los equinoccios o el principio de las estaciones).

En la época de Hiparco ya se había calculado el valor de la circunferencia terrestre (lo había hecho Eratóstenes, como veremos en el capítulo 4, dedicado a la medida de la Tierra). Esto permitió a Hiparco poder calcular valores absolutos de las distancias al Sol y a la Luna. Siguiendo métodos similares a los de Aristarco, así como otros propios, determinó la relación de tamaños entre la Tierra y la Luna. Observó la sombra de la Tierra sobre la silueta de la Luna en diversas fases de un eclipse lunar y, considerando que el Sol se encuentra muy alejado de la Tierra y de la Luna, calculó que el diámetro terrestre era 8/3 del de la Luna (y no 2 veces, como estimó Aristarco). Obtuvo un valor para la distancia al Sol de 490 radios terrestres, y para la distancia a la Luna, de entre 59 y 67 radios terrestres (la distancia real es de unos 60 radios terrestres).

Claudio Ptolomeo

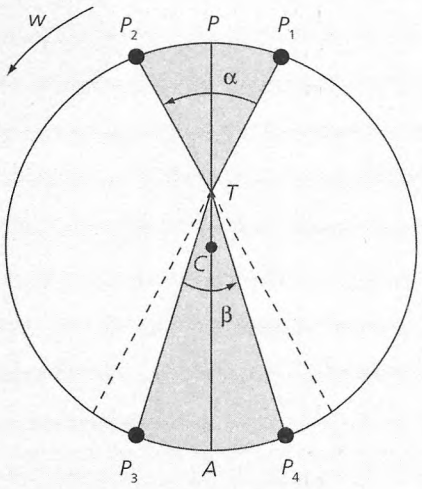
En el siglo II de nuestra era, el matemático y astrónomo Claudio Ptolomeo (ca. 100-ca. 170) trabajó en el Museo y la Biblioteca de Alejandría. A él se debe la implantación de una forma de trabajar en la astronomía práctica que llegaría hasta el siglo XVI. Su obra culminante, la *Sintaxis matemática* o *Almagesto*, fue el primer tra-

tado matemático-sistemático que dio una explicación completa, detallada y cuantitativa de todos los movimientos celestes. Ptolomeo hace de determinados principios físicos la condición de aceptabilidad de las hipótesis astronómicas. No se trata sólo del principio de circularidad y de uniformidad, sino también de otros relacionados con la física aristotélica, como el geocentrismo, el emplazamiento de las estrellas fijas en una esfera particular o la inexistencia del vacío.

En su teoría planetaria, Ptolomeo utilizó artificios geométricos que subordinaban las cuestiones de las trayectorias físicas reales de los planetas y los principios de la física aristotélica a la exactitud del cálculo. Los modelos que construyó fueron capaces de hacer precisos pronósticos cuantitativos de las futuras posiciones planetarias.

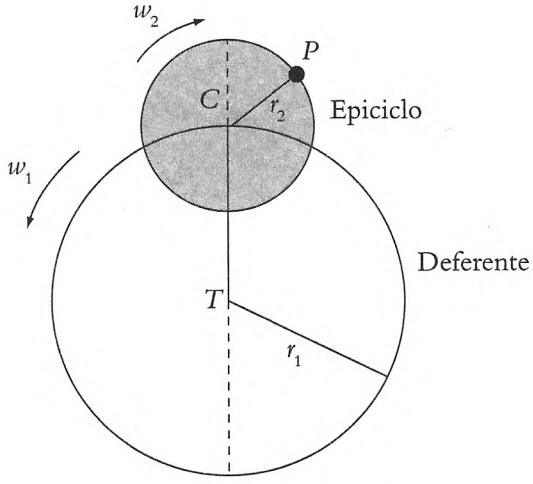
EL MODELO DE LA EXCÉNTRICA (O DEL CÍRCULO EXCÉNTRICO)

Si se considera la Tierra (*T*) inmóvil y se sitúa el planeta (*P*) en una órbita circular excéntrica, es decir, de centro (*C*) no coincidente con la Tierra, se puede explicar el hecho de que los planetas recorran arcos iguales en tiempos desiguales. Esto es así porque, medida desde la Tierra, la velocidad angular aparente de un planeta situado sobre una órbita excéntrica es mayor en el punto de la órbita más cercano a la Tierra (perigeo) y es menor en el más alejado (apogeo), tal como se puede apreciar en la figura. Así, si el planeta se mueve con velocidad angular constante *w* respecto de *C*, el tiempo que tarda en ir de P_1 a P_2 es igual que el que tarda en pasar de P_3 a P_4, pero ambos arcos P_1P_2 y P_3P_4 no se ven bajo el mismo ángulo desde *T*. Esta técnica permitió a Hiparco explicar el movimiento aparente del Sol por la eclíptica, cuya velocidad no es constante a lo largo del año.



El sistema de las esferas homocéntricas se había abandonado como recurso astronómico (no explicaba la observación del cambio de brillo de los planetas). A partir del siglo III a.C. se empezaron a utilizar otros procedimientos geométricos: el

método de la excéntrica (también denominado del círculo excéntrico) y el método del epiciclo-deferente, dos invenciones matemáticas introducidas por Apolonio de Pérgamo (ca. 262 a.C.-ca. 190 a.C.) que Hiparco utilizó en astronomía. En el *Almagesto* encontramos, básicamente, tres recursos matemáticos: la *excéntrica* (el planeta se sitúa en una circunferencia excéntrica, no centrada en la Tierra), el sistema *epiciclo-deferente* (el planeta se sitúa en una circunferencia, el epiciclo, cuyo centro a su vez se desplaza por otra circunferencia, la deferente, en principio centrada en la Tierra) y el *punto ecuante* (un punto dentro de la deferente y distinto de su centro, con respecto del cual el centro del epiciclo describe ángulos iguales en tiempos iguales). Mediante su uso, Ptolomeo no sólo fue capaz de explicar todas las apariencias, sino también de predecir futuras posiciones planetarias.

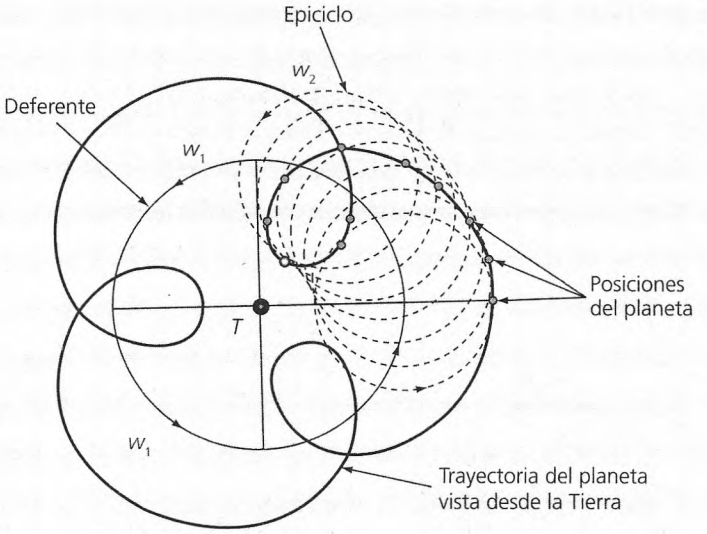


El conjunto epiciclo-deferente.
El planeta (P) *se sitúa sobre el epiciclo y gira hacia el Oeste (o hacia el Este) con velocidad* w_2, *mientras que el centro del epiciclo* (C) *gira hacia el Este con velocidad* w_1.

La astronomía ptolemaica no constituye, de hecho, un auténtico sistema, sino un conjunto de soluciones particulares para cada planeta. El sistema ptolemaico entraba en conflicto con algunos principios importantes del único sistema físico conocido, el de Aristóteles. Apareció una dicotomía entre una cosmología que ofrecía un sistema físico del mundo en su globalidad (pero falto de una descripción matemática de los hechos observados) y una astronomía matemática muy precisa, capaz de dar cuenta de las apariencias (pero falta de explicación física sobre la realidad y las causas de los movimientos).

EL SISTEMA EPICICLO-DEFERENTE. EXPLICACIÓN DE LAS RETROGRADACIONES

El sistema epiciclo-deferente permite explicar las retrogradaciones y la variación de luminosidad de los planetas (interpretada como una variación de la proximidad del planeta a la Tierra). Si suponemos un caso ideal en el que la velocidad angular de centro del epiciclo *C* respecto de la Tierra sea el triple de la velocidad angular del planeta respecto de *C* ($w_2 = 3\,w_1$), el resultado, visto desde la Tierra, sería el que muestra la figura, y el planeta realizaría tres bucles aproximándose a la Tierra. Observándolo respecto del fondo estelar, el planeta retrograda, y entonces brilla más porque está «más cerca» de la Tierra. Esta situación simplificada se aproxima bastante al modelo que correspondería al planeta Mercurio.

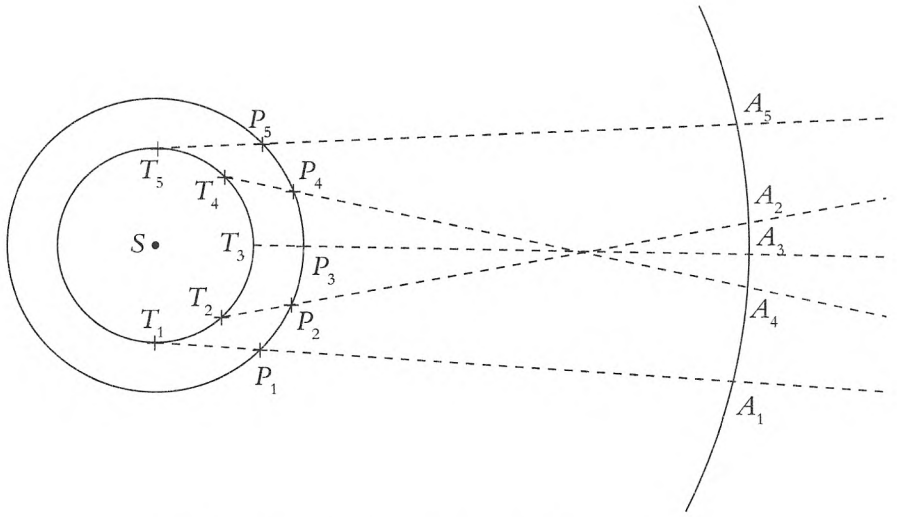


El sistema copernicano

Las razones que se opusieron a la hipótesis heliocéntrica propuesta por Aristarco de Samos en el siglo III a.C. fueron las mismas que desde Aristóteles y Ptolomeo hasta Copérnico se opusieron a toda hipótesis no geocéntrica. Esencialmente son dos: la primera, la invencibilidad de las objeciones físicas contra el movimiento de la Tierra; la segunda, la grandeza desmedida de su universo, que se desprendía de la no observación de la paralaje estelar.

La nueva física nació precisamente de la necesidad de afrontar las objeciones físicas que los eruditos de la época oponían a la astronomía copernicana. Estas objeciones, en el fondo, eran idénticas a las argumentaciones hechas por Aristóteles y Ptolomeo en contra del movimiento de la Tierra, y consistían en afirmar que dicho movimiento produciría los siguientes fenómenos: el primero, los cuerpos no unidos a la Tierra serían lanzados lejos por la fuerza centrífuga desarrollada por la extraordinaria velocidad del movimiento rotatorio; el segundo, todos los cuerpos no ligados a la Tierra, o temporalmente separados de ella, como nubes, pájaros, cuerpos lanzados hacia arriba, etc., se quedarían atrás como consecuencia de este mismo movimiento. Así, una piedra que cayera desde una torre no caería a su lado; un cuerpo lanzado al aire verticalmente no volvería a caer por el lugar de partida, etcétera.

Desde la perspectiva copernicana, las apariencias se explicaban a partir del supuesto de una Tierra en movimiento. Ésta era una nueva visión que rompía con la larga tradición geocéntrica. Una vez que se vio que el sistema de Copérnico podía tener una posible base real, sobre todo a partir de 1609, cuando Galileo Galilei (1564-1642) empezó a utilizar el telescopio para realizar estudios sistemáticos de los cielos, se intensificó la búsqueda de una física que se pudiera aplicar con igual validez a una Tierra en movimiento y a todas las partes del universo.



En el sistema copernicano, las retrogradaciones se explican por una cuestión de perspectiva, debido a que la Tierra, en su movimiento alrededor del Sol, adelanta a un planeta más exterior (o es adelantado por un planeta más interior). El planeta (P) *se ve desde la Tierra* (T) *sobre el fondo estelar en* A.

Gracias a las contribuciones de personalidades como Galileo y Johannes Kepler (1571-1630), entre otros, la nueva física quedó al fin sólidamente establecida por Isaac Newton (1642-1727) en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (Principios matemáticos de filosofía natural)*, publicada en 1687.

En los inicios de la ciencia occidental se observaron los cielos y se construyeron modelos matemáticos que permitieron hacer pronósticos cuantitativos sobre futuras posiciones de estrellas y planetas. En el capítulo siguiente veremos cómo estas detalladas observaciones se utilizaron para elaborar calendarios y medir el tiempo.

Capítulo 3

Medir el tiempo

Los seres humanos vivimos en un espacio, pero también en un tiempo. Nos desplazamos físicamente por la geografía que nos rodea, pero también a través del tiempo en el que estamos sumidos. Por esta razón, desde los mismos inicios de la civilización, de la vida en una sociedad mínimamente estructurada, los pueblos se han ocupado de organizar no tan sólo su territorio, sino también su tiempo. En las sociedades agrícolas en las que las condiciones de siembra y de recolección estaban muy asociadas a las estaciones fue especialmente importante establecer un sistema común de medida del tiempo que permitiera fijar acontecimientos y periodos de manera eficiente y compartida.

La observación de los ciclos naturales llevó al estudio de la posición de las estrellas y el movimiento de los planetas, incluyendo entre ellos el Sol y la Luna, lo que contribuyó al desarrollo de la astronomía. Pronto se estableció una clara correspondencia entre los ciclos naturales y los ciclos celestes, pues las estaciones estaban conectadas con el movimiento solar a lo largo de la eclíptica, al tiempo que las mareas lo estaban con el movimiento lunar. Razones observacionales como éstas fueron las que impulsaron los dos patrones universales en torno a los cuales se organizan los calendarios que las diferentes culturas y civilizaciones han establecido a lo largo de la historia: los calendarios lunares y los calendarios solares.

Un antiguo reto

La imposibilidad de armonizar los ciclos naturales

El calendario, un sistema de dividir el tiempo en días, meses y años, es un puente entre el tiempo cósmico y el tiempo vivido por cada individuo, pero, además, crea un tiempo social, un tiempo entendido por toda la comunidad que se rige por ese calendario preciso. El calendario cubre dos funciones: da ritmo al tiempo y sentido a que se mida. Crea una estructura, y diferencia, por ejemplo, los días de trabajo de los de descanso, y establece tradiciones que marcan lazos entre los miembros de la comunidad.

Todos los calendarios se basan en observar los movimientos de los cuerpos celestes, y usan como unidad de medida algún ciclo observable por todo el mundo. Años, meses y días tienen duraciones aproximadas según se definan, como muestra la tabla siguiente:

Ciclo	Definición	Duración aproximada
Año sideral o sidéreo	Tiempo que tarda el Sol en estar en una misma posición con respecto a una estrella	365 días, 6 h, 9 min, 9 s (365,256363 días)
Año solar o tropical	Tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol entre dos equinoccios	365 días, 5h, 48 min, 46 s (365,242199 días)
Año lunar	Intervalo de 12 meses lunares	29,5 · 12 = 354 días
Mes lunar	Intervalo entre dos lunas nuevas	29 días, 12 h, 44 min, 3 s (de 29 días, 6 h a 29 días, 20 h)
Día	Intervalo entre dos salidas o puestas de Sol, o dos salidas o puestas de Luna	De 23h, 59 min, 39 s a 24 h, 0 min, 30 s

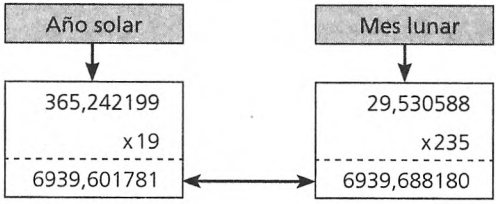
La epacta (del latín *epactae*, *-ārum*, y éste del griego ἐπακταί, «añadidos» o «intercalados») es el número de días en que el año solar excede al lunar común de doce lunaciones. La epacta, por ejemplo, se utiliza para el cálculo de la fecha de Pascua, que es el domingo siguiente a la primera Luna llena después del equinoccio de primavera.

Para que el calendario sea práctico se debe reducir el tiempo a números enteros, y así se establece que, por ejemplo, el día tiene 24 horas. Cada sociedad hace su elección y afronta las dificultades que le comporta. Elige establecer el calendario a partir de la Luna, el Sol u otra estrella. Una vez hecha la elección usa promedios para simplificar los cálculos. Los calendarios son aproximaciones para armonizar los complicados ciclos astronómicos.

El ciclo de Metón

El astrónomo griego Metón de Atenas (siglo V a.C.) es conocido porque desarrolló un sistema efectivo para ajustar el calendario lunar al año solar. Metón observó que 19 años solares correspondían a 235 meses lunares. Puesto que 19 años lunares eran 228 meses ($19 \cdot 12 = 228$), el secreto estaba en añadir 7 meses intercalados a los 19 años lunares ($[19 \cdot 12] + 7 = 235$) para tener los calendarios lunares y solares en fase.

Así, en un ciclo de 19 años habrá 12 años de 12 meses y 7 años de 13 meses. Impresionados por este descubrimiento, los atenienses grabaron el ciclo de Metón en letras de oro en el templo de Atenas con ocasión de los juegos olímpicos de 432 a.C.



En el siglo IV, los judíos hicieron uso del ciclo de Metón y establecieron un calendario lunisolar (ajustado a los ciclos del Sol y de la Luna). Lo necesitaban para ajustar su calendario lunar tradicional al ritmo de las estaciones. La fiesta de la Pascua conmemoraba el Éxodo de Egipto y debía coincidir con la fiesta de primavera. Cuando los meses se desajustaban demasiado de las estaciones, la cebada necesaria para el rito de Pascua no crecía en el mes de la Pascua. Por ello, el Sanedrín buscó un ajuste empírico doblando el último mes del año. Dado que el año solar tiene 11 días más que el lunar, para igualarlos se dispuso agregar un mes cada dos o tres años, según la serie 3, 6, 8, 11, 14, 17 y 19. Así se logró que la festividad de la Pascua (Pésaj) cayera siempre en el mes inicial de la primavera: Nisán. El cálculo de los años a los que se debía añadir un mes es similar al que veremos en el calendario chino.

El calendario gregoriano

El primer calendario romano

Dicen que fue el mismo Rómulo quien, quizá basándose en un antiguo calendario etrusco, estableció el primer calendario romano, que comenzaba en la primavera y que tenía 304 días. Como que ese año quedaba corto respecto del paso natural de las estaciones, era necesario añadirle al final un bloque de días para ir ajustándolo. Para numerar los años se tomó como inicio del calendario romano antiguo el año de la fundación de Roma, el 753 a.C. En el cómputo del calendario romano se incluye a continuación del número el acrónimo *a.u.c.*, que corresponde a *«ab urbe condita»* que significa «desde la fundación de la ciudad». Así, por ejemplo, el año 50 *a.u.c.* del calendario romano corresponde al año 703 a.C. de nuestro calendario. Se trata simplemente de un cambio en el origen del sistema de referencia.

Este calendario tenía una base lunar —de ella proceden los meses—, pero quería adaptarse al ciclo estacional, de ahí los días que se añadían para ajustarlo. Como la mayoría de los calendarios antiguos, estaba repleto de aspectos religiosos o de ideas que hoy nos parecen mágicas. Así, por ejemplo, había *dies fasti*, «días fastos», en los cuales podían hacerse actividades con buenos augurios, y *dies nefasti*, «días nefastos», durante los cuales no se contaba con el favor de los dioses y, por tanto, no convenía realizar demasiadas actividades. La distinción entre «fastos» y «nefastos» evoca nuestra distinción entre «ocio» y «negocio.» También existían días especiales, como los *nefastos partem diem*, que eran días parcialmente nefastos hasta que los sacerdotes ofrecían los sacrificios en el templo. Incluso había un día, *quando stercus delatum fas*, destinado a limpiar el templo de Vesta y que se consideraba nefasto hasta que se cumpliera esta tarea y los desperdicios salieran por la puerta, llamada, muy acertadamente, *Porta Stercolaria*. Precisamente *Fastos* es el título de un largo poema de Publio Ovidio Nasón (43 a.C.-17 d.C.) en el que va describiendo los meses del año —ya del año juliano de doce meses—, indicando los días especiales, sus fiestas y los ritos y leyendas que tienen asociados. Se trata de una obra magnífica para conocer de primera mano el calendario romano antiguo.

Algunos de los meses del calendario romano tenían nombres propios que hacían referencia a divinidades y que han dado origen a los nombres de nuestros meses. El mes *martius*, del que deriva nuestro marzo, era el primero del año y estaba consagrado al dios de la guerra, Marte, que la leyenda señala como padre de Rómulo. Durante la República, a partir del siglo V a.C., la autoridad máxima de Roma eran los cónsules, que se elegían cada año y que empezaban a ejercer su mandato durante el mes de marzo.

El mes *aprilis*, que ha dado lugar a nuestro abril, era el segundo mes del calendario romano antiguo y estaba consagrado a Venus. La etimología de su nombre no está muy clara. Algunas fuentes lo hacen surgir de *aperio*, que significa «abrir», ya que es el mes en que la naturaleza se abre con todo su esplendor, mientras que otras ven su origen en la palabra *aper*, nombre del jabalí, animal venerado por los romanos. Incluso, en una etimología sin valor científico pero de innegable sentido poético, Ovidio quiere relacionar *aprilis* con *aphros* (ἀφρός), que en griego significa «espuma de mar», origen mítico de Afrodita.

Nuestro mes de mayo tiene su origen en el *maius* romano. Existe la opinión de que dicho mes estaba dedicado a los ancianos (*maiores*), así como el siguiente, junio, podía estar dedicado a los jóvenes (*iuniores*). Otras opiniones relacionan su nombre con el de la diosa *Maia*, una de las Pléyades y madre de Mercurio.

El cuarto mes del antiguo calendario romano era *junius*, antepasado de nuestro junio. Aparte de la etimología ya comentada, hay quien dice que debe su nombre al de la diosa Juno, esposa de Júpiter.

Los otros meses, en una prueba de falta de imaginación o de exceso de orden, inicialmente recibían el nombre derivado de su posición en la secuencia de aquel año primitivo: *quintilis* (el quinto mes), *sextilis* (el sexto mes), *september* (el séptimo mes), *october* («*octo*» es ocho), *november* («*novem*» es nueve), *december* («*decem*» es diez). Los meses de *martius*, *maius*, *quintilis* y *september* tenían 31 días, y los seis meses restantes, 30 días. Esto hacía un curioso año de 304 días.

El sucesor del guerrero Rómulo era un hombre sabio, el rey-sacerdote Numa Pompilio (715 a.C.-672 a.C.). Él organizó el bloque de días que quedaban al final del año en dos nuevos meses, *januarius* y *februarius*, llegando así a nuestros 12 meses. El mes *januarius* estaba dedicado al dios Jano, divinidad que tenía dos caras, de manera que podía ver en dos direcciones opuestas. Era el dios encargado de cerrar y

LOS *FASTOS* DE OVIDIO Y EL CALENDARIO

Ovidio ironiza respecto de los diez meses del año de Rómulo: «Cuando el fundador de Roma organizó el calendario decidió que en cada año hubiese dos veces cinco meses. Es evidente, Rómulo, que conocías mejor las armas que los astros». Y, más adelante, en un comentario tan significativo respecto del origen lunar de los meses como crítico respecto de los primeros romanos, escribe: «Pues bien, estos espíritus incultos e ignorantes del cálculo contaron lustros con diez meses menos. El año había concluido cuando la luna estaba llena por décima vez».

Los años de 304 días también aparecen en el texto de Ovidio y se justifican de manera muy curiosa: «Pero hubo, César, un motivo que lo empujó a hacerlo, y su error tiene una excusa: decidió que para un año era suficiente el tiempo que le bastaba a un niño para salir del vientre de su madre». Hemos de reconocer que, a la hora de establecer la duración del año, tiene cierto encanto esta extraña sustitución de los habituales argumentos astronómicos por otros de naturaleza tan humana.

Publio Ovidio Nasón.

abrir las puertas, razón por la cual a veces se le representa con una llave en la mano izquierda; de hecho, la palabra *janua* significa puerta. El mes *februarius* estaba dedicado a los muertos y a los ritos purificatorios; parece que su nombre proviene de la palabra *februa*, que hace referencia a este tipo de ritos.

Januarius tenía reservadas otras glorias, como el hecho de que, con el paso del tiempo, ese mes señalaría el punto de inicio de los consulados. En el año 154 a.C., la ciudad celtíbera de *Segeda*, cerca de la actual Calatayud, en la Hispania Citerior, decidió cambiar su área de influencia y sus fortificaciones con el fin de agruparse con diversas comunidades vecinas. El senado romano lo consideró una amenaza para la paz y lo prohibió. Como los segedanos no obedecieron la orden de Roma, ésta les declaró la guerra, confiando sus tropas a Quinto Fulvio Nobilior, que contó con una dotación de casi 30.000 soldados. Con el fin de que el cónsul pudiera llegar a Hispania con tiempo suficiente para que las operaciones no se adentraran demasiado en el invierno, aquel año, por primera vez, juró su cargo el día 1 de *januarius*, y así se continuó haciendo a partir de entonces. Esto comportó que el año 154 a.C. finalizara con dos meses menos de los que le correspondían. Así pues, la distribución original de los meses quedó desplazada dos unidades, de manera que el *quintilis* pasó a ocupar el séptimo lugar; el *sextilis*, el octavo; el *september* pasó al noveno lugar, el *october* ocupó la décima posición, el *november* pasó a la undécima posición y, finalmente, el *december* fue a parar a la duodécima posición.

Numa Pompilio consideraba que los números pares traían mala suerte y no estaba dispuesto a tolerar meses con un número par de días, de manera que todos los meses que Rómulo había dejado en 30 días (*aprilis*, *junius*, *sextilis*, *october*, *november* y *december*), él los pasó a 29 días, y los demás los mantuvo en 31. Al nuevo *januarius* le asignó 29 días, y al ya oscuro en sí mismo *februarius* le asignó el siniestro número par de 28 días. Esto representaba un año de 355 días, que aún no encajaba bien con los periodos naturales. Para corregir este desfase, cada dos años se intercalaba un bloque de días suplementario, de 22 y 23 días alternativamente, que se denominaba *mercedonius*, nombre que proviene de *merces*, que significa salario o recompensa, ya que en ese periodo se solía dar una paga a los esclavos. Así pues, un periodo de cuatro años del calendario que nos ocupa presentaba la siguiente distribución de días:

Primer año:	355 días.
Segundo año:	377 días.
Tercer año:	355 días.
Cuarto año:	378 días.

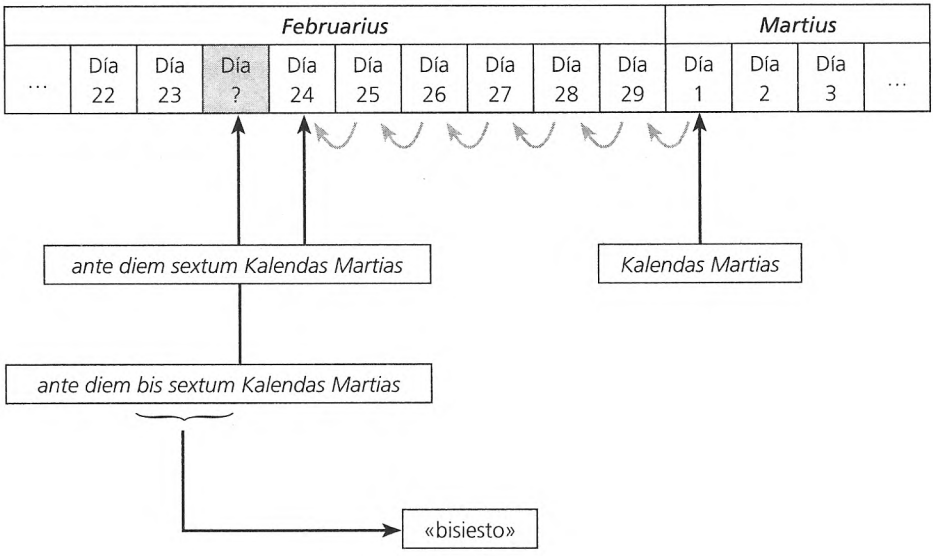
Esto representa un total de 1.465 días en cuatro años. Teniendo en cuenta que en nuestro calendario cuatro años corresponden aproximadamente a 1.461 días, observamos que el año de Numa Pompilio todavía era demasiado largo por unos cuatro días. La intercalación de los *mercedonius*, así como el establecimiento de los días fastos y nefastos, los días de asamblea, los días de mercado... corría a cargo de una casta sacerdotal. Tener el «monopolio del tiempo» era una gran ventaja y, para conservar ese control, las reglas para el establecimiento del calendario se mantuvieron secretas hasta que, en el año 304 a.C., Gneo Flavio hizo pública en el foro una lista con los días de administración de justicia. Este gesto representa el inicio de la secularización del calendario, que inició un desplazamiento desde el ámbito reservado a los sacerdotes y patricios hasta el espacio más abierto que hoy entendemos por sociedad civil.

En el calendario romano, cada mes tenía tres fechas especiales, las calendas, las nonas y los idus, que, según parece, eran un vestigio del origen lunar de los meses. Originariamente las calendas correspondían a la luna nueva, las nonas al cuarto creciente y los idus a la luna llena. Estas fechas sobrevivieron a su significado original: cuando los meses dejaron de relacionarse con las lunas se mantuvieron sus divisiones, ya vacías de sentido astronómico pero llenas de utilidad práctica para los romanos. En su propio nombre nuestro calendario hace pervivir las calendas romanas. También a veces se utiliza la expresión irónica «hasta las calendas griegas» para indicar sencillamente una fecha inexistente, ya que el calendario griego no tenía calendas. Mientras que las calendas eran el primer día de cada mes, las nonas y los idus caían en días distintos, según los meses: en *martius*, *maius*, *quintilis* y *october* las nonas eran el séptimo día, y los idus, el decimoquinto; en los meses restantes las nonas eran el quinto día, y los idus, el decimotercero. Los demás días del calendario romano recibían el nombre contando los días que faltaban hasta la próxima fecha especial (calendas, nonas o idus).

La reforma juliana

En el año 46 a.C., Julio César reorganizó el calendario romano con el asesoramiento del astrónomo Sosígenes de Alejandría, fijando ya la duración del año en 365 días y un cuarto de día. El calendario egipcio, bien conocido por Sosígenes, tenía una duración de 365 días, de manera que éste aproximaba la duración real del año (de 365,242199 días) únicamente a las unidades, cometiendo así un error por defecto de 0,242199 días cada año, lo que supone 0,968796 días, casi un día completo, cada cuatro años. Julio César incorporó ese día cada cuatro años.

Estableció la duración de los meses alternativamente en 31 y 30 días, excepto el mes *februarius* que, en los años normales, se quedaba en 29 días. Uno de cada cuatro años se añadía un día al mes *februarius*, que se intercalaba entre el 23 y el 24 de dicho mes, que llegaba, por tanto, a 30 días. El nombre de los días en el calendario romano venía determinado por el número de los que faltaban para la siguiente fecha destacada (calendas, nonas o idus). Así, el 24 de febrero era el *ante diem sextum Kalendas Martias*, y para denominar el día intercalado se usaba el prefijo *bis*, de manera que este día recibía el nombre de *ante diem bis sextum Kalendas Martias*. De las palabras *bis sextum* de esta expresión nació el nombre de *bisiesto* para esos años especiales. Véase el esquema:



Muerto Julio César, en el año 44 a.C., el senado romano decidió sustituir, en su honor, el nombre del mes *quintilis* por *julius*, ya que precisamente había nacido en ese mes. Asimismo, en el año 8 a.C. se cambió el nombre del mes *sextilis* por el de *august* en honor de César Augusto. Esto planteaba una cuestión de protocolo: ¿Cómo podía ser que *julius* tuviera 31 días y *august* tan sólo tuviera 30? La solución fue fácil: añadir un día a *august* y sustraerlo, naturalmente, de *februarius*, víctima de todos los cambios quizá porque había sido el último mes... y el de purificación. Dado que, en este caso aparecían tres meses consecutivos con 31 días (*julius*, *august* y *september*), se optó por pasar un día de *september* a *october* y uno de *november* a *december*. En el esquema siguiente se resumen estos cambios:

Siglo VII a.C.

Martius	*Aprilis*	*Maius*	*Junius*	*Quintilis*	*Sextilis*	*September*	*October*	*November*	*December*	*Januarius*	*Februarius*
31	29	31	29	31	29	31	29	31	29	29	28

Año 46 a.C.

Januarius	*Februarius*	*Martius*	*Aprilis*	*Maius*	*Junius*	*Quintilis*	*Sextilis*	*September*	*October*	*November*	*December*
30+1	30–1 Normal: 29 Bisiesto: 30	30+1	30	30+1	30	30+1	30	30+1	30	30+1	30

Año 44 a.C.

						Julius					

Año 8 a.C.

							August				
	–1						+1				
								–1	+1	–1	+1

Situación actual

Januarius	*Februarius*	*Martius*	*Aprilis*	*Maius*	*Junius*	*Julius*	*August*	*September*	*October*	*November*	*December*
31	Normal: 28 Bisiesto: 29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

De este modo quedó establecida nuestra distribución de días en los meses tal como aprendimos en nuestra infancia con aquella cantilena tan bien conocida: «30 días tiene noviembre, con abril, junio y septiembre, de 28 sólo hay uno, y los demás, 31».

En la antigua Roma, los años se contaban desde la fundación de la ciudad. El emperador Diocleciano quiso iniciar la cuenta a partir del año de su subida al trono (284 d.C.). Finalmente, el origen de nuestra numeración para los años se la debemos a Dionisio el Exiguo, quien lo fijó en el año del nacimiento de Cristo, con un probable error de 4 o 5 años. Con la nueva numeración, este cambio se produjo en el año 531 d.C.

Al añadir un día cada cuatro años la reforma de Julio César establecía la duración media del año civil en 365,25 días, de manera que conseguía una mejor aproximación a la duración real del año: 365,242199 días. Restando estos valores se observa aún un error por exceso de 0,007801 días cada año. Parece un desajuste pequeño, pero cada 400 años representa 3,1204 días. En el siglo XVI, esta separación sumaba ya 10 días; por eso fue necesario acometer una nueva reforma del calendario, en la que se estableció el llamado calendario gregoriano, que es el que utilizamos actualmente.

La reforma gregoriana

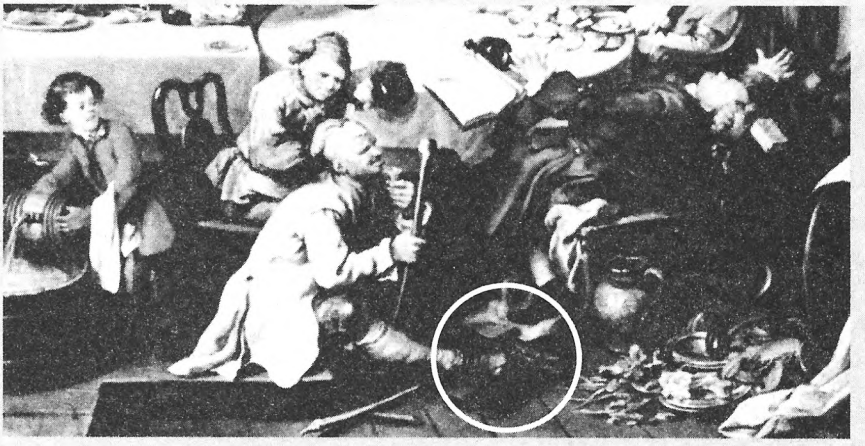
El calendario gregoriano fue instaurado por el papa Gregorio XIII en el año 1582, basándose en los trabajos de una comisión presidida por el jesuita Christopher Schüssel (Clavius), matemático y astrónomo. Destacan dos cambios: el primero mantiene como años bisiestos los múltiplos de 4, pero elimina tres bisiestos cada 400 años; así, dejan de ser bisiestos los años que sean múltiplos de 100 pero que no lo sean de 400. El segundo elimina los 10 días de retraso que se habían acumulado desde la promulgación del calendario juliano: el jueves 4 de octubre de 1582 (fecha juliana) fue seguido por el viernes 15 de octubre de 1582 (fecha gregoriana). Inicialmente este cambio fue adoptado por España, Italia, Francia y Portugal. Otros estados lo fueron adoptando progresivamente: Inglaterra en el año 1752, Finlandia en 1918, Turquía en 1926, etcétera.

El jesuita alemán Christopher Schüssel, que, junto con el médico y astrónomo italiano Luigi Lilio, fue miembro destacado de la llamada «Comisión del Calendario».

ANÉCDOTAS RELATIVAS A LA IMPLANTACIÓN DEL CALENDARIO GREGORIANO

Rusia no aceptó la reforma gregoriana hasta la llegada de los sóviets. La adopción del nuevo calendario se hizo de manera que el día 1 de febrero de 1918 pasó a ser el día 14 de febrero. Se da el caso curioso de que la llamada Revolución de Octubre, en la antigua URSS, se conmemoraba en noviembre. El inicio de la revolución había tenido lugar los días 25 y 26 de octubre según el calendario juliano vigente en la Rusia zarista; al pasar al calendario gregoriano, estas fechas fueron a caer en los días 7 y 8 de noviembre. Shakespeare y Cervantes murieron en la misma fecha, el 23 de abril de 1616, pero no el mismo día. Cervantes murió el 23 de abril de 1616 del calendario gregoriano, vigente en España desde 1582, mientras que Shakespeare falleció el 23 de abril de 1616 del calendario juliano, vigente en Inglaterra hasta el año 1752. Algunas biografías sitúan el nacimiento de Isaac Newton en el año 1642 y otras en el 1643. No se trata de un error: Newton nació el 25 de diciembre de 1642 según el calendario juliano, que corresponde al 4 de enero de 1643 según el gregoriano.

En Inglaterra, el cambio de calendario y la eliminación de días que supuso provocó algún disturbio. Es curiosa la referencia que puede observarse en el cuadro *An Election Entertainment,* de William Hogarth, en el que aparece un activista herido tras haber robado una pancarta a un manifestante conservador en la que puede leerse: «*Give us our Eleven Days*» («Dadnos nuestros once días»). Este cuadro fue pintado tres años después del cambio de calendario.



Detalle del cuadro An Election Entertainment, *de William Hogarth, en el que se lee la frase «Dadnos nuestros once días», en el manuscrito señalado con un círculo.*

El calendario islámico

El calendario hegiriano es el oficial del mundo islámico. El califa 'Umar ibn al-Jattab, estableció que la era musulmana comenzaría el 16 de julio de 622, fecha correspondiente a la Hégira (del árabe *hiŷra*, «emigración») del profeta Mahoma hacia Medina. El calendario islámico es lunar, está fundado sobre un ciclo de 12 meses lunares. Se alternan los meses de 30 o 29 días (corresponden a 30 los meses impares y a 29 los pares) para formar años de 354 o 355 días.

Mahoma sostuvo que Alá había puesto la Luna en el firmamento para medir el tiempo, y por esta razón prohibía que se alterase el nombre de las doce lunas del año, que tienen un carácter agrícola-ganadero y también una parte de carga religiosa. Las doce lunas no se corresponden exactamente, como veremos más adelante, con los doce meses del calendario gregoriano, así que diremos primer mes, segundo mes, etc., en lugar de enero, febrero...

El año se inicia en *Muharram* («mes sagrado»). Su nombre deriva de *haram*, «prohibido», y en él no está permitido luchar; algunos musulmanes ayunan durante todo el mes, al igual que en el *Ramadán*. Tiene 30 días, y el primero es llamado *R'as as-Sana*. Aunque ese día no tiene demasiado trasfondo religioso, muchos musulmanes aprovechan la fecha para recordar la vida del profeta Mahoma y la Hégira.

Safar, el segundo mes, tiene 29 días. Su nombre proviene de la palabra árabe *sufr* («amarillo»), ya que en su origen habría estado situado en otoño, «cuando las hojas se vuelven amarillas». De todas formas, este mes está considerado el más ominoso del calendario, ya que, según la tradición, fue en este periodo cuando Adán fue expulsado del jardín del Edén.

Rabi' al-Awwal es el tercer mes. Durante él, los musulmanes de todo el mundo celebran el *Mawlid* (cumpleaños del profeta Mahoma). Una gran mayoría de musulmanes sunitas creen que la fecha exacta del nacimiento de Mahoma es el duocédimo día del mes, mientras que los chiítas creen que nació en la madrugada del día decimoséptimo.

Rabī' al-Thānī es el cuarto mes del calendario islámico. También se conoce como *Rabī' al-Ākhir*. *Yumada al-Wula*, corresponde al quinto mes, y *Yumada al-Thania*, al sexto.

Rayab (del árabe *Raŷab*, transcrito a veces *Rajab*) es el séptimo mes y tiene, como todos los impares, 30 días. Su nombre hace referencia al respeto. Los árabes preislámicos tenían en gran estima el mes de *Rayab*, y durante el mismo, como durante el mes de *Muharram*, estaba prohibida la guerra. Un dicho atribuido a Maho-

ma afirma que quien ayune en *Rayab* beberá de la fuente de la vida en el Paraíso. Los musulmanes devotos ayunan el primer viernes del mes.

Shaabán (del árabe *Ša' bān*; puede encontrarse transcrito también como *Sha'bán*, *Chaabán*, etc.) es el octavo mes y tiene 29 días.

Ramadán (del árabe *Ramadān*) es el noveno mes, conocido internacionalmente por ser aquel en el que los musulmanes, por su fe y por sus creencias, practican el ayuno diario desde el alba hasta que se pone el Sol. La palabra «ramadán» se suele usar en castellano para designar dicho ayuno, cuyo nombre en árabe es *sawm*.

FECHAS DEL RAMADÁN EN LOS ÚLTIMOS AÑOS

El calendario islámico es lunar; los meses comienzan cuando es visible el primer cuarto creciente después de la luna nueva, es decir, un par de días después de ésta. El año del calendario islámico es más corto que el del gregoriano, por eso las fechas de su calendario dan la sensación de que se «desplazan» sobre el año gregoriano. Por ejemplo, éstos son los meses del Ramadán de los últimos años:

Mes del Ramadán	En el calendario gregoriano
Del año 1427 de la Hégira	23 de septiembre-22 de octubre de 2006
1428	12 de septiembre-11 de octubre de 2007
1429	1 de septiembre-30 de septiembre de 2008
1430	22 de agosto-19 de septiembre de 2009
1431	11 de agosto-10 de septiembre de 2010
1432	1 de agosto-29 de agosto de 2011
1433	21 de julio-19 de agosto de 2012

Determinar con exactitud cuándo comienza el Ramadán es importante de cara al cumplimiento de las obligaciones religiosas asociadas a este mes. Muchos musulmanes insisten en seguir la tradición de marcar el inicio del Ramadán a simple vista, es decir, escudriñando el cielo hasta percibir el primer creciente después de la luna nueva. Otros se guían por la fecha y hora calculada de antemano para cada zona o esperan el anuncio oficial de algún organismo islámico.

Shawwal (del árabe *Šawwāl*) es el décimo mes. Su nombre significa «el emparejamiento de los animales». *Du l-qa'da* (del árabe *Dū l-qaqda*, transcrito también *Dhu*

al-qaada, etc.) es el undécimo mes y tiene 30 días; se relaciona con el descanso. *Du l-hiyya* (del árabe *Dū l-hiŷŷa*, transcrito también *Dhu al-hijja*) es el duodécimo mes. Su nombre significa, literalmente, «el de la peregrinación», pues es la época del año en que los musulmanes suelen realizar el *haŷŷ* o peregrinación a La Meca. Tiene 29 días en los llamados años simples, y uno más en los años intercalares, a los que nos referiremos más adelante.

Este calendario lunar consta de 12 meses alternos de 30 y 29 días, sin tener en cuenta el curso de las estaciones. Cuenta con 354 días, pero dado que doce lunas o meses lunares totalizan 354 días, 8 horas, 48 minutos y 38 segundos, resulta que al acabar los doce meses la luna nueva del año siguiente se hace esperar un poco, hasta alejarse unos 11 días al cabo de 30 años lunares. Así, puesto que Mahoma había prohibido poner meses adicionales y se debían conservar los años de doce lunas, el califa 'Umar ibn al-Jattab, hacia el año 639, lo solucionó de una manera original. Basó el ajuste en ciclos lunares de 30 años. En este periodo habría 19 años de 354 días, *años simples* (de 6 meses de 30 días y 6 meses de 29 días: $6 \cdot 30 + 6 \cdot 29 = 354$) y 11 años de 355 días, *años intercalares* (de 7 meses de 30 días y 5 meses de 29 días: $7 \cdot 30 + 5 \cdot 29 = 355$). Dado que cada 32 meses lunares la Luna se retarda aproximadamente un día y que se deben repartir 11 días en 30 años, formó ciclos de 30 años (360 lunaciones de la tradición babilónica) y añadió un día a cada año de la serie de 30 años, que en la secuencia de meses acumulados hasta entonces contiene un número de meses múltiplo de 32. Es decir, si se calculan los múltiplos sucesivos de 32 (meses) se obtiene:

32, 64, 96, 128, 160, 192, 224, 256, 288, 320, 352.

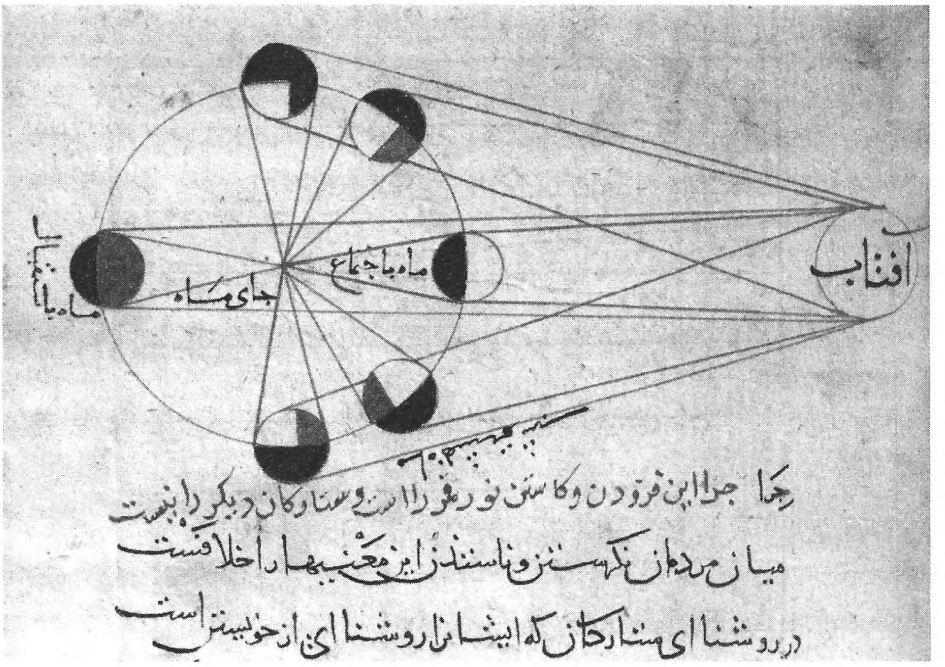
Si ahora se divide entre 12, para saber a qué año corresponde añadir el día pendiente, se obtiene:

32/12 = 2,6667	64/12 = 5,3333	96/12 = 8
128/12= 10,6667	160/12 = 13,3333	192/ 12 = 16
224/12 = 18,6667	256/12 = 21,3333	288/12 = 24
320/12 = 26,6667	352/12 = 29,3333	

En la serie de 30 años siguiente se destaca en negrita los años a los que se les añade un día, en el último mes:

1	**2**	3	4	**5**	6	7	**8**	9	**10**
11	12	**13**	14	15	**16**	17	**18**	19	20
21	22	23	**24**	25	**26**	27	28	**29**	30

Aunque existe alguna discrepancia entre los calendaristas musulmanes, por ejemplo, sobre si el año intercalar es el 7 o el 8. En cualquier caso, tanto si el año es de 354 como si es de 355 días, no llega nunca a los 365 o 366 días del calendario gregoriano, de manera que 33 años musulmanes (10.631 + 354 + 355 + 354 = 11.694 días) equivalen a 32 años gregorianos (365 · 32 = 11.680 + 8 = 11.688 días).



Dibujo del matemático y astrónomo persa Al-Biruni (973-1048), en el que se muestran las fases de la Luna.

Con este recurso, el calendario musulmán, de meses lunares, coordina los años y los meses con las lunas. De todas formas, a cada ciclo de 30 años le faltan 16 minutos y 48 segundos para ver aparecer una luna nueva que estrena el ciclo siguiente, pero puesto que esa cantidad representa un valor tan pequeño como 33 1/10 de segundo por año, se necesitan 2.570 años para que el calendario retroceda un día entero con respecto a la Luna, poca cosa si se compara con el calendario gregoriano, que obliga a suprimir tres bisiestos cada 400 años.

Los días se dividen en grupos de siete en siete, sin interrupción, ni al pasar de un año al siguiente, como se hace en el calendario gregoriano; su orden es el que sigue: *al-áhad* («el primero»), domingo; *al-ithnáyn* («el segundo»), lunes; *al-thalatha* («el ter-

cero»), martes; *al-arba'a* («el cuarto»), miércoles; *al-jamís* («el quinto»), jueves; *al-yuma'a* («la reunión»), viernes, cuyo nombre se debe a que es el día festivo, en el que se realiza la oración colectiva en las mezquitas; *as-sabt* («el séptimo» o «el sábat»), sábado.

El día comienza con la caída del Sol, y el mes empieza unos dos días después de la luna nueva, cuando comienza a verse el creciente lunar. Si consideramos la diferencia de días entre el calendario lunar y el solar, y el hecho de que ambos comienzan el año en fechas diferentes, nos daremos cuenta de la dificultad de establecer una correspondencia entre el calendario musulmán y el gregoriano. Existen tablas de correspondencia de años, pero para un cálculo rápido y aproximado sirve la siguiente fórmula, en la que, según se despeje G (de gregoriano) o H (de Hégira), se obtiene la manera de pasar del año musulmán al gregoriano o viceversa:

$$G = H\frac{32}{33} + 622.$$

Recuérdese que 33 años musulmanes son 32 años gregorianos, y que el año de la Hégira corresponde al año 622 del calendario gregoriano.

El calendario musulmán tiene un par de fechas destacables. Mahoma instituyó que todo el mes de *Ramadán* fuese de penitencia, con la obligación de abstenerse de comer y beber desde la salida a la puesta del Sol, como dice el Corán: «hasta que no se distinga un hilo blanco de uno negro». Puesto que en el calendario lunar los meses pasan por todas las estaciones del año, si el *Ramadán* cae en verano, cuando el día es más largo (hay más horas de luz), compaginar el trabajo con el ayuno es bastante más duro que si cae en invierno, cuando el día es más corto. La segunda fecha destacable es el mes de *Du l-hiyya*, en el que tiene lugar el peregrinaje a la Meca, obligatorio como mínimo una vez en la vida para todo musulmán que disponga de medios y no tenga impedimentos especiales.

El calendario chino

Los primeros astrónomos de la antigua China vieron que para contabilizar los días no se podía prescindir de los ciclos naturales y, desde muy antiguo, llevaron a cabo observaciones del ciclo solar y lunar. Dos huesos de oráculo de la dinastía Shang muestran que hacia el siglo XIV a.C. los chinos ya habían establecido el ciclo solar en 365 días y cuarto, y el lunar, en 29 días y medio. Hacia el año 104 a.C., por medio de sistemas de observación y de medición de las sombras proyectadas por un gnomon, llegaron a estimar la duración del año en 365,2502 días. En el siglo V de

nuestra era, el matemático y astrónomo Zu Chongzhi lo estableció en 365,2428 días, con un exceso de tan sólo 52 segundos sobre el valor vigente (365,2422).

Los astrónomos chinos, en lugar de guiarse por la eclíptica, como hacían los griegos, observaron el paso de las estrellas por el meridiano y, con esta referencia estelar, dividieron la esfera celeste en segmentos, de manera similar a la división zodiacal de los mesopotámicos. Si suponemos 12 segmentos, cada uno de ellos equivale a un intervalo de 30,4375 días exactamente, la doceava parte de la circunferencia de 365,25 días. A esta fracción del año le asociaban una luna nueva (un mes lunar), pero dado que el ciclo de la Luna es de 29,5308 días, podía ocurrir que una luna se atrasase un mes entero; ese mes suplementario se añadía al año para ajustar el calendario lunar a las estaciones. Es decir, si en el intervalo de tiempo que debía ser un año, el Sol no entraba en la constelación correspondiente, ése acababa siendo el mes que se debía intercalar.

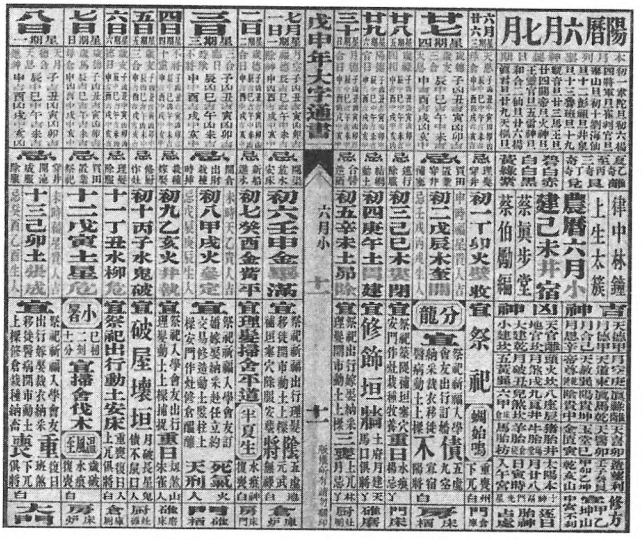


Imagen de un calendario chino.

Más tarde descubrieron que 19 años solares eran casi iguales a 235 lunas (6.939 días). Este periodo de concordancia equivale al ciclo de Metón de la cultura occidental y les permitió construir un calendario unisolar. Así, en 19 años se intercalan años de 12 meses lunares y otros de 13 meses lunares (años embolismales). Una norma básica adicional es que el solsticio de invierno debe suceder siempre en el undécimo mes del año. En la serie siguiente se indican con negrita los 7 años em-

bolismales de 384 o 385 días; se alterna uno de cada, para ajustar al hecho que el ciclo lunar es de 29,5 días:

1 2 **3** 4 5 **6** 7 **8** 9 10 **11** 12 13 **14** 15 16 **17** 18 **19**.

¿Por qué se añaden en estos años? Es una cuenta de aritmética modular como la que usaron los musulmanes para cuadrar su calendario; allí se añadía un día a algunos años, aquí un mes. El ciclo de Metón establece que 19 años solares equivalen a 235 lunas. Así, en 19 años lunares hay $19 \cdot 12 = 228$ lunas, pero, en cambio, en los mismos años solares hay 235; se deben intercalar 7 lunas. ¿Cuándo? En el año en que éstas aparezcan. Los cálculos siguientes nos indican que la primera luna debe añadirse al tercer año, ya que en caso contrario el periodo de tres años se quedaría con 36 lunas y en realidad debe incluir 37.

$$\frac{365{,}25 \cdot 1}{29{,}5} = 12{,}38 \text{ meses}; \quad \frac{365{,}25 \cdot 2}{29{,}5} = 24{,}76 \text{ meses}; \quad \frac{365{,}25 \cdot 3}{29{,}5} = 37{,}14 \text{ meses}.$$

La continuación de estos cálculos permite llegar a los años 6, 8, 11, 14, 17 y 19 indicados en la serie antes mencionada. Así, de los 19 años tendremos 12 años de 354 días, que suman un total de $354 \cdot 12 = 4.248$ días, y 7 años de 384, que suman un total de $384 \cdot 7 = 2.688$ días; a 3 de estos últimos 7 años se les añade un día más, obteniéndose un total de 6.939 días ($4.248 + 2.688 + 3$), que concuerda con los días que debe tener cada ciclo de 19 años.

La fecha de comienzo del Año Nuevo chino se obtiene combinando el ciclo lunar y el solar. El Año Nuevo chino debe empezar con la segunda luna nueva tras el solsticio de invierno boreal (22 de diciembre). Por ejemplo, si en el solsticio de invierno de 2000 la Luna tenía una «edad» de 7 días:

$(29{,}5 - 7) + 29{,}5 = 52$, donde
$29{,}5 - 7$ calcula la fecha de la primera luna nueva después del solsticio;
29,5 calcula la fecha de la segunda luna nueva después del solsticio.

Esto significa que se deben contar 52 días a partir del solsticio de invierno, y allí se debe colocar el inicio del nuevo año; en el ejemplo, el 12 de febrero de 2001.

La luna nueva es la del «todo negro» (cuando la Luna está en conjunción con el Sol) y no la luna visible por primera vez (el primer creciente), utilizada en los calendarios islámico y hebreo. La fecha de la luna nueva es el primer día de un nuevo mes. Los meses se dividen en tres grupos, *Meng* (primero), *Zhong* (medio) y *Ji* (último), y en cuatro estaciones, *Chun* (primavera), *Xia* (verano), *Qiu* (otoño) y *Dong* (invierno).

El nombre de los meses se forma combinado sendos conceptos; así, *Ji-qiu* es el último mes del otoño. Los meses chinos están compuestos por tres semanas de 10 días cada una. Los días del mes se cuentan por sus ordinales, y el día comienza a medianoche.

Así como la cultura occidental cuenta los años por siglos, los chinos usan periodos de 60 años, llamados *Jia-zi*, que constan de dos componentes: el primero corresponde a los signos celestes, el *Gan*, y el segundo, a los animales del zodiaco, el *Zhi*.

Gan			
1	*Jia*	6	*Ji*
2	*Yi*	7	*Geng*
3	*Bing*	8	*Xin*
4	*Ding*	9	*Ren*
5	*Wu*	10	*Gui*

Zhi			
1	*Zi* (rata)	7	*Wu* (caballo)
2	*Chou* (buey)	8	*Wei* (oveja)
3	*Yin* (tigre)	9	*Shen* (mono)
4	*Mao* (conejo)	10	*You* (gallo)
5	*Chen* (dragón)	11	*Xu* (perro)
6	*Si* (serpiente)	12	Hai (cerdo)

Cada uno de los dos componentes se usa secuencialmente; así, el ciclo de 60 años sería el resultado de las siguientes combinaciones:

Año	*Gan*	*Zhi*
1	*Jia*	*Zi* (rata)
2	*Yi*	*Chou* (buey)
3	*Bing*	*Yin* (tigre)
4	*Ding*	*Mao* (conejo)
5	*Wu*	*Chen* (dragón)
6	*Ji*	*Si* (serpiente)
7	*Geng*	*Wu* (caballo)
8	*Xin*	*Wei* (oveja)
9	*Ren*	*Shen* (mono)
10	*Gui*	*You* (gallo)
11	*Jia*	*Xu* (perro)
12	*Yi*	*Hai* (cerdo)
	...	...
	...	...
58	*Xin*	*You* (gallo)
59	*Ren*	*Xu* (perro)
60	*Gui*	*Hai* (cerdo)

El actual ciclo de 60 años comenzó el 2 de febrero de 1984. Esto significa, por ejemplo, que el año *wu-yin*, el año 15 en el ciclo 78, comenzó el 28 de enero de 1998. El año 20 en el ciclo 78 comenzó el 1 de febrero de 2003.

EQUIVALENCIAS ENTRE EL CALENDARIO CHINO Y EL GREGORIANO

La tabla siguiente indica la fecha de inicio del calendario chino respecto del gregoriano:

Año chino	Animal del zodiaco	Calendario gregoriano
4707	Buey	26 de enero de 2009
4708	Tigre	10 de febrero de 2010
4709	Conejo	3 de febrero de 2011
4710	Dragón	23 de enero de 2012
4711	Serpiente	10 de febrero de 2013
4712	Caballo	31 de enero de 2014
4713	Oveja	19 de febrero de 2015
4714	Mono	9 de febrero de 2016
4715	Gallo	28 de enero de 2017
4716	Perro	16 de febrero de 2018
4717	Cerdo	5 de febrero de 2019
4718	Rata	25 de enero de 2020

En la actualidad, en China, el calendario tradicional se conoce como «calendario agrícola», mientras que el calendario gregoriano se conoce como «calendario estándar» o «calendario occidental». El calendario gregoriano fue introducido por los jesuitas en el siglo XIX, y es el de uso habitual en la actualidad para la vida cotidiana. El calendario chino se utiliza para marcar ciertas fiestas tradicionales como el Año Nuevo chino o el festival Duanwujié, Fiesta del Dragón o del doble cinco porque tiene lugar el quinto día de la quinta luna del año.

Un calendario revolucionario

Varios movimientos revolucionarios han intentado abolir el calendario gregoriano para hacer una ruptura con el pasado y reordenar el tiempo de acuerdo con alguna

nueva visión del mundo. Por ejemplo, el calendario republicano francés constaba de 12 meses de 30 días divididos en 3 décadas de 10 días cada una. A final de año se añadían 5 o 6 días en el caso de los bisiestos. Este calendario, hijo de los ideales de la Revolución francesa, tan sólo estuvo vigente desde 1792 hasta 1804. Esta ambiciosa reforma tenía tres objetivos: rechazar el régimen absolutista anterior, establecer fiestas seculares en el marco de vida de la nueva sociedad, y racionalizar todos los sistemas de pesos y medidas, incluido el sistema para medir el tiempo.

El calendario revolucionario francés quería ser irreversible y empezaba por el año 1. Según argumentaban sus impulsores, ya no podían contar los años como lo hacían cuando un rey les oprimía y realmente no vivían. El tiempo abría un nuevo libro de la historia. La nueva era empezó el 22 de septiembre de 1792, con la derrota de la monarquía y la proclamación de la república. Feliz casualidad, el 22 de septiembre era la fecha del equinoccio de otoño. Los revolucionarios lo vieron como un buen presagio: la igualdad civil estaba en concordancia con la igualdad del día y de la noche; la historia regresaba a la naturaleza.

Igual que la reforma de pesos y medidas, que imponía normas racionales como el kilogramo y el metro, el nuevo calendario se organizó también en un sistema decimal, participando de la idea de racionalizar la vida pública y se esforzó por ser claro, exacto, simple y universal. Se consideró que el antiguo sistema era un monumento a la servidumbre y la ignorancia, lleno de anomalías, como meses desiguales y fiestas móviles. El nuevo calendario usaba cálculos en base diez y estaba en sintonía con los movimientos de los cuerpos celestes. Todas las divisiones en tiempos menores que el mes se hacían en base diez. Los doce meses tenían todos 30 días y se dividían a su vez en periodos de 10 días, las décadas. Quedaban cinco días intermedios que se colocaron al final del año y otro más cada cuatro años. Esta nueva organización del tiempo básicamente era el modelo del antiguo Egipto (12 meses de 30 días cada uno, divididos en periodos de 10 días, más 5 días extras al final del año).

Promulgado el 5 de octubre de 1793, el calendario tenía un ritmo laico porque eliminaba el domingo, el día del Señor, y suprimía todos los santos. Si se eliminaban todos los símbolos religiosos se debía escoger otra tradición y se eligió la naturaleza. En lugar de asociar cada día a un santo, cada día se asociaba con una planta, un mineral, un animal (los días terminados en 5) o una herramienta (los días terminados en 0). El 25 de diciembre pasó a ser el día del perro. Los meses tenían un aire más poético. El otoño (terminación *-aire*) incluía los meses de *Vendémiaire* (del latín *vindemia,* «vendimia»), vendimiario; *Brumaire* (del francés *brume*, «bruma»), bruma-

LA PRIMAVERA EN EL CALENDARIO REVOLUCIONARIO FRANCÉS

La primavera empezaba por el mes de Germinal; éstos eran sus días y la imagen con la que se asociaba. A cada mes le correspondía una imagen femenina diferente.

Germinal (21 de marzo-19 de abril):

1. Primevère (prímula)
2. Platane (plátano)
3. Asperge (espárrago)
4. Tulipe (tulipán)
5. Poule (gallina)
6. Bette (acelga)
7. Bouleau (abedul)
8. Jonquille (junquillo)
9. Aulne (aliso)
10. Couvoir (nidal)
11. Pervenche (vincapervinca)
12. Charme (carpe)
13. Morille (morilla)
14. Hêtre (haya)
15. Abeille (abeja)
16. Laitue (lechuga)
17. Mélèze (alerce)
18. Ciguë (cicuta)
19. Radis (rábano)
20. Ruche (colmena)
21. Gainier (árbol de Judea)
22. Romaine (lechuga romana)
23. Marronnier (castaño de Indias)
24. Roquette (roqueta)
25. Pigeon (paloma)
26. Lilas (lila)
27. Anémone (anémona)
28. Pensée (pensamiento)
29. Myrtille (arándano)
30. Greffoir (herramienta para injertar)

Imagen de Germinal del calendario revolucionario.

rio; *Frimaire* (del francés *frimas* «escarcha»), frimario. El invierno (terminación *-ôse*) tenía *Nivôse* (del latín *nivosus*, «nevado»), nivoso; *Pluviôse* (del latín *pluviosus*, «lluvioso»), pluvioso; *Ventôse* (del latín *ventosus*, «ventoso»), ventoso. La primavera (terminación *-al*) tenía *Germinal* (del latín *germen*, «semilla»), germinal; *Floréal* (del latín *flos*, «flor»), floreal; *Prairial* (del francés *prairie*, «pradera»), pradeal. El verano (terminación *-idor*) tenía *Messidor* (del latín *messis*, «cosecha»), mesidor; *Thermidor* (del griego *thermos*, «calor»), termidor; *Fructidor* (del latín *fructus*, «fruta»), fructidor.

La gente del pueblo no aceptó la desaparición de las fiestas populares, las hogueras de San Juan, o las fiestas en honor de los santos patrones de los gremios. Se puso de manifiesto que el calendario revolucionario nunca consiguió entrar en la cultura común. Alejado de la sociedad e incapaz de penetrar en el imaginario colectivo, el nuevo calendario fue desapareciendo por etapas. El año VIII se suprimieron las fiestas revolucionarias. El año X Napoleón Bonaparte restauró el domingo como día de descanso para renaudar las relaciones entre la Iglesia y el Estado revolucionario. Finalmente, el 15 de Fructidor del año XIII (9 de septiembre de 1805), el calendario fue abolido oficialmente. Se dieron dos razones: no era lo suficientemente racional y sí demasiado nacionalista. El calendario gregoriano fue reinstaurado el 1 de enero de 1806, poco después de un año de la coronación de Napoleón. Afortunadamente, el sistema de pesos y medidas que estos mismos ideales impulsaron tuvo mejor éxito; de él hablaremos en el capítulo 5.

Capítulo 4

Medir la Tierra

La medida precisa de los movimientos de los cielos sirvió de referencia para establecer patrones para medir el tiempo, pero el ser humano se interesó también por conocer la forma y la extensión del mundo que habitaba, y deseó medir la Tierra. Además de contribuir a la medición de los cielos, Ptolomeo también fue una referencia por lo que respecta a la medición de la Tierra gracias a su *Geografía* o *Atlas del mundo*, donde describió el mundo conocido en su época. En los siglos XV y XVI, los descubrimientos del nuevo mundo y de territorios ignorados hasta entonces por los europeos ampliaron el mundo conocido y se corrigió a Ptolomeo. A finales del siglo XVII se hicieron medidas más cuidadosas de las dimensiones de la Tierra mediante el método de la triangulación, que sentó las bases de la geodesia. En relación a la figura de la Tierra, se suscitó un enfrentamiento entre los que defendían que la Tierra estaba aplanada por los polos y los que afirmaban que lo estaba por el ecuador que desembocó en una polémica sobre la medida de la misma, una apasionante confrontación científica que se decidió zanjar determinando el valor de un grado de meridiano que deberían medir dos expediciones científicas viajando a latitudes lo más alejadas posible entre ellas.

Primeras ideas sobre la forma y la extensión de la Tierra

En la Antigüedad hubo la creencia generalizada de que la superficie habitada por el ser humano era plana, pues, salvo por los accidentes geográficos como valles y montañas, así lo parecía. Pero los filósofos griegos empezaron a considerar hipótesis distintas. Se atribuye a Anaximandro la idea de que la Tierra era un cilindro, más largo que ancho, habitado únicamente en su disco superior y situado en el centro de la esfera celeste. Se cree que diseñó un mapa de la Tierra que más tarde corrigió y perfeccionó Hecateo de Mileto (ca. 550 a.C.-ca. 476 a.C.). En él se representaban las regiones entonces conocidas de Europa, Asia y África, que aparecían situadas en un disco limitado por una especie de río-océano circular, con Grecia en la parte central.

¿Qué extensión tenía el mundo? Resulta siempre arriesgado hacer evaluaciones exactas de medidas antiguas, pero se considera que el disco circular del mapa de Hecateo tenía unos 8.000 km de diámetro.

Mapa de Hecateo del siglo I aC.

Si la Tierra era plana ¿era ilimitada o tenía un fin? Hecateo parecía limitarla, pero si se hallaba rodeada de un océano, ¿por qué no se desbordaba? ¿Acaso el cielo se unía con el mar a modo de protección o blindaje? ¿Cómo se sostenía la Tierra? La suposición de una Tierra plana planteaba preguntas inquietantes difíciles de resolver.

ARGUMENTOS ARISTOTÉLICOS DE LA ESFERICIDAD DE LA TIERRA

Aristóteles enunció argumentos contra la suposición de una Tierra plana como, por ejemplo, el que las estrellas varían su altura sobre el horizonte dependiendo del lugar de observación de las mismas. Así, un viajero que se desplazaba hacia el Sur veía que las constelaciones en dirección Sur ascendían más sobre el horizonte, lo que indicaba que dicho horizonte formaba un cierto ángulo respecto del horizonte de un observador situado más al Norte; por consiguiente, la Tierra no era plana. Del mismo modo, la sombra que la Tierra proyecta sobre la Luna durante la fase parcial de los eclipses lunares tiene siempre el borde circular, independientemente de la altùra de la Luna sobre el horizonte. ¿Qué cuerpo sino una esfera puede tener una sombra circular en cualquier dirección?

Los griegos propusieron que la Tierra era esférica y encontraron argumentos sólidos para defender esa idea, como hemos visto en el capítulo 2. Ahora bien, suponiendo que, efectivamente, la Tierra fuera esférica, ¿cómo dedujeron los pensadores griegos cuáles son sus dimensiones?

Medida de la dimensión de la Tierra esférica. Eratóstenes

En la época helenística, Alejandría se convirtió en el principal centro de conocimiento e investigación de la civilización griega gracias a sus dos instituciones paradigmáticas: el Museo y la Biblioteca. Allí se obtuvo la primera estimación cuantitativa de la circunferencia terrestre. Su artífice fue un sabio polifacético griego, el matemático y geógrafo Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.). Como responsable de la Biblioteca de Alejandría, pudo acceder a muchas informaciones conservadas en sus papiros. Tuvo conocimiento de que en la localidad de Siena (la actual Asuán), situada hacia el sur de Alejandría, en el mediodía local del solsticio de verano el Sol caía directamente sobre el fondo de un pozo profundo, y los rayos solares no proyectaban ninguna sombra sobre las varas verticales. Sin embargo, en el mismo momento, en Alejandría, un gnomon sí proyectaba sombra.

Grabado que recrea la antigua Biblioteca de Alejandría.

Suponiendo que el Sol se encontraba a gran distancia, al alcanzar la Tierra sus rayos debían llegar de forma paralela, y si ésta era plana —como muchos aún creían en aquella época— no se deberían observar diferencias entre las sombras proyectadas por objetos iguales a la misma hora del mismo día, independientemente del lugar donde se encontraran. Sin embargo, se constataba que las sombras eran distintas y, por tanto, la Tierra no era plana.

En Alejandría, Eratóstenes midió con la ayuda de un gnomon, al mediodía del solsticio de verano, el ángulo que formaban los rayos del Sol con la vertical y encontró que éste era 1/50 de un círculo (7° 12'). Suponiendo, como él hizo, que la Tierra es esférica (360°) y que Alejandría se encontraba al norte de Siena en el mismo meridiano, un sencillo razonamiento geométrico (véase la figura) le permitió deducir que el ángulo central entre los dos radios terrestres correspondientes a Siena y Alejandría era también de 1/50 de círculo (7° 12'), es decir, una cincuentava parte de toda la circunferencia.

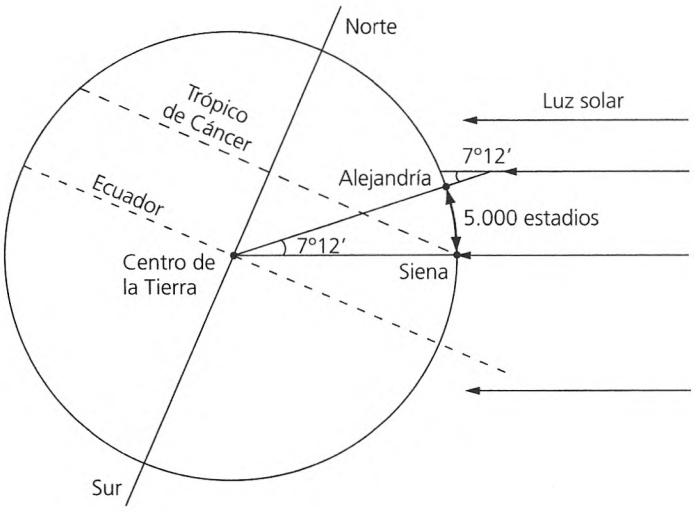


Figura que ilustra el razonamiento de Eratóstenes.

Como Eratóstenes sabía que la distancia entre las dos ciudades era de 5.000 estadios (unos 800 km), le bastó una simple proporción para averiguar la circunferencia de la Tierra. Ésta había de ser 50 veces la distancia entre las dos ciudades: 250.000 estadios. De hecho, redondeó el resultado, considerando un valor final de 700 estadios por grado, lo que supone una circunferencia de 252.000 estadios.

Se ha discutido sobre el tamaño exacto del estadio que utilizó Eratóstenes. El estadio griego tiene un valor de unos 185 m, lo que implicaría una circunferencia terrestre de 46.620 km (un 16,3% mayor de la real). Sin embargo, si se supone que Eratóstenes usó el estadio egipcio, que era de unos 157,5 m, su medición resulta ser de 39.690 km (un error inferior al 2%).

Los razonamientos matemáticos de Eratóstenes fueron rigurosos, aunque se debería hacer alguna consideración sobre la precisión de sus mediciones: Siena no está directamente al sur de Alejandría sobre el mismo meridiano, y el Sol aparece como un disco que se encuentra a una distancia finita de la Tierra, por lo que no es un punto de luz a una distancia infinita. Además, en la Antigüedad, las mediciones de distancias por tierra no eran fiables, y constituían una fuente de errores experimentales. Dado el margen de error para cada uno de estos aspectos relacionados con su cálculo, la precisión del tamaño de la Tierra medido por Eratóstenes no deja de sorprender.

Mapas de la Tierra: latitud y longitud, localización y proyección

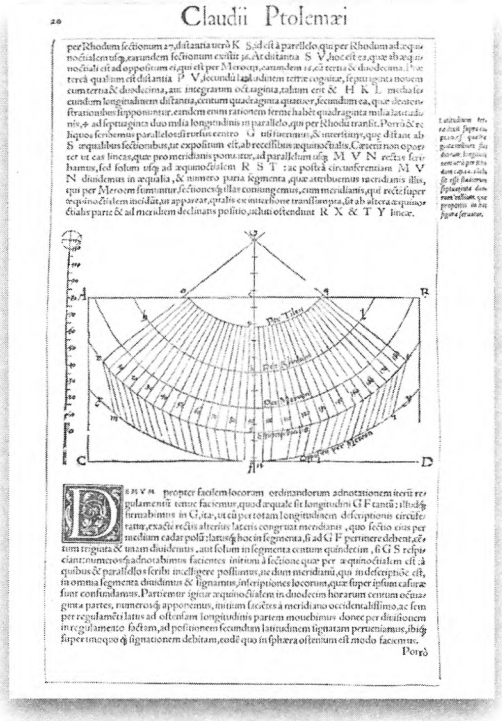
Ptolomeo trabajó en Alejandría varios siglos más tarde que Eratóstenes. En su *Geografía* elaboró una descripción del conjunto del mundo conocido por la cultura griega con métodos científicos y rigurosos. Recopiló técnicas matemáticas para el trazado de mapas precisos usando distintos sistemas de proyección y recogió una amplia colección de coordenadas geográficas correspondientes a casi 10.000 lugares del mundo entonces conocido. Utilizó los términos latitud y longitud para ubicarlos en el mapa, empleando un sistema de referencia de meridianos y paralelos. El origen de los meridianos (su meridiano 0°) se encontraba cerca de las islas Canarias, y el de los paralelos, cerca del ecuador. El extremo norte de la tierra habitable lo situó en el paralelo de la isla de Thule.

Al parecer, las medidas de la Tierra de Ptolomeo fueron inferiores a las reales debido a la suposición de que a cada grado de la línea del ecuador le correspondía un arco de unos 80 km, lo que redujo la longitud del círculo máximo a poco menos de 30.000 km. El prestigio y la influencia de Ptolomeo en el Renacimiento ayudó a que los navegantes se atreviesen a cruzar el océano en pos del otro extremo del globo.

El problema de representar en un mapa una superficie curva es una cuestión matemática. En este sentido, Ptolomeo también hizo contribuciones de interés en

cartografía. Antes que él, se cree que Hiparco ya usó la división en 360° de los círculos de la Tierra y diseñó una trama de paralelos y meridianos. Hiparco se interesó por la proyección de una superficie esférica sobre un mapa plano, y hay quien le atribuye el uso de la proyección estereográfica. Otro geógrafo y cartógrafo que tuvo gran influencia sobre Ptolomeo fue Marino de Tiro (ca. 60-ca. 130), que fue el primero que utilizó el meridiano de las islas Canarias como meridiano cero, y el paralelo de Rodas como origen de las latitudes. Según parece propuso la proyección cilíndrica para representar mapas.

Para representar la superficie de la Tierra en un plano, Ptolomeo ideó una proyección cartográfica cónica y otra pseudocónica, consiguiendo variar la escala dentro de un mismo plano. En su proyección cónica representó los paralelos como arcos concéntricos, y los meridianos, mediante líneas rectas convergentes en un foco situado en el Polo Norte. Su segunda proyección, pseudocónica, representó los meridianos también con líneas curvas que convergían en el polo, lo que le permitió representaciones de mayor extensión y mejores proporciones.

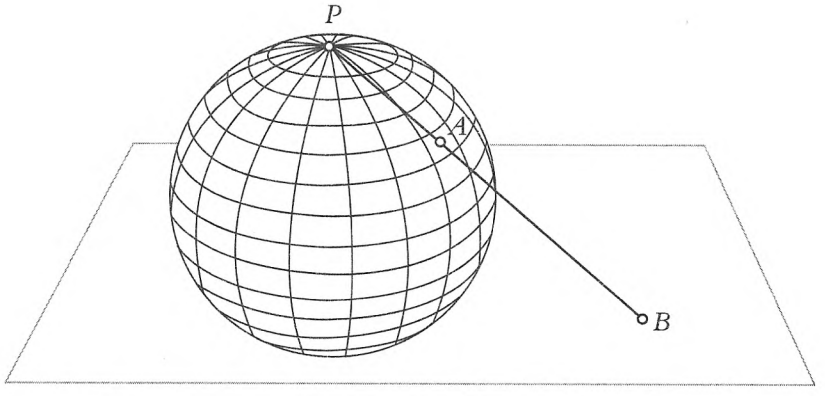


Proyección cónica de Ptolomeo que aparece en la Geografía [Geographicae enarrationis libri octo] *editada en Lyon y Viena en 1541.*

La proyección cónica de Ptolomeo se hizo servir para representar el mundo antiguo hasta que los descubrimientos de los navegantes del siglo XV ampliaron notablemente los territorios conocidos, por lo que este tipo de proyección resultaba insuficiente para representarlos a todos y quedó restringida a la cartografía regional.

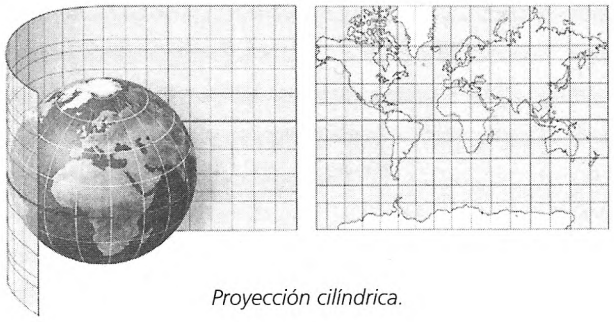
En una proyección cartográfica de la esfera terrestre no es posible conservar a la vez las mismas áreas y los mismos ángulos. Sin embargo, hay diversas aproximaciones posibles dependiendo del tipo de proyección, como las que se atribuyen a Hiparco, Marino y Ptolomeo.

La *proyección estereográfica* hace corresponder a cada punto *A* de la esfera, distinto del polo (foco de la proyección), el punto del plano que es intersección de la recta *PA* con el plano. Recíprocamente a cada punto *B* del plano le corresponde el único punto *A*, distinto de *P*, que es la intersección de la esfera con la recta *PB*. Ptolomeo explicó esta proyección en su *Planisferio* y la usó para proyectar en el plano la esfera celeste; más adelante, los árabes se basarían en ella para construir astrolabios que les permitieron determinar la posición de las estrellas sobre la bóveda celeste.



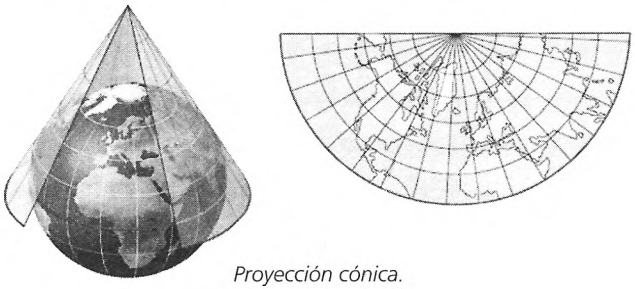
Proyección estereográfica.

La *proyección cilíndrica* consiste en proyectar la superficie terrestre sobre un cilindro tangente a ella en el ecuador. El mapa resultante tiene pequeñas deformaciones cerca del ecuador y muy grandes en las regiones polares. Este tipo de proyección conserva los ángulos, pero no conserva las áreas, sino que las aumenta conforme nos alejamos del ecuador hacia cualquiera de los dos polos.



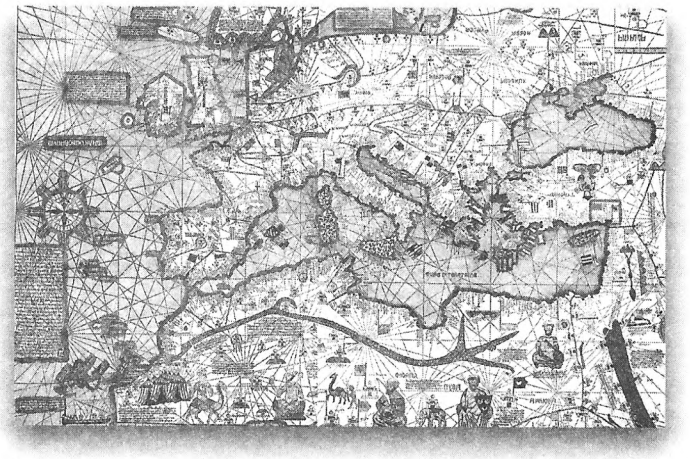
Proyección cilíndrica.

La *proyección cónica* proyecta los puntos de la Tierra sobre un cono tomando como punto focal uno de los polos. Las zonas polares quedan distorsionadas, pero se obtiene mayor precisión en el hemisferio que corresponde al polo que se ha elegido como foco. En el mapa obtenido las deformaciones son pequeñas a lo largo del paralelo de contacto, y mayores a medida que nos alejemos del mismo.



Proyección cónica.

El mundo árabe recogió buena parte del bagaje cultural griego. En relación a la cartografía y los problemas de localización, los árabes fueron menos deductivos que los griegos y más prácticos: revisaban y rectificaban los datos relativos al espacio terrestre a medida que lo iban conociendo. Una nueva cartografía emergió en el Mediterráneo. A finales del s. XIII encontramos destacados centros de producción cartográfica en Génova, Venecia y Palma de Mallorca. Ésta se caracterizó por circunscribirse a la navegación y tener un marcado carácter utilitario. La llegada de la brújula a Europa y su uso generalizado promovió el trazado de cartas náuticas basadas en cálculos que relacionaban la posición de la nave y la distancia a los distintos puertos. Estos mapas, centrados en las rutas marítimas de navegación, son los denominados *portulanos* o *cartas portulanas*. Reflejaban los detalles destacados de la costa, el relieve observable del litoral, las desembocaduras de los ríos, los vientos, etc. Durante los siglos XIV y XV hubo una importante producción cartográfica de portulanos.



La obra cumbre de los portulanos mallorquines es el Atlas Catalán de Abraham Cresques, *de 1375. El que aquí se ilustra es una copia del siglo XIX.*

En el siglo XVI la navegación tuvo su momento álgido: en menos de un siglo los descubrimientos de nuevas tierras duplicaron la extensión del mundo conocido. Se perfeccionaron las representaciones cartográficas de la Tierra y, por primera vez, se consiguió una demostración directa de la esfericidad de la Tierra con el viaje de circunnavegación de Fernando de Magallanes (1480-1521) y Juan Sebastián Elcano (1476-1526). Pronto se volverían a medir las dimensiones del globo terrestre.

LA PRIMERA PRUEBA DIRECTA DE LA ESFERICIDAD DE LA TIERRA

El primer viaje de circunnavegación (1519-1522), que demostró de forma directa la redondez de la Tierra, fue iniciado por Fernando de Magallanes y terminado por Juan Sebastián Elcano. Magallanes capitaneó una expedición que zarpó con cinco naves de Sanlúcar de Barrameda (Cádiz) el 20 de septiembre de 1519. Atravesó el Atlántico y llegó a las costas de Brasil a la altura de Río de Janeiro. Siguió hacia el Río de la Plata y bajó hasta la Patagonia. Allá, Magallanes descubrió y atravesó el estrecho que lleva su nombre. Cruzó el Pacífico en un largo viaje lleno de penalidades que amenazaron la tripulación. Descubrieron la isla de Guam en el archipiélago de las Marianas y llegaron a las islas Filipinas en marzo de 1521, donde Magallanes murió el 27 de abril de 1521. A su muerte, la expedición fue capitaneada por Juan Sebastián Elcano. Desde las islas Molucas, atravesó el océano Índico, rodeó África y llegó a Sanlúcar de Barrameda el 6 de septiembre de 1522 en la nave *Victoria*, completando así la primera circunnavegación de la Tierra.

Redes de triangulación para medir arcos de meridiano

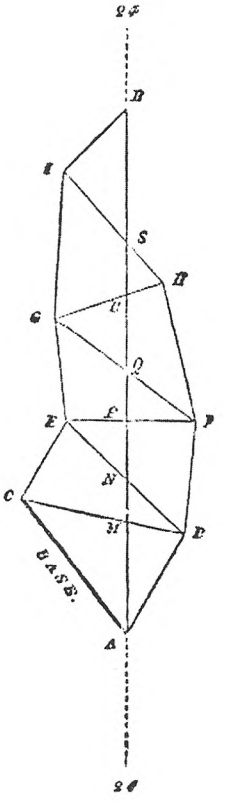
El abad Jean Picard, astrónomo francés, fue la primera persona que consiguió medir el tamaño de la Tierra con un notable grado de precisión entre 1669 y 1670. Llevó a cabo una operación de gran envergadura utilizando los principios de la triangulación geodésica. Recurrió a un método empleado por Willebrord Snellius (1580-1626), astrónomo, matemático y profesor en Leiden. Snellius, después de haber planeado y llevado a cabo mediciones en 1615, publicó sus métodos en 1617 en su obra *Eratosthenes Batavus* (*Los Eratóstenes holandeses*), donde sentó las bases de la geodesia. Su método planteaba medir la circunferencia terrestre por medio de la determinación de la longitud de un arco de meridiano calculado por triangulación.

Desde el punto de vista de la geometría, la triangulación es el uso de triángulos y de las relaciones trigonométricas entre sus ángulos y lados para conocer posiciones de puntos, medir distancias o determinar áreas de figuras. En el caso que estamos comentando se trata de la aplicación de la triangulación a la medida de un arco de meridiano.

El genial novelista Julio Verne (1828-1905), en su novela *Aventuras de tres rusos y tres ingleses en el África Austral*, describe de forma clara el conjunto de las operaciones que se han de efectuar en una triangulación:

> «Con el fin de hacer comprender mejor a aquellos de nuestros lectores que no están lo suficientemente familiarizados con la geometría lo que es esta operación geodésica que llamamos triangulación, tomamos prestadas las siguientes líneas de las *Leçons nouvelles de Cosmographie* [*Nuevas lecciones de cosmografía*] de M. [Monsieur] H. Garcet, profesor de matemáticas en el Lycée Henri IV. Con la ayuda de la figura adjunta —en la página siguiente—, este curioso trabajo es fácil de entender:
>
> »Sea *AB* el arco del meridiano en cuestión del que queremos hallar la longitud. Medimos con el mayor cuidado una base *AC*, yendo desde el extremo *A* del meridiano a una primera estación *C*. A continuación, se eligen a uno y otro lado del meridiano las demás estaciones, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, etc., desde cada una de las cuales podemos ver las estaciones vecinas, y se miden con el teodolito los ángulos de cada uno de los triángulos *ACD*, *CDE*, *EDF*, etc. que forman entre ellas. Esta primera operación permite resolver estos diversos triángulos, pues en el primero se conocen *AC* y los ángulos, y se puede calcular el lado *CD*; en el segundo se conocen *CD* y los ángulos, y

se puede calcular el lado *DE*; en el tercero se conocen *DE* y los ángulos, y se puede calcular el lado *EF*, y así sucesivamente. A continuación se determina en *A* la dirección del meridiano por el método ordinario, y se mide el ángulo *MAC* que esta dirección forma con la base *AC*; por tanto, se conoce en el triángulo *ACM* el lado *AC* y los ángulos adyacentes, y se puede calcular el primer tramo *AM* del meridiano. Se calcula al mismo tiempo el ángulo *M* y el lado *CM*; se conoce, pues, en el triángulo *MDN* el lado $DM = CD - CM$ y los ángulos adyacentes, y se puede calcular el segundo tramo *MN* del meridiano, el ángulo *N* y el lado *DN*. Por lo tanto, sabemos en el triángulo *NEP* el lado $EN = DE - DN$, y los ángulos adyacentes, y se puede calcular el tercer tramo *NP* del meridiano, y así sucesivamente. Se entiende que así se podrá determinar, por partes, la longitud del arco total *AB*».



Así pues, de entrada, para realizar una triangulación se necesita conocer con la mayor precisión posible el lado de un triángulo, que denominamos base, porque de

esa medida (la más difícil y fatigosa en la práctica) va a depender la precisión de todas las otras. La base debe ser lo más larga posible para poder reducir al máximo los errores. Desde cada uno de sus extremos se miden los ángulos que forma con cada uno de los lados que la unen con un tercer vértice, convenientemente elegido, que determina un primer triángulo de la red.

Si conocemos dos ángulos y un lado (la base) de un triángulo, por trigonometría podemos determinar sin dificultad los restantes elementos (el tercer ángulo y los otros dos lados); así tendremos el triángulo completo, y cualquiera de sus tres lados podrá servir como una nueva base para el segundo triángulo adyacente. Si vamos añadiendo triángulos sucesivamente, uno al lado del otro, finalmente con nuestra red uniremos los dos puntos extremos del arco de meridiano que queremos medir. Deberemos determinar con la máxima exactitud las latitudes y las longitudes astronómicas de esos puntos.

Conocido el valor de la longitud de la base, ésta se deberá reducir a su proyección horizontal. En general, como los vértices no tienen por qué estar a la misma altura, la distancia entre ellos se debe reducir, es decir, considerar su proyección sobre el plano horizontal o superficie de referencia. Snellius calculó la forma de corregir las fórmulas para adaptarlas a la curvatura de la Tierra.

La utilización sistemática de las modernas redes de triangulación procede de las primeras mediciones realizadas por Snellius y de su medida de la distancia entre los municipios de Alkmaar y Bergen-op-Zoom en los Países Bajos. Estas dos localidades estaban separadas por un grado de latitud y se encontraban aproximadamente en el mismo meridiano. Snellius utilizó como referencia la distancia desde su casa a la torre de la iglesia local: construyó una cadena de 33 triángulos, observó los ángulos de los triángulos usando un cuadrante de unos dos por dos metros. Tras sus mediciones dedujo que ambas localidades se hallaban a una distancia de 117.449 yardas (107,395 km). De hecho, la distancia es, aproximadamente, de 111 km.

Usando los métodos de Snellius, Picard midió la distancia correspondiente a un grado de latitud sobre el meridiano de París. Usó un encadenamiento de trece triángulos desde Malvoisine, cerca de París, hasta la torre del reloj de Sourdon, población cercana a Amiens. La red de triángulos partió de una base medida sobre el terreno que fue completando mediante la medida de ángulos desde puntos visibles unos de otros, situados en torres, campanarios o lugares similares.

La medición de Picard fue la primera en la que se usaron telescopios asociados a los cuadrantes. Él mismo desarrolló sus propios instrumentos de medición. Dis-

JEAN PICARD (1620-1682)

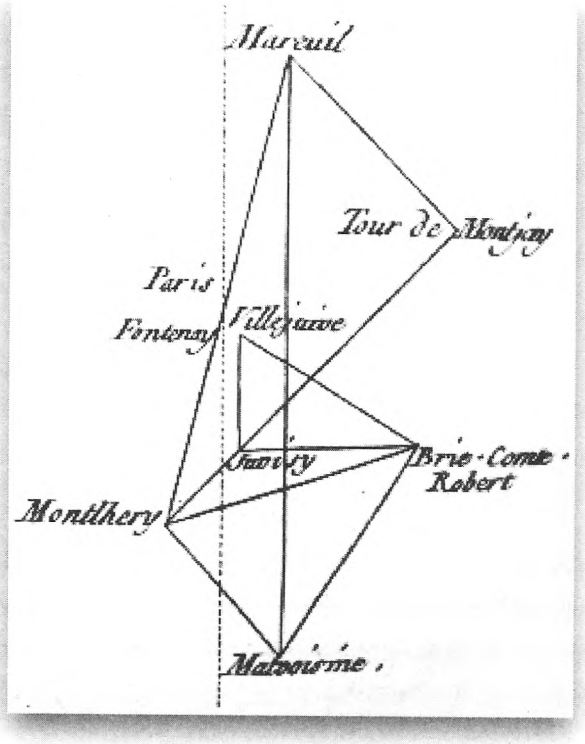
El astrónomo francés Jean Picard, formado en el colegio jesuita de La Flèche, trabajó con Pierre Gassendi, profesor de matemáticas en el Collège Royale de París (en la actualidad Collège de France). En 1655, tras la muerte de Gassendi, se convirtió en profesor de astronomía en dicha institución, y en 1666 fue miembro de la recién fundada Académie Royale des Sciences. Diseñó un micrómetro para medir diámetros de objetos celestes (Sol, Luna y planetas); en 1667 añadió una mira telescópica al cuadrante, haciéndolo mucho más útil en las observaciones. Aumentó enormemente la precisión de las mediciones de la Tierra usando el método de Snellius de la triangulación, y aplicó métodos científicos en la elaboración de mapas. En 1671 observó con el astrónomo danés Ole Rømer, en el Observatorio de Uraniborg, unos 140 eclipses de Io, el satélite de Júpiter. A partir de los datos recogidos por ambos, Rømer pudo realizar una primera medida cuantitativa de la velocidad de la luz.

puso de cuadrantes móviles equipados con anteojos y un micrómetro del astrónomo francés Adrien Auzout que le permitió una precisión de unos pocos segundos de grado. En la medición se requería conocer los desniveles entre diferentes puntos de observación y saber su relación con el plano de referencia. Pudo hacer nivelaciones con una precisión del orden de 1 cm por kilómetro.

Picard se propuso averiguar cuántas toesas (unidades de longitud que utilizó) había en línea recta entre Malvoisine y Sourdon, y qué diferencia había en latitud, sobre la circunferencia del meridiano de la Tierra. Así pues, se trataba de realizar una medida geodésica (en toesas) y otra astronómica (en grados, minutos y segundos).

Midió con cuidado un espacio de 5.663 toesas de longitud, en el camino entre Villejuif y Juvisy-sur-Orge, que ya se había pavimentado en línea recta, y concluyó el resto a través de la triangulación. Utilizó como patrón de medida la toesa de Châtelet, también llamada «toesa de París» (a la que más tarde, a finales del siglo XVIII, se le atribuiría una longitud de 1.949 m), y obtuvo como longitud de un arco de meridiano de un grado el valor de 57.060 toesas.

Gracias a las mejoras introducidas en los instrumentos de Picard y a su exactitud, la suya se considera la primera medición razonablemente precisa del radio de la Tierra. Sus medidas dieron un resultado de 110,46 km para un grado de latitud, lo que corresponde a un radio terrestre de 6.328,9 km (el radio ecuatorial se estima actualmente en 6.378,1 km; el radio polar, en 6.356,8 km, y el radio medio, en 6.371 km). Isaac Newton utilizó los datos de Picard en su teoría de la gravitación universal.



Cinco de los triángulos de la red de Picard.

Después de las de Picard, se realizaron otras mediciones sobre el meridiano de París mediante triangulación de la mano de Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), director del Observatorio de París, y su hijo Jacques Cassini (1677-1756), que le sucedió en el puesto. Jacques midió el meridiano entre Dunkerque y Perpiñán, y publicó los resultados en 1720. Posteriormente, entre 1733 y 1740, junto con su hijo César Cassini, llevó a cabo la primera triangulación de Francia, que condujo a la publicación del primer mapa riguroso de dicho país en 1745.

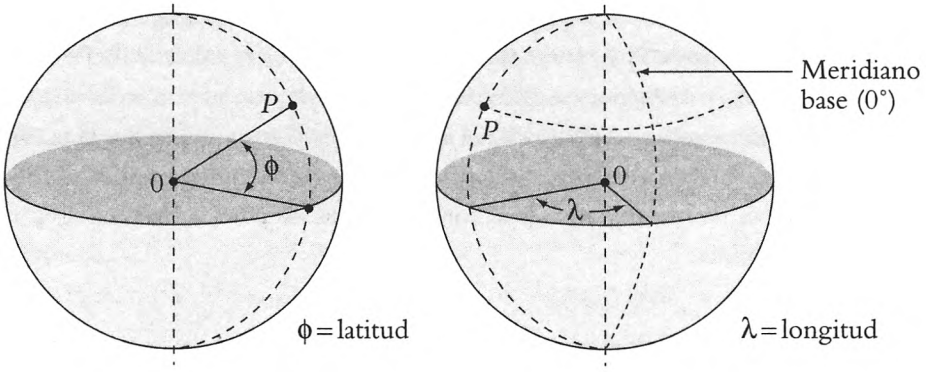
Más tarde, otros países realizaron mediciones con redes de triangulación, obteniendo mapas similares. El proyecto de triangulación de Gran Bretaña (la Principal Triangulation of Britain), por ejemplo, se inició en 1783, aunque no se llevó completamente a término hasta mediados del siglo XIX. En el caso de España, el primer proyecto de la formación de un mapa del país fue propuesto por Jorge Juan en 1751, pero hasta 1875 no se empezó a publicar la primera hoja del Mapa Topográfico Nacional de España.

Localización y orientación. La navegación y el problema de la longitud

Para determinar la posición de un punto cualquiera sobre un plano podemos utilizar un sistema de coordenadas cartesianas partiendo de dos ejes perpendiculares, eje de abscisas (x) y de ordenadas (y); dando dos valores (x,y), determinamos inequívocamente un único punto del plano. De forma similar, para localizar con exactitud cualquier lugar sobre la Tierra, considerándola una superficie esférica, es suficiente conocer dos valores, su latitud y su longitud (coordenadas geográficas). Ahora jugarán el papel de ejes un círculo máximo que pase por los polos, es decir, el meridiano que hayamos decidido utilizar como base u origen de nuestras mediciones (meridiano 0°), y el círculo correspondiente al ecuador terrestre.

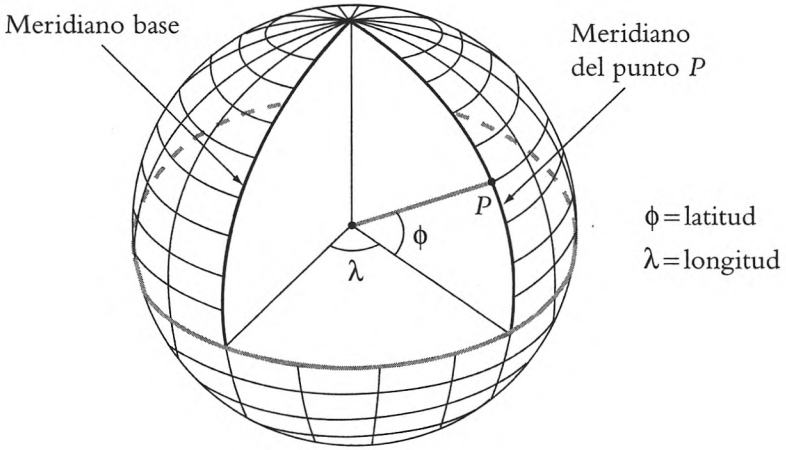
La latitud de un punto sobre la Tierra es la distancia angular entre el ecuador y dicho punto medida desde el centro del planeta a lo largo del meridiano que pasa por él. Se mide en grados, minutos y segundos sexagesimales entre 0° y 90°, y se indica el hemisferio al que pertenece (Norte o Sur); por ejemplo: latitud 41° 24' 14" N. Todos los puntos situados sobre un paralelo de la Tierra (circunferencia de un círculo paralelo al círculo del ecuador) tienen, por tanto, la misma latitud.

La latitud puede calcularse por medios astronómicos, y su determinación no presentó históricamente demasiada complicación. En el hemisferio Norte de la Tierra, un método fácil consiste en localizar la Estrella Polar (Polo Norte celeste) y medir el ángulo que forma la visual con el plano horizontal del observador; este ángulo nos da directamente la latitud (en el hemisferio Sur actuaríamos de forma similar en relación a la Cruz del Sur). Existen, además, otros métodos para determinar la latitud cuando es de día (por ejemplo, midiendo la altura del Sol sobre el horizonte a mediodía y disponiendo de tablas de sus coordenadas a lo largo del año en su desplazamiento por la eclíptica).



Latitud y longitud de un punto P *sobre la esfera.*

La longitud es el valor del ángulo entre el meridiano base (de hecho, un semimeridiano), que se toma como origen (0°), y el meridiano que pasa por el punto, medido sobre el ecuador desde el centro de la Tierra. Se mide también en grados, minutos y segundos sexagesimales, como la latitud. Se acostumbra a medir entre 0° y 180°, indicando en este caso Este u Oeste, según la dirección tomada a partir del meridiano base; por ejemplo: longitud 2° 14' 50" E. Todos los puntos situados sobre un semimeridiano entre los dos polos de la Tierra tienen, por lo tanto, la misma longitud.



La latitud y la longitud se calculan a partir del ecuador y de un meridiano que se toma como referencia (meridiano base o meridiano de longitud 0°).

En la actualidad, el meridiano de Greenwich es el que se toma habitualmente como meridiano base. Hubo, sin embargo, muchos otros meridianos que, antes que él, sirvieron como meridianos de referencia.

Desde un navío el cálculo de la latitud, como hemos dicho, es sencillo y fue resuelto fácilmente. En cuanto a la longitud, si se tienen a la vista referencias terrestres, su cálculo es relativamente fácil, pero en la navegación por alta mar éste presenta serios problemas.

El problema del cálculo de la longitud empezó a ser de vital importancia después del descubrimiento de América por Cristóbal Colón. Las longitudes se calculaban de manera aproximada deduciendo la distancia que el navío había recorrido de Este a Oeste o viceversa. Para ello se usaba la corredera, un instrumento utilizado por los marinos para medir la velocidad de la nave. La corredera llevaba enrollado en un carrete un cordel y se podía sujetar de forma que girara libremente; el cordel llevaba una serie de nudos equidistantes. Un marinero la lanzaba por la popa y dejaba correr la parte inicial para que se estabilizara en el agua. Cuando sentía en su mano el primer nudo avisaba «¡marca!»; entonces otro marinero empezaba a contar el tiempo con un reloj de arena; cuando el del reloj detectaba que había bajado toda la arena avisaba al primero, que detenía el cordel indicando el número de nudos, por ejemplo, «tres nudos y medio» o «seis nudos y cuarto». De ahí viene que hoy en día se mida la velocidad de un navío en nudos.

Naturalmente, un método tan rudimentario para estimar la longitud provocaba imprecisiones muy importantes y auténticos desastres en la navegación, de manera que el cálculo de la longitud se convirtió en una prioridad estratégica de los países con intereses en ultramar. En el siglo XVII y principios del XVIII, el problema del cálculo de la longitud constituía una preocupación de primer orden.

Teóricamente, el cálculo de la longitud se puede reducir a medir la diferencia horaria entre un punto de referencia (el puerto de salida o el meridiano cero) y la posición de la nave. Cuando el Sol pasa por el meridiano del observador (la nave), si se conoce con exactitud la hora del punto de partida, es posible conocer la longitud, o sea, la distancia en grados al punto de partida y, por tanto, también al meridiano cero. Ello es debido a que la diferencia de tiempo entre dos meridianos se puede convertir en una separación en grados. Como la Tierra tarda 24 horas en realizar una rotación de 360°, en una hora recorre una veinticuatroava parte de su rotación, es decir 15°; si en una hora, o lo que es lo mismo, en 60 minutos, gira 15°, en líneas generales una diferencia de 4 minutos viene a representar un grado de longitud.

Por tanto, la longitud podía calcularse mediante las diferencias de tiempo entre dos emplazamientos, y ello, en principio, podía conseguirse efectuando observaciones y medidas astronómicas. Por ello se pensó en obtener la longitud mediante la observación de eclipses, pero en alta mar ésta no resultó una técnica útil y, además, los eclipses eran escasos.

OBSERVACIÓN DE ECLIPSES PARA CALCULAR LA LONGITUD

Supongamos que sabemos a qué hora tiene que ocurrir un eclipse en un lugar determinado (en tierra firme, en un observatorio astronómico...) y que nos encontramos en alta mar. Si medimos, en nuestra hora local, cuándo se produce ese eclipse, podremos calcular la longitud. Este método sólo requiere disponer de las tablas correspondientes a los tiempos en que se producirá el eclipse en el lugar de referencia (y de las matemáticas, ¡claro!). En el siglo XVI la observación de eclipses pudo ser útil como herramienta en tierra firme, pero no fue una técnica útil para determinar la longitud en alta mar, pues resultaba muy complicado fijar los instrumentos debido a los movimientos del oleaje y, sobre todo, porque los eclipses ocurrían con poca frecuencia. De hecho, cada año pueden darse de dos a un máximo de cinco eclipses de Sol, y si contamos eclipses solares y lunares, como mínimo en un año pueden tener lugar dos eclipses y como máximo siete, siendo la media de cuatro. En el siglo XX se contabilizaron 375 eclipses: 228 de Sol y 147 de Luna. Aparte de la escasez de eclipses, otra cosa es que sean visibles, ya que su visibilidad estará sometida a las condiciones meteorológicas de un determinado lugar.

La poca frecuencia de este fenómeno astronómico previsible se palió gracias al descubrimiento de Galileo de los satélites de Júpiter en 1610. Las «lunas» de Júpiter, al orbitar en torno al planeta, son eclipsadas y aparecen y desaparecen. Se puede predecir cuándo tendrán lugar esos eclipses que ocurren unas mil veces al año. Aunque se trataba de un método adecuado, y se pudo aplicar para la determinación de la longitud en tierra firme, en el caso de una nave en alta mar las dificultades se presentaban por la inestabilidad de las embarcaciones y porque las observaciones tenían que hacerse de noche, solamente en una parte del año y, además, con cielo despejado.

El problema de la longitud en alta mar continuó siendo un problema. La medida de la posición del Sol servía para conocer el tiempo local; sin embargo ¿cómo saber el tiempo de referencia sin disponer de relojes lo suficientemente precisos? Entre otros factores, el balanceo de la nave modificaba el funcionamiento de los

relojes de péndulo, y las variaciones en la latitud podían ocasionar adelantamientos o retrasos del tiempo medido. Invariablemente, los relojes de la nave no conservaban la misma hora del punto de partida, provocando errores de consideración en el cálculo de la longitud.

En 1714 el Parlamento de Inglaterra ofreció un premio extraordinario de veinte mil libras esterlinas a quien fuese capaz de presentar un método o un instrumento que resolviese el problema de la determinación de la longitud en alta mar. El ganador fue el relojero inglés John Harrison (1693-1776), que tras décadas de trabajo consiguió construir un cronómetro muy perfeccionado y preciso, que fue probado en un barco rumbo a Jamaica en 1761. Estuvo 147 días funcionando hasta su regreso a Inglaterra, y sólo presentó una variación de 1 minuto y 54 segundos, con lo que el problema de las longitudes se pudo considerar resuelto. Hoy en día la posición exacta de un barco se puede conocer gracias al GPS, del que hablaremos en el capítulo 6.

Una Tierra no esférica. Expediciones científicas: Virreinato del Perú y Laponia

Las medidas de la Tierra, incluida la de Picard, se efectuaron considerando que la Tierra era completamente esférica. Sin embargo, pocos años después de la medida de Picard, entre 1671 y 1673, el astrónomo francés Jean Richer (1630-1696), asistente de Giovanni Domenico Cassini, viajó a Cayena, en la Guayana Francesa, donde hizo un descubrimiento crucial: observó por primera vez un cambio en la intensidad de la fuerza gravitatoria terrestre al advertir que la oscilación de un péndulo era más lenta en Cayena que en París. Dedujo, acertadamente, que ello era debido a que Cayena se encontraba más lejos del centro de la Tierra que París. La noticia llegó a Europa y ocasionó una fuerte conmoción entre los miembros de la Académie des Sciences. A su regreso, Richer trabajó para determinar la longitud del péndulo que en París batiera segundos, es decir, que tardase un segundo en ir de extremo a extremo. También se hicieron determinaciones similares en otros lugares de la Tierra, y se vio que esa longitud variaba con la latitud. A la luz de las teorías existentes, todo apuntaba a que si la fuerza con que la Tierra atraía al péndulo variaba en diferentes lugares, la figura de la Tierra no debía de ser totalmente esférica.

Teniendo en cuenta los trabajos de Richer, Newton publicó en 1687 sus famosos *Principios matemáticos de filosofía natural*, donde establecía las bases de la mecánica. Suministró una explicación matemática de la figura de la Tierra que vinculó a su

genial e innovadora teoría de la gravitación universal. Considerando nuestro planeta como una masa homogénea, fluida y sometida a rotación, éste debía de estar achatado por los polos. Según anunciaba, el achatamiento era de 1/230, es decir, suponiendo que la sección transversal de la Tierra fuera una elipse, el eje mayor sobrepasaría al menor en su 230ª parte.

En Francia, Jacques Cassini publicó, en 1720, la obra *De la grandeur et de la figure de la Terre*, donde rechazaba el achatamiento polar sostenido por Newton y lo justificaba con observaciones astronómicas y geodésicas de acuerdo con sus propias medidas del meridiano Colliure-París-Dunkerque (aunque algunos miembros de l'Académie creían ver imprecisiones en ellas). Cassini tildaba a Newton de especulativo y defendió que la Tierra era un elipsoide achatado por el ecuador. Entonces, la Tierra ¿tenía forma de sandía o más bien de melón? Se inició una polémica sobre la figura de la Tierra que llegó a involucrar a la Royal Society de Londres y a la Académie des Sciences de París en un debate impregnado de sentimientos nacionalistas que enfrentaban a la ciencia francesa y a la inglesa.

Con el fin de resolver esta controversia, la Académie des Sciences de París acordó medir con precisión la longitud del arco correspondiente a un grado de ángulo central sobre un meridiano en latitudes lo más alejadas posible entre sí. Para ello se organizaron dos expediciones de científicos (astrónomos, matemáticos, naturalistas...): una a Laponia, dirigida por Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), con la participación de Le Monnier, Clairaut, Camus, el sueco Anders Celsius y el abate Outhier. La otra, al Virreinato del Perú, concretamente a lo que hoy es Ecuador, encabezada por el astrónomo Louis Godin (1704-1760), con el geógrafo La Condamine, el astrónomo y especialista en hidrografía Bouguer, el botánico Jussieu y los españoles Jorge Juan y Antonio de Ulloa. El científico criollo Pedro Vicente Maldonado se incorporó en Guayaquil; también participaron el relojero Hugot, el ingeniero y dibujante Morainville, el capitán de fragata Couplet, el cirujano y botánico Séniergues, el instrumentista Godin des Odonnais, sobrino de Godin, y el cartógrafo e ingeniero naval Verguin.

En aquella época, la región del Virreinato del Perú era territorio español, por lo que se tuvo que pedir permiso a la Corona española para poder realizar la expedición en aquellos territorios de los Andes ecuatorianos. A cambio, dos jóvenes y brillantes oficiales de la Academia de Guardiamarinas de Cádiz, Juan y Ulloa, se incorporaron a la expedición.

La expedición a Laponia (1736-1737) contó con la capacidad de cálculo y la astucia del matemático Clairaut, y tardó relativamente poco tiempo en dar resulta-

dos. Dispuso de la ayuda del ejército sueco para el equipamiento de las estaciones. Los científicos efectuaron la triangulación durante los largos días del verano septentrional en una cadena a lo largo de unos 100 km entre Kittis y Torneå. Tomaron las medidas astronómicas en primavera y otoño, cuando las noches ya son largas sin ser excesivamente frías. La base se midió aprovechando la superficie helada de un río. El resultado final de las medidas de Maupertuis para el grado de meridiano fue de 57.438 toesas a la latitud media de 66° 20'. Si se comparaban con las 57.060 toesas que Picard midió cerca de París a una latitud de 48° aproximadamente, se podía confirmar ya que la Tierra era un esferoide achatado por los polos.

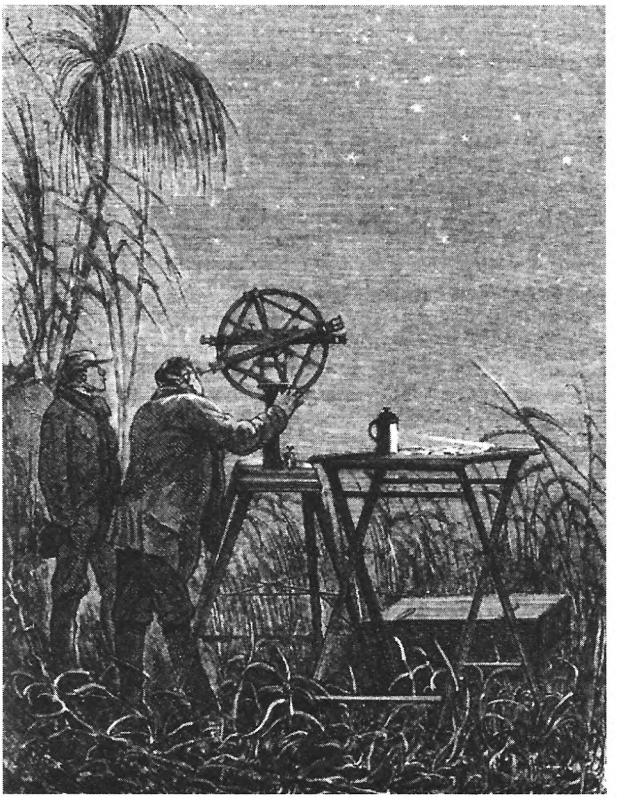


Imagen de las mediciones goniométricas para realizar una triangulación. Ilustración de la novela de Julio Verne Aventuras de tres rusos y tres ingleses en el África Austral.

Por su parte, la expedición a la América meridional constituyó una verdadera epopeya que duró una decena de años. Partió de La Rochelle en la primavera de

1735 y llegó a Quito un año después. Los expedicionarios tuvieron que enfrentarse a todo tipo de problemas que se añadían a las continuas desavenencias entre los científicos franceses: las condiciones climáticas rigurosas, el terreno dificultoso, los numerosos problemas financieros, la escisión de la misión en dos en 1741, etc. Las mediciones y la triangulación que tuvieron que realizar fueron particularmente difíciles debido a las complicaciones de la orografía del territorio andino y a las altitudes, de más de 4.000 m, que tuvieron que alcanzar. Decidieron realizar una triangulación de envergadura, de 43 triángulos sobre una longitud de 354 km para conseguir medir no 1° sino 3° de meridiano. Los resultados para el grado de meridiano fueron 56.763 toesas según Bouguer (1749) y 56.768 toesas según tanto Juan y Ulloa (1748) como La Condamine (1751). Utilizando el símil del ¿melón o sandía? que formuló Voltaire, la Tierra era más bien una sandía que un melón. Las mediciones y los cálculos matemáticos parecían finalmente dar la razón a Newton.

JORGE JUAN Y EL REAL OBSERVATORIO DE SAN FERNANDO (CÁDIZ)

El marino español Jorge Juan y Santacilia (1713-1773), que formó parte de la expedición para medir un grado del meridiano terrestre en el ecuador, fue uno de los científicos que más contribuyó a la modernización de la ciencia española en el siglo XVIII. Su legado aún perdura, pues, entre otras cosas, a él se debe la fundación (1757) del Real Observatorio de la Armada (ROA), en San Fernando (Cádiz). El actual Real Instituto y Observatorio de la Armada es, además de un observatorio astronómico y geodésico, un centro científico de investigación y difusión cultural perteneciente a la Armada Española. Entre otras actividades se ocupa del cálculo de las efemérides, la publicación del Almanaque Náutico, observaciones meteorológicas, sísmicas y magnéticas, y la determinación científica de la hora. Se encarga de calcular y difundir la hora oficial española (hora de tiempo universal coordinado o UTC) y es también el depositario de las medidas métricas oficiales de España.

Jorge Juan y Santacilia. Museo Naval, Madrid.

Capítulo 5

Midiendo el metro

En este capítulo haremos un breve viaje por la historia del nacimiento del metro. Partiendo de la situación de las medidas en el siglo XVIII, pondremos de manifiesto las dificultades que comportaba el uso de múltiples unidades de medida, y cuáles fueron las circunstancias históricas existentes que llevaron a decidir abordar la empresa de establecer un sistema universal. Nos referiremos a las condiciones que debía tener la nueva unidad de medida de longitud, a las diferentes propuestas que se plantearon y por qué finalmente se decidió medir un arco de meridiano para establecer el nuevo patrón. Veremos las condiciones matemáticas de la empresa (la triangulación), los instrumentos que se utilizaron (el círculo de Borda) y quiénes fueron los protagonistas (Jean-Baptiste Delambre y Pierre Méchain), así como algunas cuestiones relacionadas con las «aventuras y desventuras» de las expediciones geodésicas. Finalmente, incidiremos en el proceso de aceptación del sistema métrico, la poca permeabilidad de ciertos países y algunos de los conflictos que ha originado.

La necesidad de una medida universal

A pesar de que en la actualidad estamos acostumbrados a leer los indicadores de los recorridos por carretera en kilómetros, compramos el aceite por litros y las patatas por kilogramos, en el siglo XVIII estas unidades no existían. Las mismas magnitudes se medían con unidades diferentes en función del país, la región, la comarca o incluso la población, de tal manera que en la entrada de algunas ciudades se indicaban los patrones de medida oficiales de aquella ciudad.

Algunos ejemplos de unidades de longitud: la vara de Valencia y Castellón medía aproximadamente 0,906 m, mientras que la de Teruel medía 0,768 m. Comprando tela a tanto la vara en Castellón y vendiéndola por el mismo precio en Teruel se podía obtener un beneficio del 18%. La legua es otra unidad muy diversa dependiendo del territorio (desde la legua común en España, de 5.572 m, a la legua francesa, de 3.898 m) y muy utilizada; de hecho, aparece 64 veces en la obra *Don Quijote de la Mancha*. La diversidad de pies también era notable, desde el pie de Burgos (0,278 m) al largo pie francés (0,324 m). El pie es una unidad especialmen-

te distinguida, que guarda relación con nuestro ferrocarril. Una real orden de 1844 establecía el ancho de vía en España en 6 pies de Burgos ($6 \cdot 0{,}278 = 1{,}67$ m). El actual ancho internacional, originario de Inglaterra, corresponde a 4 pies ingleses y 8 pulgadas y media (1,43 m). La libra también tenía abundantes versiones: antes del establecimiento del SMD (Sistema Métrico Decimal), en Europa se habían contabilizado 391 libras distintas.

¡CUÁNTOS PIES!

A título de ejemplo de la variedad de medidas que podían corresponder a una misma unidad, presentamos el caso de los pies como medida antropomórfica que se dio en muchos países y su equivalencia con el metro:

Pie de Burgos	0,278 m
Pie francés	0,324 m
Pie del Rhin	0,314 m
Pie de Roma	0,297 m
Pie de Ámsterdam	0,283 m
Pie suizo	0,300 m
Pie inglés	0,304 m
Pie ruso	0,305 m
Pie egipcio	0,225 m
Pie austriaco	0,316 m

La existencia de múltiples medidas y su variabilidad según el territorio de referencia complicaba el comercio y dificultaba enormemente el tránsito de mercancías. La falta de una definición común permitía que las unidades de medida fueran un instrumento de dominación, y su unificación fue uno de los múltiples objetivos de la Revolución francesa. El 9 de febrero de 1790, Claude-Antoine Prieur-Duvernois (1763-1832), de sobrenombre «Prieur de la Côte-d'Or», ingeniero militar encargado de la requisa de armas y municiones para las fuerzas de la Revolución, hizo una petición a la Asamblea Nacional francesa en este sentido.

Además del avance social que representaba la empresa, la comunidad científica también se planteó la necesidad de establecer medidas universales, y la Académie des Sciences de París jugó un papel destacado en el proceso. Las unidades o patrones debían servir para medir las diferentes magnitudes que desde el campo de la física se iban estableciendo como características generales comunes a diferentes objetos, aparentemente distintos, como por ejemplo el aceite y el vino. Si se quería medir uno u otro, desde el punto de vista de una propiedad que tienen en común, su liquidez, carecía de sentido utilizar dos unidades distintas, una para el aceite y otra para el vino, sino que se necesitaba una unidad común, un mismo patrón; este lugar lo ocuparía, unos años después, el litro.

Una de las magnitudes elementales es la longitud, característica común a múltiples objetos porque permite establecer sus dimensiones. Para medir longitudes existían infinidad de patrones, por lo que parecía lógico empezar definiendo la unidad de longitud. Además, si se trataba de establecer un patrón, era importante disponer de instrumentos precisos tanto para medir el objeto que pasaría a serlo como para reproducirlo y hacer de él tantas copias como fuesen necesarias. Todo confluía para llevar a cabo la empresa: los avances tecnológicos eran importantes y habían permitido construir instrumentos de medición cada vez más precisos.

Las ideas de igualdad que proclamaba la Revolución francesa influyeron de manera decisiva en la definición de las condiciones que debían cumplir las nuevas unidades universales. Éstas eran tres: que fuesen aceptadas en todos los países, que fuesen inalterables y no dependiesen del tiempo, y que no fueran antropomórficas (como lo eran el palmo, el pie, etcétera).

La elección del meridiano

¿Qué condiciones debía reunir la nueva medida? ¿Qué propuestas se barajaron? ¿Cómo y quiénes tomaron la decisión final? Y, por último, ¿por qué se decidió medir un arco de meridiano y cuál fue? Estas cuestiones determinaron las tres expediciones que se realizaron para establecer el metro como patrón de medida de longitud.

Condiciones de la nueva medida

Siguiendo las consignas de la Académie des Sciences, se debía encontrar una unidad de longitud que estuviera basada en la naturaleza porque se creía inalterable

y pertenecía a toda la humanidad. De este modo se conseguiría que la nueva unidad fuese estable, y que desafiase al tiempo y a las personas. Pero ¿cuál debía ser el fenómeno natural que pudiese servir de base de la nueva unidad de medida y que cumpliera todos los requisitos anteriores? Las alternativas para la determinación de la unidad patrón fueron tres: la primera, la longitud del péndulo; la segunda, la medida de un arco del ecuador, y la tercera, la medida de un arco de meridiano.

¿Qué longitud aproximada debería tener la nueva unidad de medida para que fuese útil para la vida cotidiana? Se consideró que una longitud de media toesa podía ser la adecuada como punto de partida. De esta forma ya se podían empezar a concretar las tres propuestas, y así lo hizo una comisión de la Académie des Sciences a petición de la Asamblea Nacional.

UNIDADES DECIMALES Y UNIDADES NO DECIMALES

La eficacia de un sistema decimal frente a otro no decimal se muestra en los cálculos. Así, para calcular la suma de dos longitudes en el sistema decimal, por ejemplo 3 m + 7 cm = 3,07 m o bien 307 cm, basta con efectuar el cambio de unidades siguiendo las equivalencias que van de 10 en 10, de ahí el nombre. En cambio, para sumar 1h 35 min + 42 min, no podemos escribir 1h 77 min, sino que se espera que digamos 2 h 17 min. Esto es así porque la relación entre la hora y el minuto no es de múltiplos de 10 sino de 60.

Un sistema que no sea decimal también entraña más dificultad para operar con fracciones de la unidad. Así, $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ en cualquiera de las dos situaciones, pero en el caso del sistema decimal,

$$\frac{3}{4} \text{ de metro} = 0{,}75 \text{ m} \left(\frac{3}{4}=0{,}75=\frac{75}{100}\right),$$

o también 75 cm, mientras que $\frac{3}{4}$ de hora = 45 min, y no puede expresarse como 75 min, ni como 7,5, ni con ninguna otra expresión que nos recuerde las fracciones de denominador, 10, 100, etc., ya que en este último caso, $\frac{3}{4}=\frac{45}{60}$.

Si bien las equivalencias entre horas, minutos y segundos no corresponden a un sistema decimal, el hecho de ser un sistema sexagesimal comporta que sea relativamente sencillo utilizarlo, por eso ha perdurado durante muchos siglos hasta la actualidad. La cuestión resultaba mucho más complicada con otras equivalencias no decimales que cayeron en desuso con la introducción del metro.

Tres propuestas

Tres meses después de que Prieur de la Côte-d'Or solicitase el establecimiento de un patrón único y universal, la Asamblea se reunió el 8 de mayo de 1790 para debatir las diferentes posibilidades. En esta sesión hubo dos ponencias especialmente relevantes sobre el tema que defendían la reforma métrica y la longitud del péndulo como base para la nueva unidad. Charles Maurice de Talleyrand, presidente de la Asamblea y obispo de Autun, propuso tomar como patrón la longitud del péndulo que batía segundos en la latitud de 45°. La segunda, presentada por el propio Prieur de la Côte-d'Or, introducía, además, la propuesta de que el nuevo sistema fuese decimal. Dividía la longitud del péndulo en tres partes iguales. Cada parte era un pie y, a partir de él, construía un sistema decimal: el pie tenía 10 pulgadas, y la pulgada, 10 líneas.

Una vez oídas todas la comunicaciones, la Asamblea encargó a la Académie des Sciences un estudio y análisis de las diferentes propuestas para decidir cómo se debía establecer la reforma del sistema de medidas. La Académie, a su vez, nombró una comisión de la que formaban parte los más célebres científicos de la época: Pierre-Simon Laplace, Joseph-Louis de Lagrange, Jean Charles de Borda, Gaspard Monge y Nicolas de Condorcet. El 19 de marzo de 1791, la citada comisión emitió un informe donde presentó tres alternativas para la elección de una unidad de medida aceptable para todos los tiempos y para todos los pueblos:

— La longitud de un péndulo cuyo semiperiodo fuera de un segundo a 45° de latitud.
— La cuarta parte del ecuador.
— La cuarta parte de un meridiano.

La decisión final

La Académie des Sciences se mostró partidaria del sistema decimal, como había propuesto Prieur, y de las tres alternativas recogidas en el informe, se decantó por establecer la nueva medida a partir de la longitud del meridiano. Una vez emitido el dictamen de la Académie, la decisión final quedó en manos de la Asamblea. El día 26 de marzo de 1791 ésta ratificó la decisión de la Académie y eligió también la tercera opción: «La cuarta parte de un meridiano terrestre será la unidad real de medida, y la diezmillonésima parte de esa longitud será la unidad corriente». En la misma sesión se adoptó el nombre de *metro* (del griego μέτρον, *metron*, «medida») para dicha unidad.

¿Cuáles fueron las razones que llevaron a la Académie des Sciences a decantarse por la medida del meridiano? Se disponía ya de algunas buenas estimaciones de la longitud del meridiano, pero era necesario poner en marcha una operación de medida mucho más ambiciosa que permitiera alcanzar los niveles de exactitud que requería la definición de la nueva unidad. ¿Por qué empezar una aventura que seguramente sería mucho más costosa que la que requería la medición a partir del péndulo? La decisión de la comisión despertó las iras de algunos, entre ellos Jean-Paul Marat, que ya había visto en varias ocasiones como la Académie des Sciences rechazaba sus trabajos científicos, la mayoría sobre física.

La comisión rechazó la medida del ecuador por las dificultades que comportaba realizar mediciones en lugares poco explorados. En este sentido, las experiencias de mediciones en el Virreinato del Perú seguramente disuadieron del propósito. ¿Por qué se desestimó la longitud del péndulo? Era una experiencia relativamente cómoda y barata. La comisión argumentó que la unidad de longitud no podía depender de la unidad de tiempo y del valor de la gravedad. ¿Es el tiempo menos elemental que la longitud? Contradicciones de la historia, ya que las posteriores definiciones de metro, llevadas a cabo para ajustar más la medida a las necesidades del desarrollo de la ciencia y la tecnología, han relacionado ambas magnitudes, como se verá más adelante.

¿Cuál fue entonces la razón de elegir la medida del meridiano? La respuesta no está del todo clara y son diversas las suposiciones que pueden plantearse. Algunos historiadores atribuyen la decisión al hecho de que uno de los miembros de la comisión, Borda, era el inventor de un instrumento muy perfeccionado para medir los ángulos. La medida del meridiano acabaría sirviendo para demostrar las excelencias de su instrumento y lo consagraría definitivamente para hacer cálculos topográficos y astronómicos.

¿Qué arco de meridiano?

Como no era posible medir todo el cuadrante de meridiano desde el Polo Norte al ecuador, se trataba de medir sobre el terreno un arco de meridiano tan extenso como fuera posible y extrapolar los resultados a todo el cuadrante. Para que la deformación o el aplanamiento terrestre afectara lo menos posible, debía elegirse un arco en torno a la latitud de 45°, que tuviera los extremos a nivel del mar y sin grandes montañas de por medio. Se debían evitar, por tanto, las dos cordilleras europeas más importantes los Alpes y los Cárpatos.

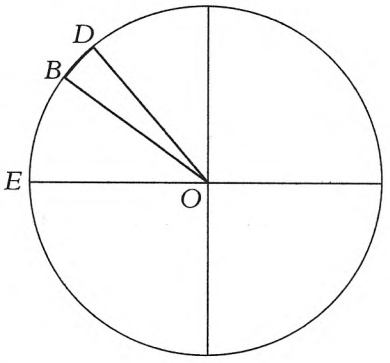
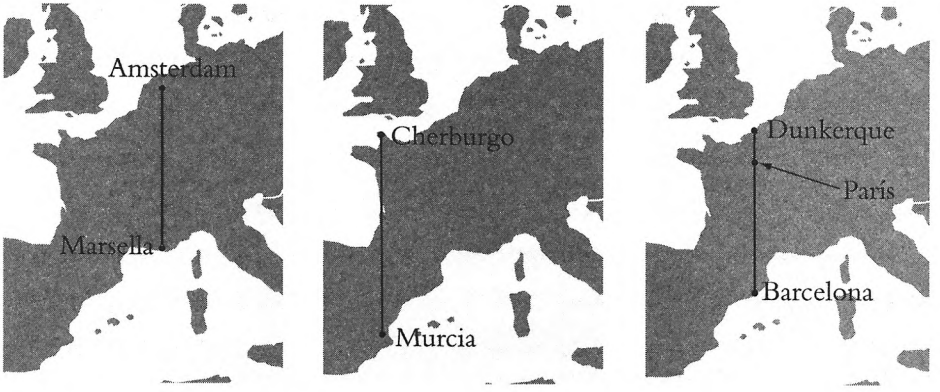


Figura en la que se representa el cuadrante del meridiano protagonista en la definición del metro. E *representa el ecuador;* B, *la ciudad de Barcelona, y* D, *la de Dunkerque.*

Se plantearon tres posibilidades: Ámsterdam-Marsella, Cherburgo-Murcia y Dunkerque-Barcelona.

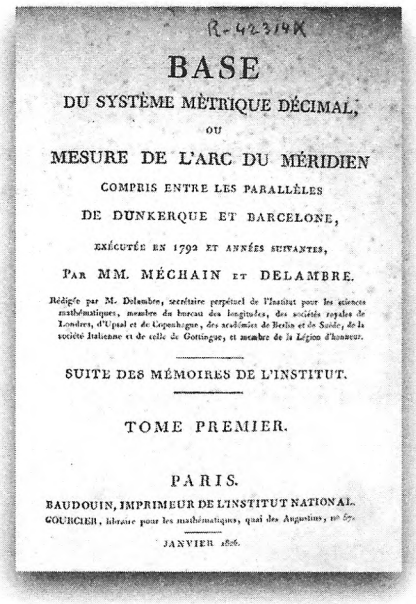


Finalmente se escogió la tercera opción porque ya se habían realizado diversas mediciones anteriormente, como la de Dunkerque-Perpiñán, en 1739. Probablemente, el hecho de pasar por París también influyó en la decisión, pero justo esa cuestión hizo que los ingleses se retirasen finalmente del proyecto en 1791, cuando inicialmente estaban dispuestos a colaborar en él.

En abril de 1791, la Comisión de la Académie des Sciences confió la misión a Jean-Baptiste Delambre, Giovanni Domenico Cassini, Adrien-Marie Legendre y Pierre Méchain. Cassini, fiel al rey, se negó a servir a un gobierno revolucionario que había detenido al rey Luis XVI. El 15 de febrero de 1792, Delambre fue ele-

gido por unanimidad miembro de la Académie des Sciences. En mayo de 1792, tras la negativa final de Cassini, se encargó a Delambre la expedición al Norte, de Dunkerque a Rodez, y a Méchain la expedición al Sur, de Rodez a Barcelona.

En enero de 1806, con Méchain fallecido, Delambre acabó la edición de una memoria en tres tomos en la que se detallan todos los datos obtenidos, las condiciones de observación y los cálculos realizados en la triangulación. La memoria se tituló: *Base du système Métrique Décimal, ou Mesure de l'arc du Méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, executé en 1792 et années suivants, par MM. Méchain et Delambre.*


R-42314K

BASE

DU SYSTÈME MÈTRIQUE DÉCIMAL,

OU

MESURE DE L'ARC DU MÉRIDIEN

COMPRIS ENTRE LES PARALLÈLES

DE DUNKERQUE ET BARCELONE,

EXÉCUTÉE EN 1792 ET ANNÉES SUIVANTES,

PAR MM. MÉCHAIN ET DELAMBRE.

Rédigée par M. Delambre, secrétaire perpétuel de l'Institut pour les sciences mathématiques, membre du bureau des longitudes, des sociétés royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des académies de Berlin et de Suède, de la société Italienne et de celle de Gottingue, et membre de la Légion d'honneur.

SUITE DES MÉMOIRES DE L'INSTITUT.

TOME PREMIER.

PARIS.

BAUDOUIN, IMPRIMEUR DE L'INSTITUT NATIONAL.

COURCIER, libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

JANVIER 1806.

Portada de la memoria de Méchain y Delambre.

Triangular, la base matemática de la medición

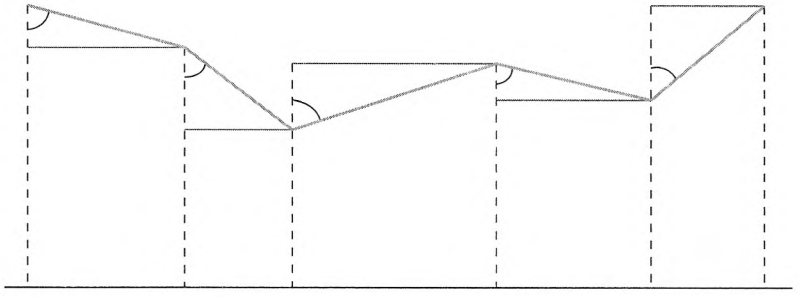
Medir sobre el terreno un arco de meridiano no era una tarea fácil hace dos siglos. La medida se efectúa de forma indirecta y a trozos, ya que no se puede realizar a través de una única medición. Se trata de construir una red de triángulos, adyacentes entre ellos, que recubran el objeto que se pretende medir. Una vez imaginado ese tramado de triángulos, basta con tomar una única medida de longitud y las medidas correspondientes a dos de los ángulos de cada triángulo para deducir, mediante cálculos, todos los lados de los triángulos implicados en la red. Finalmente,

se deduce sobre el dibujo y mediante nuevos cálculos la longitud del arco de meridiano deseado. Este procedimiento recibe el nombre de *técnica de triangulación*, y se usa también para medir superficies de formas irregulares que se descomponen en triángulos. En el apartado «Redes de triangulación para medir arcos de meridiano» del capítulo anterior se ha introducido este método.

Recordemos cómo transcurre el proceso. Sobre el terreno se mide una base con tanta precisión como sea posible. Se establece un triángulo imaginario que tiene dos vértices en los extremos de la base y el tercer vértice en un punto generalmente elevado, de manera que desde cada vértice puedan verse los otros dos y, por tanto, puedan medirse los tres ángulos del triángulo. Conocidos un lado y los ángulos del triángulo podrán calcularse los otros dos lados, que, a su vez, podrán servir de base para otros dos triángulos. A partir de estas longitudes calculadas en la etapa anterior, midiendo los ángulos de los nuevos triángulos se podrán calcular sus lados, los cuales, a su vez, podrán usarse como base para el cálculo de nuevos triángulos. Procediendo de este modo se obtendrá una cadena de triángulos de lados conocidos cuyos vértices, llamados vértices geodésicos, suelen tomarse en lugares elevados (cimas de montañas, campanarios...).

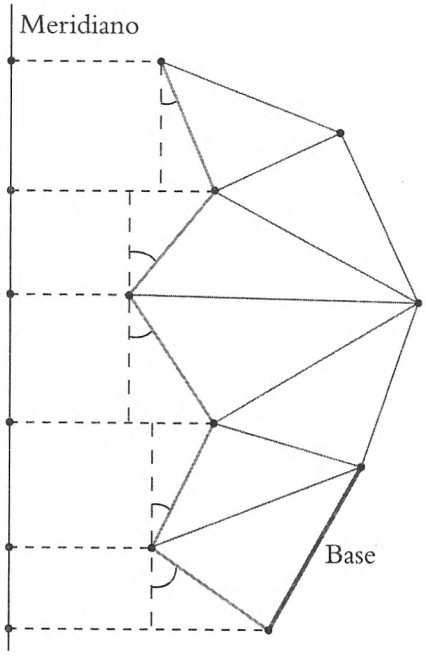
La cadena de triángulos así construida tenía dos problemas: ni los triángulos estaban situados sobre un mismo plano, ni todos ellos estaban alineados con el meridiano (ya se ha comentado que se trata de una red que cubre el meridiano). Por consiguiente, debían hacerse dos tipos de proyecciones que complicaban un poco más los cálculos.

Por una parte, los lados de los triángulos debían proyectarse sobre un mismo plano de referencia. Para ello se usaba el ángulo cenital, el que forma la vertical en un punto con el lado del triángulo que se desea proyectar (véase la figura siguiente):



Proyección de los lados de los triángulos sobre un mismo plano horizontal.

Por otra parte, algunos de los lados tenían que proyectarse en la dirección del meridiano para que, en conjunto, lo recubrieran. Para ello se utilizaba el llamado ángulo azimutal, que es el comprendido entre la dirección del meridiano y el lado del triángulo que se desea proyectar (véase la figura siguiente):



Proyección de los lados que recubrirán el meridiano.

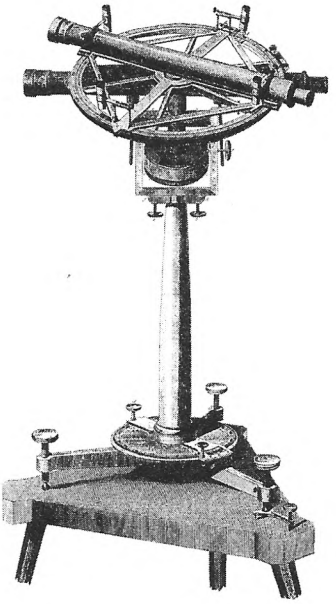
Sobre el terreno, se trataba de identificar las estaciones de observación, los nodos o vértices geodésicos de los triángulos, que tenían que ser visibles, como mínimo, desde otras tres estaciones, para ir formando una cadena de triángulos que cubriera el meridiano. Había que ir de estación en estación midiendo los ángulos horizontales que separaban estaciones adyacentes. Después se tenía que determinar sobre el terreno la longitud concreta de un lado de uno de los triángulos («línea base»), el cual serviría para calcular los lados de todos los triángulos interconectados. A partir de aquí se obtenía la distancia a lo largo del arco de meridiano desde la estación situada más al Norte hasta la situada más al Sur. Naturalmente, dado que se medían distancias angulares desde puntos elevados había que ajustar todos los valores a un triángulo común situado al nivel de la superficie, tal como muestra la figura de la página anterior.

Los instrumentos y la precisión de las medidas

La técnica de la triangulación requería la máxima precisión posible en la medida de la base (longitud inicial a partir de la que se deducirían en cadena todas las siguientes) y de los ángulos de los diferentes triángulos adyacentes. Para conseguir las mejores medidas y, a su vez, evitar la propagación de errores en los cálculos sucesivos, era de vital importancia contar con instrumentos precisos y asegurarse de la correcta visibilidad entre los vértices de la triangulación.

Para la medición de la base se usaron cuatro reglas, graduadas en toesas, de dos toesas de longitud. Para hacernos una idea, si se hace la equivalencia con el metro, la unidad a establecer, resulta que una toesa equivale a 1,949 m. Cada regla estaba constituida por una capa de platino y otra de cobre para poder controlar la repercusión de la dilatación de los materiales en función de la temperatura en cada medición. Para ajustar la precisión de la lectura, disponía de un pie de rey que se leía con una lupa. También contaba con dispositivos para encajar reglas consecutivas, alinearlas y nivelarlas.

Jean-Charles de Borda (1733-1799), comandante de Marina y físico experimental, había inventado un aparato óptico, un círculo repetidor llamado círculo de Borda, que se empleó para la medición de los ángulos. Dicho instrumento fue fabricado por Étienne Lenoir, considerado entonces el mejor constructor de aparatos científicos de Francia. El círculo de Borda permitía efectuar múltiples lecturas del mismo ángulo sin necesidad de moverlo. Para medir los ángulos entre los vértices geodésicos se procuraba hacerlo con la mejor visibilidad posible, y esto dependía en gran medida de las condiciones meteorológicas. En algunos casos, para mejorar la visión se utilizaban lámparas de aceite de ballena.



El círculo repetidor de Borda.

Es natural preguntarse por la precisión que se conseguía con esta técnica. Se midieron dos bases: una para los cálculos entre Lieusaint y Melun, y otra de comprobación entre Vernet y Salses, al sur de Francia, cerca de la playa. La base de Melun media 6.075,90 toesas (11,8 km); la

de Vernet, 6.006,249 toesas (11,7 km). El cálculo de la base de Vernet a partir de la de Melun, siguiendo una cadena de 53 triángulos a lo largo de unos 640 km, daba 6.006,089 toesas; tan sólo un error de 0,16 toesas, es decir, 30 cm.

La aventura de la medición del arco Dunkerque-Barcelona

Una primera expedición

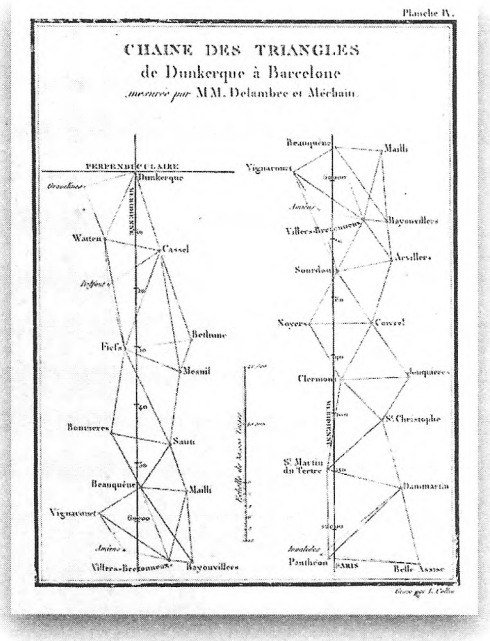
La primera expedición, la más conocida (1792-1799), fue encomendada a los astrónomos Jean-Baptiste Delambre y Pierre Méchain, discípulos ambos de Joseph Jérôme Lalande. Delambre y Méchain iniciaron sus viajes en junio de 1792. Delambre, el encargado del sector norte del meridiano, llevaba como ayudantes a Michel Lefrançais, sobrino de Lalande y aprendiz de astrónomo, Benjamin Bellet, constructor de instrumentos —aprendiz de Étienne Lenoir— y un criado llamado Michael.

JEAN-BAPTISTE JOSEPH DELAMBRE (AMIENS, 1749 - PARÍS, 1822)

Fue uno de los diez primeros miembros de la Comisión del metro, creada el día 7 del mes de Messidor del año III (del calendario revolucionario; en el calendario actual, el 25 de junio de 1795), junto con Lagrange, Laplace, Lalande, Méchain, Cassini, Bougainville, Borda, Buache et Caroché. A la muerte de Méchain, en 1804, fue nombrado director del Observatorio de París, cargo que ocupó hasta que falleció, en 1822. En 1809 recibió un premio de la Académie des Sciences destinado a recompensar la mejor publicación científica de la década por su memoria sobre el meridiano. Publicó varias historias de la astronomía, en las que se interesaba especialmente por el análisis de los cálculos matemáticos: *Historia de la astronomía* (1817); *Historia de la astronomía en la Edad Media* (1819); *Historia moderna de la astronomía*, en 6 volúmenes (1821). El último volumen, *Historia de la astronomía en el siglo XVIII*, fue publicado por su discípulo Claude Mathieu después de la muerte de Delambre.

Méchain, un astrónomo muy escrupuloso, se encargó del sector meridional del meridiano (Carcasona-Pirineo-Camprodón, Puigsacalm, Matagalls y Barcelona). Con él iban sus ayudantes, Jean Joseph Tranchot, ingeniero y cartógrafo militar, Esteveny, constructor de instrumentos —formado con Lenoir—, y un criado llamado Lebrun. A principios de julio de 1792 llegaban al Pirineo, y en octubre estaban en Barcelona. En el primer volumen de la memoria, escrita unos años después por Delambre, se representa toda la cadena de triangulación.

A las dificultades propias de la operación geodésica se deben añadir otras de diversa índole. El 1 de mayo de 1793, Méchain se marchó de excursión con el científico catalán Francesc Salvà para visitar una instalación de bombeo en las afueras de Barcelona. Un desafortunado accidente provocó que la palanca, de casi dos metros y medio, golpeara el pecho de Méchain y lo tirara contra la pared; éste cayó a tierra, quedando aparentemente muerto. Por la noche avisaron al doctor Francesc Santponç, «el mejor cirujano de la ciudad». Méchain tenía el lado derecho del pecho hundido, las costillas aplastadas y la clavícula rota en varios puntos; aun así, lentamente —seis meses más tarde el brazo derecho todavía le colgaba inerte—, pudo recuperarse.



Un fragmento de la triangulación desde Dunkerque a Rodez, según la memoria de Méchain y Delambre, que incluye la ciudad de París.

PIERRE FRANÇOIS ANDRÉ MÉCHAIN (1744-1804)

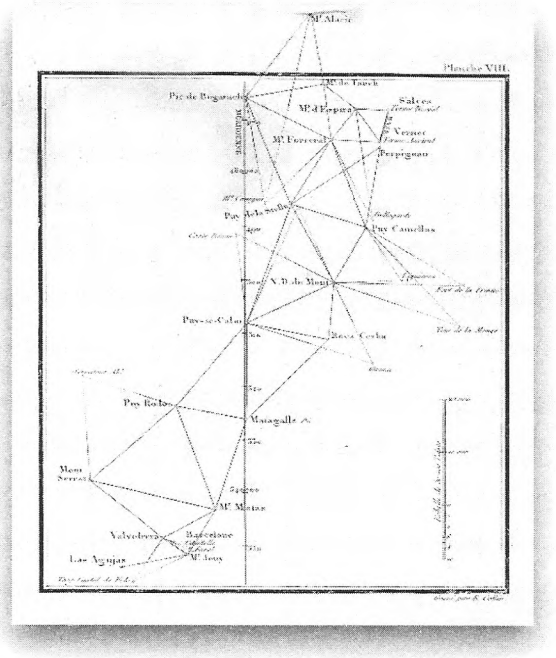
Empezó estudios de matemáticas en París, pero, por problemas económicos, tuvo que abandonarlos y ofrecerse como tutor. Desde muy temprano se dedicó a investigar en el campo de la astronomía y la geografía. Dedicó su vida a realizar observaciones astronómicas detalladas. Este escrupuloso trabajo fue el que le llevó a ser elegido responsable de la medición de la parte sur del meridiano, de Rodez a Barcelona. Entre 1771 y 1774 trabajó con Charles Messier (1730-1817) en la observación y catalogación de objetos celestes. Messier buscaba cometas y, con tal de diferenciarlos de otros cuerpos celestes, empezó la elaboración de una larga lista de objetos, algunos de los cuales fueron descubiertos por Méchain. La lista comenzó con una cuarentena de objetos y concluyó con unos cien, gracias también a la colaboración de otros astrónomos. Esta lista se conoce actualmente como lista de Messier, y hace las delicias de amantes y aficionados a la astronomía, ya que los objetos que describe son visibles con prismáticos o con pequeños telescopios. Sólo recoge, como es natural, objetos visibles en el hemisferio Norte, desde el Polo hasta una latitud aproximada de 35°.

En 1793, la ejecución de Luis XVI provocó una guerra entre Francia y España que también retardó las operaciones.

Una vez acabada la triangulación en territorio español, Méchain pretendió volver a Francia, pero las autoridades militares no se lo permitieron ni tampoco el acceso al castillo de Montjuïc, desde donde había hecho observaciones anteriores. Realizó nuevas observaciones desde la pensión donde se hospedaba, en la calle Escudellers de Barcelona, y detectó un posible error en la medida de 3,24" en las observaciones practicadas desde Montjuïc; este posible error le preocuparía hasta su muerte. Su retención duró desde junio hasta noviembre de 1794, y finalmente se le permitió regresar a Francia.

Al igual que Méchain, Delambre, en Francia, también tuvo momentos de dificultad. En general, los habitantes de los pueblos y ciudades sobre los que se extendía la red de triángulos no entendían qué se llevaban entre manos aquellos personajes

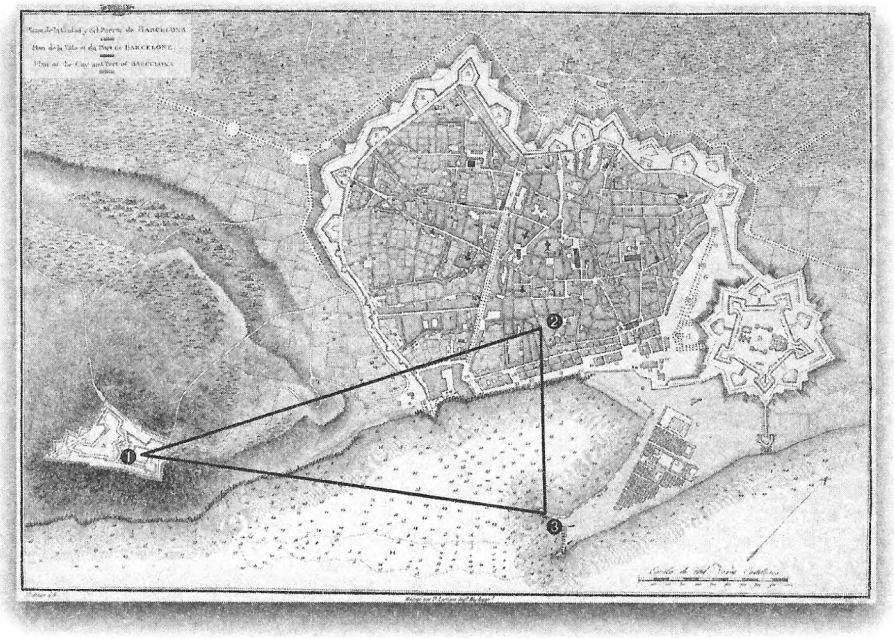
que a media noche hacían señales desde los campanarios o desde montañas que se vislumbraban a lo lejos. Los científicos lo hacían para evitar algunos errores de medición que se producían de día, pero los campesinos locales les tomaban por espías y a veces les destruían las señales o les amenazaban tirándoles piedras.



La triangulación en Cataluña, según la memoria de Méchain y Delambre.

Una segunda expedición

Hubo una segunda expedición (1803-1804) para prolongar la medición del meridiano hasta las islas Baleares. El 31 de agosto de 1802, el Bureau des Longitudes decidió alargar la medida del meridiano hasta las islas Baleares, en concreto hasta Formentera. ¿Cuáles fueron las razones que aconsejaron tomar esa decisión? En primer lugar, la idea de que cuanto mayor fuese la longitud del arco de meridiano, más precisa resultaría la medida. En segundo lugar, el alargamiento suponía centrar el arco de meridiano alrededor de los 45° y minimizar el error que se pudiese producir por el aplanamiento de la Tierra. Méchain, que por aquel entonces era director del Observatorio de París, insistió en participar y dirigir la expedición, tal vez obsesionado por el error de medición detectado en Barcelona.



La última triangulación de Méchain en Barcelona.
1. Torre del Homenaje del castillo de Montjuïc. 2. Antigua pensión Fontana de Oro (calle de Escudellers). 3. Torre del Reloj (puerto).

La torre del reloj del puerto de Barcelona, uno de los vértices de la última triangulación de Méchain.

La misión fue encargada, en efecto, a Méchain, que emprendió el que sería su segundo viaje a España. Llevaba como ayudantes al ingeniero naval Dezauche, a su antiguo alumno Jean-Baptiste Le Chevalier, que había estado un año en Madrid, y a su hijo Augustin, de 18 años. Méchain llegó a Barcelona el 5 de mayo de 1803. Allí tuvo la ayuda adicional de Enrile, capitán de la fragata denominada *La Prueba*, y también de José Chaix, vicedirector del Observatorio de Madrid. Después de largas esperas para conseguir las autorizaciones pertinentes para poder trasladarse a las islas, decidió buscar nuevas estaciones en la costa al sur de Barcelona hasta la comarca de El Montsià, y durante el otoño fue triangulando desde Barcelona en diferentes lugares, como el Garraf o Montserrat, entre otros. Midió cinco triángulos en la costa.

A principios de noviembre estaba de nuevo en Barcelona, y pudo conseguir finalmente un pasaporte, pero cuando la fragata que lo tenía que llevar a las islas llegó al puerto de Barcelona a recoger a Méchain y a Enrile, su capitán, la mitad de la tripulación tenía la fiebre amarilla y el barco tuvo que quedarse en cuarentena. Enrile decidió volver a su barco, a pesar de estar contaminado. Por otro lado, Le Chevalier marchó hacia el sur de España (en busca de antigüedades clásicas) y Chaix se fue a Madrid. Las causas fueron tanto el temor a la epidemia de fiebre amarilla como el hecho de que Méchain no los dejara ni tan sólo mirar por el círculo repetidor.

Fue entonces cuando, para sustituir a sus ayudantes, Méchain reclutó la ayuda de un monje trinitario llamado Agustí Canelles, que se presentaba como astrónomo y estaba muy seguro de sus conocimientos y ansioso de figurar en una expedición histórica. Canelles fue designado por el Gobierno español para colaborar oficialmente con el astrónomo francés.

El 8 de enero de 1804, Méchain pudo zarpar hacia Ibiza. Estuvo en esta isla y en Mallorca, y después zarpó hacia la Península. Durante el mes de agosto de 1804 efectuó medidas en El Puig, una montaña del desierto de Las Palmas, próxima a Benicasim, en Castellón de la Plana, donde tuvo que permanecer más tiempo de la cuenta porque el monje Canelles cometió involuntariamente unos errores en los registros. El error de cálculo tuvo como consecuencia la colocación errónea de una señal, y esto costó casi dos semanas de trabajo adicional. Todo hace pensar que fue precisamente en El Puig donde Méchain contrajo la «fiebre terciana» (malaria), que provocó que, poco después, el 20 de septiembre, muriera en Castellón. También Canelles enfermó aquellos días (de unas «fiebres semitercianes») y lo tuvieron que sangrar tres veces.

Vista de Benicasim desde El Puig de Castellón.

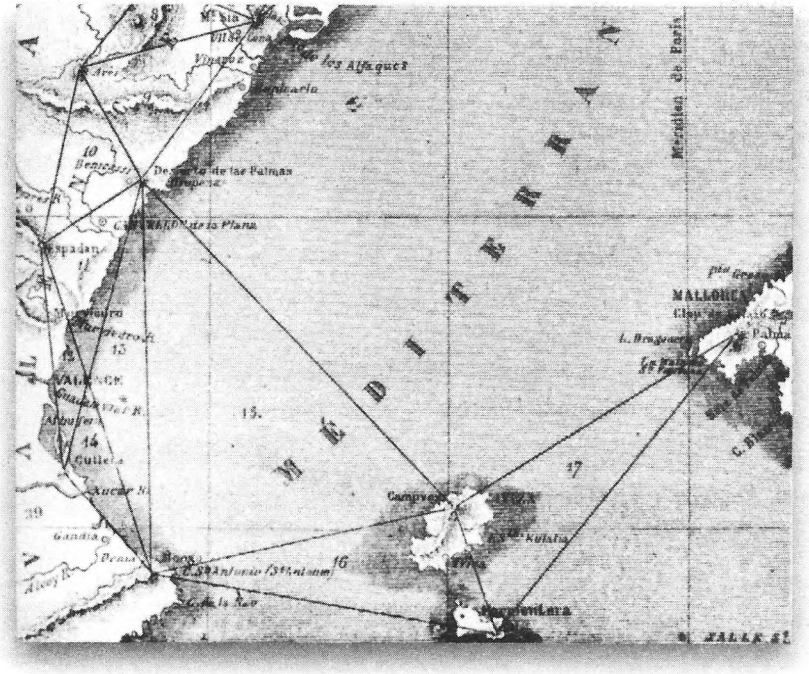
Una tercera expedición

Finalmente hubo una tercera expedición (1806-1808) en la que participaron Biot y Aragó. En 1805, el matemático Laplace planteó al Bureau des Longitudes continuar las medidas del proyecto de prolongación del meridiano hasta las islas Baleares. El astrónomo Jean Baptiste Biot y el joven Francesc Aragó (nacido en Estagell, un pueblo cercano a Perpiñán), que era secretario del Observatorio de París, fueron comisionados para proseguir los trabajos de triangulación iniciados por Méchain e inacabados a causa de su muerte prematura.

En septiembre de 1806, Biot y Aragó iniciaron su viaje hacia el Reino de Valencia. José Chaix (astrónomo y matemático valenciano que llegó a ser subdirector del Observatorio de Madrid), que ya había formado parte de la anterior misión de Méchain, y José Rodríguez González (matemático gallego, profesor de Santiago, que estaba ampliando sus estudios en París) fueron designados por el Gobierno español para acompañarlos y tomar parte en las operaciones geodésicas. También contaron con la colaboración del teniente de navío Manel Vacaro, que comandaba el barco puesto a disposición de los científicos por el Gobierno español.

Mientras estaban haciendo observaciones en el desierto de las Palmas, justamente donde había enfermado Méchain, Jean Baptiste Biot se sintió también enfermo y pidió ayuda a Antoni Martí Franquès, científico de Altafulla (Tarragona) que le acogió en su casa hasta que se recuperó. En enero de 1808 regresó a Francia con el resultado de 11 triángulos acabados; Aragó tomó el relevo.

El último proyecto de Aragó consistía en la ejecución de una triangulación interna entre Mallorca y las Pitiusas, mediante la cual quedarían unidas Mallorca, Ibiza y Formentera. El enlace de estas tres islas permitiría medir un arco de meridiano, de tres grados de longitud, que contribuiría a completar los conocimientos que se tenían sobre la forma de la Tierra. En abril de 1808 Aragó llegó a Mallorca y, en mayo, se instaló en la Mola de s'Esclop para realizar las últimas mediciones.

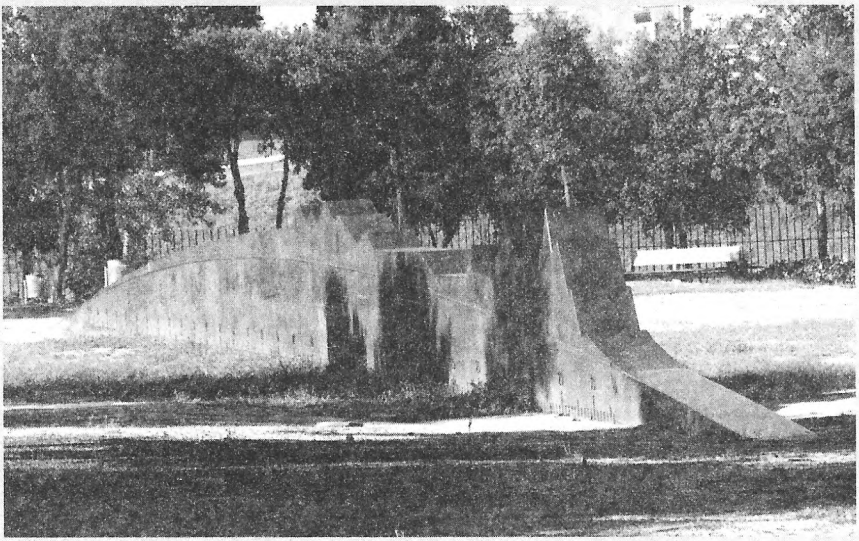


La triangulación con las islas Baleares.

El 27 de mayo, coincidiendo con las últimas observaciones de Aragó, llegaron a Mallorca las noticias del inicio de la Guerra de la Independencia, y esto le complicó las cosas, pero su espíritu aventurero y el hecho de hablar catalán lo salvaron, como narra en su autobiografía *Historia de mi juventud*. Las noticias sobre el inicio de la guerra hicieron pensar a algunas personas de la isla que aquel francés que hacía

EL MONUMENTO DE LA PLAZA DE LAS GLORIAS DE BARCELONA

Con motivo de la celebración del 200 aniversario de la medición del arco de meridiano Dunkerque-Barcelona, se realizaron diferentes actos y manifestaciones culturales. Así, por ejemplo, en la plaza de las Glòries de la ciudad de Barcelona se erigió un monumento, donación de la ciudad de Dunkerque, hermanada con ella a través de la medición del arco de meridiano. Dicho monumento consiste en un muro de acero de 50 m de longitud y 2 m de altura en su punto más elevado. Reproduce a escala la línea imaginaria que une las dos ciudades. En cada uno de los extremos, dos placas de mármol verde representan el mar Mediterráneo y el océano Atlántico, respectivamente. Tres párrafos, en la misma escultura, explican el motivo de la obra en tres idiomas: catalán, castellano y francés.



Monumento conmemorativo de la medición del arco de meridiano entre Dunkerque y Barcelona.

señales por la noche desde la cima de s'Esclop era un espía y decidieron capturarlo y entregarlo a las autoridades. Por suerte para Aragó, un marinero del barco se enteró, pudo avisarlo y darle ropa de marinero para pasar desapercibido en su bajada de la montaña, donde se cruzó con un grupo armado que subía a detenerlo. Al llegar al barco, José Rodríguez González, uno de sus acompañantes designado por el Gobierno español, pidió ayuda al Capitán General y éste lo internó hasta nuevo

aviso en el castillo de Bellver. Unos días después, Aragó escapó del castillo, se dirigió a Argel y desde allí consiguió partir en barco hacia Marsella. Durante la travesía, el barco fue retenido y él, conducido al puerto de Palamós; desde allí pasó un tiempo detenido en Roses. Finalmente, el 30 de agosto de 1809, Aragó presentó a la Académie des Sciences la memoria científica que completaba los cálculos de todas las mediciones realizadas.

¿El metro se impone?

El nacimiento del metro

Los trabajos geodésicos, astronómicos y matemáticos que se desarrollaron bajo la dirección de Delambre y Méchain condujeron a determinar la longitud del metro como patrón universal de medida. Mientras se realizaban las primeras mediciones de ambos, más concretamente el 1 de agosto de 1793, se estableció la estructura del Sistema Métrico Decimal sobre la base 10 y se adoptó un metro provisional a partir de las mediciones hechas anteriormente.

El 22 de junio de 1799 se presentó a la Asamblea la barra de platino hecha por Lenoir con el metro definitivo (que sustituía al metro provisional) y también el patrón que representaba el kilogramo, como la masa de un decímetro cúbico de agua destilada a una atmósfera de presión y a 3,98 °C de temperatura. Los patrones se depositaron en los archivos de la República.

En el acta de la sesión del Bureau des Longitudes, del 30 de agosto de 1809, donde Aragó presentó la memoria de las medidas y cálculos que prolongaron el meridiano desde Barcelona hasta Formentera, se recoge la comparación entre los distintos resultados. Si se definiera el metro con los nuevos datos, éste diferiría en menos de 5 diezmilésimas de milímetro del metro definitivo aprobado en 1799, que se había concretado en la barra de platino. El pequeño error no hizo cambiar la barra de platino, que continuó siendo el patrón del metro, hasta que 90 años después de su fabricación fue sustituida por otra barra, ahora de platino e iridio (90% y 10%), material más resistente a la dilatación y en forma de «X», depositado en el pabellón de Sèvres, cerca de París, sede del Bureau.

Con el metro había nacido el Sistema Métrico Decimal, pero la adopción de estas unidades por parte de los diferentes países fue ardua y difícil. Bélgica y Holanda lo adoptaron en el año 1816; España y Grecia, en 1849; Portugal, en 1852; Alemania, en 1870; Austria, en 1873, y Suiza, en 1875.

Dos sistemas que conviven actualmente

Casi todos los países europeos fueron adoptando poco a poco el nuevo sistema métrico, pero no fue el caso del Reino Unido ni de Estados Unidos, que han conservado su propio sistema.

En los viajes en avión se nos informa, a través de unas pequeñas pantallas, de la trayectoria y la altitud de vuelo. La altitud se da en pies y, si tenemos suerte, también aparece en kilómetros. La cantidad correspondiente a los pies (*feet* en inglés) siempre es exacta, pero, en cambio, no lo es en kilómetros. ¿Por qué caprichosa razón el comandante nos hace volar a una altura tan particular? La respuesta es bien simple: todos los aparatos del avión miden en el sistema anglosajón, pies para la altura y millas por hora para la velocidad.

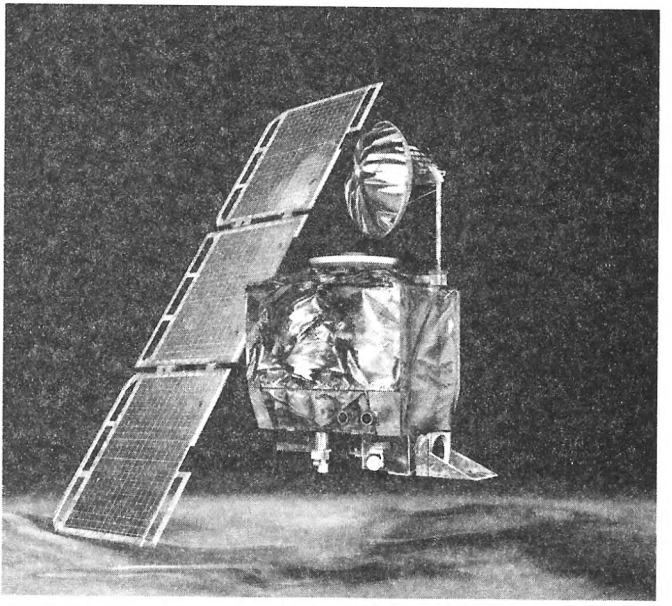
Si se viaja en coche por el Reino Unido la situación es similar: en las autopistas, la velocidad máxima es de 70, y en carretera, de 50. Si, además, nuestro vehículo procede de España o del resto de la Europa continental, llevará el volante a la izquierda, lo que no es nada práctico para conducir por la izquierda y hacer adelantamientos. La cuestión de las velocidades la empezamos a entender cuando nos apercibimos que el 70 corresponde a millas por hora, y si efectuamos el cálculo (1 milla = 1.609,34 m), resultará una velocidad de 112,6538 km/h, bastante más parecida a la limitación habitual de 120 km/h. El 50, por su parte, se convierte en 80,467 km/h.

Un error de medida fatal

El día 23 de septiembre de 1999, la nave *Mars Climate Orbiter* de la NASA debía aterrizar en el planeta Marte después de un viaje de 286 días. Pero la NASA la perdió, «simplemente» por la falta de unificación de las unidades de medidas empleadas. La *Mars Climate Orbiter* fue destruida debido a un error de navegación, consistente en que el equipo de control en la Tierra hacía uso del Sistema Anglosajón de Unidades para calcular los parámetros de inserción y envió en dicho sistema los datos a la nave, que realizaba los cálculos con el Sistema Métrico Decimal.

Veamos en números qué pasó. La distancia mínima a la que podía acercarse la nave para iniciar la maniobra de aterrizaje eran 53 millas; de lo contrario podía fragmentarse debido a las altas temperaturas. Los técnicos llegaron a las 59,54 millas, por lo que parecía que todo estaba correcto. Pero en realidad los 59,54 para la nave eran kilómetros, y aquí se originó el desastre: ¡59,54 es aparentemente más grande

que 53, pero resulta que son 59,54 km, es decir, 37 millas, que está bastante por debajo del límite de las 53 millas que debía respetarse para evitar la desintegración de la nave!



Recreación de la Mars Climate Orbiter *aterrizando en Marte el 23 de septiembre de 1999. La operación nunca llegó a completarse porque en la misión se emplearon dos sistemas de medida, lo que tuvo como consecuencia la destrucción de la sonda (fuente: NASA).*

Capítulo 6

Medir hoy en día

El antiguo Sistema Métrico Decimal (SMD) dio paso, en la segunda mitad del siglo XX, al Sistema Internacional de Unidades (SI). El afán por medir la Tierra, encontrar su figura y poder situar y localizar cualquier punto sobre la misma sentó las bases de la moderna geodesia y los sistemas de medición GPS. El interés por elaborar calendarios y disponer de sistemas para medir el tiempo ha llevado a establecer convenios sobre la medida del mismo. La medida de los cielos y los primeros modelos matemáticos del cosmos de los científicos griegos evolucionaron hacia las modernas teorías del universo, en las que las enormes distancias interestelares han obligado a definir nuevas medidas astronómicas. Contar y medir son dos actividades relacionadas que conviven en el mundo físico y en el modelo matemático, pero sólo en este último ámbito podemos hablar de medida exacta asociada al continuo y a los números reales ($\mathbb{R}$). Mediante las matemáticas podemos rectificar, cuadrar y cubicar acciones que culminan con el cálculo diferencial, que estableció las bases para que pudiese desarrollarse la teoría de la medida.

Diversidad en los métodos de medición

«Hace algún tiempo recibí la llamada de un colega acerca de un estudiante. Mi colega había puntuado con un cero la respuesta de un problema de física, pero el estudiante, quejoso, afirmaba que su respuesta era correcta. Ambos acordaron pedir el arbitraje de alguien imparcial y yo fui la persona elegida. Leí la pregunta del examen: "Mostrar cómo es posible determinar la altura de un edificio con la ayuda de un barómetro", y la respuesta del estudiante: "Se lleva el barómetro a lo alto del edificio, se le ata una cuerda muy larga, se descuelga hasta la base del edificio y se le hace una marca. Se sube y se mide la longitud de la cuerda. El resultado es la altura del edificio".

El estudiante tenía razón porque había respondido a la pregunta correctamente. Pero no se le podía conceder la máxima puntuación, pues en ese caso obtendría su graduación en Física sin haber mostrado sus conocimien-

tos en esa disciplina. Sugerí que se le diera otra oportunidad. Debía volver a responder a la misma pregunta, pero le advertí que en la respuesta debía demostrar sus conocimientos de física. Transcurrieron unos minutos y el estudiante no había escrito nada. Le pregunté si deseaba abandonar, y me contestó que tenía muchas respuestas para el problema y que estaba buscando la mejor.

Al cabo del tiempo contestó: "Se sitúa el barómetro a la altura de la azotea. Se deja caer al suelo midiendo el tiempo de caída con un cronómetro. Después, aplicando la fórmula

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

se obtiene la altura del edificio". Le pregunté a mi colega si se daba por vencido. Él respondió que sí y le puso la nota más alta. Tras abandonar el despacho, me reencontré con el estudiante y le pedí que me contara sus otras respuestas. "Bueno —respondió—, hay muchas maneras de calcular la altura de un edificio con un barómetro; por ejemplo, se lleva el barómetro fuera cuando el día es soleado y se mide la altura del barómetro, la longitud de su sombra y la longitud de la sombra del edificio. Si aplicamos una simple proporción, obtendremos también la altura del edificio".

"Bien —le dije—, ¿y las otras maneras?". Me dio diferentes explicaciones, todas válidas y coherentes, pero ninguna de ellas encajaba con la que mi colega y yo mismo esperábamos como respuesta. Finalmente, concluyó: "Existen aún otras maneras de resolver el problema. Probablemente, la mejor es ir al sótano, llamar a la puerta de la casa del conserje y decirle: 'Aquí tengo para usted un soberbio barómetro si usted me dice cuál es la altura del edificio'. Le pregunté al estudiante si conocía la respuesta que yo esperaba [la diferencia de presión marcada por un barómetro en dos lugares proporciona la diferencia de altura entre ambos]. Admitió que la sabía, pero que estaba harto de que los profesores de la Universidad tratasen de enseñarle cómo pensar.»

Esta leyenda académica se transformó con el tiempo en una anécdota supuestamente real que se atribuyó al físico danés Niels Bohr (1885-1962) cuando era estudiante, y el árbitro de la cuestión se quiso identificar con Ernest Rutherford (1871-1937). De hecho, esto no es así, y la historia proviene de un artículo publi-

cado inicialmente en 1958 en la revista *Reader's Digest* por el profesor de física de la Universidad de Washington Alexander Calandra (1911-2006), que estaba interesado en la enseñanza de la ciencia.

La leyenda académica nos muestra cómo la medida de una determinada magnitud física real puede llegar a obtenerse por métodos muy diversos. Pero aunque exista una diversidad de métodos, directos o indirectos, para efectuar una medición concreta, el resultado conviene que se exprese en unidades universalmente aceptadas, como deseaban los científicos del siglo XVIII.

Medir en el mundo físico

El Sistema Internacional de Unidades

En 1875 se estableció un acuerdo internacional denominado Convención del Metro con la intención de preservar los estándares del sistema métrico. Entre las organizaciones creadas por esta convención se encuentra la Conferencia General de Pesos y Medidas, que es el órgano de decisión de la misma. Su primera reunión tuvo lugar en 1889, y actualmente se reúne cada cuatro años. Más de cincuenta estados están adheridos al tratado de la Convención del Metro.

En 1960, y por convenio de 36 naciones, la Conferencia General de Pesos y Medidas adoptó el Sistema Internacional de Unidades (SI), que modernizaba el Sistema Métrico Decimal. Un sistema de unidades es un conjunto consistente de unidades de medida en el que cada magnitud tiene sólo una unidad asociada. El patrón de una determinada unidad debe cumplir tres condiciones:

— Inalterabilidad (que no varíe en el tiempo ni se altere por acción de la persona que efectúe la medición).
— Universalidad (que pueda utilizarse en cualquier lugar del mundo).
— Reproducibilidad (que tenga capacidad de ser reproducido fácilmente).

En el SI se definen siete magnitudes básicas. Todas las otras magnitudes físicas derivan de éstas y pueden expresarse mediante una combinación matemática de ellas. Cada magnitud lleva asociada su unidad. Las unidades básicas se corresponden con las magnitudes básicas, y las derivadas reproducen en sus unidades los mismos cálculos que contienen sus definiciones. La tabla siguiente contiene las magnitudes básicas del SI y las unidades con las que se expresan:

Magnitud física básica	Unidad básica	Año definición unidad	Símbolo
Longitud	Metro	1983	m
Masa	Kilogramo	1889 (1901)	kg
Tiempo	Segundo	1967-1968	s
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	1948	A
Temperatura	Kelvin	1967-1968	K
Cantidad de sustancia	Mol	1971	mol
Intensidad luminosa	Candela	1979	cd

DEFINICIONES DE LAS UNIDADES BÁSICAS DEL SI

— El **metro** (m) es la distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299.792.458 segundos.

— El **segundo** (s) es la duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del cesio-133.

— El **kilogramo** (kg) es la masa de un cilindro de aleación de platino-iridio depositado en el Bureau International des Poids et Mesures (Oficina Internacional de Pesos y Medidas) ubicada en Sèvres, al suroeste de París.

— El **amperio** o **ampere** (A) es la intensidad de una corriente eléctrica constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro, en el vacío, produciría una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newtons por metro de longitud.

— El **kelvin** (K) es la fracción 1/273,16 de la temperatura del punto triple del agua.

— El **mol** (mol) es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kg de carbono-12 (aprox. $6{,}02214179 \cdot 10^{23}$ unidades elementales —átomos, moléculas, iones, electrones, radicales u otras partículas—).

— La **candela** (cd) es la intensidad luminosa en una dirección dada, de una fuente de luz que emite radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ hercios y que tiene una intensidad de radiación de 1/683 vatios por estereorradián en la misma dirección.

Geodesia, cronometría y astrometría

Ayudados por la moderna tecnología, la geodesia, la cronometría y la astrometría actuales utilizan sofisticados métodos de medición. Sus resultados, en algunos casos, tienen repercusiones en la vida cotidiana, por ejemplo, en el GPS de los coches o

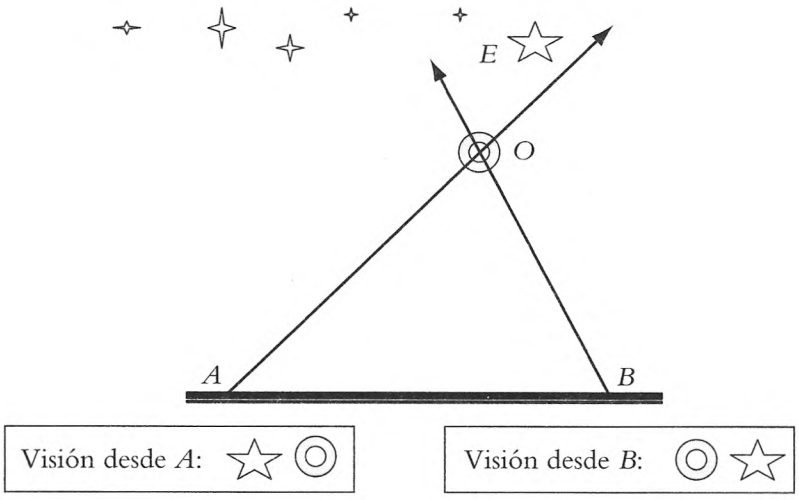
en los aparatos de telefonía móvil. El Sistema de Posicionamiento Global (más conocido por las siglas de su nombre en inglés, *Global Positioning System*), desarrollado por Estados Unidos, permite determinar la longitud, la latitud y la altitud de un objeto (persona, vehículo, embarcación...) con una precisión incluso de centímetros. Ello es posible gracias a una red de 24 satélites (y tres más de respaldo) que orbitan alrededor de la Tierra a unos 20.200 km de altitud, cubriendo toda la superficie terrestre gracias a una programación sincronizada de sus trayectorias. El GPS, restringido hace unos años al campo militar y a la navegación marítima y aérea, se ha extendido a la sociedad civil, y en la década de 1980 se utilizó para fines geodésicos. Entre sus aplicaciones hay algunas tan cruciales como la seguridad ferroviaria, la conducción de automóviles o el control del tráfico aéreo.

Los satélites de la denominada constelación GPS se distribuyen en seis planos orbitales, cada uno con cuatro satélites principales. Esta disposición de 24 satélites asegura que haya siempre, al menos, cuatro satélites visibles desde prácticamente cualquier punto del planeta. Además de información sobre el posicionamiento y la navegación, el GPS también proporciona la cronometría y permite determinar la hora con una aproximación de cien mil millonésimas de segundo. Cada uno de los satélites involucrados dispone de múltiples relojes atómicos que, mediante datos horarios muy precisos, contribuyen a las señales del GPS que el receptor descodifica sincronizándose con los relojes atómicos.

La idea básica para determinar la posición consiste en la medición de distancias desde los satélites al receptor a través de la medición del tiempo. El receptor localiza automáticamente un mínimo de tres satélites, de los que recibe unas señales que muestran la posición y el reloj de cada uno de ellos. El receptor sincroniza el reloj del GPS y calcula el retraso de dichas señales, con lo que conoce la distancia a cada satélite. La triangulación (trilateración inversa) ahora se basa no tanto en averiguar ángulos respecto de puntos conocidos sino en determinar la distancia de cada satélite al receptor, lo que permite a éste determinar su posición respecto de ellos (posición relativa). Sabiendo las coordenadas de cada uno por la señal que emiten, se pueden hallar las coordenadas reales (latitud y longitud) del receptor (su posición absoluta). Si se quiere averiguar la altitud se necesita utilizar la señal de un cuarto satélite.

Los satélites artificiales también son imprescindibles en astrometría para medir y estudiar la posición y la distancia de los astros con precisión. Satélites como el *Hipparcos* (acrónimo de *High Precision Parallax Collecting Satellite*), que la Agencia Espacial Europea lanzó en 1989, han permitido medir la paralaje y los movimientos propios de millones de estrellas. La paralaje, que podemos definir como el ángulo

formado por las direcciones de dos visuales dirigidas al mismo objeto (una estrella, por ejemplo) desde dos puntos *A* y *B* lo suficientemente alejados entre sí y no alineados con él, fue muy difícil de detectar históricamente dadas las enormes distancias a las que se encuentran las estrellas, incluso las más cercanas. Dichas distancias hacen que las visuales sean prácticamente paralelas. Hasta 1838 no se pudo determinar la paralaje de una estrella, la 61 del Cisne, de la mano del astrónomo y matemático Friederich Wilhelm Bessel (1784-1846).



Un objeto O *se observará a la izquierda o a la derecha de una estrella* E *del fondo estelar que se tome como referencia.*

La estrella más cercana a la Tierra es Próxima Centauri, y tiene una paralaje de 0,765"; esto significa que las paralajes estelares están siempre por debajo del segundo de arco. A mayor distancia, menor paralaje, de manera que los errores se hacen cada vez más significativos. En estos casos se utiliza la medición del espectro de la radiación electromagnética que emite el objeto astronómico estudiado; ello permite obtener la distancia a la que fue emitida y el desplazamiento hasta llegar a nosotros, datos a partir de los cuales se halla la distancia a la que se encuentra el objeto. Trabajar con distancias tan enormes ha llevado a utilizar unidades especiales mucho mayores que el metro para las medidas astronómicas.

La *unidad astronómica* (ua) es una unidad de longitud que equivale aproximadamente a la distancia media entre la Tierra y el Sol; se define como 149.597.870 km, y se usa para mediciones dentro del Sistema Solar. El *pársec* o *parsec* (pc) se define

ALGUNAS DISTANCIAS ASTRONÓMICAS

La *unidad astronómica*, el *año luz* y el *pársec* son las unidades que permiten hablar cómodamente de distancias dentro del Sistema Solar, la Vía Láctea o el espacio intergaláctico. Redondeando, tenemos las siguientes equivalencias: 1 pársec=3,26 años luz=206.265 ua= =30.875 billones de kilómetros. La distancia media entre la Tierra y el Sol es de unos 150 millones de kilómetros, aproximadamente la unidad astronómica (1 ua). La luz que nos llega del Sol tarda 8,32 minutos en llegar a la Tierra; por eso decimos que la Tierra se encuentra a 8,32 minutos luz de distancia al Sol.

Algunas distancias al Sol:

Cuerpo celeste	Distancia aproximada
Venus	Menor que 0,68 ua
Tierra	1 ua = 8,32 minutos luz
Júpiter	Más de 5,2 ua
Plutón	39,5 ua
Centro de la Via Láctea	8.500 pc ≅ 30.000 años luz ≅ ≅ 1.753 millones de ua

Algunas distancias a la Tierra:

Cuerpo celeste	Distancia	Característica particular
Luna	0,0026 ua	Único satélite natural de la Tierra
Próxima Centauri	4,2 años luz = 270.000 ua	La estrella más cercana
Estrella Sirio	8,6 años luz = 540.000 ua	Su primera visión en el horizonte antes del amanecer, después de un largo período de invisibilidad, marcaba el inicio del calendario del antiguo Egipto
Galaxia de Andrómeda (M31)	2,56 millones de años luz = = 775 kpc	Objeto visible a simple vista más alejado de la Tierra

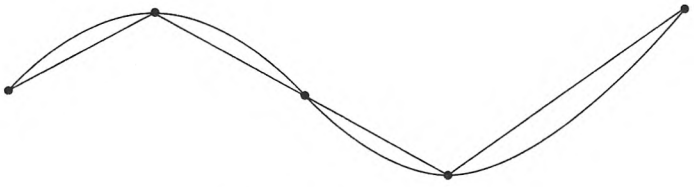
como la distancia desde la que se vería una unidad astronómica bajo un ángulo de un segundo (1"). El *año luz* (distancia recorrida por la luz en un año) se define como la distancia que recorrería un fotón en un año juliano (365,25 días de 86.400 segundos) a la velocidad de la luz en el vacío (299.792,458 km/s), a una distancia infinita de cualquier campo gravitacional o campo magnético.

La medición en el mundo físico se sirve de los números racionales y conduce a un valor aproximado del resultado. En el modelo matemático, donde se mide con números reales, la formalización del concepto de medir ha dado lugar a la teoría de la medida. Rectificar, cuadrar y cubicar tuvieron un papel destacado en este asunto.

Medir en el modelo matemático

Rectificar

La palabra rectificar (del latín *rectificāre*; de *rectus*, «recto,» y *facĕre*, «hacer») tiene diez entradas en el diccionario de la Real Academia Española, la séptima de las cuales corresponde a la geometría: «Hallar una recta cuya longitud sea igual a la de una curva dada». Una interpretación gráfica, que da lugar a un método aproximado de cálculo, podría ser: se divide la curva en cuerdas lo más pequeñas posible, una a continuación de la otra, y finalmente se suma la longitud de todas ellas.



División de la curva en cuerdas.

Este método recuerda al que un profesor utilizaba con sus alumnos de secundaria para medir la longitud de una costa marítima. Él explicaba: «Para realizar la medición es necesario dotarse de un mapa a escala de la misma, de un hilo lo suficientemente largo y de una regla graduada. Se humedece el hilo, para darle un poco de flexibilidad, y se contornea toda la costa con el hilo humedecido. Una vez recubierta toda la costa con el hilo, sólo hace falta extenderlo sobre la regla y medir su longitud. Finalmente, la escala del mapa proporciona los datos para realizar la conversión y obtener la medida buscada».

Desde la Antigüedad, una de las rectificaciones más célebres fue la de la circunferencia. En la antigua matemática egipcia se estableció una regla correcta para hallar la circunferencia de un círculo, según la cual la razón del área del círculo a su circunferencia es la misma que la razón del área del cuadrado circunscrito a su perímetro. Esta observación es una relación geométrica precisa ($r/2$, siendo r el radio del círculo), mientras que el valor numérico de π que utilizaban era sólo una aproximación (3,16 o 3 y 1/6).

La rectificación, la cuadratura y el cubicaje están también presentes en el *Jiuzhang suanshu* o *Los nueve capítulos sobre los procedimientos matemáticos,* texto clásico de la matemática china antigua compilado en el siglo I. En el primero de los nueve capítulos, titulado *Campos rectangulares*, se calcula el número π a través de un proceso de exhausción: se inscribe un hexágono en la circunferencia y se compara la longitud de la misma con el perímetro del polígono; así se obtiene $\pi = 3$. Continuando el proceso con polígonos de 12, 24, 48 y 96 lados se llega a conseguir $\pi = 3{,}1410240$.

En la matemática de la antigua India, la rectificación también contempla el cálculo de la longitud de la circunferencia. Aryabhata, en el capítulo II de su obra

UN CONEJO ATRAVESANDO EL MERIDIANO

He aquí un problema curioso sobre la circunferencia y su radio, por lo que tiene de aparentemente poco previsible y que además viene a cuento con nuestra historia del meridiano. Recordemos que, aproximadamente, un meridiano mide 40.000 km. Si imaginamos la Tierra totalmente esférica, una cuerda que diese la vuelta completa a la Tierra mediría esos 40.000 km. Si ahora alargamos 1 metro la cuerda que circunda la Tierra, ¿conseguiríamos hacer pasar por debajo de ella un conejo? La respuesta, a pesar de que 1 m pueda parecer muy poco en relación a los 40.000 km, es afirmativa. Pero lo más sorprendente es que el incremento del radio de la nueva circunferencia es siempre el mismo si se alarga 1 m la longitud de la circunferencia, sea cual a sea el radio inicial. Unos pequeños cálculos nos permiten confirmar la respuesta:

Sea r_1 el radio inicial y la longitud de la circunferencia $L_1 = 2\pi r_1$, al alargar 1 m la longitud de la circunferencia, la nueva longitud de la circunferencia es $L_2 = 2\pi r_1 + 1$, esta nueva circunferencia tiene un radio $r_2 = \dfrac{2\pi r_1 + 1}{2\pi}$, es decir que $r_2 = r_1 + \dfrac{1}{2\pi}$, lo cual nos permite ver que sea cual sea el radio inicial, al alargar 1m la longitud de la circunferencia, la repercusión en el nuevo radio siempre es de $\dfrac{1}{2\pi}$m. Volviendo a nuestro problema inicial y haciendo la conversión a cm, $\dfrac{100}{2\pi}$cm $\approx 15{,}91549431$ cm y ¡por ahí podemos asegurar que pasa un conejo!

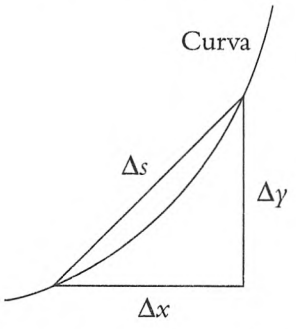
Aryabhatiya (ca. 500 d.C.), consiguió una aproximación de $\pi = 3{,}1416$. Calculó el perímetro de un polígono regular inscrito de 384 lados utilizando un método de exhausción similar al de los *Nueve capítulos* de la matemática china, pero con dos pasos más: empezó también con el hexágono y duplicó cada lado hasta llegar a 384 (6,12, 24, 48, 96, 192, 384).

Desde tiempos remotos y en diferentes culturas se ha intentado equiparar las curvas a segmentos rectos de igual longitud con métodos diversos. Incluso en el siglo XVII se planteaban concursos para determinar longitudes de arcos de curvas particulares, como las espirales de Arquímedes, la catenaria o la cicloide. Los cálculos estaban basados en métodos geométricos. A finales de dicho siglo, el paso definitivo lo dio el cálculo diferencial. En él se definió la longitud del arco mediante la fórmula

$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx,$$

donde $f(x)$ es la función de la que se desea hallar la longitud, $f'(x)$ es su derivada y ambas funciones deben ser continuas en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones, S es la longitud del arco delimitado por a y b.

La demostración de esta fórmula remite a la idea inicial de recubrir la curva con una cadena de pequeños segmentos rectilíneos y aplicar el teorema de Pitágoras sobre cada uno de ellos. Cada segmento tiene de longitud $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.



Arco de curva con el segmento Δs, hipotenusa del triángulo de catetos Δx e Δy.

Una aproximación a S vendría dada por la suma de todas las hipotenusas:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \text{ equivalente a: } S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

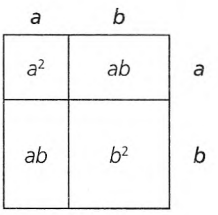
Cuanto más pequeños sean estos n segmentos, mejor será la aproximación buscada. En el límite, cada Δx_i tiende a cero, y aplicando la definición de integral entre a y b que proporciona el cálculo diferencial, se obtiene la relación enunciada:

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Cuadrar

El verbo cuadrar tiene dos acepciones con sentido matemático. La primera es geométrica: «Determinar o encontrar un cuadrado equivalente en superficie a una figura dada»; la segunda, relativa al cálculo: «Elevar un número o expresión algebraica a la segunda potencia, o sea multiplicarlo una vez por sí mismo». Las dos acepciones matemáticas de la palabra cuadrar están muy relacionadas: basta con interpretar que «elevar un número o expresión algebraica a la segunda potencia» indica los cálculos necesarios para obtener la medida del área de una superficie cuadrada, cuyo lado es el número o la expresión algebraica que se debe elevar a la segunda potencia.

En la figura siguiente se muestra cómo al elevar $(a+b)$ a la segunda potencia se obtiene el área del cuadrado de lado $a+b$:



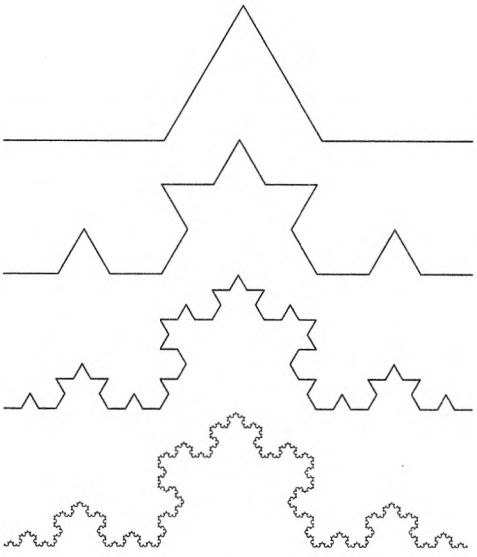
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

En este punto, conviene diferenciar entre área y superficie, puesto que son dos elementos matemáticos distintos, aunque en el uso vulgar se confundan. El concepto geométrico en sí mismo es la superficie, mientras que debería guardarse el término área para la magnitud métrica asociada al concepto geométrico, es decir, la medida de la extensión de una superficie expresada en las unidades correspondientes.

Dos términos que a veces también se confunden son perímetro y área. Del mismo modo que distinguíamos entre circunferencia y círculo, conviene diferenciar entre perímetro y área. Perímetro, del latín *perimĕtros*, y éste del griego περίμετρος,

es el contorno de una superficie o de una figura, mientras que el área es la medida de la superficie, o lo que es igual, la medida del interior del perímetro de la misma. En este contexto podemos preguntarnos: a partir de un perímetro fijo, por ejemplo una cuerda de longitud dada, ¿cómo es el rectángulo de mayor área que se puede delimitar con dicha cuerda? Y más general, ¿cómo es la figura de mayor área que se puede delimitar con dicha cuerda? La respuesta a la primera pregunta es el cuadrado, y a la segunda, el círculo. Estos resultados son conocidos desde épocas bien remotas y tienen múltiples aplicaciones en la vida diaria. En el capítulo 1 se mencionó el hecho de que casas tradicionales de culturas bien diversas (inuits, indias norteamericanas o africanas de Kenya) tuviesen planta circular para conseguir la máxima superficie con el mínimo de material.

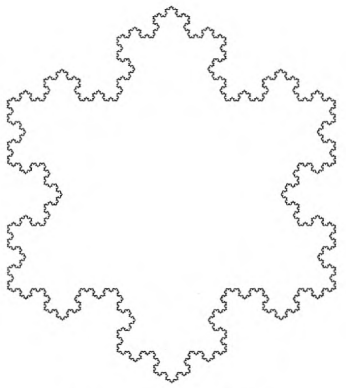
Un caso paradójico relativo a la relación entre área y perímetro es el que presentan determinadas figuras que, a pesar de tener un área finita, el perímetro que las rodea es infinito. En el campo de los fractales, por ejemplo, el *copo de nieve de Koch* es una curva continua pero no diferenciable en ningún punto que fue descrita por el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924) en 1904. A partir de cuatro segmentos de la misma longitud (por ejemplo de valor 1), conectados tal como aparecen en la primera figura de la serie siguiente (K_0) y mediante un proceso repetitivo, se construye la curva de Koch, paso previo a la construcción del copo.



Las cuatro primeras secuencias de la construcción de la curva de Koch. De arriba abajo: K_0, K_1, K_2 *y* K_3.

En una primera iteración, sustituimos cada uno de los 4 segmentos de K_0 por una copia de K_0 reducida por un factor 3, y llamamos K_1 al resultado, que se compone de $16 = 4^2$ segmentos. Después sustituimos cada uno de los 16 segmentos por una copia de K_0 reducida por un factor $9 = 3^2$, y llamamos K_2 al resultado, que se compone de $64 = 4^3$ segmentos, y así sucesivamente. La curva de Koch es el resultado de tomar el límite de la sucesión K_i cuando i tiende a infinito.

Para construir el copo de nieve de Koch tomamos 3 copias de K_0, formamos un triángulo equilátero y sustituimos cada uno de los tres lados del mismo por las curvas descritas. El objeto resultante, el copo de nieve de Koch, puede verse en la figura siguiente:



Copo de nieve de Koch.

El área del copo de Koch es finita, pero su perímetro es infinito. El área es finita porque el copo cabe dentro de un círculo de radio finito. En el ejemplo, donde los segmentos originales de K_0 tenían longitud 1, se puede probar que el copo cabe en un círculo de radio 3. Para demostrar que el perímetro del copo de Koch es infinito, es suficiente ver que la longitud de la curva de Koch es infinita. Para ello calcularemos la longitud $l(K_i)$ en cada uno de los pasos de su construcción. La longitud de K_0 es 4 (4 lados de longitud 1). Dado que K_1 se compone de $16 = 4^2$ segmentos de longitud 1/3, su longitud es:

$$l(K_1) = \frac{4^2}{3}.$$

Generalizando el proceso obtenemos:

$$l(K_n) = \frac{4^{n+1}}{3^n} = 4\left(\frac{4}{3}\right)^n, \text{ y así, } l(K) = \lim_{n\to\infty} l(K_n) = \infty.$$

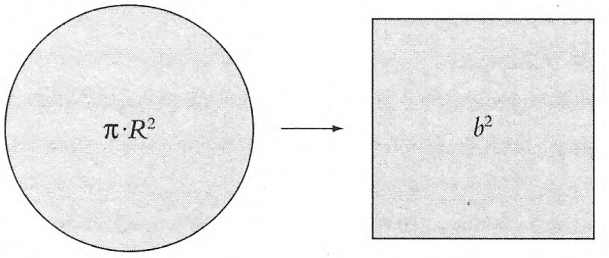
EL ÁREA MÁXIMA CON UNA PIEL DE TORO

Muto, el rey de Tiro, tenía dos hijos, Pigmalión y Elisa (nombre tirio de la reina Dido). A su muerte, el trono pasó a su hijo, el joven Pigmalión, que todavía era un niño. Instigada por este último, Elisa se casó con su tío Sicarbas, sacerdote de Heracles y segundo personaje importante del Estado, después del rey, ya que Pigmalión ambicionaba los tesoros que Sicarbas tenía escondidos. Un tiempo más tarde, Pigmalión intentó convencer a Elisa de que averiguara el escondite de los tesoros de su marido, lo cual ésta hizo, aunque no le dijo a su hermano el lugar verdadero. Pigmalión hizo asesinar a Sicarbas para apoderarse de sus riquezas, y su hermana tuvo tiempo de huir en barco, con los tesoros y acompañada por varios nobles tirios. Los fugitivos desembarcaron en el norte de África, donde fueron bien recibidos por los habitantes del lugar, con los que establecieron un trato: podían establecerse allí ocupando el terreno que abarcase una piel de toro. Los recién llegados cortaron la piel a tiras muy finas y las unieron, delimitando una extensión bastante considerable, donde asentaron la ciudad. Los habitantes autóctonos, fieles al trato, les concedieron la tierra así delimitada. La nueva ciudad recibió el nombre de Byrsa, que significa «monte de la piel de toro» en fenicio. Un tiempo después, Yarbas, rey de un pueblo vecino, quiso casarse con Dido y la amenazó con declararle la guerra si rehusaba. Dido rehusó y se suicidó. Sobre esta leyenda Virgilio construyó la Eneida, en la que vemos al héroe troyano Eneas arrojado por una tempestad a la costas de África y recogido por los habitantes de Cartago, la ciudad fundada por Dido. En el relato de Virgilio, Dido se enamora de Eneas y le implora que se quede; al rehusarla, Dido se suicida.

Eneas contando a Dido el saqueo de la ciudad de Troya.
Óleo del pintor francés Pierre-Narcisse Guérin.

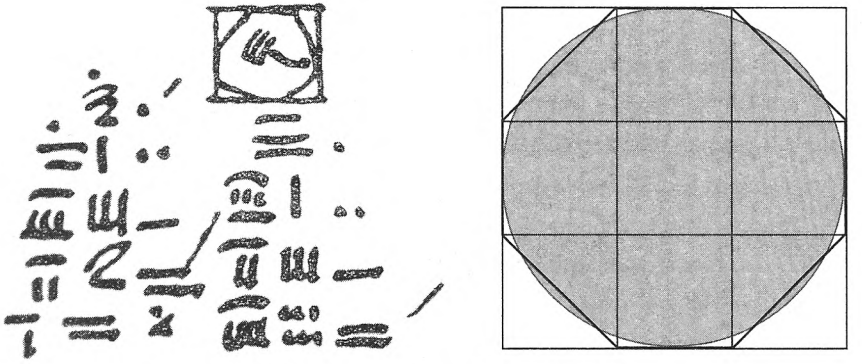
Si en la rectificación nos referimos a la medición de la costa marítima utilizando un hilo humedecido sobre un mapa, se puede seguir un proceso similar para evaluar el área de una superficie. En este caso se necesita una hoja de papel cuadriculado transparente. El cómputo del número de cuadros que cubre la superficie y la escala del plano permitirán calcular una buena aproximación del área que se desea medir.

Desde la Antigüedad, una de las cuadraturas más célebres es la cuadratura del círculo. Consiste en hallar —sólo con regla y compás— un cuadrado que posea un área igual a la de un círculo dado.



El área de un círculo debe convertirse en el área de un cuadrado.

El papiro de Ahmes (conocido también como papiro Rhind, porque fue adquirido por Henry Rhind en 1858 tras su descubrimiento en una edificación de Luxor) fue escrito por el escriba Ahmes hacia 1650 a.C., pero contiene escritos y conocimientos del periodo 2000 a.C.-1800 a.C. En el problema 48 se identifica la superficie de un círculo de 9 unidades de diámetro con la de un polígono de 8 lados inscrito en un cuadrado de lado 9 unidades, como muestra la figura:



Un fragmento del papiro Rhind
y el polígono de ocho lados analizado.

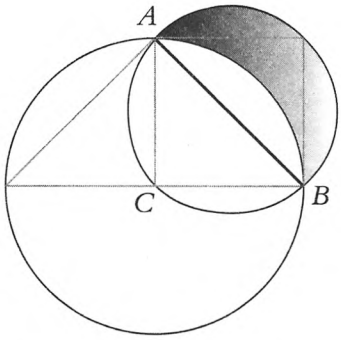
El área del círculo es: $\left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \pi$.

El área del polígono se aproxima a 64. En realidad es 63, ya que cada cuadrado tiene área $3 \times 3 = 9$, y el polígono está formado por 5 cuadrados enteros y 4 medios cuadrados, lo que hace un total de 7 cuadrados de área 9. Para los cálculos se toma como aproximación el área 64 porque es un cuadrado perfecto, 8^2.

Así, $\left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 64$, y efectuando cálculos y simplificaciones se obtiene:

$$\pi \approx \frac{64}{\left(\frac{81}{4}\right)} = 4\left(\frac{9-1}{9}\right)^2 = 4\left(1-\frac{1}{9}\right)^2 = 3,1604938.$$

La cuadratura del círculo, junto con la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, fueron los tres problemas clásicos de la matemática griega antigua. La posibilidad de cuadrar superficies planas limitadas por curvas y, en especial, la cuadratura del círculo, no habría parecido tan plausible a los griegos de no haber sido por el hecho de que Hipócrates de Quíos (ca. 470-ca. 410 a.C.) demostró que ciertas figuras curvilíneas construidas a propósito por él, llamadas lúnulas, podían cuadrarse.



En la figura, el área sombreada es igual al área del triángulo ABC.

Consideremos, para simplificar los cálculos, que $AC = CB = 1$. Si conseguimos ver que la lúnula AB que completa el triángulo ABC hasta convertirlo en un cuadrante del círculo mayor es igual a las dos lúnulas que completan el triángulo hasta

convertirlo en medio círculo del que tiene diámetro *AB*, estará demostrada la afirmación. Bastará con observar que, en el círculo menor, el triángulo más las dos lúnulas son medio círculo, y la zona sombreada más la lúnula también lo es.

El círculo mayor tiene radio 1; por tanto, su área será π. Un cuadrante tiene área $\pi/4$. El círculo menor tiene un diámetro de $\sqrt{2}$, un radio de $\sqrt{2}/2$ y un área de $1/2\pi$. Medio círculo pequeño tiene de nuevo un área de $\pi/4$, es decir, que medio círculo pequeño es como un cuadrante del círculo grande. En estas condiciones podemos afirmar que las dos lúnulas pequeñas tienen la misma área que la mayor, de donde se deduce que el triángulo es igual a la zona sombreada.

En 1882, el matemático alemán Ferdinand Lindemann (1852-1939) probó que π es un número trascendente, lo que implica que es imposible cuadrar el círculo usando regla y compás, dando fin al problema de la cuadratura del círculo. Tal vez estos siglos de demora en la resolución del problema dieron lugar a la expresión «cuadratura del círculo», que se utiliza en el lenguaje corriente en sentido figurado para referirse a un problema muy difícil de resolver.

Eudoxo también trabajó en el tema de las cuadraturas. Su método era un procedimiento geométrico-matemático de aproximación a un resultado, con el cual, al avanzar el cálculo, aumenta el grado de precisión. En realidad, este método es similar al que chinos e indios utilizaban para llegar al perímetro de la circunferencia o al área del círculo mediante aproximaciones sucesivas con polígonos. Más tarde también lo utilizó Arquímedes para calcular el área bajo el arco de una parábola y el volumen de una esfera. Todas estas demostraciones fueron recogidas por Euclides en el libro XII de sus *Elementos* (ca. 300 a.C.). En el siglo XVII, Gregory de St. Vincent (1584-1667) le dio a este método el nombre de exhausción, del latín *exhausti*, «apuramiento, vaciado, agotamiento».

La cuadratura de superficies delimitas por curvas quedó definitivamente resuelta con el cálculo diferencial. La integral es el instrumento matemático que permite calcular áreas de figuras planas limitadas por curvas si se conoce la ecuación o fórmula de dichas curvas. Veamos un ejemplo: si se considera la curva $f(x) = \sqrt{x}$, ¿cuál es el área bajo la función f y el eje horizontal en el intervalo desde 0 hasta 1? En notación simbólica,

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

En la figura siguiente se muestra gráficamente el proceso a seguir, que finalizará con un paso al límite. Se trata de construir una colección de rectángulos que, como en el caso del papel cuadriculado y el mapa, permitan calcular un valor aproximado

del área sumando las áreas de los rectángulos. Éstos pueden construirse por encima (aproximación por exceso) o por debajo (aproximación por defecto) de la curva que se pretende cuadrar.

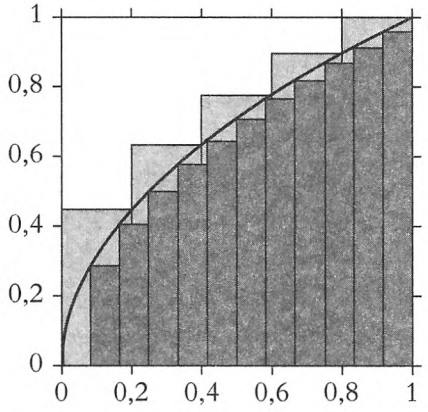


Figura con cinco particiones para la aproximación superior y doce para la inferior (en este caso, el primer rectángulo no es observable porque tiene altura nula).

El teorema fundamental del cálculo, debido a Newton y Leibniz, es el vínculo fundamental entre las operaciones de derivación e integración. Aplicándolo a la curva que limita el área buscada, $f(x)=\sqrt{x}$, se obtiene la función primitiva

$$F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$

que se deberá evaluar entre los valores de los extremos, 0 y 1 en este caso, y efectuar la diferencia, $F(1)-F(0)$. Así, el valor exacto del área bajo la curva se calcula formalmente como:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Cubicar

Según el diccionario de la Real Academia Española, cubicar significa «medir un volumen» y también «elevar un número o expresión algebraica a la tercera potencia, o sea multiplicarlo dos veces por sí mismo». Las dos definiciones están relacionadas si se interpreta la segunda como los cálculos necesarios para hallar el volumen de un

cubo cuya arista es el número o la expresión algebraica de la definición. El diccionario remite también al término *cúbico*, del latín *cubĭcus,* y éste del griego κυβικός.

Si la cuadratura del círculo era el problema clásico de la geometría griega antigua relativo a cuadrar, la duplicación del cubo juega este papel en cubicar. Una leyenda tradicional cuenta que una epidemia de peste que apareció en Atenas hacia el 428 a.C. atemorizó tanto a los ciudadanos que los dirigentes atenienses tuvieron que recurrir al dios Apolo para que les ayudara a acabar con la epidemia. El oráculo de Apolo en Delfos les dijo que, para terminar con la peste, tendrían que construir un altar cuyo volumen fuera el doble del que tenía Apolo en el templo. Aunque con el tiempo la peste remitió, el intento de construir un altar de doble volumen acabó en fracaso.

Eurípides, en una de sus obras, escenificó el problema de la duplicación del cubo por medio del rey Minos, el cual, en el momento que se estaba construyendo la tumba de su hijo Glauco, manifestó que un mausoleo cúbico que solamente medía cien pies por cada lado era un espacio muy reducido para el sepulcro de un rey y ordenó que lo duplicaran conservando su forma cúbica, duplicando cada lado. El error de Minos era grave: si se duplica el lado del cubo lo que se obtiene es un cubo con un volumen ocho veces mayor que el de partida.

Los antiguos matemáticos griegos, sin la notación algebraica actual, debían resolver el problema con el uso exclusivo de la regla y el compás. Para hallar un lado x del cuadrado de área doble que otro de lado a insertaban una media proporcional entre a y $2a$:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{2a}, \text{ luego } x=a\sqrt{2}.$$

El problema de la duplicación del cubo se abordó con la misma idea y se probó que resolver el problema de la duplicación del cubo equivalía a determinar dos medias proporcionales entre a y $2a$. Duplicar un cubo de lado a consiste en determinar el lado x de un cubo cuyo volumen sea $2a^3$. [$x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}$.] Si se consiguen dos valores x e y que sean medias proporcionales entre a y $2a$, como indica la igualdad siguiente

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a},$$

se habrá resuelto el problema. Esta forma de proceder es muy propia de la matemática, trasladar el problema planteado a otro que parece de más fácil solución. El nuevo problema es cómo construir estas dos medias proporcionales.

Además de la duplicación del cubo, hubo otros cálculos de volúmenes que también preocuparon a los matemáticos griegos. Según Arquímedes, Eudoxo demostró que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro de la misma base y altura. Arquímedes demostró que el área de un círculo es como la de un triángulo rectángulo con un cateto el radio y el otro, la longitud de la circunferencia. También calculó el volumen de la esfera a partir de los volúmenes del cilindro y del cono.

¿Cómo dedujo el volumen de la esfera? Partió de una semiesfera de radio R y colocó a su lado un cono recto y un cilindro circular recto, ambos con base de radio también R:

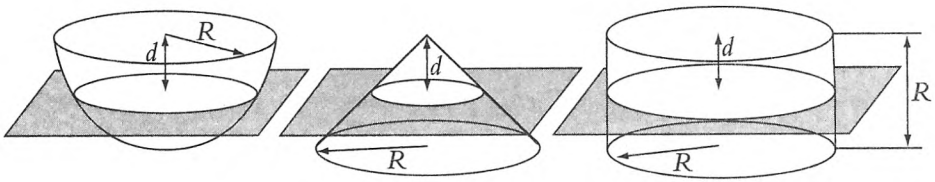


Figura que muestra los cortes en la semiesfera, el cono y el cilindro.

Cortó las tres figuras con un plano paralelo a la base del cilindro (a la misma distancia d de la parte superior de las tres figuras) y estudió cómo serían las secciones que dicho plano crearía en cada una de ellas. En el cilindro, una circunferencia de radio R. En la semiesfera, también una circunferencia pero de radio distinto, digamos r:

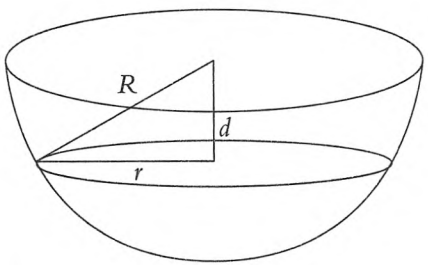


Figura que muestra la relación entre r, d *y* R *en la semiesfera.*

Se cumple, utilizando el teorema de Pitágoras, que $r^2 + d^2 = R^2$.

En el cono la sección es también una circunferencia, pero ahora de radio d, porque el radio de apertura del cono es de 45°.

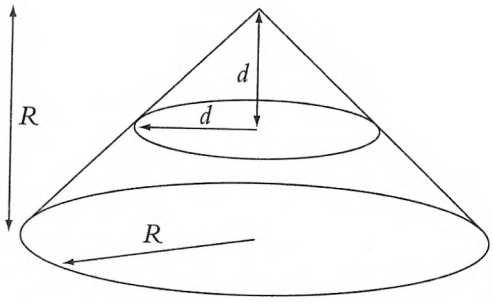


Figura que muestra la relación entre R *y* d *en el cono.*

Se calculan las áreas de las tres secciones, y se obtiene:

Figura	Área de la sección
Cilindro	πR^2
Semiesfera	πr^2
Cono	πd^2

Y del hecho de que $r^2 + d^2 = R^2$, resulta que:

Sección del cilindro = Sección de la semiesfera + Sección del cono.

Las secciones de la figura son como «rebanadas» de pan; si para cada rebanada se tiene la relación anterior, parece bastante claro que los volúmenes sigan la misma relación. Es decir:

Volumen cilindro = Volumen semiesfera + Volumen cono.

Pero Arquímedes conocía los volúmenes del cilindro y del cono:

$$V(\text{cilindro}) = \pi R^3 \qquad V(\text{cono}) = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

Así que pudo establecer la igualdad

$$V(\text{semiesfera}) = V(\text{cilindro}) - V(\text{cono}) = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

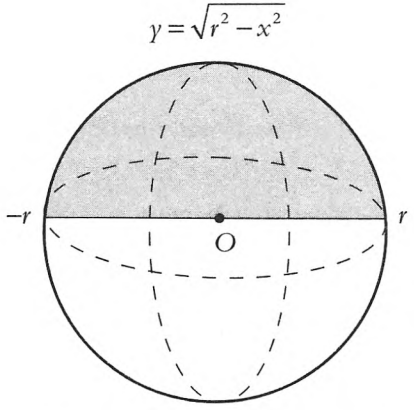
y, en definitiva,

$$V(\text{esfera}) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Una vez más, el cálculo de volúmenes quedó zanjado con la introducción del cálculo diferencial. Veamos, a título de ejemplo, cómo se calcula con este método el volumen de la esfera de radio *r*. Partimos de la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Girando un semicírculo en torno al eje de abscisas, se obtiene una esfera.



Esfera generada al girar un semicírculo.

Si se gira una figura plana comprendida entre $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje *OX*, el volumen del sólido de revolución generado viene dado por la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Esta fórmula recuerda los cálculos de Arquímedes si interpretamos como $\pi f(x)^2$ el área del círculo que se obtiene e imaginamos el cuerpo de revolución formado, como en el caso de Arquímedes, de secciones como «rebanadas» y recordamos que $\int_a^b \ldots dx$ es el símbolo utilizado para denotar la integral, es decir, la suma de las infinitas secciones de grosor infinitesimal (dx) que configuran el volumen del cuerpo de revolución. Así, en nuestro ejemplo,

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi \left(\frac{2r^3}{3} + \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Epílogo

El concepto de medida tiene más de 5.000 años de antigüedad y surge de la necesidad de dimensionar los objetos del entorno más inmediato. Veamos cuáles fueron algunos de los retos pendientes de los matemáticos de finales del siglo XIX que les llevaron a desarrollar la teoría de la medida. Los antiguos egipcios (papiro de Rhind, papiro de Moscú) se manejaban con cálculos de áreas y volúmenes y llegaban a trabajar con aproximaciones de $\pi \cong 4(1-1/9)^2 = 3{,}160\ldots$, pero hubo que esperar a la matemática griega para encontrar demostraciones relativas a áreas y volúmenes.

Sin embargo, aunque en los *Elementos* de Euclides (ca. 300 a.C.) aparecen estas demostraciones, no se define la longitud, el área o el volumen, sino que estos términos se utilizan de forma implícita en la presentación de las figuras que se utilizarán después. Así, se define línea, superficie y sólido: la línea es una longitud sin anchura; la superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura; el sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad. Euclides tampoco define qué es medir, es una palabra que utiliza no sólo relacionada con estas tres «magnitudes», sino también referida a los números; por ejemplo, define parte y partes de la misma manera que hoy haríamos para definir divisor y no divisor, pero usando la palabra medir: «Un número es *parte* de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor. Pero *partes* cuando no lo mide». Así, por ejemplo, 3 es «parte» de 15, y 6 es «partes» de 15.

Seguimos sin encontrar definición de medida en otros autores griegos, como Arquímedes, que comparaba áreas o volúmenes conocidos para hallar otros nuevos. Así vimos que había trabajado, por ejemplo, para calcular el volumen de la esfera. Estas nociones de medida fueron suficientes para el desarrollo de las matemáticas durante bastantes siglos.

La etapa siguiente la protagoniza Georg Cantor (1845-1918), quien, en 1883, dio la primera definición de medida: $m(A)$, de un conjunto arbitrario (acotado) $A \subset R^n$. Además, Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño, o sea, el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los racionales es *numerable*, es decir, tiene el mismo tamaño que el conjunto de los naturales, mientras que el de los reales no lo es. En este sentido, medir significa poder establecer una correspondencia uno a uno, biunívoca en términos matemáticos, entre dos conjuntos, uno de los cuales es $\mathbb{N}$ (números naturales) o una de sus potencias ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, etc.). En el caso de los números racionales, por ejemplo, se puede establecer la relación siguiente:

$$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$p/q \rightarrow (p,q)$$

donde p/q es la fracción irreducible y única de cualquier número racional. No se puede establecer una relación similar entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ o una potencia del mismo; por eso se afirma que $\mathbb{R}$ no es numerable. Existen, por tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros. Entre estos infinitos, los hay tan grandes que no tienen correspondencia con el espacio real de tres dimensiones (largo, ancho y alto), que a veces se asimila al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Otros autores, como Otto Stolz (1842-1905) en 1884 y Adolf Von Harnack (1851-1930) en 1885, dan definiciones equivalentes en $\mathbb{R}$. Con ellas, por ejemplo, los racionales del intervalo [0,1] medían 1, lo mismo que todos los reales de [0,1]. Algo podemos intuir que no va a funcionar en esta comparación entre elementos de $\mathbb{Q}$ y elementos de $\mathbb{R}$, si entendimos que $\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R}$ no lo es.

El problema radicaba en llegar a diferenciar entre conjunto numerable y conjunto medible. El primero es el que puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de los números naturales, el segundo es el que puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de números reales no negativos. Esta distinción es la formalización de la diferencia entre contar y medir asociada al discreto y al continuo que se introdujo en el capítulo 1. La lengua inglesa diferencia entre objetos contables y no contables *(how many / how much)*.

Giuseppe Peano (1858-1932) estableció qué conjuntos A son *medibles* y dio una definición de su medida en 1887. Introdujo la medida interior y la exterior de una región R como la menor cota superior de todas las regiones poligonales contenidas en el interior de R y la mayor cota inferior de todas las regiones poligonales que contienen esta región, respectivamente; definió conjunto *medible* como aquel cuya medida interna coincide con la externa y demostró que la medida era aditiva. Además, explicó la relación existente entre medida e integración. En 1892, Camille Jordan (1838-1922) dio una definición más simple utilizando una cuadrícula en lugar de polígonos. Estas definiciones evocan los métodos de aproximación al número π a través de aproximaciones sucesivas al perímetro o al área del círculo que practicaban los matemáticos de la antigüedad (egipcios, chinos, indios y griegos) mediante la construcción de polígonos inscritos y circunscritos al círculo.

A pesar de los avances, estas definiciones eran insuficientes porque con ellas, por ejemplo, los racionales no eran medibles. Dos años después, Émile Borel (1871-1956) continuó trabajando el tema, y en su tesis doctoral (1894) estableció la aditi-

vidad numerable para sus medidas, más allá de la aditividad finita con la que había trabajado Peano, y dio una definición de conjuntos de medida nula. Este nuevo enfoque le llevó a constatar que los racionales de [0,1], que otros autores habían considerado que medían 1, eran un conjunto de medida nula o cero.

A partir del nuevo concepto de medida establecido por Borel, Henri Lebesgue (1875-1941), en su tesis doctoral de 1902, pudo desarrollar conceptos fundamentales para la teoría de la integración abstracta. Amplió la integral de Riemman —desarrollada por Bernhard Riemann (1826-1866), que la definía como el área bajo una curva continua— a una nueva integral, la integral de Lebesgue, apta también para las funciones discontinuas.

Recapitulando, hemos constatado a través de este libro que la medida de los cielos la proporciona la astronomía; la de la Tierra, la geodesia; que la medida del tiempo condujo a la elaboración de los calendarios, y la necesidad de disponer de un patrón universal de medida llevó a establecer como patrón de longitud el metro. Todo este tipo de actividades en el mundo físico, astronómicas, geodésicas, calendáricas y metrológicas, resultarían imposibles sin la contribución esencial de las matemáticas. La propia matemática también ha desarrollado el concepto de medida a través de la teoría de la medida en lo que hemos denominado el modelo matemático, pero un estudio detallado de la misma requeriría una nueva obra.

Bibliografía

ALDER, K., *La medida de todas las cosas*, Madrid, Taurus, 2004.

BISHOP, A.J., *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*, Barcelona, Paidós, 1999.

BOURGOING, J., *The Calendar. Measuring Time*, London, Thames & Hudson, 2001.

BOYER, C.B., *Historia de la matemática*, Barcelona, Destino, 2009.

GUEDJ, D., *La medida del mundo*, Barcelona, Diagonal, Ediciones de Bolsillo, 2001.

IFRAH, G., *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa Calpe, 1997.

KATZ, V., MICHALOWICZ, K. (eds.), *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, Washington, The Mathematical Association of America, 2004.

KUHN, T.S., *La Revolución copernicana*, Barcelona, Folio, 2000.

LAFUENTE, A; MAZUERCOS, A., *Los caballeros del punto fijo*, Barcelona, Serbal, 1987.

LINDBERG, D.C., *Los inicios de la ciencia occidental*, Barcelona, Paidós, 2002.

LORENZO, J.A., *La Revolución del metro*, Madrid, Celeste Ediciones, 1998.

PALAU, M., *La pintoresca història del calendari*, Barcelona, Millà, 1973.

PLA, J., *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*, Madrid, Nivola, 2009.

SOBEL, D., *Longitud: la verdadera historia de un genio solitario que resolvió el mayor problema científico de su tiempo*, Barcelona, Anagrama, 2006.

Índice analítico

Académie des Sciences 101-102, 107-112, 116, 125
Alkmaar 94
Anaximandro 34, 83
año bisiesto 66-68, 73, 79
Año Nuevo chino 76, 78
Aragó, Francesc 122-125
área 13, 22, 29, 137, 139-152
Aristarco de Samos 49-51, 55
aritmética modular 76
Arquímedes 50, 138, 145, 148-151
astrometría 132-136

Barcelona 111-112, 116-121, 124, 125
Bergen-op-Zoom 94
Biot, Jean Baptiste 122-123
Borda, Jean Charles de 109, 110, 115, 116
Borel, Émile 152

calendario
  gregoriano 61-74, 78, 81
  islámico 70-74
  juliano 68-69
  revolucionario78-81, 116
  romano 61-67
Canelles, Agustí 121
Cantor, Georg 151
cartografía 88-90
Cassini
  César 96, 116
  Giovanni Domenico 96, 101, 111-112
  Jacques 96, 102
Cayena 101
círculo 17, 42, 53, 87, 97, 137-151
  de Borda 105, 115
círculos diurnos 37-38
circunferencia 37, 54, 85-92, 137, 148, 150
Clavius, Christopher 68
contar 12, 15-21, 29, 76, 99, 129
continuo 20-23, 129
Copérnico, Nicolás 41, 51, 55, 56
copo de Koch 140-141
cronometría 132-136
cuadrar 129, 136, 139-147
cuadratura del círculo 143-145, 147
cubicar 129, 136, 146-150

deferente 54-55
Delambre, Jean-Baptiste 105, 111-112, 116-119, 125
derivada 138
día 35-40, 42, 60, 64-81, 86, 119
discreto 20-23
Dunkerque 96, 102, 111-112, 116, 125
duplicación del cubo 144, 147-148

eclíptica 38-42, 46, 52, 53, 59, 97
epacta 60, 54-55
epiciclo 54-55
equinoccio 36-38, 52, 60, 79
Eratóstenes 52, 85-87
esferas homocéntricas 45-48, 53
Euclides 23, 50, 145, 151
Eudoxo 45, 47, 48, 50, 145, 148

geodesia 83, 92, 129, 132-136, 153
gnomon 31, 35-36, 74, 85, 86
Godin, Louis 102
GPS 101, 129, 132, 133
Gregorio XIII 68

Hégira 70, 71, 74
Hiparco 52-54, 88, 89
hipopeda 46, 47

inconmensurable 22-23
integral 139, 145, 150, 152

Juan, Jorge 97, 102, 104
Julio César 65-68

Laponia 101-103
latitud 87-91, 94-103, 109, 110, 118, 133
Lebesgue, Henri 152
Leibniz, Gottfried 146
lemniscata 46, 47
longitud 87-101, 109, 110, 133

magnitud 22-30, 105, 107, 131-132
Malvoisine 94, 95
Mars Climate Orbiter 126-127
Maupertuis, Pierre Louis Moreau de 102-103
Méchain, Pierre 105, 111-112, 116-125
mediodía 35-36, 85, 86, 97
meridiano 75, 83, 86-88, 92-125, 137
mes 39, 60-66, 70-80, 116, 121
  del Ramadán 70-71, 74
Metón 60
movimiento 9, 43-56, 59
  aparente 33, 36-38, 42, 53
  diurno 34-39, 41, 46
  normal 40-41
  propio 40, 46

Newton, Isaac 57, 69, 83, 96, 101-102, 104, 146
Norte 35, 36, 37, 46, 84

paralaje 43, 51, 55, 133-134
Pascua 60-61
patrón 20, 105, 107, 108, 131
  de medida 20, 29, 95, 107
  universal 9, 109, 125, 153
péndulo 101, 108-110
perímetro 13, 137-141, 145
Perú 18, 101-104, 110
Picard, Jean 92, 94-96, 101, 103
planeta 39, 40, 45-49, 53-56, 102
Prieur de la Côte d'Or 106, 109
proyección 87-91, 94, 113-114
  cilíndrica 88-90
  cónica 88-90
  estereográfica 88-89
Ptolomeo 52-56, 83, 87-89
punto ecuante 54

radio terrestre 96
rectificar 129, 136-139
retrogradación 40, 46
Richer, Jean 101
Riemman, Bernhard 152
Rodez 112, 117, 118

Sistema Internacional de Unidades 9, 129, 131-132
Snellius, Willebrord 92, 94, 95
solsticio 36, 75-76, 85, 86
Sosígenes 65
Sourdon 94, 95
superficie 27, 83, 87-89, 114, 133, 139-143, 151

toesa 95, 103-104, 108, 115-116
triangulación 30, 92-97, 105, 112-123, 133
trigonometría 30, 33, 94

'Umar ibn al-Jattab 70, 72
unidad 18, 23-26, 60, 105-110, 131-136
universo de las dos esferas 41-43

Verne, Julio 92, 103

zodiaco 38-40, 46, 77-78

Las medidas del mundo

Calendarios, longitudes y matemáticas

La medición nos permite responder con exactitud a multitud de variables que no podríamos clasificar de ninguna otra manera. La homogenización de las medidas nos ha permitido hablar un mismo idioma en cualquier parte del mundo: cuánto tiempo ha pasado, qué distancia física nos separa de un objetivo, cuál es la altura o el peso... Un consenso acerca de la naturaleza de lo que nos rodea que hubiera sido inalcanzable sin las matemáticas.